

ABCM

RBCM

REVISTA BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

Volume 1

Setembro 1979

VOL I

SETEMBRO 1979

Nº 1

**REVISTA**  
**BRASILEIRA DE**  
**CIENCIAS**  
**MECANICAS**

PUBLICAÇÃO TÉCNICO - CIENTÍFICA DA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, destinada a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de engenharia mecânica e mecânica teórica. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicação em anais e Congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade do Editor Responsável e do Conselho Editorial.

Os trabalhos devem ser escritos em português, espanhol e inglês. As normas detalhadas para a datilografia e montagem do trabalho bem como as folhas padrão devem ser solicitadas ao Editor Responsável no endereço abaixo.

L. Bevilacqua  
Deptº de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marques de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - RJ

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas não excedendo a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$800,00. A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas cópias reduzidas - aproximadamente 28x21cm - para o Editor Responsável ou um dos membros do Conselho Editorial, com uma carta de encaminhamento contendo o título do trabalho, o nome(s), instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(s). Uma cópia da carta de encaminhamento deve sempre ser remetida para o Editor Responsável. Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

This journal is published by the ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS aiming the diffusion of meaningful results of scientific research and technological development in the fields of mechanical engineering, applied and theoretical mechanics. Short communications based on well-known theories and techniques presenting meaningful contributions to science and/or technology will be published under the title "Notas Técnicas".

The submitted papers should not have been published elsewhere, except for some special cases of papers appearing in Proceedings of Congress or Meetings.

Refereeing the contents of paper will take into account originality, contribution to science and technology, clearness of style, adequacy of the subject and quality of typing. The final decision concerning recommendation for publication is responsibility of the Editor in Chief and the Editorial Board.

Papers may be written in Portuguese, Spanish or English. Detailed instructions for typing and preparation of the papers are available under request in the following address:

L. Bevilacqua  
Dept. Eng. Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Directions for typing must be strictly respected. Papers not exceeding 10 (ten) pages will be free of charge. Each additional page will be charged with a Cr\$800,00 (US\$30,00) fee. The corresponding amount should be made payable to the ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS (check or money order) and forwarded with the originals.

Two reduced copies of the originals, 28x21cm approximately, should be sent to the Editor in Chief or any other member of the Editorial Board, together with a letter containing the title of the paper, name(s), affiliation(s), and address(es) of the author(s). In any circumstance a copy of this letter must be forwarded to the Editor in Chief. Do not forward the originals before having your paper accepted for publication.

REVISTA

BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

VOL. I SET. 1979 N.º 1



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

CONSELHO DIRETOR

Sidney Stuckenbruck (Presidente); Hans Ingo Weber; Solly A. Segenreich;  
Fausto Rodrigues; Pedro Carajilescov; Joaquim Severino P. Neto;  
Nelson Bach.

L. Bevilacqua  
Editor Responsável

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J. J. Espindola

R. A. Feijoo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Malzza Neto

G. Massarani

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Editorial .....	iii
Projeto de Suportes Dissipadores de Energia para Tubulações — Manuel Américo G. Silva .....	1
Modelo de Canal Quente para Reatores a Água Leve Pressurizada — Elias Silva Filho, Pedro Carajilescov .....	11
Sobre o Tensor Condutividade Térmica em Meios Porosos Rígidos — Gilberto Medeiros Kremer, Rubens Sampaio Filho .....	21
Transient Waveforms for the Simulation of Shock Environments on Vibrators — S. N. Yousef Gerges .....	27
Um Problema de Máximo Envolvendo Matrizes e a Decomposição Polar — Luiz C. Martins .....	39
Adaptação do modelo clássico de Ekulund ao cálculo da carga de laminação a frio de alumínio comercial — Edson Monteiro .....	43
Congressos, Encontros, Etc. ....	49
Livros, Periódicos, Relatórios .....	51

## EDITORIAL

A Associação Brasileira de Ciências Mecânicas lança nesta oportunidade a sua primeira revista. Este empreendimento representa o coroamento do trabalho de uma pequena mas representativa parcela da comunidade técnico-científica brasileira, que há vários anos vem trabalhando ativamente na implantação e no desenvolvimento da pesquisa e tecnologia nas áreas de ciências mecânicas.

A história desta revista está intimamente ligada a história da ABCM; constituindo aquela, de fato, numa consequência da consolidação das atividades das ciências mecânicas no Brasil ou seja da própria ABCM. Todavia, ambas exigem o envolvimento, o compromisso, a participação franca de todos os associados da ABCM; e crescerão na medida em que esta participação crescer e se consolidar.

Não obstante o entusiasmo para a sua realização, este trabalho foi precedido de uma avaliação realista da produção técnico-científica brasileira nas áreas de interesse da ABCM. Os trabalhos apresentados e publicados nos anais dos Congressos Brasileiros de Engenharia Mecânica, realizados em 1973, 1975, 1977, e o próximo a se realizar no final deste ano, atingem um total de 450 títulos com um bom nível médio de qualidade. Estes números constituem indicadores positivos da nossa produção na área. Estamos certos, portanto, de que com objetivos bem definidos os resultados deste empreendimento serão altamente relevantes e compensadores.

O objetivo central desta revista é o de servir de veículo de informação das pesquisas e desenvolvimentos científicos ou tecnológicos realizados, principalmente, nas instituições nacionais; a revista deverá se constituir numa verdadeira janela aberta para o interior das nossas Universidades, Institutos e Centros de Pesquisas e Empresas. Como consequência, deverá ocorrer um intercâmbio mais efetivo entre as diversas instituições ativas neste processo.

Não se restringindo à engenharia Mecânica, a revista procura ser um polo de convergência de todos os ramos da engenharia que tenham nas ciências mecânicas uma área de interseção. Assim, ela poderá retratar de forma fiel e atual a produção nesta área e se constituir num instrumento de defesa da nossa tecnologia, tornando público as capacidades reais de um importante segmento da comunidade técnico-científica brasileira.

Para atingir estes objetivos é necessário que se mantenha o padrão de qualidade dos artigos apresentados. É indispensável que se conte com a colaboração de todas as instituições e pessoas que se dedicam seriamente à pesquisa e ao desenvolvimento. O Editor e o Conselho Editorial estarão continuamente a serviço desta comunidade.

A revista está lançada. Neste número procurou-se apresentar segmentos característicos do espectro de assuntos abertos à publicação.

Convidamos a todos a apresentar sua colaboração com coragem e humildade, dispostos a ouvir, compreender, aceitar e responder críticas construtivas aos seus trabalhos, visando o aperfeiçoamento contínuo da forma e do conteúdo da apresentação dos resultados.

Os números seguintes virão com frequência semestral até que o volume de trabalhos justifique uma redução no período da publicação. Estamos convictos de que esta revista mede de alguma forma a produção de atividade criadora no nosso meio técnico e científico. Ela deverá, portanto, refletir, dentro de sua área de atuação, a seriedade ou o descaso com que a educação e o desenvolvimento científico e tecnológico está sendo conduzido no nosso país.

Finalmente quero expressar os meus agradecimentos a todas as pessoas que colaboraram na realização desta revista. Tanto nas tarefas de organização da matéria escrita, divulgação, distribuição e datilografia, como na idealização e redação dos trabalhos e notícias. Todos se empenharam com dedicação e desprendimento para que tudo pudesse ser levado a termo dentro dos padrões estabelecidos e no devido tempo.

  
Luiz Bevilacqua

Editor

# PROJETO DE SUPORTES DISSIPADORES DE ENERGIA PARA TUBULAÇÕES

MANUEL AMÉRICO G. SILVA

PROMON ENGENHARIA, RIO DE JANEIRO, RJ

## SUMÁRIO

A ruptura de tubulações de alta energia pode originar uma resposta dinâmica causadora de graves prejuízos ao equipamento e estruturas vizinhos. Uma das técnicas possíveis de controle desse movimento consiste na montagem, em locais apropriados, de dispositivos que dissipem a energia cinética da tubulação, geralmente por deformação plástica. O objetivo deste trabalho é referir os tipos de dispositivos mecânicos mais usados, caracterizá-los sob o ponto de vista de projeto estrutural e indicar e comparar métodos de análise que tem sido propostos. Apresentam-se ainda aspectos característicos da influência exercida na resposta dos dissipadores pela variação de parâmetros identificados como de relevante importância.

## INTRODUÇÃO

Um dos itens do projeto de tubulações nucleares é o dimensionamento de suportes destinados a amortecer o movimento de tubulações que neles impactem após a ruptura acidental daquelas.

A proteção de equipamento e/ou estruturas essenciais à segurança do funcionamento de centrais nucleares e à saúde pública exige, por vezes, o estudo de tais dispositivos para garantir o desempenho normal daqueles componentes mesmo que ocorra a ruptura acidental de tubulações de alta energia.

Essa proteção é, sempre que possível, assegurada pela inclusão de elementos interceptadores ou pela adoção de sistemas redundantes. Estes métodos são inviabilizados, frequentemente, por limitações de espaço e recorre-se à instalação de restrições que apenas atuam se houver ruptura da tubulação.

A caracterização mecânica destas restrições ou suportes e a análise do sistema

tubulação-suporte sob o ponto de vista estrutural são objeto deste trabalho.

O conceito de tubulações de alta energia, implicitamente usado acima, está associado a condições de pressão e temperatura que dependem do regulamento definidor; nos Estados Unidos da América o atual critério classificativo baseia-se numa pressão interna  $p_i \geq 275$  psi e/ou numa temperatura de operação  $\geq 200^\circ\text{F}$  [1].

A ruptura das tubulações produz-se mais provavelmente em pontos de ocorrência de tensões ou fadiga relativa mais altas e os regulamentos postulam essa localização em pontos onde essas condições se verificam sob carga sísmica e com a usina em operação [2].

A ruptura pode ser longitudinal ou circumferencial [3]; admite-se na sequência do presente estudo que se verifica o último caso e que o seccionamento da tubulação é total (tipo guilhotina).

A força  $F$  induzida pelo escoamento do fluido, correntemente chamada "Blowdown", pode

Em [7] descrevem-se diversos testes, em condições quase estáticas, que sugerem a aplicabilidade destes suportes e o bom comportamento de anéis comprimidos entre placas rígidas na dissipação da energia cinética da tubulação.

A Fig. 5 reproduz resultados descritos em [7] para tubos de  $\varnothing 3''$  - Sch. 80 servindo de apoio, mostrando a influência do comprimento  $L$  do apoio e do diâmetro da tubulação na relação força-deslocamento.

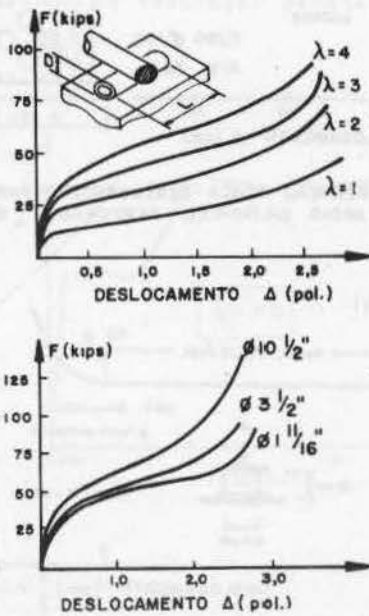


FIG.5- INFLUÊNCIA DE  $\lambda=L/D$  E DO DIÂMETRO DA TUBULAÇÃO EM  $F=\Delta$

O esmagamento de um tubo entre placas rígidas está estudado analítica e experimentalmente [8] tendo sido estabelecida a carga de plastificação inicial e a lei de deformação de que se mostram exemplos típicos na Fig. 6.

Um trabalho extensivo sobre dispositivos amortecedores de choque em pontes, desenvolvido por N. Perrone [9], oferece dados sobre o esmagamento de anéis e sugere leis constitutivas simplificadas (Fig. 7).

A influência de outros parâmetros, e.g. a própria plastificação local da tubulação-projêtil, encontra-se estudada na literatura podendo modificar-se relações analíticas baseadas em modelos simples para os levar em conta.

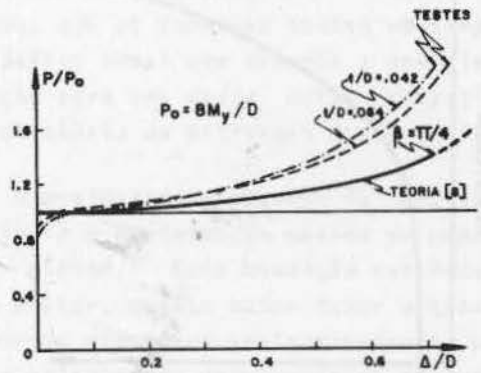
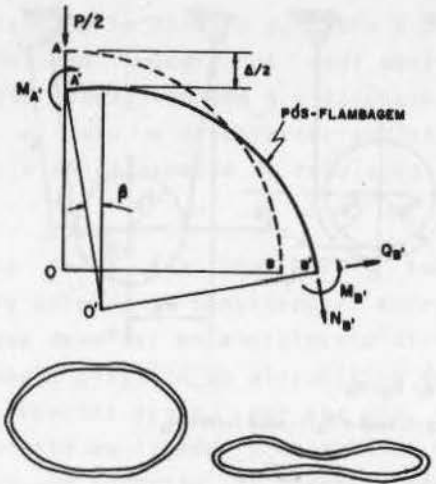


FIG.6- ESMAGAMENTO DE TUBO ENTRE PLACAS RÍGIDAS

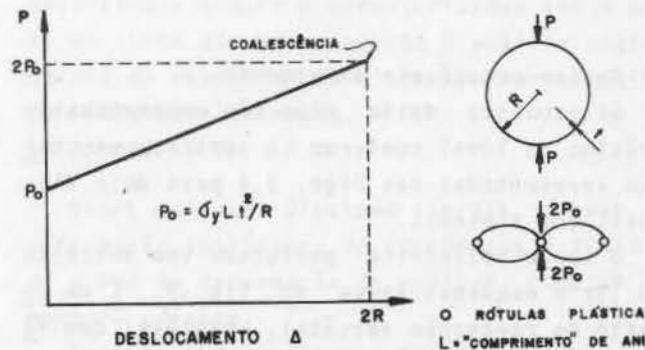


FIG.7- DIAGRAMA FORÇA-DESLOCAMENTO PARA ANEL PLÁSTICO [8]

d) Apoios de concreto

A utilização de concreto celular para dissipar a energia cinética tem merecido alguma atenção, encontrando-se resultados de teste e curvas  $F + \Delta$  em [8]. A Fig. 8 é adaptada de [10] e ilustra o tipo de resultados obtidos para suporte semi-anelar de concreto celular.

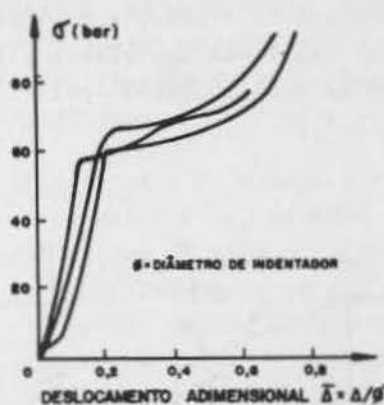


FIG. 8 - COMPRESSÃO DE CONCRETO CELULAR

Vigas de concreto armado podem usar-se também como amortecedores, conjugando baixo custo com grande inércia, desde que haja espaço suficiente disponível. Uma descrição pormenorizada desta classe de apoios acha-se e.g. em [11].

#### e) Estruturas metálicas dúcteis

Este tipo de suporte em aço carbono é projetado de modo a absorver a energia através da formação de rótulas plásticas. O projeto desta classe de apoios baseia-se em conceitos correntes da análise plástica de estruturas podendo encontrar-se exemplos da aplicação direta ao caso de suportes com folga na referência [12].

As leis força-deslocamento para elementos respondendo essencialmente sob esforço axial ou à flexão são esquematizadas na Fig. 9 caracterizando funções de resistência bilineares.

Nos materiais dúcteis o valor permitido para a máxima deformação  $\epsilon_{max}$  durante o fenômeno transiente é 50% da deformação mínima de ruptura  $\epsilon_u$  achada experimentalmente ou 50% do valor especificado para  $\epsilon_u$  se for provado que esse valor é suficientemente conservativo [4].

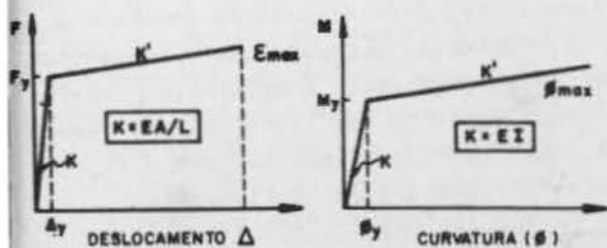


FIG. 9 - APOIOS DÚCTEIS A COMPRESSÃO E A FLEXÃO

#### f) Tirantes de aço inoxidável

Barras de aço inoxidável capazes de dissipar energia através de deformação inelástica de tração são também utilizadas. Uma configuração possível destes dispositivos é ilustrada pela Fig. 10.



FIG. 10 - TIRANTE METÁLICO SIMPLES

#### MODELO MATEMÁTICO

Generalidades. As características da força de "blowdown", a localização postulada dos pontos de ruptura e a configuração típica das tubulações permitem que a análise das tensões e deformações seja feita na vizinhança de seção em que ocorre a ruptura [13], embora haja análises menos recentes em que a representação do sistema é mais estendida [14]. A ruptura tipo guilhotina associa-se, por aquelas razões, um modelo mecânico simples de viga cantilever com suporte dissipador próximo do ponto de ruptura postulado.

A avaliação rigorosa dos efeitos das não-linearidades materiais e geométricas e da velocidade de deformação não é, em geral, necessária para projeto. A folga e a deformabilidade do suporte permitem que se despreze a não-linearidade geométrica; por outro lado, o ganho em rigor com a introdução da taxa de deformação é pouco significativo do ponto de vista de engenharia para os materiais correntemente usados. Deve, porém, verificar-se que a capacidade de absorção de energia não seja diminuída pela menor deformação de ruptura causada pelo endurecimento do material.

A não-linearidade material do suporte representa-se através das leis constitutivas, adotando-se frequentemente diagramas bilineares que aproximam as curvas reais já referidas na descrição de tipos de suportes disponíveis.



O comportamento do tubo tem sido considerado elasto-plástico [15] ou rígido-plástico [16], conforme o tipo de análise que se escolhe. A seleção do método de análise condiciona o modelo matemático e deve ser baseada nos parâmetros que regem as decisões de projeto de engenharia: disponibilidade de analistas e computador, rigor exigível, custos mínimos. Na seção seguinte faz-se uma descrição resumida dos métodos usados mais frequentemente, comparando-se os resultados para o caso mais simples do suporte ser colocado na seção em que atua a força reativa  $F$  e estendendo algumas conclusões apresentadas em [17].

**Integração Numérica.** A escolha do método de integração numérica merece tratamento separado e tem sido objeto de numerosas contribuições, e.g. [18, 19], não cabendo neste texto uma referência aprofundada. Parece interessante, porém, incluir conclusões de S.W.Key [20] no que respeita ao acoplamento entre a escolha do método de integração no tempo e a discretização da massa. Em sistemas simples foi encontrado, por exemplo, que massa consistente com diferenças centrais, massa diagonal com método incondicionalmente estável de Newmark, massa consistente com Newmark  $\beta=1/12$ , são combinações desaconselháveis e menos convenientes do que os pares de massa diagonal com diferenças centrais ou massa consistente com a técnica de Newmark com  $\beta=1/6$ .

Resulta do exposto que não é fundamentada a ideia de que a utilização de massa consistente conduz sempre a resultados mais confiáveis do que a massa diagonal.

#### MÉTODOS DE ANÁLISE

Neste capítulo apresentam-se de forma sucinta os principais métodos de análise que tem sido propostos, bem como a comparação de resultados obtidos ao aplicá-los a sistemas representativos.

**Modelo Massa-Mola.** Neste modelo muito simples, esquematizado na Fig. 11, o sistema representa-se por uma barra de comprimento  $L_0$  e massa linear  $m$  que roda em torno de uma rótula fixa onde atua um momento  $M_y$ ; o comprimen-

to  $L_0$  representa a distância à extremidade livre a que se forma uma rótula plástica, de acordo com um modelo rígido-plástico [3], e vale  $L_0 = 3 M_y/F$ .

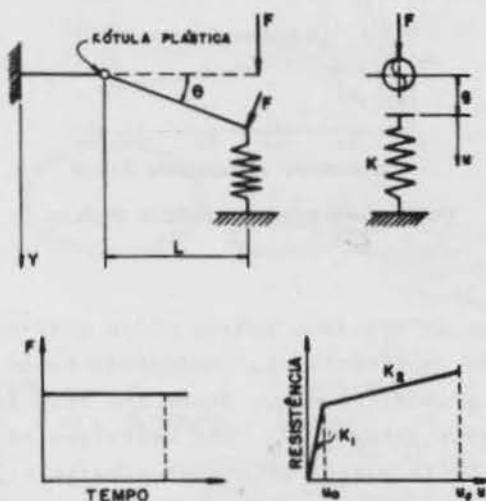


FIG. 11 - ESQUEMA DE MODELOS CINEMÁTICO E MASSA - MOLA

Utilizando os símbolos definidos na Fig. 11, a equação de conservação de energia, entre o momento inicial e o de deformação máxima da mola  $u_f$ , assume a forma:

$$F(g+u_f) = 0.5K_1u_0^2 + 0.5 [2K_1u_0 + K_2\Delta u] \Delta u + M_y\theta \quad (1)$$

em que  $\Delta u = u_f - u_0$ . Fazendo  $\theta = (g+u_f)/L_0$ , obtém-se

$$(u_f/u_0)^2 - [2(1-\alpha) + \bar{F}] (u_f/u_0) + 1 - \alpha - \bar{F} \bar{g} = 0 \quad (2)$$

com

$$\alpha = K_1/K_2, \quad \bar{g} = g/u_0, \quad \bar{F} = (4\alpha/3)(F/K_1u_0).$$

A equação (2) pode deduzir-se igualmente a partir do movimento da haste [12]. A resolução de (2) permite obter a deformação máxima na mola e o fator  $FA$  que multiplicado por  $F$  indica qual a força máxima que o suporte transmite à estrutura em que se apoia:

$$FA = [K_1u_0 + K_2(u_f - u_0)] / F \quad (3)$$

Os parâmetros adimensionais introduzidos acima são indicadores preliminares de quantidades que influenciam de modo importante a resposta do sistema.

Modelo cinemático. No modelo cinemático a rótula plástica não é fixa, podendo propagar-se ao longo do eixo do tubo. O modelo está explicado pormenorizadamente em [3] e o movimento num instante em que a mola está a ser deformada no trecho  $K=K_1$  é essencialmente traduzido pelo sistema de equações diferenciais seguinte:

$$mL(\ddot{L}\theta + 2\dot{L}\dot{\theta}) + 0.5mL^2\ddot{\theta} = F_0 - K(L\theta - g) \quad (4a)$$

$$0.5mL^2(\ddot{L}\theta + 2\dot{L}\dot{\theta}) + mL^3\ddot{\theta}/3 = [F_0 - K(L\theta - g)]L - M_y \quad (4b)$$

com  $L$  = distância instantânea da rótula à extremidade livre da haste.

A massa instantânea da haste ( $mL$ ) é uma função crescente do tempo [17] o que amortece o movimento.

O modelo é cinemático e a solução do sistema em  $L$  e  $\theta$  permite obter o fator de amplificação  $FA$  e a deformação máxima  $u_f$ . As mudanças de variáveis adequadas ao tratamento do sistema de equações e a integração deste acham-se descritas em [16].

Observa-se que a propagação da rótula plástica não se podem aplicar conceitos desenvolvidos na década de 50 para descontinuidades do tipo fraco, e.g. [21]. No modelo apresentado a velocidade na rótula é descontínua, descontinuidade que tem lugar numa derivada de ordem inferior à segunda e é, portanto, do tipo forte. A descontinuidade só desaparece quando a rótula permanece estacionária o que ocorre apenas antes do fechamento da folga [3].

Modelo clássico de viga. O apoio é novamente representado por uma mola de lei constitutiva não linear, enquanto o tubo é modelado por segmento de viga com comportamento elasto-plástico. Utiliza-se o método dos elementos finitos, com duas incógnitas por nó (teoria clássica de viga), e admite-se descarga

As equações de movimento podem ser estabelecidas a partir do princípio dos deslocamentos virtuais na sua forma incremental. A plastificação do tubo, através da altura de uma seção reta, estuda-se dividindo-o em elementos longitudinais [22].

A influência da pressão interna na resposta pode incluir-se no modelo como foi feito, por exemplo, no CBPF [23].

Este modelo permite a análise da história no tempo da resposta do sistema e conduz a resultados que comparam favoravelmente com os obtidos por métodos mais elaborados, como se referirá adiante.

Modelo plano de tensão. O suporte é representado por uma treliça plana de rigidez correspondente à do protótipo. A tubulação é modelada por uma placa retangular de altura igual ao diâmetro do tubo e espessura tal que a tensão de escoamento (como viga) seja  $\sigma_y = M_y/W$ , em que  $W$  é o módulo da seção do tubo. O critério de escoamento seguido usualmente é o de Von Mises. As descargas do tubo e da mola são do tipo elástico.

A placa é subdividida em elementos retangulares de tensão plana, quadráticos, que seguem uma lei constitutiva elasto-plástica. Este modelo é computacionalmente dispendioso, mas tem motivado numerosas referências e encontra-se descrito em [15] e aplicado ao que se designará, aqui e na sequência deste estudo, como problema de Ma-Bathe. Na COPPE também tem sido feitos trabalhos baseados neste modelo [24].

Programas comercializados. Em trabalho desta natureza convém referir programas comercializados que permitem a resolução de problemas de chicoteamento. Resumidamente citem-se o ADINA (ainda não disponível no Brasil) desenvolvido no MIT [15], o PIPERUP desenvolvido pela Nuclear Services Corporation e implementado pela CDC e o ANSYS. A experiência com estes programas, neste tipo de problemas e no Brasil, é reduzida e nem sempre é possível evitar dificuldades numéricas, até por não se saber como funcionam as rotinas de cálculo e pela maneira hermética como o ANSYS está documentado.

**Comparação de métodos.** O problema de tensão plana ( $\phi 30''$ ,  $t = 1.125''$ ,  $L = 360''$ ) Ma-Bathe foi usado para estudo preliminar. O programa ANSYS para modelo de segmentos de tubo fornece resultados ligeiramente superiores aos de Ma-Bathe e custos de US\$75.00 e US\$135.00 para intervalos de tempo  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}s$  e  $\Delta t = 10^{-4}s$  respectivamente (Ma-Bathe usaram  $\Delta t = 10^{-5}s$ ). O mesmo programa, sobre modelo de tensão plana, deu resultados mais próximo dos de Ma-Bathe mas a um custo ainda mais elevado.

O modelo de viga clássica, resolvido por gentileza dos autores de [22] no seu Centro de Cálculo, deu resultados também coincidentes com os de Ma-Bathe e a custo mais baixo.

A coincidência desses resultados predispôs a que a comparação dos modelos se fizesse apenas para os modelos (i) massa-mola, (ii) cinemático e (iii) viga clássica. Os resultados achados foram consistentes e reportam-se os obtidos para tubos de diâmetro  $\phi 24''$  Sch. 60 e  $\phi 6''$  Sch. 80, cheios de água. Os fatores de amplificação comparam-se com os obtidos por (iii) que são considerados "exatos"

TAB. 1  
COMPARAÇÃO DE FATORES DE AMPLIFICAÇÃO PARA DIFERENTES FOLGAS  
( $\phi 6''$ -SCH 80,  $\lambda_1 = 903N/cm$ ,  $F = 204kN$ ,  $u_0 = 2.25cm$ ,  $\lambda_2/\lambda_1 = 0.1$ )

FOLGA (cm)	AMPLIFICAÇÃO FA	ERRO (MASSA-MOLA) (%)	ERRO (CINEMÁTICO) (%)
1.27	1.11	1.8	-6.3
2.54	1.33	-9.0	-18.8
5.08	1.44	-7.6	-19.4

TAB. 2  
COMPARAÇÃO DE FATORES DE AMPLIFICAÇÃO PARA DIFERENTES FORÇAS  
( $\phi 24''$ -SCH 60,  $g = 7.82cm$ ,  $\lambda_1 = 9003N/cm$ ,  $u_0 = 3cm$ ,  $\lambda_2/\lambda_1 = 0.1$ )

FORÇA (kN)	AMPLIFICAÇÃO FA	ERRO (MASSA-MOLA) (%)	ERRO (CINEMÁTICO) (%)
2040	1.51	6.6	-2.6
2720	1.38	-1.5	-14.5
4080	1.33	-11.2	-28.5

Observa-se que erros se verificam tanto para linhas de pequeno como de grande diâmetro; que o modelo cinemático dá resultados sistematicamente inferiores aos "exatos" e que FA aumenta com a folga e diminui com a força F, como se ilustrará graficamente adiante.

Mais importante é constatar que os métodos simplificados exigem um fator de correção para serem conservativos e que este fator depende fortemente no parâmetro  $\lambda_1 = (F_0/K_1 u_0)$  conforme indicam os resultados obtidos.

Outro parâmetro característico identificado é  $\lambda_2 = (g/D)^{1/2}$  que é proporcional ao quociente da velocidade angular ao fechar a folga pela frequência fundamental do tubo engastado de comprimento  $L_0$ .

Nos casos estudados foi possível achar um fator de correção  $c$  que torna conservativos os valores obtidos pelo método cinemático e que é apenas função de  $\lambda_1$ :  $c = 1 + (1/3)\lambda_1$ .

#### INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS

Parece útil incluir algumas conclusões qualitativas sobre a resposta do sistema e que poderão contribuir para ajudar a projetar esclarecidamente os dissipadores de energia.

A influência da folga  $g$  é evidenciada na Fig. 12 que mostra a história no tempo do deslocamento na extremidade,  $Y_{max}$ , adimensionalizado por  $u_0$  (deformação máxima linear da mola, Fig. 11). Se a ductilidade  $\mu$  for definida pelo quociente da deformação  $u$  da mola por  $u_0$  tem-se  $\mu = (y_{max}/u_0) - (g/u_0)$  e a figura indica qual a ductilidade que seria exigida do suporte para o desenvolvimento da resposta. O andamento da resposta é essencialmente parabólico até  $y=g$  como se esperaria, horizontalizando-se rapidamente para  $\mu > 1$ .

O tempo que o tubo leva a atingir a mola (1.4, 2.3 e 3.5 ms) é sobreestimado pelo modelo cinemático (1.8, 2.8 e 3.9 ms) que, no entanto, prevê uma reversão do movimento para tempos (4.7, 5.3 e 6.7 ms) substancialmente mais curtos que os reais (7., 16.2 e 17.8 ms). Este comportamento atribui-se a um amortecimento exagerado que  $\dot{L}$  introduz no modelo cinemático.

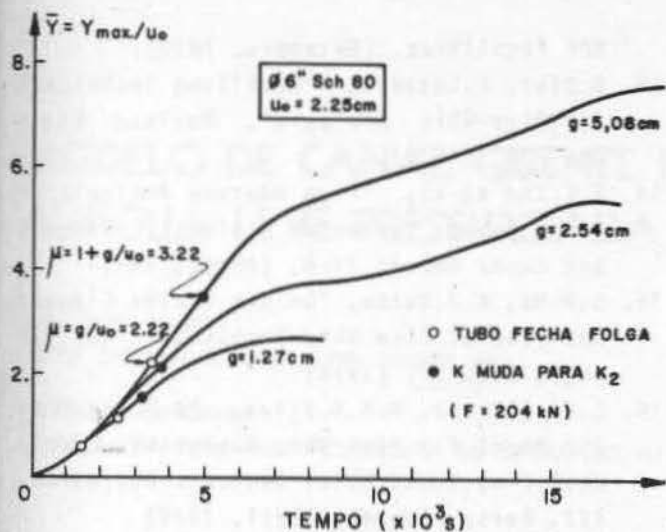


FIG. 12 - INFLUÊNCIA DA FOLGA g INICIAL NA FLECHA MÁXIMA

A Fig. 13, mostra a influência da força F no comportamento do sistema para uma folga constante ( $g=7.62\text{cm}$ ). Observa-se que, embora ( $y_{\text{max}}/u_0$ ) aumente com F, o fator de amplificação diminui, como se mostrou na Tab. 2. O tempo de fechamento da folga diminui com F mas o instante em que  $y=y_{\text{max}}$  é muito próximo (21.6, 23.1, 26.6 ms para  $F=2040, 2720, 4080\text{kN}$ ).

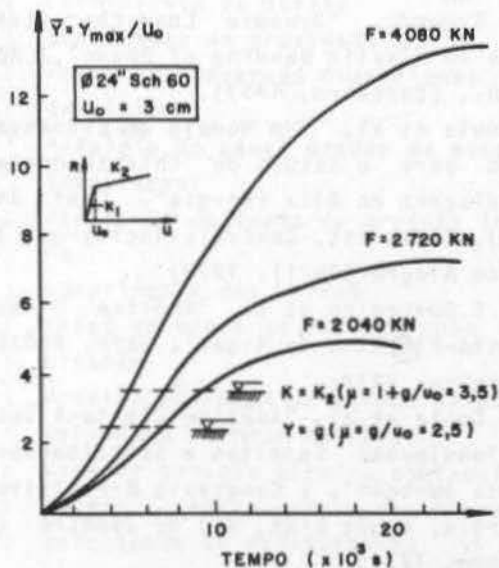


FIG. 13 - INFLUÊNCIA DA FORÇA EXTERNA NA RESPOSTA PARA FOLGA INICIAL CONSTANTE ( $g = 7.62\text{ cm}$ )

Finalmente a Fig. 14 mostra diversas configurações da haste até atingir a configuração de flecha máxima. Verifica-se que o sinal do campo de velocidade é função de ponto, fato que o modelo cinemático não pode traduzir.

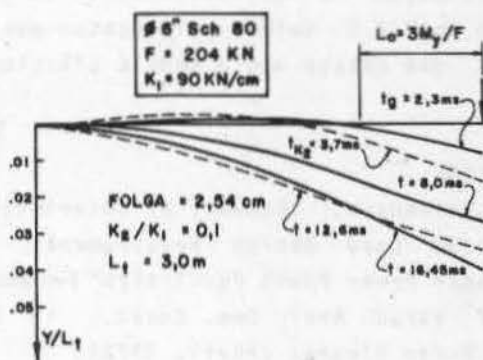


FIG. 14 - CONFIGURAÇÕES DO TUBO

CONCLUSÕES

O desenvolvimento de suportes dissipadores de energia está ainda numa fase inicial quer de concepção, quer de definição das propriedades características.

A definição da lei constitutiva dos suportes pode ser feita por métodos de análise, mas exige-se que inicialmente estes se façam preceder de número aceitável de testes experimentais que afirmem o rigor da representação analítica.

Definida a lei força-deslocamento do suporte há vários métodos possíveis para dimensionamento dos suportes. A menos que haja razões especiais para análise mais rigorosa (quando se poderá usar o modelo de viga), o modelo cinemático corrigido ou até o modelo massa-mola fornecem valores utilizáveis para projeto.

A eventual necessidade de introduzir efeitos como os de ovalização do tubo e pressão interna e obter resultados rigorosos e computacionalmente a custo aceitáveis, aconselha o desenvolvimento de procedimento baseado em modelo misto de elementos finitos (funcional de Reissner modificado) em conjunção com a

lei momento-curvatura do tubo. Este método está a ser desenvolvido, no momento, pelos autores de [3].

#### AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Luiz Bevilacqua pelo estímulo e pela participação no desenvolvimento do trabalho. Ao Eng<sup>o</sup> A.C. Galeão pelo acesso aos resultados que obteve com o modelo clássico de viga.

#### REFERÊNCIAS

1. J.K.Stevenson, "Summary of International Extreme Load Design Requirements for Nuclear Power Plant Facilities" Proceedings Conf. Struc. Anal. Des. Const. in NPP, II, Porto Alegre, (Abril, 1978).
2. ASME - Section III - Appendix A (1977).
3. L.Bevilacqua, M.A.G.Silva, "Estudo do "Pipe-Whip" para Tubulações Nucleares", I Escola de Matemática Aplicada, CBPF, Rio de Janeiro, (Jan./Fev.-1978).
4. ANSI N176, ANS-58.3 "Design Basis for Protection of NPP Against Effects of Postulated Pipe Rupture" (Draft), (Jan.-1977).
5. B.Vrillon, B.Monnier, "Experimental Analysis of Energy Absorber for Steam Pipe Restraint", IV SMIRT Conf., Paper F3/4, (Agosto, 1977).
6. E.Hee, L.F.Swec, "Design and Analysis of Pipe Rupture Restraints", ASCE Spring Convention, Pittsburgh, (Abril, 1978).
7. J.M.Peech et al, "Local Crush Rigidity of Pipes and Elbows", IV SMIRT Conf., Paper F3/8, (Agosto, 1977).
8. J.A.de Runts, P.G.Hodge, "Crushing of a Tube Between Rigid Plates", Journal Appl. Mech., (Setembro, 1963).
9. N.Perrone, "Thick Walled Rings for Energy-Absorbing Bridge Rail-Systems", Fed. Highway Adm. RD73-49, (Dezembro, 1972).
10. P.Hernalsteen, L.C.Leblois, "The Use of Energy Absorbers to Protect Structures Against Impact Loading", Nuclear Eng'g Des. 37, (1976).
11. C.P.Angstadt et al, "Dynamic Amplification Factors for Pipe-Whip Restraint/Structure", Second ASCE Specialty Conf.-Struct.Des. NPP Facilities, (Dezembro, 1973).
13. D.Dini, L.Lazzeri, "Modelling Techniques for Pipe-Whip Analysis", Nuclear Eng'g Des. 37, (1976).
14. F.L.Cho et al, "Pipe Rupture Analysis of Main Steam Feedwater Pipings", Sargent and Lundy Report 71-8, (Abril, 1971).
15. S.M.Ma, K.J.Bathe, "On the Finite Element Analysis of Pipe Whip Problems", Nuclear Eng'g Des. 37, (1976).
16. L.Bevilacqua, M.A.G.Silva, "A Rigid-Plastic Model for Pipe-Whip Analysis", Conf. Anal.Proj.Const.Estr. Centrais Nucleares, III, Porto Alegre, (Abril, 1978).
17. M.A.G.Silva, L.Bevilacqua, "Comparative Study of Models for Pipe-Whip Analysis", V SMIRT Conf., Paper F 7/5, Berlin (Agosto, 1979).
18. L.Bevilacqua, "Geração de uma Família de Operadores Incrementais de Integração Numérica" Proc. IV Cong. Bras. Eng. Mec., Paper D-30, Florianópolis, (Dezembro, 1977).
19. V.F.Dunker, K.J.Bathe, "Choice and Application of Computer Programs in Pipe-Whip Analysis", Sec. ASCE Specialty Conf.-Struct. Des. NPP Facilities, (Dezembro, 1975).
20. S.W.Key, "Concepts Underlying F.E.M. for Structural Analysis", Nuclear Eng'g Des. 00, (1978).
21. P.S.Symonds, "Dynamic Load Characteristics in Plastic Bending of Beams", J.Appl. Mech., (Dezembro, 1953).
22. A.Loula et al, "Um Modelo de Elemento Finito para o Estudo de Chicoteamento em Tubulações de Alta Energia", Conf. Anal. Proj. Cont. Est. Centrais Nucleares, III, Porto Alegre (Abril, 1978).
23. J.N.C.Guerreiro et al, "Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Vigas", CBPF, A0025/78 (Outubro, 1978).
24. A.M.Costa et al, "Análise Elasto-Plástica de Tubulações Sujeitas a Solicitações de Curta Duração", I Congresso Brasileiro de Energia, Paper B-26, Rio de Janeiro (Dezembro, 1978).

canal crítico da primeira divisão do núcleo. Este canal crítico é, agora, subdividido em canais menores e o procedimento é repetido, e assim por diante, até atingir-se o subcanal mais quente. Conhecendo-se as características deste subcanal, uma adequada correlação empírica de fluxo crítico de calor é, então, utilizada.

O cálculo termohidráulico, efetuado desta forma, demanda um grande tempo de computação, sendo portanto bastante dispendioso, devendo apenas ser aplicado em estágios avançados de projeto de elementos combustíveis.

Por outro lado, tomando-se o subcanal nominal mais quente e assumindo fronteiras fechadas, isto é, desprezando-se os processos de mistura turbulenta e escoamento transversal, resultando em vazão em massa constante ao longo do comprimento, leva a resultados irrealistas, uma vez que massa e energia são trocadas com os canais vizinhos devido as maiores variações térmicas que ocorrem nas propriedades do refrigerante no subcanal mais quente, particularmente densidade e entalpia.

O presente trabalho propõe um modelo simplificado de análise de subcanal mais quente, sem as limitações da análise com fronteiras fechadas e evitando o rigorismo da determinação de canal mais quente e escoamento transversal adotada pelos programas COBRA e THINC. A aplicação do método, no entanto, exige reduzido tempo de computação, pequena capacidade de memória, fornecendo resultados bastante satisfatórios para um estágio preliminar de projeto.

#### MODELO TEÓRICO

O modelo proposto assume que as condições críticas do núcleo ocorrem no subcanal nominal mais quente, determinado simplesmente por inspeção da distribuição radial de potência do núcleo, obtida pela análise neutrônica. Este canal é considerado acoplado a um canal médio nominal apenas por escoamento transversal. Os canais são divididos em volumes de controle, conforme Fig. 3.

O escoamento transversal é obtido através da imposição de que a distribuição axial de

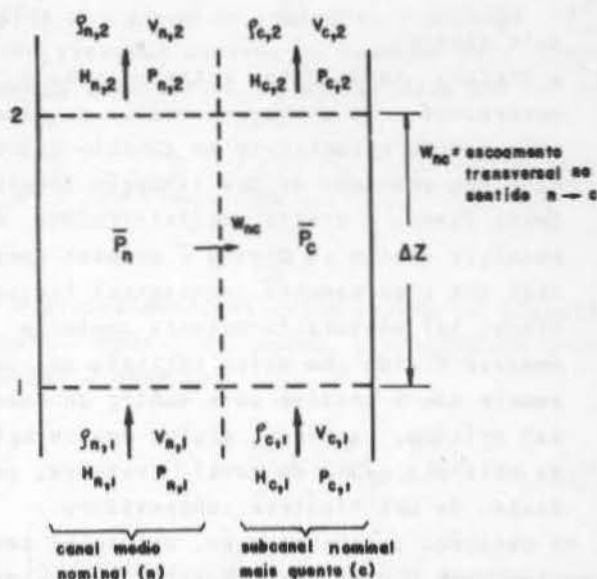


Fig. 3 Acoplamento entre os canais mais quente e médio nominais

pressão, ao longo do canal mais quente, seja a mesma que aquela do canal médio nominal, isto é,

$$\bar{P}_c = \bar{P}_n \quad (1)$$

onde

$$\bar{P}_c = \frac{P_{c,1} + P_{c,2}}{2} \quad (2)$$

e

$$\bar{P}_n = \frac{P_{n,1} + P_{n,2}}{2} \quad (3)$$

As seguintes hipóteses são consideradas no desenvolvimento do modelo:

- o canal médio nominal é tomado como sendo o núcleo do reator comportando-se de maneira homogenizada. Desta forma, todas as propriedades do refrigerante, neste canal, não são afetadas pelo acoplamento com o canal mais quente. Isto justifica-se no grande número de subcanais existentes no núcleo de um reator;
- o refrigerante é tido como completamente homogenizado na entrada do núcleo, devido a existência da câmara plena inferior, tendo, portanto, as mesmas propriedades nos

jo quadrado (Fig. 1) e são presas em grupos por grades espaçadoras dispostas ao longo do comprimento, formando os elementos combustíveis. A região formada entre quatro barras é chamada de subcanal típico, por onde escoam água leve e pressurizada executando as funções de refrigerante e moderador.

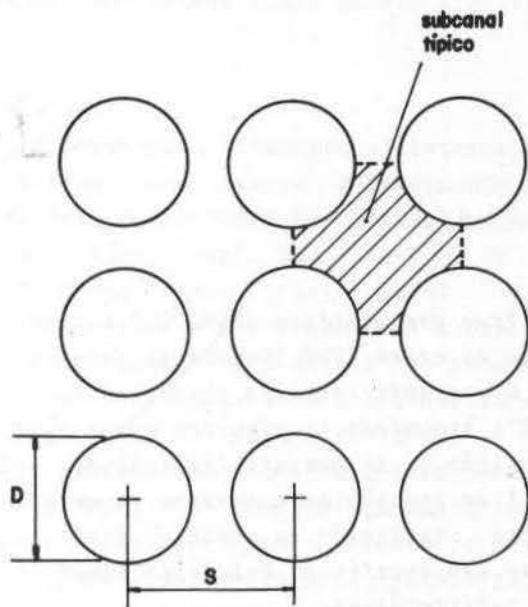


Fig. 1 Arranjo quadrado das barras de combustível

A potência de operação de um PWR é limitada, principalmente, pela ocorrência de fluxo crítico de calor, usualmente chamado de DNB (Departure from Nucleate Boiling), na superfície externa do revestimento, podendo, desta forma, provocar danos na barra de combustível.

A fim de se avaliar o fluxo crítico de calor em determinado canal do núcleo do reator, é indispensável conhecer-se as condições locais do refrigerante tais como vazão, entalpia, pressão, título do escoamento, etc. Diversos métodos de cálculos, colocados na forma de programas de computador, foram desenvolvidos até a presente data com o intuito de obtenção destas informações, tais como o COBRA [1], programas da linha THINC [2] da Westinghouse etc. Estes programas apresentam

em comum o fato de dividirem o núcleo em elementos combustíveis, ou em grupos de elementos combustíveis, considerados como canais. Os canais são divididos em volumes de controle axiais e as propriedades do refrigerante são assumidas como uniformes em cada elevação. As leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia são aplicadas para os volumes de controle, obtendo-se, assim, o desempenho termo-hidráulico dos diversos canais, embora não se conheça o desempenho dos subcanais individuais. Dois mecanismos de mistura entre canais adjacentes são considerados: (1) mistura turbulenta (mixing), causando distribuição de entalpia entre os canais, sem que ocorra troca líquida de massa entre os mesmos; e (2) escoamento transversal (crossflow), devido às características das grades e diferença de pressão entre os canais. Esta interação entre canais é mostrada na Fig. 2. Diferentes programas consideram diferentes modelos teóricos para estes mecanismos.

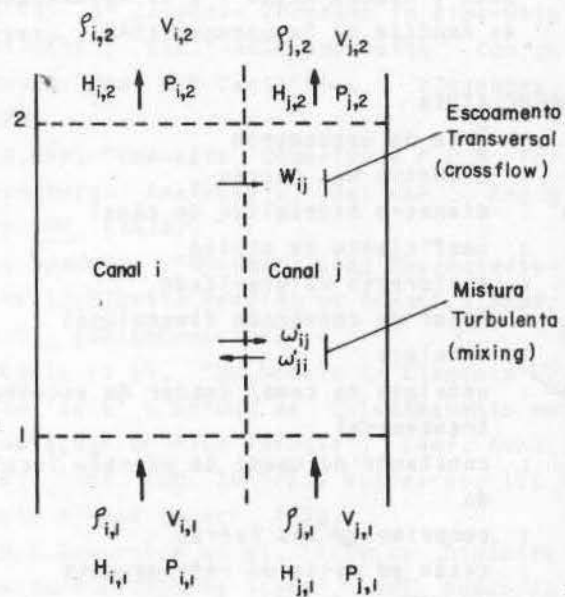


Fig. 2 Interação entre dois canais adjacentes

Este procedimento permite determinar-se o

dois canais;

(c) a mistura turbulenta entre os canais é desprezada. Na situação real, o canal mais quente encontra-se em contato com canais bem próximos de sua situação térmica. Desta forma, o efeito redistribuidor de entalpia devido ao mixing é pequeno comparado com o escoamento transversal imposto. Ainda, tal mistura turbulenta tenderia a remover fluido com maior entalpia do que aquele que é trazido para dentro do subcanal crítico, causando, assim, uma redução na entalpia média do canal. Trata-se, portanto, de uma hipótese conservadora.

As equações de conservação, em regime permanente, para o canal mais quente, subdividido em volumes de controle, podem ser escritas na forma:

#### a. Conservação de massa

$$A_c V_{c,1} \rho_{c,1} + W_{nc} = A_c V_{c,2} \rho_{c,2} \quad (4)$$

onde

$W_{nc}$  = vazão em massa transversal do canal (n) para o canal (c). Obviamente,  $W_{nc} = -W_{cn}$ .

#### b. Conservação de energia

$$A_c V_{c,1} \rho_{c,1} H_{c,1} + Q_c + W_{nc} \bar{H}^* = A_c V_{c,2} \rho_{c,2} H_{c,2} \quad (5)$$

onde

$Q_c$  = taxa de geração térmica no volume de controle considerado;

$\bar{H}^*$  = entalpia média no volume de controle do canal doador do escoamento transversal, dada por

$$\bar{H}^* = \bar{H}_n = \frac{H_{n,1} + H_{n,2}}{2} \quad \text{se } W_{nc} \geq 0,$$

$$\bar{H}^* = \bar{H}_c = \frac{H_{c,1} + H_{c,2}}{2} \quad \text{se } W_{nc} < 0.$$

#### c. Conservação de quantidade de movimento

$$\begin{aligned} A_c \rho_{c,1} + A_c \rho_{c,1} \frac{V_{c,1}^2}{g_c} - W_{nc} \frac{\bar{V}^*}{g_c} &= \\ &= A_c \rho_{c,2} + A_c \rho_{c,2} \frac{V_{c,2}^2}{g_c} + f_c \frac{\Delta Z}{D_e} A_c \frac{\bar{\rho}_c \bar{V}_c^2}{2g_c} + \\ &+ A_c \bar{\rho}_c \Delta Z \frac{g}{g_c}, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$\bar{\rho}_c = \frac{\rho_{c,1} + \rho_{c,2}}{2};$$

$$\bar{V}_c = \frac{V_{c,1} + V_{c,2}}{2};$$

$D_e$  = diâmetro hidráulico do canal ( $= \frac{4A_c}{P_w}$ , onde  $P_w$  = perímetro molhado do canal);

$f_c$  = coeficiente de atrito.

O termo  $W_{nc} \frac{\bar{V}^*}{g_c}$  representa a contribuição do escoamento transversal ao balanço de quantidade de movimento, sendo  $\bar{V}^*$  dada por

$$\bar{V}^* = \bar{V}_n = \frac{V_{n,1} + V_{n,2}}{2} \quad \text{se } W_{nc} \geq 0,$$

$$\bar{V}^* = \bar{V}_c = \frac{V_{c,1} + V_{c,2}}{2} \quad \text{se } W_{nc} < 0.$$

Na equação (6), devem ser acrescentados termos de perda de carga localizada, quando os volumes de controle contiverem variações de área causadas por grades espaçadoras, bocais de entrada e saída, etc. De maneira geral, são termos do tipo  $K_v \frac{\bar{\rho}_c \bar{V}_c^2}{2g_c}$ , onde  $K_v$  é uma constante característica da variação ocorrida na geometria.

O primeiro passo, para a aplicação do presente modelo, consiste na determinação das condições do escoamento no canal médio nominal. Estas condições são obtidas a partir das equações (4), (5) e (6), substituindo-se



o índice  $c$  pelo índice  $n$  e impondo-se  $W_{cn} = 0$ , de acordo com a hipótese (a).

Com as condições no canal médio nominal de terminadas, a aplicação das equações (4), (5) e (6), para o canal crítico requer o conhecimento de  $W_{nc}$ , o que é feito iterativamente. Impondo-se, inicialmente,  $W_{nc} = W_{nc}^0 = 0$ , determina-se as condições no volume de controle crítico, em particular  $P_{c,2}^1$ . Através da equação (2), é, então, calculado  $\bar{P}_c^1$ . O escoamento transversal é estimado, para o primeiro passo, pela expressão

$$W_{nc}^1 = W_{nc}^0 + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^1}{C_{nc}}, \quad (7)$$

onde  $C_{nc}$  é uma constante genérica. Combinando-se as equações (4) e (5), obtém-se

$$H_{c,2}^1 = \frac{A_c \rho_{c,1} V_{c,1} H_{c,1} + Q_c}{A_c \rho_{c,1} V_{c,1} + W_{nc}^1} + \frac{W_{nc}^1 \left( \frac{H_{n,1} + H_{n,2}}{2} \right)}{A_c \rho_{c,1} V_{c,1} + W_{nc}^1} \quad (8)$$

para  $W_{nc}^1 \geq 0$ , ou

$$H_{c,2}^1 = \frac{A_c \rho_{c,1} V_{c,1} H_{c,1} + Q_c + W_{nc}^1 \frac{H_{c,1}}{2}}{A_c \rho_{c,1} V_{c,1} + \frac{W_{nc}^1}{2}} \quad (9)$$

para  $W_{nc}^1 < 0$ .

Avaliando-se  $\rho_{c,2}^1$  a partir de  $H_{c,2}^1$  e da pressão, usando-se correlações empíricas ou tabelas, obtém-se

$$V_{c,2}^1 = \frac{A_c V_{c,1} \rho_{c,1} + W_{nc}^1}{A_c \rho_{c,2}^1} \quad (10)$$

Obviamente, efeitos de escoamento bifásico, quando presente, devem ser incluídos nas equações.

Com estes novos valores dos parâmetros, na

saída do volume de controle, a pressão  $P_{c,2}^2$  é recalculada através da equação (6). O escoamento transversal é, agora, dado por

$$W_{nc}^2 = W_{nc}^1 + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^2}{C_{nc}}, \quad (11)$$

e o procedimento descrito repete-se iterativamente. Após  $i$  iterações, o escoamento transversal é dado por

$$W_{nc}^i = W_{nc}^{i-1} + \frac{\bar{P}_n - \bar{P}_c^i}{C_{nc}}. \quad (12)$$

Este processo é interrompido quando

$$|\bar{P}_n - \bar{P}_c^i| < \epsilon, \quad (13)$$

sendo  $\epsilon$  um erro admissível, previamente definido.

Após a obtenção de convergência, pode-se passar para o cálculo do volume de controle seguinte. Observe que a constante  $C_{nc}$  não tem influência no valor de  $W_{nc}$  obtido após a constatação de convergência. Sua influência é apenas notada no número de iterações necessário.

O procedimento descrito prossegue até atingir-se o topo dos canais e pode ser visualizado através da Fig. 4.

## RESULTADOS

O presente método foi aplicado para o núcleo do reator da Central Nuclear Almirante Alvaro Alberto, unidade Angra-1, descrito no Relatório Final de Análise de Segurança (FSAR) [3]. Os dados de projeto pertinentes são apresentados na Tabela 1.

As principais correlações empíricas utilizadas ao longo da aplicação são aquelas do programa NAIHYDRO-P [4]. Para as quedas de pressão localizadas, foi utilizado  $K_v = 1,029$  e  $2,276$ , para as grades sem aletas (primeira e última) e para as grades intermediárias (com aletas misturadoras), respectivamente, assim como  $K_v = 0,4$  e  $1,0$  para contração e expansão

bruscas. Cada canal foi dividido em 35 volumes de controle, na direção do escoamento.

TABELA 1. Parâmetros de Projeto da Usina Nuclear Angra-1

PARÂMETRO	VALOR
Potência térmica, Mwt	1876
Vazão total do refriger., lbm/hr	$71,1 \times 10^6$
Vazão efetiva de refriger., lbm/hr	$67,9 \times 10^6$
Pressão na saída do núcleo, psia	2250
Fluxo térmico médio, BTU/hr.ft <sup>2</sup>	$1,871 \times 10^5$
Fator de pico axial de potência	1,51
Fator de pico radial de potência	1,55
Altura dos canais, ft	12,633
Comprimento ativo das barras, ft	12
Diâmetro externo das barras de combustível, in	0,374
Passo entre barras, in	0,485
Temperatura do refrigerante na entrada, °F	549,5
Área efetiva de escoamento, ft <sup>2</sup>	26,4
Número de grades espaçadoras	8
Distribuição axial de potência	cosenoidal

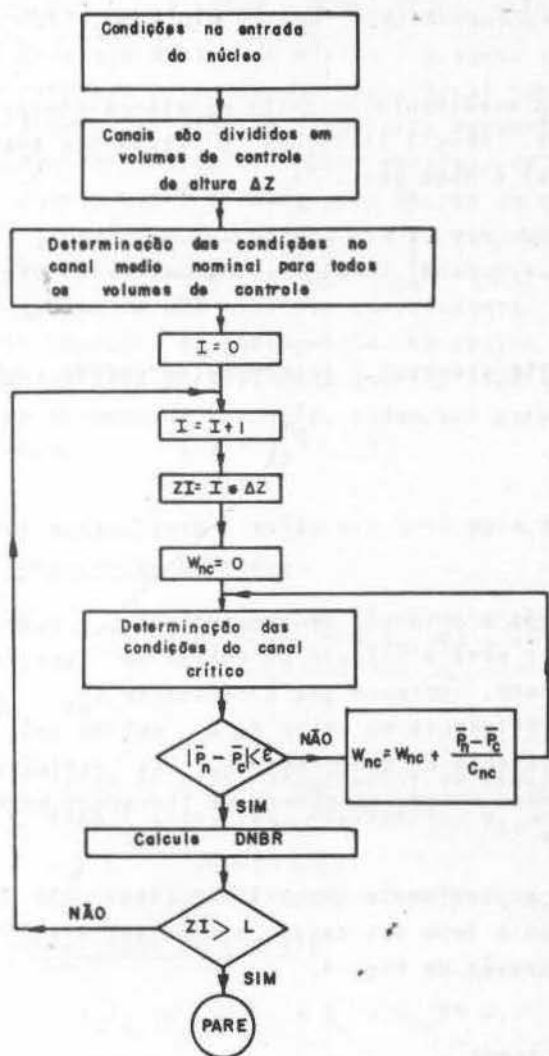


Fig. 4 Procedimento para aplicação do método

Figura 5 apresenta a queda de pressão ao longo dos canais. A queda total de pressão obtida foi de 31,5 psia. Fig. 6 mostra o comportamento da entalpia ao longo dos canais. Na Fig. 7 são apresentados o título termodinâmico, o título do escoamento e a fração de vazios para o canal crítico. A partir de  $\frac{z}{L} = 0,30$ , o escoamento começa a ser bifásico, embora a entalpia seja menor do que a entalpia de saturação, na pressão local, devido a in-

ciência de ebulição local. Fig. 8 mostra que, após a incipiência de ebulição local, a vazão de massa, no canal quente, começa a diminuir devido ao aumento do volume específico do refrigerante, provocando sua expulsão do canal na forma de escoamento transversal. Este fato pode ser observado na Fig. 9. No presente trabalho, foi adotado o mesmo valor de  $K_v$ , nas quedas de pressão localizadas, seja para escoamento monofásico ou para escoamento bifásico, sendo que, nesta última situação, assumiu-se o modelo homogêneo. Assim, observa-se na Fig. 9, que, na região das grades, surgem picos no valor do escoamento transversal exatamente devido a estas quedas diferenciadas de pressão em canais com diferentes regimes de escoamento. Não há evidências se tal observação corresponde a situação real. No entanto, refinamentos no tratamento das grades podem ser facilmente incorporados ao método.

Figura 10 apresenta a distribuição do DNBR, definido como a relação entre o fluxo crítico de calor para as condições locais, obtido através da correlação W-3 [5] corrigida para

grade "R" (a ser utilizada no carregamento do reator Angra-1), e o fluxo de calor local.

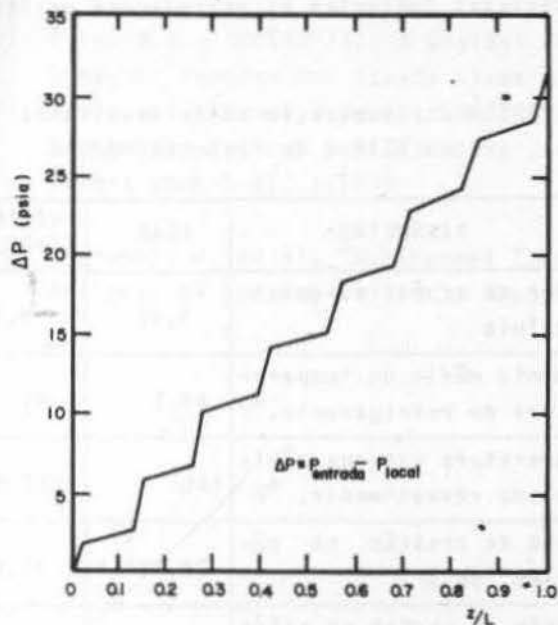


Fig. 5 Queda de pressão ao longo dos canais

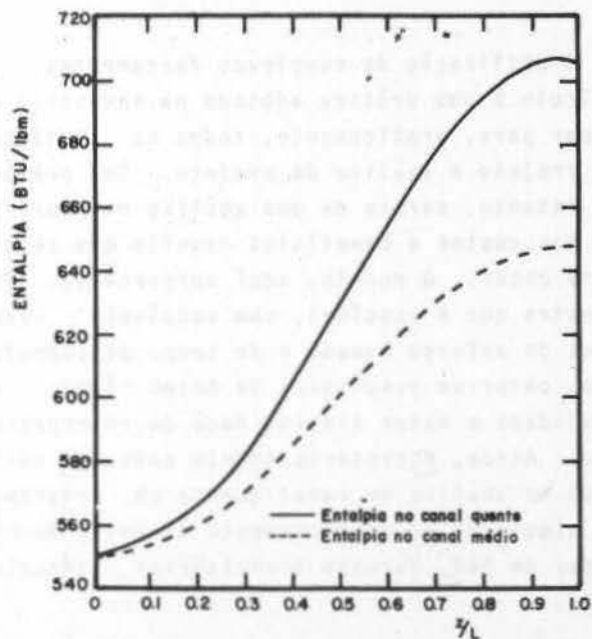


Fig. 6 Distribuição de entalpia ao longo dos canais

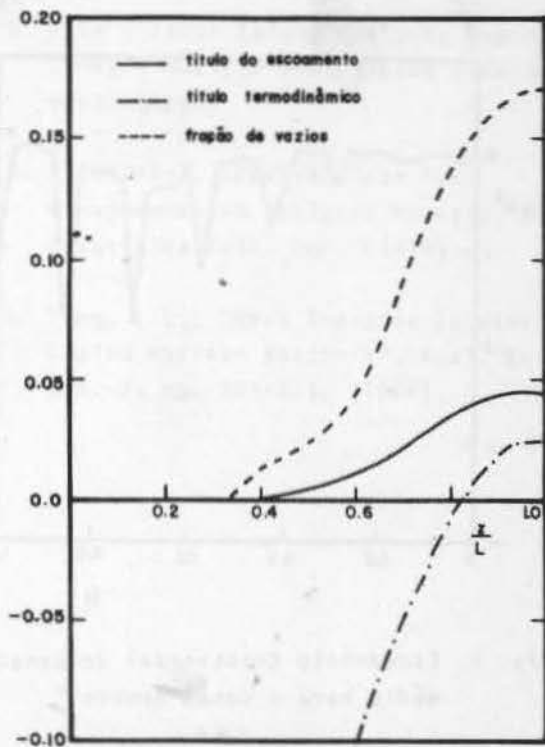


Fig. 7 Distribuições do título do escoamento, título termodinâmico e fração de vazios no canal quente

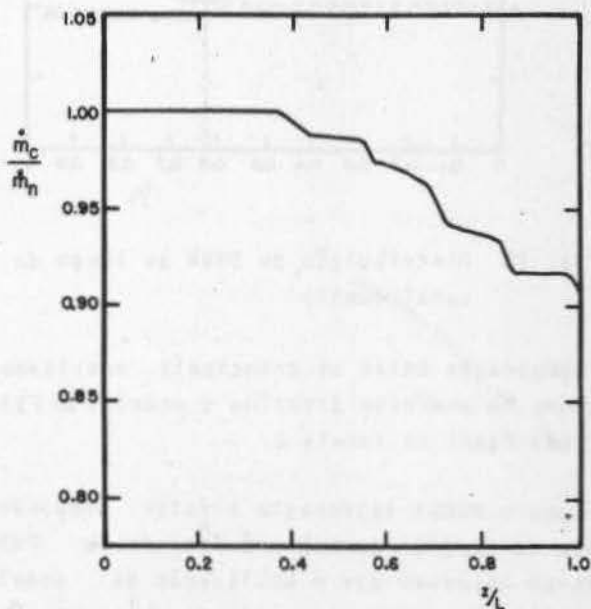


Fig. 8 Vazão em massa no canal quente

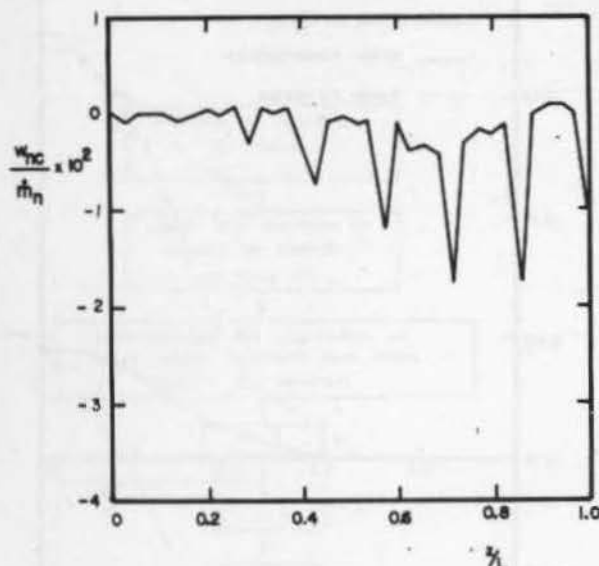


Fig. 9 Escoamento transversal do canal médio para o canal quente

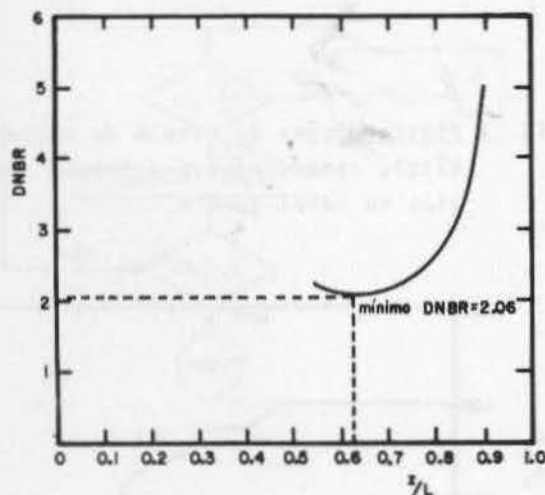


Fig. 10 Distribuição de DNBR ao longo do canal quente

Comparação entre os principais resultados obtidos no presente trabalho e aqueles do FSAR [3] são dados na Tabela 2.

Como o MDNBR representa o fator preponderante no projeto termohidráulico de um PWR, pode-se observar que a utilização do modelo simplificado conduz a resultados bastante próximos daqueles apresentados no FSAR. Conside

rando-se ainda que a análise termohidráulica é fundada em correlações empíricas obtidas através de dados experimentais, o desvio ora obtido, certamente, é irrelevante diante das incertezas inerentes às correlações utilizadas.

TABELA 2. Comparação entre Resultados do FSAR e do Presente Modelo

PARÂMETRO	FSAR	PRESENTE TRABALHO
Fator de acréscimo de entalpia	1,55	1,59
Aumento médio de temperatura do refrigerante, °F	69,1	71
Temperatura externa máxima do revestimento, °F	660	657,9
Queda de pressão no núcleo, psia	28,2±5,6	31,5
Fração de vazios na saída do canal quente	19,3	16,8
Mínimo DNBR (MDNBR)	2,08	2,06

#### COMENTÁRIOS

A utilização de complexas ferramentas de cálculo é uma prática adotada na indústria nuclear para, praticamente, todos os estágios de projeto e análise de projeto. Tal prática, no entanto, carece de uma análise mais profunda dos custos e benefícios daquilo que se espera obter. O modelo, aqui apresentado, demonstra que é possível, com sensíveis reduções de esforço humano e de tempo de computação, obter-se resultados de mesmo nível de qualidade e maior simplicidade de interpretação. Ainda, o presente modelo pode ser utilizado na análise de canal quente em programas de simulação do comportamento dinâmico de núcleos de PWR, durante transitórios operacionais.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o auxílio financeiro prestado pela CNEN - Comissão Nacional de E-

nergia Nuclear, Brasil - durante a execução do presente trabalho.

#### REFERÊNCIAS

1. Rowe, D.S., "COBRA-III: A Digital Computer Program for Steady State and Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Rod Bundle Nuclear Fuel Elements", Report BNWL-B-82, (1971).
2. Chelemer, H. et al, "Subchannel Thermal Analysis of Rod Bundle Core", Report WCAP-7015, Rev. 1, (1967).
3. FSAR - Final Safety Analysis Report, Central Nuclear Alm. Alvaro Alberto, Westinghouse.
4. NAIHYDRO-P, LEAHS-Nuclear Fuel Management and Analysis Package, Nucl. Associates Intl. Co., (1974).
5. Tong, L.S., "Heat Transfer in Water Cooled Nuclear Reactors", Nucl. Eng. Des. 6, pp. 301-324, (1967).

# SOBRE O TENSOR CONDUTIVIDADE TÉRMICA EM MEIOS POROSOS RÍGIDOS

GILBERTO MEDEIROS KREMER

DEPTO. FÍSICA, UFPr, CURITIBA/PR E COPPE/UFRJ

RUBENS SAMPAIO FILHO

ESCOLA DE QUÍMICA E COPPE/UFRJ- RIO DE JANEIRO, RJ

## SUMÁRIO

*Propõe-se um novo modelo teórico para a condução de calor em meios porosos rígidos saturados e determina-se completamente o vetor fluxo de calor a partir de três funções materiais. Compara-se a presente teoria com outras existentes na literatura e sugerem-se algumas experiências para comprovação direta da não validade da hipótese de que  $g \cdot v = 0$  implica  $h \cdot v = 0$ .*

### 1. INTRODUÇÃO

Usando a Teoria de Misturas, Telles e Massarani propuseram em [1] um modelo para a condução de calor em meios porosos rígidos e saturados. Apesar desse modelo ser bem mais geral que os então existentes na literatura, algumas de suas previsões estavam em desacordo com experiências [2,3] feitas para testar o modelo.

Para explicar os resultados encontrados em [2,3] Telles e Massarani apresentaram em [4] um novo modelo baseado nas seguintes hipóteses:

- 1) O fluxo de calor  $h$  só depende da velocidade  $v$  e do gradiente de temperatura  $g$ , i.e.,  $h = \bar{h}(v, g)$ ;
- 2)  $\bar{h}$  é isotrópica, i.e., se  $Q$  é um tensor ortogonal então  $\bar{h}(Qv, Qg) = Q \bar{h}(v, g)$ ;
- 3)  $\bar{h}$  é uma função homogênea do 1º grau em  $g$ , i.e., para todo escalar  $\lambda \geq 0$ ,  $\bar{h}(v, \lambda g) = \lambda \bar{h}(v, g)$ ;
- 4) Se  $g \cdot v = 0$  então  $h \cdot v = 0$ .

No presente trabalho mostraremos que a hipótese 4) é incompatível com as hipóteses 1)-3) e na verdade ela não é fisicamente correta, a têm disso mostraremos porque a não validade de 4) ainda não foi detectada experimentalmente e

sugeriremos experiências onde será possível a comprovação direta da não validade de 4).

### Notação.

Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno " $\cdot$ ".  $\text{Lin}V$  é o conjunto de todos os endomorfismos de  $V$ , cujos elementos serão chamados de tensores.  $\text{Ort}$  representa o conjunto dos tensores ortogonais de  $\text{Lin}V$ . Os elementos de  $V$  e  $\text{Lin}V$  são denotados respectivamente por:  $a, b, c, \dots$ , e  $A, B, C, \dots$ , enquanto que os escalares por:  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \dots$ .  $I$  representa a identidade de  $\text{Lin}V$ ,  $A^T$  a transposta de um tensor  $A$  e  $|b|$  a norma do vetor  $b$ . O produto tensorial de dois vetores  $a, b \in V$  é o tensor definido por:  $(a \otimes b)c = (b \cdot c)a \quad \forall c \in V$ . Seja  $f: W \subset V \rightarrow V$  ( $W$  aberto de  $V$ ) de classe  $C^1$  então  $\text{grad} f(a) \in \text{Lin}V$  é a derivada de Fréchet de  $f$  no ponto  $a \in W$ , i.e.,  $f(a+h) = f(a) + (\text{grad} f(a))h + O(a;h)$  onde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(a;h)}{|h|} = 0$ . Se  $f$  depender de várias variáveis denotaremos a derivada em relação a uma variável ( $b$  por exemplo) mantendo as outras fixas por:  $\partial_b f$ .

## 2. ALGUNS RESULTADOS PARA FUNÇÕES VETORIAIS

## HOMOGÊNEAS E ISOTRÓPICAS

Apresentaremos a seguir alguns resultados para funções vetoriais homogêneas e isotrópicas dependentes apenas de variáveis vetoriais; porém um número qualquer de variáveis escalares (independentes das variáveis vetoriais), podem ser adicionados sem alterar os teoremas que se seguem.

As demonstrações dos teoremas podem ser encontradas no Apêndice.

Teorema 1.

Se  $h: V \times V \rightarrow V$  é uma função diferenciável e homogênea do 1º grau na segunda variável

$$h(a, \lambda b) = \lambda h(a, b) \quad \forall a, b \in V, \lambda \geq 0 \quad (2.1)$$

então existe  $K \in \text{Lin}V$  tal que:

$$Kb = h(a, b), \quad K(a, b) = (\partial_b h)(a, b). \quad (2.2)$$

Teorema 2.

Nas condições do Teorema 1, se  $\lambda \neq 0$ , então:

$$K(a, b) = K(a, \lambda b).$$

Teorema 3.

Nas condições do Teorema 1, se  $h$  é uma função vetorial isotrópica então  $K$  é uma função tensorial isotrópica, i.e.

$$Q h(a, b) = h(Qa, Qb) + K(Qa, Qb) = Q K(a, b) Q^T \\ \forall Q \in \text{Ort}.$$

Se  $|b| \neq 0$ , podemos escolher no Teorema 2  $\lambda = 1/|b|$  e sendo  $K$  uma função tensorial isotrópica, sua representação, segundo [6], será dada por:

$$K(a, b) = K\left(a, \frac{b}{|b|}\right) = \alpha_1 \frac{1}{|b|} + \alpha_2 a \otimes \frac{b}{|b|} \\ + \alpha_3 a \otimes a + \alpha_4 \frac{b}{|b|} \otimes a \\ + \alpha_5 \frac{b}{|b|} \otimes \frac{b}{|b|} \quad (2.3)$$

onde os coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  são funções

escalares de  $|a|$  e  $(a \cdot b)/|b|$ .

Teorema 4.

Os coeficientes  $\alpha_i$  satisfazem as relações:

$$\alpha_5 + \xi \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \partial_\xi \alpha_1$$

$$\partial_\xi \alpha_2 + \xi \partial_\xi \alpha_3 = 0$$

onde  $\xi = (a \cdot b)/|b|$ .

## 3. O TENSOR CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Nessa seção procuraremos explorar os resultados obtidos nos capítulos anteriores. O nosso objetivo é estudar o processo de condução de calor quando fluidos incompressíveis escoam através de matrizes porosas rígidas e usaremos uma notação semelhante a de [4]:

- $\theta$  temperatura da mistura,
- $h$  fluxo de calor,
- $v$  velocidade do fluido (pode ser pensada ou como velocidade intersticial ou superficial);
- $g$  gradiente de temperatura (grad $\theta$ ),
- $K$  tensor condutividade térmica.

Os Teoremas 1 e 4 nos fornecem que:

$$h(\theta, v, g) = K(\theta, v, g)g$$

$$K(\theta, v, g) = \alpha_1 \frac{1}{|g|} + (\beta - \int \xi (\partial_\xi \alpha_3) d\xi) v \otimes \frac{g}{|g|} \\ + \alpha_3 v \otimes v + (\partial_\xi \alpha_1) \frac{g}{|g|} \otimes v \\ - \xi (\partial_\xi \alpha_1) \frac{g}{|g|} \otimes \frac{g}{|g|} \quad (3.1)$$

onde  $\xi = (v \cdot g)/|g|$ ,  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i(\theta, |v|, \xi)$ ,  $i = 1, 3$ ,  $\beta = \bar{\beta}(\theta, |v|)$ .

Através das equações (3.1) podemos escrever que:

$$h(\theta, v, g) = \alpha_1 g + (\beta - \int \xi (\partial_\xi \alpha_3) d\xi + \xi \alpha_3) |g| v. \quad (3.2)$$

Doravante, para facilitar a comparação com os resultados de [4], suporemos que os coeficientes  $\alpha_i$  independem de  $\xi$  e definiremos uma

família de grandezas escalares  $\kappa_\Gamma$ , denominada  $\Gamma$ -condutividade térmica por:

$$\kappa_\Gamma(\theta, |v|) = - \frac{1}{|g|^2} (h \cdot g)$$

$$\text{onde } \Gamma = \frac{g}{|g|} \cdot \frac{v}{|v|}$$

É fácil de ver que  $\kappa_\Gamma$  é bem definida e depende apenas de  $\theta$  e  $|v|$ . Chamaremos  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_{-1}$  de condutividade ortogonal, paralela e antiparalela, respectivamente.

Podemos então escrever (3.1) e (3.2) como:

$$K = - \kappa_0 \underline{1} - \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2} \right) \left( \frac{v}{|v|} \otimes \frac{g}{|g|} \right) - \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2} \right) \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}$$

$$h = - \kappa_0 g - \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2|v|} + \xi \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2|v|^2} \right) |g|v \quad (3.3)$$

Estas expressões podem ser comparadas com as correspondentes  $K^*$  e  $h^*$ , de [4] que em nossa notação são escritas na forma:

$$K^* = - \kappa_0 \underline{1} - \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2} \right) \frac{g}{|g|} \otimes \frac{v}{|v|} - \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2} \right) \frac{v}{|v|} \otimes \frac{v}{|v|}$$

$$h^* = - \left( \kappa_0 + \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2|v|} \right) \xi \right) g - \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2|v|^2} \right) \xi |g|v \quad (3.4)$$

Vemos então que  $K^* = K^T$ .

#### Teorema 5.

$g \cdot v = 0$  implica que  $h \cdot v = 0$  se e só se

$$\kappa_1 = \kappa_{-1}.$$

Prova: Basta multiplicar (3.3) escalarmente por  $v$  e levar em conta que  $g \cdot v = 0$ .

Como a evidência experimental obtida em [5] nos mostra que  $\kappa_1 \neq \kappa_{-1}$ , concluímos que  $g \cdot v = 0$  não implica em  $h \cdot v = 0$ . Outra implicação importante é a não simetria de  $K$ .

A seguir mostraremos que os resultados obtidos em [5] usando o modelo proposto em [4] são corretos e daremos sugestões de como

provar diretamente através de experiências de que  $g \cdot v = 0$  não implica em  $h \cdot v = 0$ .

Se nas equações (3.3) e (3.4) considerarmos que  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_{-1}$  são independentes de  $\theta$  e que a velocidade do fluido é constante, o termo  $\text{div } h$  que aparece na equação de balanço de energia da mistura toma a forma, respectivamente:

$$\text{div } h = - \kappa_0 \text{div } g - \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2} \right) \frac{v}{|v|} \cdot (\text{grad } g) \frac{g}{|g|} - \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2} \right) \frac{v}{|v|} \cdot (\text{grad } g) \frac{v}{|v|}$$

$$\text{div } h^* = - \kappa_0 \text{div } g - \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_{-1}}{2} \right) \frac{v}{|v|} \cdot \left( (\text{grad } g) \frac{g}{|g|} + g \text{div} \left( \frac{g}{|g|} \right) \right) - \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_{-1} - 2\kappa_0}{2} \right) \frac{v}{|v|} \cdot (\text{grad } g) \frac{v}{|v|}$$

Vemos então que se, além das hipóteses já feitas, supusermos que  $g \cdot v = 0$  e/ou  $\text{div}(g/|g|) = 0$ , teremos que  $\text{div } h = \text{div } h^*$  e os dois modelos fornecem a mesma solução para a equação da energia.

Consideremos agora uma matriz porosa cilíndrica e sejam  $(r, \phi, z)$  as coordenadas cilíndricas. As experiências descritas abaixo estão enquadradas nos casos discutidos no parágrafo anterior.

- i) escoamento de fluido no sentido axial e campo de temperatura satisfazendo  $\theta = \bar{\theta}(r)$ ;
- ii) escoamento de fluido no sentido axial e campo de temperatura variando apenas axialmente, i.e.,  $\theta = \bar{\theta}(z)$ .

Considerando a geometria esférica, pode-se verificar que a solução da equação da energia também será a mesma, ao utilizar-se  $h$  ou  $h^*$ , quando:

- iii) escoamento radial com o campo de temperatura variando apenas radialmente.
- As experiências de [5] são todas do tipo i), ii) e iii).

Nossa previsão, utilizando-se ainda a geometria cilíndrica, é que as soluções da equação da energia serão diferentes, quando tivermos:



- a) fluido escoando no sentido axial e campo de temperatura  $\theta = \bar{\theta}(r,z)$ ;  
 b) fluido escoando no sentido radial (com velocidade variável) e campo de temperatura  $\theta = \bar{\theta}(z)$ .

## REFERÊNCIAS

1. Telles, A.S. & Massarani, G.: "Heat Conduction in a Porous Medium". Rev. Bras. Física, Vol. 4, 1974, pp. 249-262.
2. Tobinaga, S. & Freire, J.T.: "Determinação da Condutividade Térmica Eficaz Axial", Relatório Interno do LSP, nº 5, COPPE/UFRJ, 1975.
3. Freire, J.T.; Tobinaga, S.; Massarani G. & Telles, A.S.: "Condução de Calor em Meios

Porosos II: Determinação Experimental da Condutividade Axial", Anais do III Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Maringá, 1975.

4. Telles, A.S. & Massarani, G.: "Condução de Calor em Meios Porosos III: Nova Forma para a Condutividade": Anais do III Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Maringá, 1975.
5. Freire, J.T.: "Transferência de Calor em Meios Porosos". Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1979.
6. Smith, G.F.: "On Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors". Int. J. Engng. Sci., Vol. 9, 1971, pp. 899-916.

## APÊNDICE

Prova do Teorema 1: Se derivarmos parcialmente a equação (2.1) em relação a  $\lambda$  obtemos:

$$((\partial_{\lambda b} h)(a, \lambda b))b = h(a, b)$$

e se fizermos  $\lambda = 1$  na equação acima, temos:  $Kb = h(a, b)$ , onde  $K = (\partial_b h)(a, b)$ .

Prova do Teorema 2: Pela equação (2.2), tem-se:

$$h(a, \lambda b) = (K(a, \lambda b))\lambda b = \lambda(K(a, b))b$$

$$\lambda h(a, b) = \lambda(K(a, b))b$$

e, através da equação (2.1):  $\lambda(K(a, b))b = \lambda(K(a, \lambda b))b$ , conseqüentemente se  $\lambda \neq 0$ ,  $K(a, b) = K(a, \lambda b)$ .

Prova do Teorema 3: Pela equação (2.2), tem-se:

$$h(Qa, Qb) = (K(Qa, Qb))Qb$$

$$Qh(a, b) = Q(K(a, b))b$$

conseqüentemente se  $h$  é isotrópica:

$$(K(Qa, Qb))Qb = Q(K(a, b))b \quad \text{e} \quad K(Qa, Qb)Q = Q K(a, b)$$

$$\text{ou} \quad Q K(a, b)Q^T = K(Qa, Qb).$$

Prova do Teorema 4: Se substituirmos a equação (2.3) na equação (2.2), tem-se:

$$h(a, b) = (\alpha_1 + \xi \alpha_4 + \alpha_5)b + (\alpha_2 + \xi \alpha_3)|b|a$$

A derivada parcial, em relação a  $b$ , da equação acima recai em:

$$\begin{aligned} \partial_b h = & (\alpha_1 + \xi \alpha_4 + \alpha_5) \frac{1}{|b|} + (\alpha_2 - \xi \partial_\xi \alpha_2 - \xi^2 \partial_\xi \alpha_3) a \otimes \frac{b}{|b|} \\ & + (\alpha_3 + \partial_\xi \alpha_2 + \xi \partial_\xi \alpha_3) a \otimes a + (\alpha_4 + \partial_\xi \alpha_1 + \xi \partial_\xi \alpha_4 + \partial_\xi \alpha_5) \frac{b}{|b|} \otimes a \\ & + (-\xi \alpha_4 - \xi \partial_\xi \alpha_1 - \xi^2 \partial_\xi \alpha_4 - \xi \partial_\xi \alpha_5) \frac{b}{|b|} \otimes \frac{b}{|b|} \end{aligned}$$

quando fazemos uso das relações:

$$\partial_c (\alpha a) = a \otimes \partial_c \alpha + \alpha \partial_c a$$

$$\partial_c (a \cdot b) = (\partial_c a)^T b + (\partial_c b)^T a.$$

Se compararmos a equação (2.3) com o valor de  $\partial_b h$  calculado acima, obtemos um sistema de cinco equações escalares dado por:

$$\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_4 \xi + \alpha_5$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 - \xi \partial_\xi \alpha_2 - \xi^2 \partial_\xi \alpha_3$$

$$\alpha_3 = \alpha_3 + \partial_\xi \alpha_2 + \xi \partial_\xi \alpha_3$$

$$\alpha_4 = \alpha_4 + \partial_\xi \alpha_1 + \xi \partial_\xi \alpha_4 + \partial_\xi \alpha_5$$

$$\alpha_5 = -\xi \alpha_4 - \xi \partial_\xi \alpha_1 - \xi^2 \partial_\xi \alpha_4 - \xi \partial_\xi \alpha_5$$

Apenas três das equações acima são independentes e podemos reescrevê-las como:

$$\alpha_5 + \xi \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \partial_\xi \alpha_1$$

$$\partial_\xi \alpha_2 + \xi (\partial_\xi \alpha_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 = \beta(|a|) - \int \ell(\partial_\xi \alpha_3) d\xi,$$

provando-se o teorema.

#### Observações:

(i) se  $h(\theta, v, g)$  for contínua na segunda variável é fácil verificar que:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \kappa_i = \kappa_0^*(\theta) \quad i = 0, 1, -1.$$

$\kappa_0^*(\theta)$  é denominado de condutividade térmica na estagnação. Esse resultado é importante para a verificação da consistência dos dados experimentais. Podemos reescrever as funções  $\kappa_i(\theta, |v|)$  como:

$$\kappa_i(\theta, |v|) = \kappa_0^*(\theta) \bar{\kappa}_i(\theta, |v|), \quad \text{onde} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \bar{\kappa}_i(\theta, |v|) = 1.$$

(ii) os valores  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_{-1}$  determinam a família  $\kappa_T$  de condutividade térmica.

# TRANSIENT WAVEFORMS FOR THE SIMULATION OF SHOCK ENVIRONMENTS ON VIBRATORS

S. N. YOUSRI GERGES

CENTRO TECNOLÓGICO, UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC

## SUMÁRIO

*In recent years there has been an increasing tendency to use vibrators rather than shock machines, for shock testing and thus take advantage of common vibrators and fixtures for both vibration and shock tests. Not only does this reduce initial equipment costs; it also complements the sophisticated digital control systems currently available and significantly reduces set-up and breakdown time in the laboratory. This paper presents a review of the state of art on performing shock test on vibrators and simulating a shock environment with vibrator limitations.*

## INTRODUCTION

The primary advantage of using a shaker instead of a shock machine to simulate a shock field environment is the saving in test preparation time, thereby resulting in a reduction in the cost of routine testing. The need to purchase special shock test equipment can be avoided by simply adding the necessary instrumentation to existing vibration test equipment to provide a shock test capability. The inherent limitations of commercial shock machines, in terms of the allowable size and weight of the test specimens, are also overcome.

Most of the motion observed in shock trials have waveforms that are generally oscillatory in character since these are the results of simpler waveforms which have undergone time-spreading and filtering by being transmitted through complex structures. The simple waveforms produced by classical shock machines generally result in a good match of field shock response spectra over a limited frequency range and severely overtest

and/or undertest over the rest of the frequency range of interest.

This paper summarized the type of waveforms for simulating a shock response spectrum envelope on vibrators, and the techniques for producing them with the vibrator physical limitations. A simple experimental investigation is presented to illustrate the techniques.

## LITERATURE SURVEY

Several different principles and techniques have been developed for using vibrators for shock tests [1 - 10]. Two major types of limitation are imposed; First, the input waveforms have to satisfy the shaker's physical limitations (e.g. zero initial and final conditions) together with the attainable peak acceleration. Usually the shaker can perform 2-3 times above its specification for short duration transients. Secondly, the effect of the system (vibrator + test item + amplifier) on the waveform has to be considered, that is the transfer function of the

test system has to be accounted for.

Digital control systems offer an attractive capability for transient waveform testing on shakers, through the use of high speed transfer function measurements and subsequent shaping techniques. These systems are capable of producing high quality and reproducible waveforms with minimum set-up time. The process used to generate the waveform involves excitation with a pulse having a short rise time, followed by an exponential decay [1 - 3], response measurement, and transfer function computation. A compensation waveform is then generated which has a signature which, when operated on by the measured transfer function, produces the desired waveform on the shaker [1], [2]. This digital control system is considered to be the most versatile type of shock test available.

Moser and Garner [4] proposed a frequency-compensated circuit for the shaker amplifier such that, to achieve the same pulse at the output, only the required real-time pulse at the system input is needed. They only considered the use of half-sine and full sine waveforms.

Several analog techniques [5 - 8] were developed which would produce time histories whose shock spectra would match a wide variety of specified shock spectra. These techniques are generally difficult to set up and usually require the application of many low-level pulses for system equalization. Digital generation of a transient as proposed by Le Brun and Favour [1] revolutionised the thinking concerning the shock and vibration testing techniques.

Smallwood [9], [10] presents a method for matching field shock spectra by modified decaying periodic pulses which can be generated digitally and complements the work of Le Brun and Favour [1]. Young [11] proposed a sine pulse waveform bounded by a sine bell, which has a simple relationship to its shock spectrum and therefore simplified the problem of matching the field shock spectra.

The work published in refs. [12] to [20] deals with the simulation of shock environment on shakers and complements the work men-

tioned in refs. [1] to [11].

## SHOCK WAVEFORM TESTING ON VIBRATORS

Vibration Generator. The type of vibration generator used in a vibration or shock test depends on (i) the magnitude of force to be generated, (ii) the frequency range, (iii) the size, and weight of the specimen and (iv) the test location.

Electrodynamic (or electromagnetic) and hydraulic vibrators are the most widely used types of excitor. A force of up to 100,000 N can be produced on shakers with a velocity of up to 2 m/s and displacement 0.03 m. The armature stroke limits the peak acceleration for a given input waveform, and it may be necessary to mechanically or electrically bias the armature in order to utilise the full stroke capability [21], [22]. A review article has been written by Tustin [23] on the comparison of techniques and equipment for generating vibration. Also in reference [24]; full details are presented on different shaker characteristics and performance.

Shock waveforms. Many different time histories can be generated which will match the same shock spectrum. Those waveforms can be quite different in appearance and it is not clear they will produce equivalent test item damage in the laboratory. However, since field environment can also produce time histories which are quite different in appearance, it has not been shown that a single method for generating time histories is superior for simulating all environments. Many methods should be made available and the particular method chosen should depend on the general characteristics of the field time histories.

The type of waveform which can be produced on a vibrator is limited to that which yields, for both initial and final conditions, zero values for the magnitude of acceleration, velocity and displacement. In addition maximum force, velocity and displacement of the vibrator armature are limited by the vibrator design. To achieve the final end conditions, the waveform should be conditioned. The following are some types of waveform and the shaker

capability for producing them.

1-Simple waveform. To achieve the physical limitation of the vibrator a pre-pulse and post-pulse should be added to the waveform. Frain [25] has derived expressions for the maximum acceleration a vibrator can achieve for a number of simple waveforms (half-sine, triangular, rectangular and terminal sawtooth) by adding half-sine pre- and post-pulse of the proper amplitude and duration such that the total area under the acceleration time diagram is zero to ensure zero final velocity. See Figure 1.

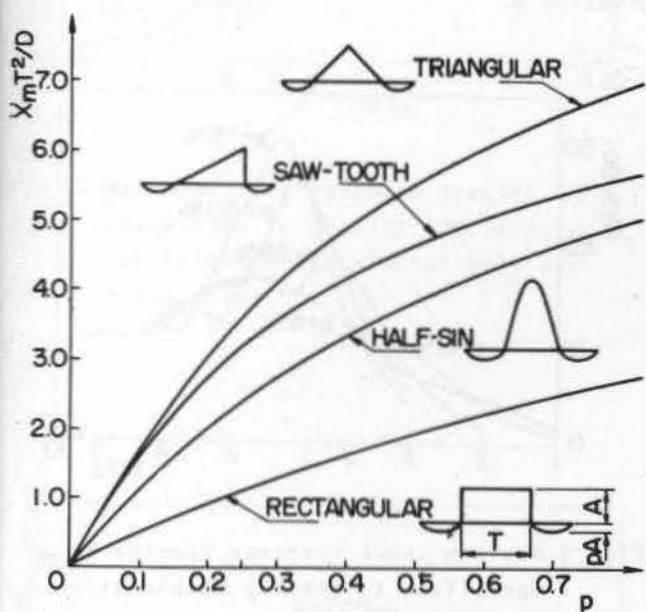


Fig. 1 Shaker capability for conditioned simple waveforms (D = shaker stroke)

2-Sine pulse bounded by sine bell. This waveform was proposed by Young and Saffel in 1972 [11]. The acceleration  $\ddot{x}$  of a single waveform is given by

$$\ddot{x} = A \sin(\pi t/T) \sin(\pi N t/T) \quad (1)$$

Where T is the pulse duration  
 A is the pulse amplitude  
 t is the time  
 N is the number of half-waves.

To satisfy the vibrator physical limitations, N should be an odd number greater than

one. Figure 2 shows the variation of the maximum acceleration  $\ddot{x}_m$  a vibrator can produce (for a shaker stroke D, and maximum armature velocity V) as a function of N. The advantages of this family of waveforms is that its response shock spectra can easily match a given design spectra and the amplification ratio and phase relationship of each of the components approximates to the specified values; this will be shown later in section 3.

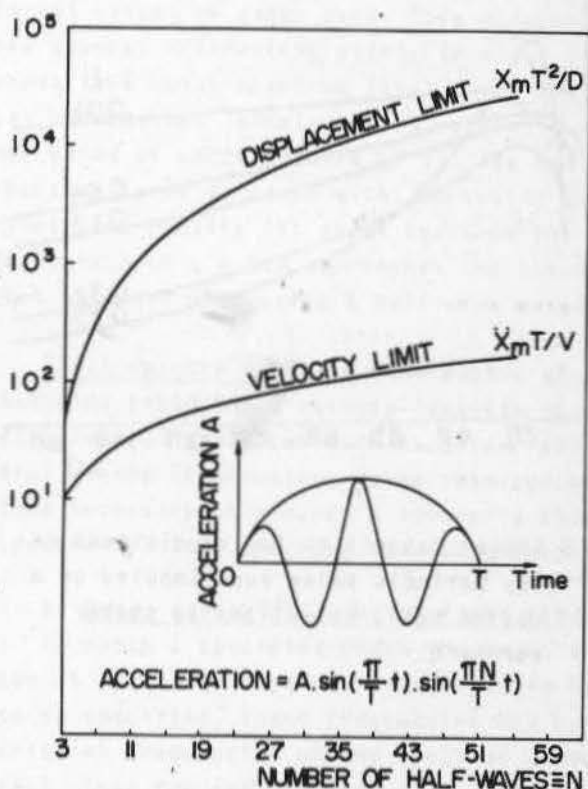


Fig. 2 Shaker capability for conditioned sine pulse bounded by sine bell.

3-Decay periodic pulse superimposed on cosine bell. This waveform was proposed by Smallwood in 1973 [9] and in a modified form in 1974 [10]. The acceleration is given by

$$\ddot{x} = A e^{-\zeta \omega t} \cos \omega t - \frac{4A\zeta}{T\omega(1+\zeta^2)} \cos^2 \frac{\pi t}{T} \quad (2)$$

where  $\zeta$  is the decay rate  
 $\omega$  is the radial frequency  
 T is the pulse duration

$A$  is the pulse amplitude

This family of waveforms can match a shock spectra over a very wide range of frequency. The acceleration, velocity and displacement characteristics meet the limitation imposed by the physical capabilities of the vibrator. Figures 3 and 4 provide the maximum acceleration a shaker can produce,  $\ddot{x}_m$  being normalized to the vibrator stroke  $D$  and the vibrator maximum velocity  $V$  respectively.

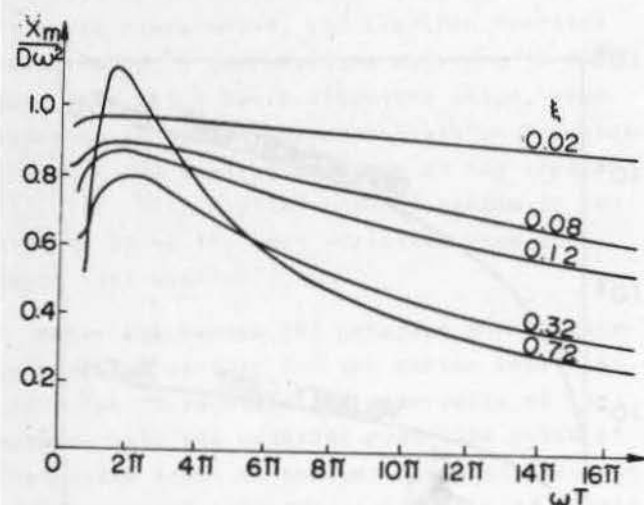


Fig. 3 Shaker capability for conditioned decay periodic pulse superimposed on a cosine bell, normalized to shaker stroke  $D$ .

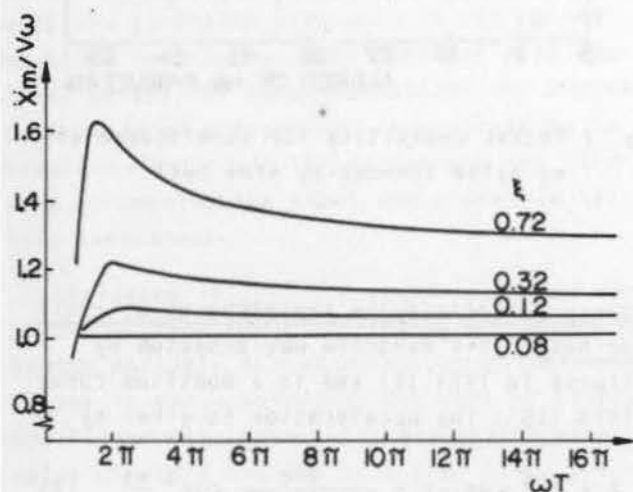


Fig. 4 Shaker capability for conditioned decay periodic pulse superimposed on a cosine bell, normalized to shaker maximum velocity  $V$ .

Effect of waveform conditioning on the shock response spectra. Figures 5, 6, 7 and 8 drawn from ref. [25] show the change of shock response spectra of the four simple waveforms due to the pre- and post-pulses added to satisfy the physical limitation of the vibrator. A marked change in the shock response spectrum occurs as  $p$  increases ( $p$  is a fraction of the peak amplitude for the pre- and post-pulses) especially at the middle frequency range. In general  $p$  should not exceed 0.1 to preserve a reasonable match to the shock response spectra. If the vibrator stroke limits prohibit a test with  $p < 0.1$ , armature biasing should be considered instead of increasing  $p$ .

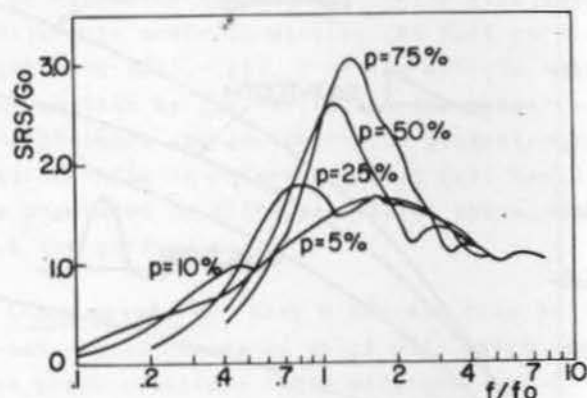


Fig. 5 Maximum shock response spectra SRS, normalized to gravity acceleration  $G_0$  for conditioned half-sine pulse.

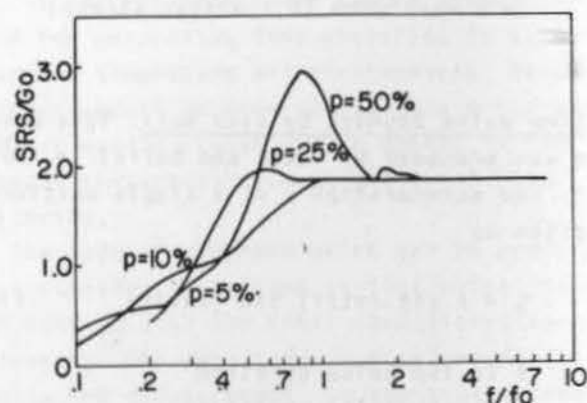


Fig. 6 Maximum shock response spectra SRS, normalized to gravity acceleration  $G_0$ , for conditioned rectangular pulse.

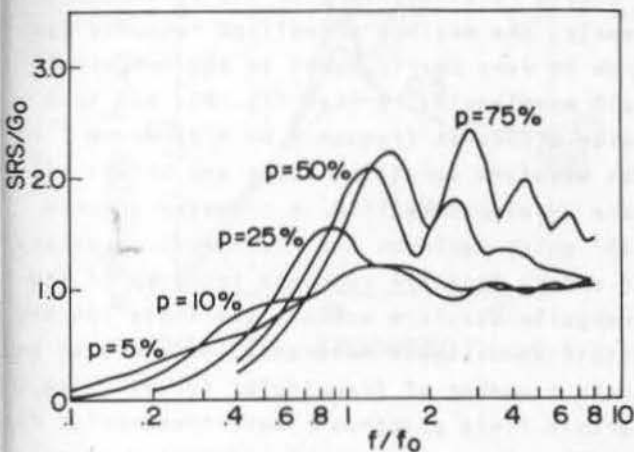


Fig. 7 Maximam shock response spectra SRS, normalized to gravity acceleration  $G_0$ , for conditioned terminal peak sawtooth pulse.

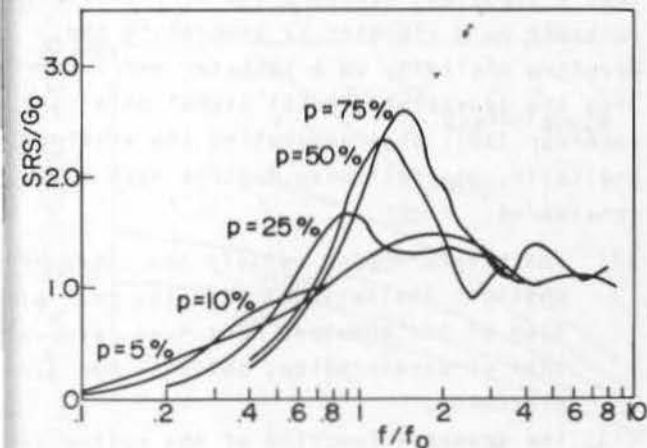


Fig. 8 Maximam shock response spectra SRS, normalized to gravity acceleration  $G_0$ , for conditioned triangular pulse.

It is interesting to note that for the waveform proposed by Young and Saffel [11] the overall shock response spectra have a maximum value nearly equal to  $N$  (the number of half wavelengths, see equation (1)), and the normalized frequency at which the maximum response spectra occurs is equal to  $1/N$  (see Fig. 9). This simple relationship simplifies the construction of the field shock spectra.

The shock response spectrum of Smallwood's pulse SHOC [9] is shown in figure 10 for different values of decay rate. This waveform has several interesting points to note; its normalized shock spectrum level of up to 10 can be obtained (simple pulses result in maximum value of shock spectra of 2), its maximum spectrum level decrease with increasing decay rates, and finally its shock spectrum for a decay rate of  $\zeta = 0.5$  approaches the shape of that obtained when using a half-sine waveform.

Shock spectra matching. The method of matching field shock spectra consists of adding several waveforms such as decay periodics having frequencies, decay rate and amplitude necessary to produce a composite shock spectrum closely matching the field spectra.

a. Decay sinusoids to match field spectra.

To match a specified shock spectrum, a number of frequencies on the field spectra have to be specified, these frequencies may be the critical frequencies of the specimen under test. Then for each frequency  $\omega$ , a decay rate  $\zeta$  and damping  $\eta$  (equal to the field spectra damping) are selected with the aid of the decaying sinusoids shock spectra shape shown in figure 11, which can be approximated by the following equation derived by Galef [27].

$$R(\omega, \Omega, \eta, \zeta) = A / \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\Omega^2} \left[ \frac{\eta / (\eta - \zeta)}{\zeta / (\eta - \zeta)} \right]^2 \dots (3)$$

- where  $R$  is the response spectrum
- $\eta$  is the oscillator damping
- $\zeta$  is the excitation damping
- $\omega$  is the oscillator frequency
- $\Omega$  is the excitation frequency
- $A$  is the excitation amplitude

Figure 12 can be used to determine the am-

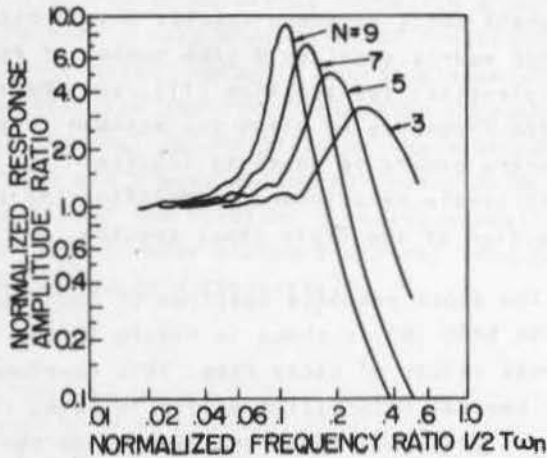


Fig. 9 Normalized maximum response spectra for a sine pulse bounded by a sine bell

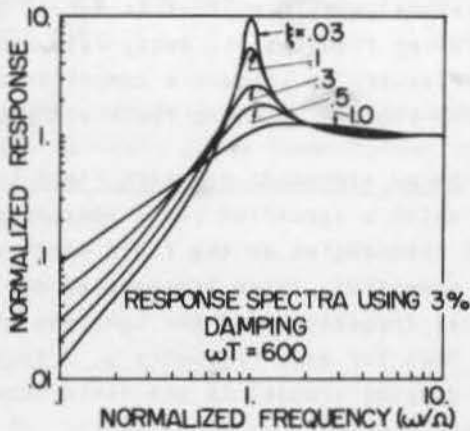


Fig. 10 Normalized shock spectra for SHOC pulses

plitude required for each component. Assuming each component will act independently, then these spectra can be added to give the resultant spectrum for comparison with the field spectra. If the difference is outside an allowable tolerance, then decay rate  $\zeta$  can be changed and the process repeated. Note that

the value of the spectrum at intermediate frequencies can be changed by changing the signs of the amplitudes [28].

b. Sine pulse bounded by sine bell to match field spectra. This waveform has a simple relationship with its shock spectrum namely; the maximum normalized response spectrum is very nearly equal to the number of half wavelengths,  $N$  (see fig. 9), and that value occurs at frequency  $\omega = N/2T$  where  $T$  is the waveform duration. Young and Saffel [11] have developed MWAWSYN, a computer program [29] which performs the iterations necessary to ensure that the response spectrum of the composite waveform matches the field spectra within an assigned tolerance. The program selects a number of frequencies for matching a certain field spectrum. These frequencies lie on (1) a line of constant relative displacement in the low frequency range, (2) a constant pseudo-velocity for mid-frequency range. (3) a constant acceleration for the high frequency range. This is because a field spectrum is usually trapezoidal when plotted in four co-ordinate paper.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION

The aim of this investigation is to show that a transient waveform can be produced accurately on a vibrator by generating the waveform digitally on a computer and recording the converted digital signal on a tape recorder [30]. When generating the waveform digitally, the following factors have to be considered:

- (i) the waveform must satisfy the vibrator's physical limitations, that is, the motion of the armature must have zero values of acceleration, velocity and displacement,
- (ii) the transfer function of the system (vibrator + test item + amplifier) has to be accounted for.

A LING 407 shaker together with a TOP 100 LING power amplifier was used with a 0.02 kg mass mounted on the vibrator armature to simulate a test specimen. The armature response was measured using a B & K 8309 accelerometer together with a B & K 2635 charge amplifier.



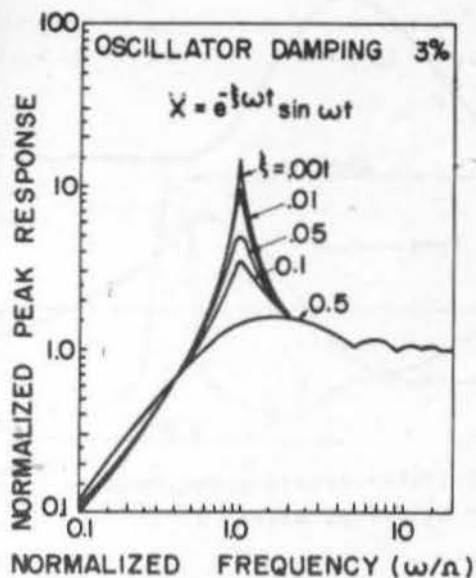


Fig. 11 Normalized shock spectra for a single frequency decaying sinusoid.

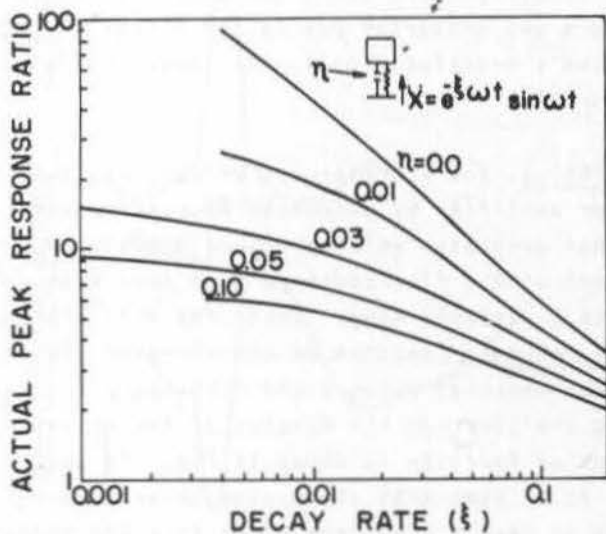


Fig. 12 Peak response ratio for a decaying sinusoid.

The transient acceleration signal was stored on a digital oscilloscope and subsequently recorded on an x-y plotter.

Three tests were performed to demonstrate the effect of conditioning the waveform in order to satisfy the vibrator's physical limitations, and the effect of the system transfer function.

1. The acceleration response of the vibrator armature to a simple unconditioned half-sine waveform (voltage input)
2. The acceleration response of the vibrator armature to a half-sine conditioned waveform (voltage input)
3. The acceleration response of the vibrator armature to a half-sine conditioned waveform corrected for the system transfer function (i.e. what voltage-time transient input is needed to produce a specified acceleration-time output on the vibrator armature?).

TEST 1. Figures 13,14 and 15 show the half sine voltage input waveform as obtained from Function Generator TWG 500 and the shaker armature acceleration response. The input waveform durations were 0.1, 1, 10 m.sec. respectively, and these produced different armature response, due to:

a. the half-sine waveform had the following initial conditions:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(0), \quad \ddot{x}(T) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0, \quad \dot{x}(T) \neq 0. \\ x(0) &= 0, \quad x(T) \neq 0. \end{aligned}$$

T is the waveform duration; where  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  and  $x$  are the acceleration, velocity and displacements respectively.

The final values for the velocity and displacement do not satisfy the vibrator armature physical limitation and therefore the vibrator exhibited a residual acceleration (as shown in figure 14).

b. The resonant frequency of the vibrator occurs at approximately 8.0 kHz which is in the frequency band of the 0.1 m.sec. half-sine waveform, therefore figure 13 shows resonance

of the vibrator armature. Figure 14 shows that the vibrator armature follows the input. This is because the input waveform bandwidth occurs within the 'flat' frequency band of the vibrator characteristic. These output waveforms are not accepted for shock test since their shock response spectrum is different from that of half-sine waveform.

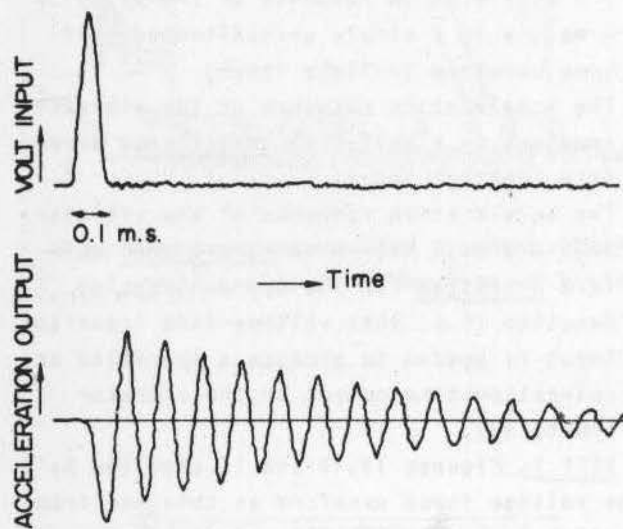


Fig. 13 Shaker armature response to 0.1 m.s half-sine waveform.

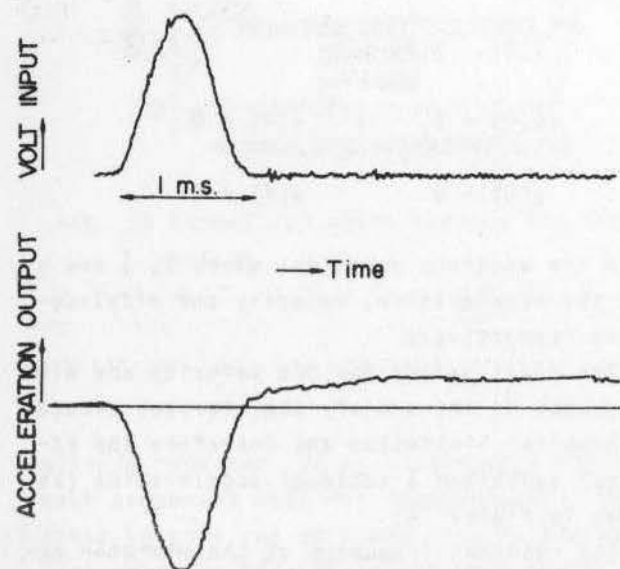


Fig. 14 Shaker armature response to 1.0 m.s half-sine waveform.

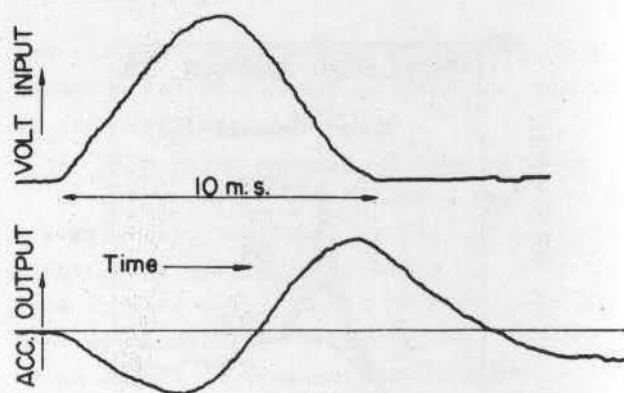


Fig. 15 Shaker armature response to 10 m.s half-sine waveform.

TEST 2. The first effect mentioned in test 1 (that is, 'a') was corrected by conditioning the half-sine waveform by adding pre- and post- half-sine waves of the correct duration and amplitude to ensure that the final velocity and displacement were zero.

The half-sine conditioned waveform was generated digitally on a PDP 11 digital computer and the converted analog signal was recorded. The magnetic tape was played back to the vibrator amplifier. Although the initial and final conditions are zero, the acceleration waveform was distorted due to the effect of the system's transfer function as shown in figs. 16 and 17.

TEST 3. The vibrator was driven, via the power amplifier by a Hewlett Packard random signal generator which produced a Gaussian signal with a flat spectrum from zero frequency to a variable upper limit. The acceleration response spectrum of the vibrator armature was measured using a EMR Schlunberger real time analyser and the modulus of the vibrator transfer function is shown in figs. 18 and 19. It is seen that the system transfer function is nearly flat from 80 Hz to approximately 2500 Hz, (a theoretical phase has been used), thus explaining why a 1 m.sec half-sine input waveform produces a good half-sine acceleration response as shown in figure 14. Below 80 Hz the systems transfer function

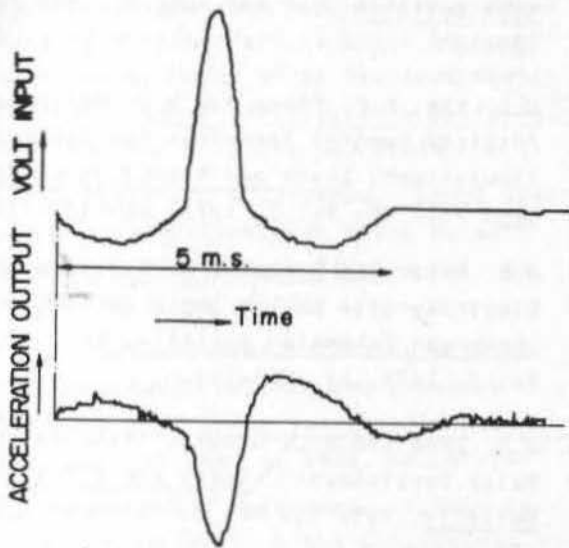


Fig. 16 Shaker armature response to 5 m.s half-sine conditioned waveform.

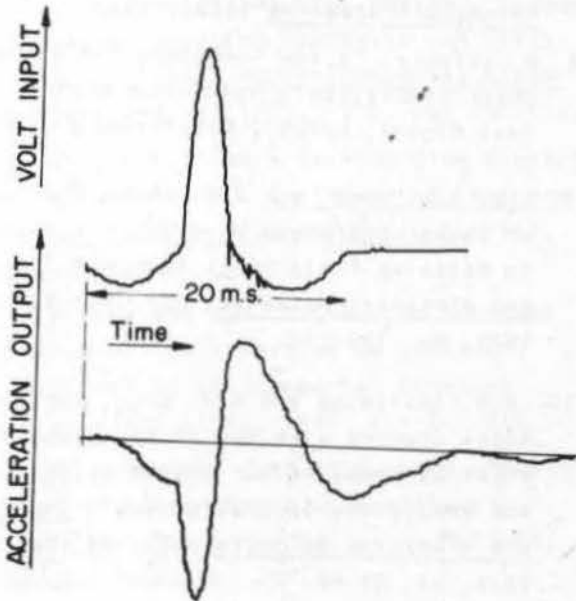


Fig. 17 Shaker armature response to 20 m.s half-sine conditioned waveform.

produces a frequency dependent attenuation thus explaining the vibrator's response obtained in figure 15. A computer program has been written to calculate the input waveform required to ensure that the vibrator armature response is a conditional half-sine waveform.

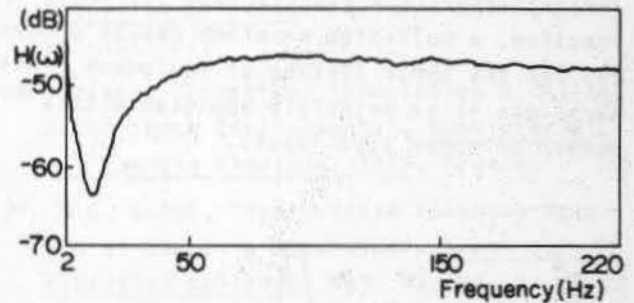


Fig. 18 Shaker transfer function (2 - 200 Hz)

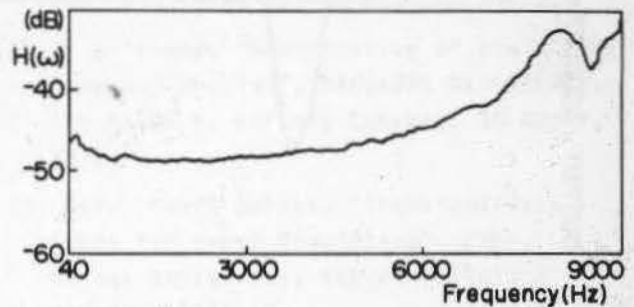


Fig. 19 Shaker transfer function (40 - 9000 Hz)

The Nottingham Algorithms Group (NAG) subroutine (C06AAF) were used for computing the Fast Fourier Transform. The required waveform is given by

$$I(\omega) = O(\omega)/H(\omega)$$

where  $O(\omega)$  is the FFT of the conditioned half sine waveform;  $H(\omega)$  is the system transfer function;  $I(\omega)$  is the FFT of the required waveform.

$I(t)$  was obtained by taking the inverse transform of  $I(\omega)$ . The analogue signal of  $I(t)$  was recorded on a magnetic tape and used to drive the vibrator via its power amplifier. Figure 20 shows the voltage input waveform and the vibrator armature acceleration response which is a conditioned half-sine waveform.

This experimental investigation shows that by taking account of the physical limitations of the vibrator and its transfer function, a half-sine waveform can be produced for the shock testing of equipment. This technique is in principle applicable to a number of other test inputs.

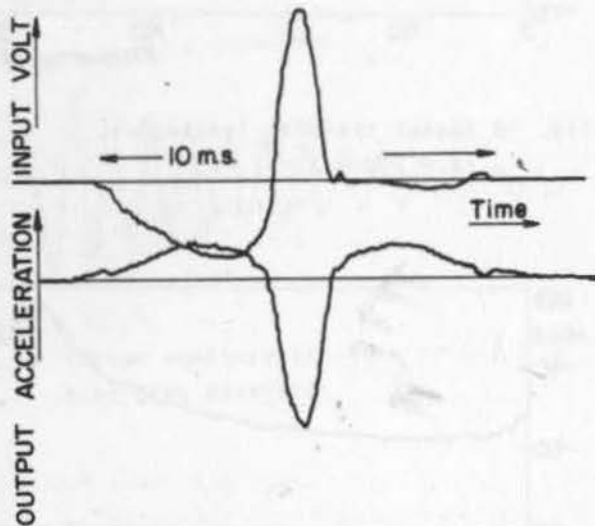


Fig. 20 Conditioned half-sine waveform produced on the shaker.

#### CONCLUSIONS

This paper attempts to review the recent techniques for simulating a field shock response spectra on vibrators. The shock test method described here has been found to be highly practical and entirely compatible with commercially available shake table systems.

#### REFERENCES

1. J.D. Favour and J.M. LeBrun, "Transient Waveform Control of Electromagnetic Test Equipment". Shock and Vibration Bulletin

Vol. 40, No. 2, 1969, pp. 157-171.

2. R.S. Nichols, "Seismic Shock Waveform Reproduction and Shock Spectra Synthesis on Hydraulic Actuator", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, No. 1, 1977, pp. 135-150.
3. G.C. Kao, K.Y. Chang and W.W. Hollbrook, "Digital Control Technique for Seismic Simulation", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 43, No. 1, 1973, pp. 109-118.
4. J.R. Moser and D. Garner, "An improved Electrodynamic Shaker Shock Technique", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 40, No. 2, 1969, pp. 173-181.
5. J.D. Crum and R.L. Grant, "Transient Pulse Development", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 41, No. 5, 1970, pp. 167-176.
6. G.W. Painter and H.J. Perry, "Simulation Flight Environment Shock on an Electrodynamic Shaker", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 33, No. 3, 1964, pp. 85-96.
7. R.J. Fandrich, "Shock Pulse Time History Generator", Institute of Environmental Sciences Proceeding (IES), 1969.
8. G. Shipway, "A New Technique for Seismic Shock Simulation", Wyle Laboratories Test Report, Norco., California Facility
9. D.O. Smallwood, and A.F. Witte, "The use of Shaker-Optimized Periodic Transients in Matching Field Shock Spectra", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 43, No. 1, 1973, pp. 139-150.
10. D.O. Smallwood and A.R. Nord, "Matching Shock Spectra with Sum of Decaying Sinusoids Compensated for Shaker Velocity and Displacements; Limitations", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 44, No. 3, 1974, pp. 43-56.
11. R.C. Yang and H.R. Saffel, "Development of a Waveform Synthesis Technique - A Supplement to Response Spectrum as a Definition of Shock Environment", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 42, No. 2, 1972, pp. 45-53.

12. H.J. Schwabe, "An Approach to Polaris Flight Shock Simulation by Electrodynamic Shaker", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 31, No. 2, 1963, pp. 144-163.
13. G.A. Gallagher and A.W. Adkins, "Shock Testing a Spacecraft to Shock Response Spectrum by Means of an Electrodynamic Exciter", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 35, No. 6, 1966, pp. 41-45.
14. J.R. Fagan and A.S. Baron, "Shock Spectra of Practical Shaker Shock Pulse", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 36, No. 2, 1967, pp. 17-29.
15. D.A. Regillo, "Shock Testing with an Electrodynamic Exciter and Waveform Synthesizer", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 39, No. 5, 1969, pp. 67-71.
16. J. Fagan and J. Sincavage, "Shock Testing and Analysis: A new Laboratory Technique", Shock and Vibration Bulletin Vol. 39, No. 5, 1969, pp. 83-87.
17. J.C. Jordon, "Shock Response Spectrum Synthesis and Analysis", Institute of Environmental Sciences Proceedings (IES) 1967, pp. 161-164.
18. I.T. Goldwater and J.D. Hansen, "Automatic Shock Spectrum Synthesis and Analysis", Institute of Environmental Sciences Proceedings (IES), 1970, pp. 407-412.
19. H.O. Lewis, "Shock Testing with Electrodynamic Shakers", Institute of Environmental Science Proceedings (IES), 1961, pp. 267-275.
20. W.A. Hay and R.M. Oliva, "An improved Method of Shock Testing on Shakers", Institute of Environmental Sciences Proceedings (IES), 1966, pp- 241-246.
21. J.R. Fagan and J.M. McClaneham, "Extension of Shaker Shock Capabilities", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 25, No. 6, 1966, pp. 20-32.
22. Ben Beznek, "Elimination of Static Shaker Deflection by D.C. Biasing", Institute of Environmental Sciences Proceedings (IES), 1963, pp. 425-431.
23. W. Tustin, "A Comparison of Techniques and Equipment to Generating Vibration", Shock and Vibration Digest, Vol. 9, No. 10, 1977, pp. 3-10.
24. C.M. Harris and C.E. Crede, Shock and Vibration Handbook, Vol. 2, Chapter 25, McGraw-Hill, 1961.
25. W.E. Frain, "Shock Waveform Testing on an Electrodynamic Vibrator", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, No. 1, 1977 pp. 121-131.
26. Lalanne Christian, "Simulation of Mechanical Shock Environments", Commissariat a l'Energie Atomique, 1975, France.
27. A.E. Galef, "Approximate Response Spectra of Decaying Sinusoids", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 43, No. 1, 1973 pp. 61-65.
28. D.B. Nelson and P.H. Prashthofer, "A case for Damped Oscillatory Excitation as a Natural Pyrotechnic Shock Simulation", Shock and Vibration Bulletin, Vol. 44, 1973, pp. 30-43.
29. R.C. Young, "Modification of the WAVSYN Computer Program", Document No. SAF-82, The Ralph M. Parsons Company, 30 April, 1971.
30. S.N. Yousri Gerges, "Transient Waveforms for Shock Simulation", EAPS, Sussex University, Report 78/101, October, 1978.

# UM PROBLEMA DE MÁXIMO ENVOLVENDO MATRIZES E A DECOMPOSIÇÃO POLAR

LUIZ C. MARTINS

DEPTO. ENGENHARIA MECÂNICA, COPPE/UFRJ, RIO DE JANEIRO, RJ

## SUMÁRIO

Há alguns anos, G. Grioli propôs-se a encontrar a deformação rígida (de uma bola) cuja distância (em termos da norma  $L^2$  dos deslocamentos) a uma dada deformação homogênea fosse mínima. Ele provou que a solução é determinada pelo fator ortogonal na decomposição polar do gradiente da dada deformação. Ao se reconsiderar o trabalho de Grioli tem-se inspiração para uma prova elementar do teorema da decomposição polar. No caso de espaços vetoriais complexos, J. von Neumann, em trabalho que reproduzimos parcialmente, quase chegou lá. Aqui mostramos como se faz neste caso e para o caso real a prova, ainda mais elementar, pode ser vista em [3].

## INTRODUÇÃO

Uma prova elementar do Teorema da Decomposição Polar, em espaços vetoriais reais, foi recentemente obtida num trabalho conjunto com P. Podio Guidugli [3]. Após ter sido completado o trabalho, os autores tomaram conhecimento de um artigo de J. von Neumann [2] em que este obtem a existência da decomposição polar, utilizando outras técnicas e no contexto dos espaços vetoriais sobre os complexos, ao resolver um problema de máximo. Neste trabalho retrataremos os passos de J. von Neumann objetivando uma prova elementar daquele teorema para o caso complexo. Embora von Neumann, utilizando o teorema espectral, tenha obtido a existência de tal decomposição, ele não chama atenção para este ponto.

Como motivação para o problema de máximo que iremos tratar, considere uma esfera  $B$ , centrada na origem do  $R^3$ , e que sofra uma deformação homogênea de gradiente  $F$ . Isto é, considere  $f: B \rightarrow R^3$  dada por  $f(x) = Fx$ ,  $\det F > 0$ . Nosso propósito é encontrar uma deformação rígida

de  $B$  que melhor aproxima  $f$  no seguinte sentido: determine  $\min_{Q \in \text{Rot } B} \int (Fx - Qx)^2 dV$ , onde  $\text{Rot } B$  é a coleção das rotações próprias.

Este problema, como foi observado por Grioli [1], é equivalente a resolver a questão abaixo:

Problema: determine  $\max_{Q \in \text{Rot}} F \cdot Q$ ,

onde  $\cdot$  denota o produto escalar  $F \cdot Q = \text{tr}(FQ^T)$ .

Admitindo-se a decomposição polar de  $F (= VR)$ , demonstra-se facilmente que o problema tem solução única dada por  $Q = R$ . E inspirados por este fato, analisemos aquele problema com mais atenção.

## EXISTÊNCIA DA DECOMPOSIÇÃO

Seja um espaço vetorial complexo com produto interno, de dimensão finita. Se  $u, v \in \mathcal{V}$ ,  $u \cdot v$  denota seu produto interno e  $\text{Lin } \mathcal{V}$  é a coleção das transformações lineares de  $\mathcal{V}$  em  $\mathcal{V}$ . Considere

remos  $\text{Lin}$  como espaço com produto interno definindo, para  $A, B \in \text{Lin}$ ,  $A \cdot B = \text{tr}(AB^*)$ , onde  $\text{tr}$  denota o traço e  $B^*$  é a adjunta de  $B$ .

Se  $z$  é um número complexo,  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $\bar{z} = a - bi$  e  $\text{Re} z = a$ .

Quando  $A \in \text{Lin}$  é hermiteana (isto é,  $A = A^*$ )  $A$  é dita definida se  $A v \cdot v \geq 0$  para todo  $v \in \mathcal{V}$  (na realidade tal condição implica  $A$  hermiteana). Observemos que  $\text{tr} A^* = \overline{\text{tr} A}$  e  $\text{tr}(AX) = 0$  para todo  $X \in \text{Lin}$  implica  $A = 0$ . Além disso,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Se  $U \in \text{Lin}$  é inversível e  $U^{-1} = U^*$ , então  $U$  é dita unitária. Denotaremos por  $\mathcal{U}$  a coleção das transformações unitárias de  $\text{Lin}$ .

Reproduzimos agora a parte do trabalho [2] de von Neumann que nos interessa.

#### Lema 1

Se  $\text{tr}(AB) = 0$  para todo  $B$  hermiteano, então  $A = 0$ .

Prova: Como  $X = \frac{1}{2}(X + X^*) + \frac{1}{2i}i(X - X^*)$  e como  $\frac{1}{2}(X + X^*)$  e  $\frac{1}{2i}i(X - X^*)$  são hermiteanos, concluímos que  $\text{tr}(AX) = 0$  para todo  $X \in \text{Lin}$ . Logo,  $A = 0$ .

#### Lema 2

Seja  $A \in \text{Lin}$ . Então  $\text{tr}(AX)$  é real para todo  $X$  hermiteano se e só se  $A$  é hermiteano.

Prova:  $\text{tr}(AX) = \overline{\text{tr}(AX)} = \text{tr}(AX)^* = \text{tr}(XA^*) = \text{tr}(A^*X)$ . Então  $\text{tr}((A - A^*)X) = 0$  para todo  $X$  hermiteano, e, pelo lema anterior,  $A = A^*$ . A volta é imediata.

#### Lema 3

Fixe  $A \in \text{Lin}$ . Então  $\max_{U \in \mathcal{U}} \text{Re tr}(AU)$  existe. Se  $U = U_0$  é um ponto de máximo, então  $A_0 = AU_0$  é definida (isto é, todo  $A \in \text{Lin}$  pode ser escrito como o produto  $A = A_0 U_0^{-1}$ , com  $A_0$  definida e  $U_0^{-1}$  unitária).

Prova: Pela compacidade de  $\mathcal{U}$ , tal máximo existe. Se  $U_0$  é ponto de máximo, seja  $A_0 = AU_0$ . Então  $\text{Re tr} A_0 \geq \text{Re tr}(AU_0 U)$ , para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Logo,

$$\text{Re tr}(A_0) \geq \text{Re tr}(A_0 U) \quad (1)$$

para todo  $U \in \mathcal{U}$ .

Se  $X$  é hermiteana e  $1$  denota a identidade

de  $\text{Lin}$ , então  $1 + i\epsilon X$  é inversível para  $\epsilon$  real suficientemente pequeno. Considere o elemento  $S = (1 + i\epsilon X)(1 - i\epsilon X)^{-1}$  de  $\text{Lin}$ . Seu adjunto,  $(1 + i\epsilon X)^{-1}(1 - i\epsilon X)$ , também se pode escrever como  $(1 - i\epsilon X)(1 + i\epsilon X)^{-1}$  pois  $X$  comuta com  $(1 + i\epsilon X)^{-1}$ . Então é claro que  $SS^* = 1$ . Concluimos que  $S \in \mathcal{U}$  e  $S = 1 + 2i\epsilon X + O(\epsilon^2)$ . Assim,

$$\text{Re tr}(A_0 S) = \text{Re tr}(A_0) + 2\epsilon \text{Re}(i \text{tr}(A_0 X)) + O(\epsilon^2).$$

Mas (1) vale por hipótese. Logo, com  $\epsilon$  pode ser positivo ou negativo,  $\text{tr}(A_0 X)$  é real para todo  $X$  hermiteano e, pelo lema 2,  $A_0$  é hermiteana.

Resta mostrar que  $A_0$  é definida. Neumann utiliza o teorema espectral. E com ele a decomposição polar é quase um simples exercício. Damos uma demonstração mais elementar. Defina, para todo  $v \in \mathcal{V}$ , o elemento  $v \otimes v \in \text{Lin}$  dado por sua ação sobre  $a \in \mathcal{V}$ :  $(v \otimes v)a = (a, v)v$ . É fácil verificar que  $v \otimes v$  é hermiteana e que, se  $v$  tem módulo unitário,  $1 - 2v \otimes v$  é unitário. Como  $\text{Re tr}(A_0(1 - 2v \otimes v)) = \text{tr} A_0 - 2 \text{Re tr}(A_0(v \otimes v)) = \text{tr} A_0 - 2 \text{Re}(A_0 v, v) = \text{tr} A_0 - 2A_0 v \cdot v$ , concluímos por (1) que  $A_0 v \cdot v \geq 0$  e  $A_0$  é definida.

## UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO

Abandonando agora a notação de Neumann, seja  $F \in \text{Lin}$  e  $F = VU = \hat{V}\hat{U}$  decomposições de  $F$  com  $V, \hat{V}$  definidas e  $U, \hat{U} \in \mathcal{U}$ . É claro que  $VV^* = FF^*$  mostra que  $V$  é univocamente determinado como raiz quadrada de  $FF^*$ . Vamos obter uma prova mais elementar deste fato.

Por hipótese,  $\text{tr}(VUH) = \text{tr}(\hat{V}\hat{U}H)$  para todo  $H \in \mathcal{U}$ . Escolha  $H = H_0$  tal que  $\text{Re tr}(VUH)$  atinge o máximo para  $H \in \mathcal{U}$ :  $\text{Re tr}(VUH) \leq \text{Re tr}(VUH_0)$ . Admita o seguinte lema:

#### Lema 4

Se  $A$  é definida, então  $\text{Re tr}(AH) \leq \text{tr} A$  para todo  $H \in \mathcal{U}$ . Se para  $H = H_0$ ,  $\text{Re tr}(AH_0) = \text{tr} A$ , então  $H_0^* A = A$ .

Retomando  $\text{Re tr}(VUH) \leq \text{Re tr}(VUH_0)$  podemos agora concluir que  $(UH_0)^* V = V$ , e analogamente  $(\hat{U}H_0)^* \hat{V} = \hat{V}$ . Como  $V = (UH_0)^* V = H_0^* U^* V = H_0^* \hat{U}^* \hat{V} = (\hat{U}H_0)^* \hat{V} = \hat{V}$  a unicidade está demonstrada.

Prova do Lema 4: Se  $A$  é definida,  $\text{Re tr}(AB^*) = \text{Re tr}(AB)$  e se  $H \in \mathcal{U}$ ,  $(H-1)(H-1)^* = 1 - H + 1 - H^*$ . Assim,  $2 \text{Re tr}(A(H-1)) = -\text{Re tr}((H-1)^* A(H-1))$ . Como

$(H-1)^*A(H-1)$  é definida, concluímos que  $\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A(H-1)) \leq 0$ , ou, equivalente  $\operatorname{Re} \operatorname{tr}(AH) \leq \operatorname{tr}A$ . A igualdade vale se e só se  $\operatorname{tr}((H-1)^*A(H-1)) = 0$ . Admitindo que para  $H=H_0$  a igualdade se verifica, temos que  $(H_0-1)^*A(H-1)v.v=0$ , para todo  $v \in \mathcal{V}$ . Por hipótese,  $Aw.w \geq 0$  para todo  $w \in \mathcal{V}$ . Nesta desigualdade ponha  $w = \alpha(H_0-1)v + A(H_0-1)v$  e utilize a igualdade anterior para obter:  $0 \leq w.Aw = 2\alpha A(H_0-1)v.A(H_0-1)v + A(H_0-1)v.AA(H_0-1)v$ , para todo  $\alpha$  real. Então  $A(H_0-1)v=0$  para todo  $v \in \mathcal{V}$ , ou melhor,  $AH_0=A$ . Tomando nesta última igualdade o adjunto em ambos os lados, temos a tese:  $H_0^*A=A$ .

## REFERENCIAS

1. G.Grioli, "Una Proprietà di Minimo nella Cinematica delle Deformazioni Finite", Boll.Un.Mat.Ital., vol.2, 1940, p.p. 452-455.
2. J.von Neumann, "Some Matrix-Inequalities and Metrization of Matrix-Space", Collected Works, vol. IV, Pergamon, 1962, p.p. 205 - 219
3. L.C.Martins, P.Podio Guidugli, "An Elementary Proof of the Polar Decomposition Theorem", The Am.Math.Monthly, a aparecer.



# ADAPTAÇÃO DO MODELO CLÁSSICO DE EKELUND AO CÁLCULO DA CARGA DE LAMINAÇÃO A FRIO DE ALUMÍNIO COMERCIAL

EDSON MONTEIRO

DEPTO. ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ, RIO DE JANEIRO.

## SUMÁRIO

É proposta, por analogia com o modelo de Ekelund para os aços, uma relação expedita para o cálculo da carga necessária à laminação plana à temperatura ambiente de alumínio comercial de composição química conhecida. O empirismo da relação proposta decorreu de experimentos em compressão plana redundando em pequenas adaptações na expressão clássica de Ekelund, particularmente na sub-expressão que define a resistência média ao escoamento em condições de deformação plana. Aparentemente, os conteúdos de Mg, Si e Fe presentes na liga em teores individualmente superiores a 0,08% influenciam significativamente a resistência ao escoamento naquelas condições, e por extensão, a carga de laminação.

## SIMBOLOGIA

- R : raio do cilindro laminador (mm)  
 $h_1$  : espessura inicial do material (mm)  
 $h_2$  : espessura final do material (mm)  
 $\Delta h = h_1 - h_2$   
 $A = \sqrt{R \cdot \Delta h}$   
 $B = \sqrt{\Delta h / R}$   
 $b$  : largura média do material (mm)  
 $\alpha$  : ângulo do arco de contato  
 $\theta$  : ângulo correspondente a qualquer seção do trecho material compreendido entre os arcos de contato definidos pelos cilindros laminadores.  
 $Q$  : trata-se de uma expressão inserida como fator na relação do critério de Sims, que envolve apenas aspectos geométricos do processo de laminação.

minação da carga de laminação, desde Von Karman, passando por Smith e Tselikov, até Nadal, partem da equação diferencial de equilíbrio de um elemento infinitesimal vertical situado na porção do material compreendida entre os arcos de contato definidos pelos cilindros laminadores [1].

Orowan, por sua vez, desenvolveu estudos teóricos a partir das investigações feitas por Prandtl sobre a compressão de amostras entre duas superfícies rugosas, planas e paralelas.

Sims, reunindo conclusões das duas origens, estabeleceu a relação (1), na qual se reserva ao fator  $k$  a representatividade do material a laminar.

$$P = k \cdot b \cdot Q \cdot A \quad (1)$$

## INTRODUÇÃO

Os métodos teóricos empregados para deter

O fator  $k$ , denominado resistência média à deformação plana homogênea, é definido pela relação (2).

$$k = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} k_p \cdot d\theta \quad (2)$$

Nesta relação,  $k_p$  é a resistência à deformação plana homogênea, que para materiais isotrópicos pode ser calculada a partir da equação (3),

$$k_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot k_h \quad (3)$$

sendo  $k_h$  a resistência à deformação homogênea do material isotrópico quando submetido a um estado de tensões uniaxial.

Dos métodos empíricos, nos quais se perfilam os de Gubkins e Tselikov, tem sido mais empregado o estabelecido por Ekelund em suas versões corrigidas e adaptadas por Mojiljanskij, Witkowitz e Tschishikov [2]. Nestes métodos, ao contrário do teórico de Sims, o valor da resistência à deformação plana homogênea não provém dos resultados de ensaios mecânicos a que o material a laminar seja submetido, mas, de expressões empíricas cujas variáveis são a temperatura do processo e a composição química parcial do material.

É evidente a vantagem oferecida pelo método empírico sobre o método teórico, decorrente do fato de que aquele dispensa custos acessórios de experimentação e coleta de dados de comportamento mecânico. Além disso, mesmo que não fossem significativos tais custos, os resultados dos ensaios poderiam vir a ter pouca ou nenhuma significação, visto a característica fortemente anisotrópica dos materiais industriais normalmente laminados, contraindicando o uso da relação (3). Trabalho anterior [3] já considerara exaustivamente sobre as limitações do uso desta última relação nos casos práticos, não somente devido a anisotropia citada, como também pelas inconveniências inerentes aos ensaios uniaxiais quando se desejam obter valores de tensões de escoamento em níveis de deformação elevados, isto é, compatíveis com as reduções de espessura desejadas na laminação a cada passe.

Tais considerações não afastam, contudo, o

interesse de determinação experimental do valor de  $k_p$ . Certamente, como já foi anteriormente afirmado [4], a própria laminação seria um veículo capaz de definir o  $k_p$  de cada material, não fossem as dificuldades que novos ensaios impoem as condições industriais pre-estabelecidas e o caráter de conformação estacionária [5] inerente ao processo. Assim, o caminho experimental mais tentador ao se pretender buscar  $k_p$  de cada material, é simular em escala de laboratório o comportamento do mesmo diante de estados de tensão e temperatura similares aqueles do processo real. São várias as contribuições neste sentido, e pelo menos desde 1971 diversas simulações a partir do Ensaio Ford [6] têm permitido concluir sobre aquele parâmetro para alguns Aços Inoxidáveis [7], ligas de Alumínio comercial [4], [8], Zinco e Magnésio [8], todas realizadas à temperatura ambiente.

Ocorre que, ainda que tais ensaios tenham atingido um estado de perfeito domínio operacional que lhes garanta fidelidade de resultados, não há como negar que os mesmos são trabalhosos, parecem exigir cuidados especiais na preparação dos corpos de prova [9], fatores que por si sô se contrapõem as rotinas normais das áreas de processamento. Se, contudo, os materiais em geral se comportassem em deformação plana pouco sensíveis a pequenas modificações da composição química peculiar às respectivas famílias, possivelmente uma discreta amostragem ensaiada por compressão plana pudesse vir a revelar com segurança aquele parâmetro representativo da família. Porém, como já previra a formulação empírica de Ekelund para os Aços, relação (4), corrigida por Mojiljanskij,

$$k_p = (18 - 0,012 \cdot T^{\circ}C) (1,4 + C\% + Mn\% + 0,3Cr\%) \quad (4)$$

variações toleradas na composição química de um Aço classificado normativamente [10], são capazes de impor valores de  $k_p$  numa mesma família, com diferenças próximas de 20%, conforme atesta a Tabela 1.

Tabela 1 - Valores de  $k_p$  para os limites de C e Mn tolerados no Aço ABNT 1010, calculados conforme Ekelund (4) para a temperatura de 30°C.

Composição tolerada do Aço ABNT 1010	$k_p$ (kgf/mm <sup>2</sup> )
C = 0,08% , Mn = 0,30%	31,40
C = 0,13% , Mn = 0,60%	37,57

Este último fato, pelo menos quanto aos aços, descarta a idéia de amostragem. Isto se tornou mais flagrante depois que Witkowitz comprovou, segundo Trinks [2], que o erro cometido pelo critério de Ekelund modificado era inferior a  $\pm 5\%$ , valor de menor amplitude que a diferença entre os valores de  $k_p$  assinalados no exemplo da Tabela 1.

A evidência da vantagem do emprego do método de Ekelund para os aços, decorrente das razões acima, sugeriu a busca de um possível similar comportamento no caso da laminação de ligas de alumínio comercial, em relação as quais já se acumulara suficientes informações que permitissem com segurança a determinação experimental de  $k_p$  através de simulações por Ensaio Ford. No presente trabalho, três diferentes ligas de alumínio comercial foram dosadas quimicamente, não apenas para sua identificação, como também para que se tornasse possível averiguar a influência da composição resultante sobre o comportamento da liga em laminação. Tal influência se refletiria, caso existente e detetável, através de uma relação cujas variáveis fossem os teores de elementos químicos presentes, e cujo valor numérico resultante fosse a resistência à deformação plana homogê

nea,  $k_p$ . A confirmação da validade de  $k_p$  assim determinado decorreria de sua obtenção experimental através ensaios de laboratório simuladores da laminação.

#### TÉCNICA EXPERIMENTAL

A Tabela 2 assinala a composição química das ligas de alumínio comercial empregadas no experimento, que para cada liga representa o valor médio entre vinte determinações por elemento.

A fim de submeter as ligas a ensaios de compressão plana, foram preparadas amostras com a geometria revelada pela Figura 1, sendo suas superfícies obtidas por torneamento. Todas as amostras das diferentes ligas foram recozidas a 450°C durante 90 minutos.

Os ensaios de compressão plana foram realizados conforme técnica já empregada em trabalhos anteriores [9], tendo sido utilizado teflon em fitas com espessura de 0,1mm como recurso lubrificante na interface ferramenta-amostra. A velocidade inicial dos diferentes ensaios foi de  $3,5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , e a ferramenta empregada constitui a fotografia da Figura 2.

Tabela 2 - Composição química das ligas experimentadas, percentagens em peso.

Ligas	Mg	Si	Fe	Mn	Zn	Al
1	0,42	0,29	0,18	0,007	0,004	99,09
2	0,32	0,15	0,09	0,003	0,002	99,43
3	0,21	0,32	0,09	0,004	0,003	99,37

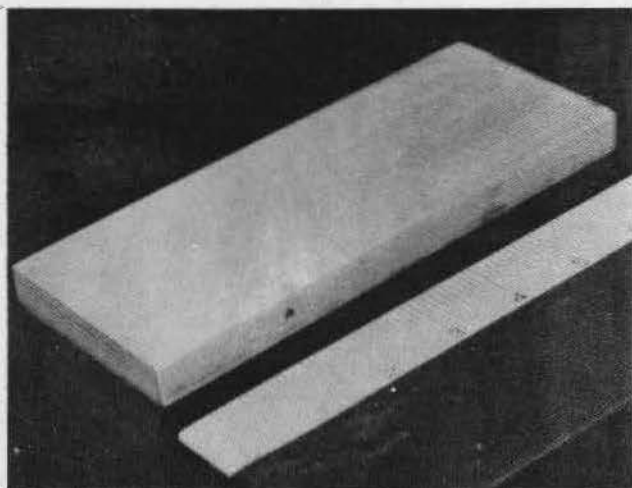


Fig. 1 - Amostras paralelepipedais para compressão plana.

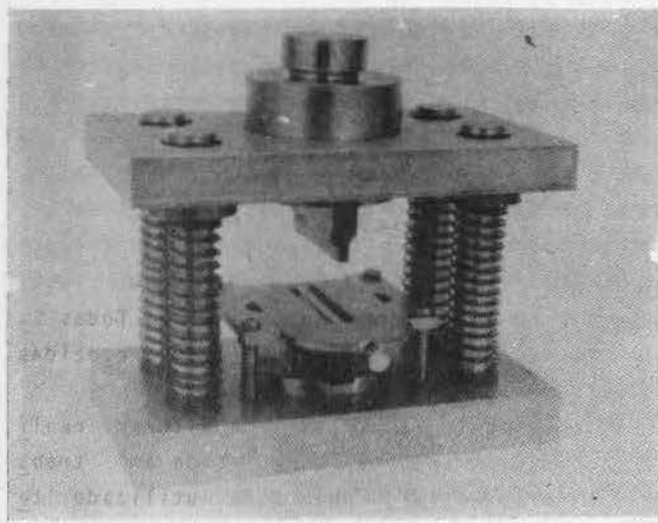


Fig. 2 - Dispositivo empregado nos ensaios de compressão plana.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 3 mostra o resultado dos ensaios de compressão plana através as curvas ajustadas pela equação (5), a partir dos valores experimentais de  $\sigma$  e  $\epsilon$ .

$$\sigma = \sigma_0 + K \cdot \epsilon^n \quad (5)$$

É sabido que aquela relação se ajusta bem aos resultados imediatos do experimento [3], [4], e no caso dos ensaios deste trabalho as equações de ajustagem redundaram em coeficien

tes de correlação de 99%, assumindo para cada liga os parâmetros constantes da Tabela 3, até deformações verdadeiras na direção de compressão da ordem de 10%.

Tabela 3 - Equações de ajustagem tipo  $\sigma = \sigma_0 + k \cdot \epsilon^n$  para os ensaios de compressão plana das ligas experimentais.

Ligas	Equação ajustada
1	$\sigma = 2,17 + 22,8 \cdot \epsilon^{0,5680}$
2	$\sigma = 1,45 + 16,4 \cdot \epsilon^{0,5245}$
3	$\sigma = 1,23 + 12,7 \cdot \epsilon^{0,5030}$

Do resultado das ajustagens decorre ter havido influência da composição química no comportamento mecânico, evidência mais sensível caso sejam diretamente confrontados os valores de  $\sigma$  para valores de  $\epsilon$  particulares (0,2% e 3%), conforme a Tabela 4.

Tabela 4 - Valores de  $\sigma$  em função de  $\epsilon$  a partir das equações de ajustagem (kgf/mm<sup>2</sup>)

Ligas	$\sigma(\epsilon=0,2\%)$	$\sigma(\epsilon=3\%)$
1	2,91	5,28
2	2,08	4,06
3	1,79	3,41

Em trabalho bem amplo, Taghvaipour e Mellor [8] obtiveram para alumínio comercial recozido um valor de  $\sigma$  igual a 5,68 kgf/mm<sup>2</sup> para um  $\epsilon=3\%$ , cerca de 7% acima do valor da liga 1 deste experimento. É possível que os citados experimentadores tenham operado com amostras de superfície não torneada, isto podendo ter causado um resultado mais elevado para  $\sigma$ , pelos motivos expostos em trabalho recente [9]. De qualquer forma não há naquele trabalho [8] citação a respeito da composição química da liga empregada, e pelo que demonstra a Figura 3 em

simultaneidade com os dados da Tabela 2, o conteúdo de Mg crescente tende a aumentar a resistência à deformação plana homogênea, podendo ser esta a causa do valor mais elevado de  $k_p$  encontrado naquela referência.

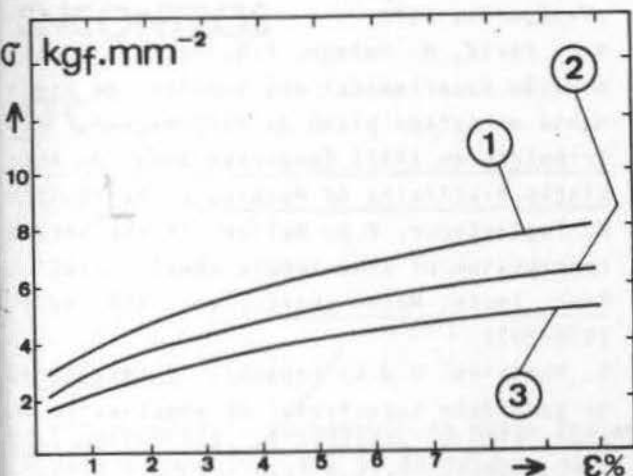


Fig. 3 - Curvas ajustadas dos ensaios de compressão plana. Cada número (1, 2 e 3) corresponde à liga de mesma ordem.

Analisando a relação (4) de Ekelund para os aços, é constatada sua dependência de um fator térmico, que no atual trabalho ficaria reduzido a um simples número 17,64, caso fosse adotado para temperatura ambiente um valor de 30°C. A inconveniência desta adoção é irrelevante se forem comparados os números igualmente obtidos para as temperaturas de 20°C e de 40°C, bem supostamente consideradas como limites da temperatura ambiente do presente experimento. Para 20°C a diferença em relação a 17,64 é inferior a 7% no fator (17,76), e igualmente para 40°C (17,52). Deste posicionamento, foram tentadas algumas relações para  $k_p$  análogas ao modelo de Ekelund, sendo substituída a expressão de seu primeiro fator, por 17,64 o que pressupõe  $k_p$  à temperatura ambiente. Os valores de  $k_p$  assim tentados devem corresponder ao início do escoamento, aqui suposto para  $\epsilon=0,2\%$  [3].

Das relações tentadas, resultou mais adequada a que se segue

$$k_p = 17,64 \left[ 0,3Mg\% + 0,1(\Sigma Si\%Fe\%) \right] \quad (6)$$

onde estão ausentes Mn e Zn, por sua baixíssima participação na liga.

Os valores  $k_p$  obtidos a partir da relação proposta constam da Tabela 5, onde são reproduzidos para fins de comparação, os  $\sigma$  ajustados de cada liga para  $\epsilon=0,2\%$ .

Tabela 5 - Tensão limite de escoamento em condições de deformação plana, a partir da relação proposta ( $\text{kgf}/\text{mm}^2$ ).

Ligas	$\sigma$ da relação	$\sigma$ ajustado	Diferença %
1	3,05	2,91	4,6%
2	2,12	2,08	1,9%
3	1,83	1,79	2,2%

As diferenças encontradas parecem ser irrelevantes quanto à incorreção induzida pela relação proposta sobre o valor de  $k_p$ . Entretanto, como a relação de Ekelund abrange outros empirismos, convinha testar em ensaios de laminação reais, ligas como as deste experimento, visando quantificar o erro que efetivamente se possa estar cometendo com a adoção da relação (6).

#### CONCLUSÕES

Em sendo atestado após experimentos reais de laminação, que o erro cometido pela adoção do modelo básico de Ekelund com  $k_p$  calculado pela relação aqui proposta, é desprezível, torna-se possível prever a carga de laminação à temperatura ambiente de ligas de alumínio comercial sem a realização acessória de ensaios de comportamento mecânico.

Nas ligas ensaiadas no presente experimento o Mg pareceu sensibilizar mais intensamente o comportamento mecânico das mesmas, que os elementos Fe e Si. Dos resultados obtidos para a resistência à deformação plana homogênea decorreu que o aumento do conteúdo de Mg, no caso da ordem de 100% entre as ligas 3 e 1, provocou um acréscimo superior a 50% nas tensões de

escoamento respectivas, tomadas para  $\epsilon=0,2\%$  e  $\epsilon=3\%$ .

#### AGRADECIMENTOS

Ao amigo e mestre Dr. Gustau Ferran, a quem devemos os passos iniciais nesta série de trabalhos, e à FINEP pelos recursos necessários a presente pesquisa dentro do projeto de financiamento ao Centro Técnico Científico da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

#### REFERÊNCIAS

1. A. Tselikov, Stress and strain in metal rolling, Mir Publishers, Moscow, 1967.
2. W. Trinks, J.M. Aires, Fundamentos de la laminacion, Graficas Osca, Madrid, 1965.
3. E. Monteiro, "Preliminares da deformação plana por compressão, a frio, do alumínio 1100 recozido", tese de Mestrado, 1977, COPPE-UFRJ, RJ.
4. E. Monteiro, G. Ferran, "Utilização da compressão plana para simular no laboratório condições de conformação industriais", Anais da V Conferência Interamericana de Tecnologia de Materiais, Secretaria da Cultura, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo e Southwest Research Institute, São Paulo, 1978, pp.93-98.
5. W.A. Backofen, Deformation processing, Addison Wesley, London, 1972.
6. E. Monteiro, G. Ferran, "Estudo preliminar da deformação plana de alumínio por compressão a frio", Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Florianópolis, 1977.
7. M.J. Faria, H. Helman, P.R. Cetlin, "Determinação experimental das tensões de escoamento em estado plano de deformação", Contribuição ao XXXII Congresso Anual da Associação Brasileira de Metais, S. Paulo, 1977.
8. M. Taghvaipour, P.B. Mellor, "Plane strain compression of anisotropic sheet metal", Proc. Instn. Mech. Engrs., vol. 185.29/71, 1970-1971.
9. E. Monteiro, H.J.L. Lepecki, "Influência da qualidade superficial de amostras de alumínio 1100 na obtenção de seus parâmetros em compressão plana", Submetido ao V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, 1979.
10. "Classes e códigos AISI dos aços para construção mecânica", série Normalização 202. V.1-DR, Souza Marques Engenharia, volume 2, 1976, pp. 7-12.

**CONGRESSOS****ENCONTROS****ETC...****A- Nacionais****1- VII Encontro - Escoamento em Meios Porosos**

Data e Local: 8, 9 e 10 de Outubro de 1979  
Aracaju - Sergipe

Envio de Trabalhos: data limite, 15 de Agosto de 1979

**Correspondência:**

VII Encontro

Escoamento em Meios Porosos

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Universidade Federal de Sergipe

Rua Vila Cristina, 1051

43000 Aracaju Sergipe Brasil

**2- V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**

Data e Local: 12 a 15 de Dezembro de 1979  
Campinas - São Paulo

**Correspondência:**

Prof. Hans Ingo Weber

Departamento de Engenharia Mecânica

UNICAMP - Caixa Postal 1170

13100 Campinas São Paulo Brasil

**3- II Escola de Matemática Aplicada  
Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos**

Data e Local: 7 de Janeiro a 8 de Fevereiro de 1980

Rio de Janeiro

**Correspondência:**

Prof. Raul Feijoo

Laboratório de Cálculo - CBPF

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Av. Wenceslau Braz, 71

22290 Rio de Janeiro RJ

**4- III Simposium sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil**

I Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia Civil

Data e Local: 3 a 5 de Dezembro de 1979

Porto Alegre - Rio Grande do Sul

**Correspondência:**

Sra. Maria Ines G. dos Santos

Curso de Pós-Graduação de Engenharia Civil

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Av. Oswaldo Aranha, 99, 3º andar, P.A.

Rio Grande do Sul

**B- Internacionais****1- Conferência Internacional de Elementos Finitos em Biomecânica**

Data e Local: 18 a 21 de Fevereiro de 1980

Tucson Arizona U.S.A.

**Áreas de Interesse:**

- Mecânica de Tecidos Biológicos
- Escoamento de Fluidos Biológicos
- Determinação de Propriedades em Materiais Biológicos
- Simulação por Elementos Finitos
- Acidentes em Veículos

**Correspondência:**

Prof. Bruce R. Simon

Department of Aerospace and Mechanical Engineering

University of Arizona  
Tucson, AZ 85721  
U.S.A.

São Francisco, California  
U.S.A.

2- II Simpósio Internacional sobre Novos Desenvoltimentos em Análise Numérica para Ciências Aplicadas

Data e Local: 16 a 20 de Junho de 1980  
Montreal - Canada

Áreas de Interesse:

- Técnicas não Convencionais de Análise Numérica em todas as Áreas de Engenharia

Correspondência:

Dr. T.A. Cruse  
Pratt & Whitney Aircraft  
East Hartford - Connecticut 06108  
U.S.A.

3- XV Congresso Internacional de Mecânica Teórica e Aplicada (ICTAM)

Data e Local: 17 a 23 de Agosto de 1980  
Toronto - Canada

Envio de Trabalhos: data limite, 4 de Fevereiro de 1980

Correspondência:

K. Charbonneau  
Executive Secretary  
ICTAM TORONTO  
c/o National Research Council of Canada  
Ottawa, Canada  
K1A 0R6

4- II Congresso Canadense de Construção

Data e Local: 15, 16 e 17 de Outubro de 1979  
Toronto - Canada

Envio de Trabalhos: apenas trabalhos convidados serão apresentados

Correspondência:

Mrs. Lois Baignée  
Executive Secretary, Organizing Committee  
Second Canadian Building Congress  
National Research Council of Canada  
Ottawa, Ontario  
K1A 0R6

5- VI Conferência Interamericana de Tecnologia de Materiais (IACMT-6)

Data e Local: 12 a 15 de Agosto de 1980

Correspondência:

Dr. J. Le May  
Metallurgical Laboratory  
General Purpose Building  
University of Saskatchewan  
Saskatoon, Canada S7N 0W0

6- ASLE/ASME 1979 Lubrification Conference

Data e Local: 16 a 18 de Outubro de 1979  
Dayton, Ohio, U.S.A.

Correspondência:

Mr. Paul Santella  
ASME  
345 East 47th Street  
New York, New York 10017

7- 22nd ICES USERS GROUP

International Conference  
Data e Local: 1 a 3 de Outubro de 1979  
Montreal, Quebec, Canada

Correspondência:

Dr. S. Shrivastava  
Department of Civil Engineering and Applied Mechanics  
McGill University  
817 Sherbrooke St. W.  
Montreal, PQ, Canada H3A 2K6



## LIVROS

## PERIÓDICOS

## RELATORIOS

J.V. Beck & K.J. Arnold - "Parameter Estimation in Engineering and Science", Wiley-Interscience (1977)

Na simulação matemática de fenômenos físicos, alguns parâmetros (ou propriedades) dos sistemas devem ser determinados a priori. Para tanto, informações sobre o processo de determinação são necessárias para o planejamento e análise das experiências.

Baseado no trabalho do Prof. Beck, o livro apresenta métodos para a determinação de parâmetros, estimativas sobre a precisão destas determinações e dados para o desenvolvimento de modelos matemáticos mais representativos. Os fundamentos estatísticos necessários são abordados em dois capítulos.

Apesar do caráter geral do texto, os autores comentam com frequência dificuldades e características dos problemas de transmissão de calor.

No todo, o livro é útil para todos os interessados na modelagem de fenômenos físicos.

VOL II

ABRIL 1980

N-1

**REVISTA**  
**BRASILEIRA DE**  
**CIÊNCIAS**  
**MECÂNICAS**

PUBLICAÇÃO TÉCNICO - CIENTÍFICA DA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, destinada a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de engenharia mecânica e mecânica teórica. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes, obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se, em alguns casos, publicação em anais de Congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade do Editor Responsável e do Conselho Editorial.

Os trabalhos devem ser escritos em português, espanhol ou inglês. As normas detalhadas para a datilografia e montagem do trabalho, bem como as folhas padrão, devem ser solicitadas ao Editor Responsável no endereço abaixo.

L. Bevilacqua  
Deptº de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marques de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - RJ

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas não excedendo a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas cópias reduzidas - aproximadamente 28x12cm - para o Editor Responsável ou um dos membros do Conselho Editorial, com uma carta de encaminhamento contendo o título do trabalho, o nome(s), instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es). Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

This journal is published by the ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS aiming the diffusion of meaningful results of scientific research and technological development in the fields of mechanical engineering, applied and theoretical mechanics. Short communications based on well-known theories and techniques presenting meaningful contributions to science and/or technology will be published under the title "Notas Técnicas".

The submitted papers should not have been published elsewhere, except for some special cases of papers appearing in Proceedings of Congress or Meetings.

Refereeing the contents of paper will take into account originality, contribution to science and technology, clearness of style, adequacy of the subject and quality of typing. The final decision concerning recommendation for publication is responsibility of the Editor in Chief and the Editorial Board.

Papers may be written in Portuguese, Spanish or English. Detailed instructions for typing and preparation of the papers are available under request in the following address:

L. Bevilacqua  
Dept. Eng. Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marques de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Directions for typing must be strictly respected. Papers not exceeding 10 (ten) pages will be free of charge. Each additional page will be charged.

Two reduced copies of the originals, 28x21cm approximately, should be sent to the Editor in Chief or any other member of the Editorial Board, together with a letter containing the title of the paper, name(s), affiliation(s), and address(es) of the author(s). In any circumstance a copy of this letter must be forwarded to the Editor in Chief. Do not forward the originals before having your paper accepted for publication.

Assinatura  
Subscription

Prof. Arno Blass  
Centro Tecnológico  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Caixa Postal 476  
88.000 - Florianópolis - SC - Brasil

REVISTA

BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

VOL. II ABR. 1980 Nº 1

ABCM

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

CONSELHO DIRETOR

Arno Blass (Presidente); Hans Ingo Weber; Sérgio Colie;  
Guilherme Creus; Raul Guenther; Samir Nagi Yousri Gerges.

L. Bevilacqua  
Editor Responsável

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J. J. Espíndola

R. A. Feijoo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarani

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Editorial ..... 13

Estudo da Influência de Parâmetros do Chicoteamento de Tubu-  
lações — João N.C. Guerreiro, Abimael F.D. Loula, Augusto C.  
N.R. Galeão ..... 1

Um Modelo Elasto-Plástico de Chicoteamento de Tubulação —  
José Eudes L. Andrade, Sérgio V.G. Ribeiro, Antonio Carlos  
O. Barroso ..... 11

Sobre a Força Resistiva em Meios Porosos Anisotrópicos —  
I-Shih Liu, R. Sampaio ..... 21

Relações entre Propriedades e Micro-Estrutura de Materiais  
Bifásicos — Emílio da Silva Neto, Silvestre Nazaré, Berend  
Snoeijer ..... 25

Estudo Comparativo da Soldagem MIG-MAG do Aço SAE 1008 com  
Dois Tipos de Arames-Elérodos — Almir M. Quites, Jair C.  
Dutra, Fausto M. de Mira ..... 39

Análise de Tensões em Cascas Ortotrópicas de Revolução —  
Raul Guenther, Domingos B. Alves ..... 47

Tensões por Ação Gravitacional em uma Esfera Maciça - Aplica-  
ções para o Estudo dos Planetas — Carlos F. Martins Pamplona,  
Sidney Stuckenbruck ..... 59

Congressos e Encontros ..... al

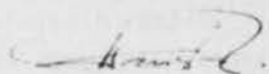
ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS  
NO CHOQUETEAMENTO DE TUBULAÇÕES

## EDITORIAL

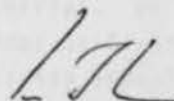
Durante o V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, realizado em Dezembro passado na UNICAMP, foram selecionados pelos participantes alguns dos trabalhos que despertaram maior interesse durante sua apresentação e que passam a ser publicados a partir deste número. O COBEM apresentou várias outras novidades, tendo deixado, de uma maneira geral, excelente impressão, tanto na sua parte técnica quanto na social. Ele reuniu 322 pessoas, 171 trabalhos tecnológicos e de pesquisa de um total de 213 autores. Estiveram presentes participantes de 9 Estados do Brasil e pesquisadores de 9 outros países. Dos participantes, 100 eram estudantes de vários Estados, mostrando que a sensibilidade que esta classe tem aos problemas de desenvolvimento tecnológico e científico é frequentemente superior à da Instituição em que estudam. A distribuição de 4 prêmios ABCM para estudantes de graduação que tenham feito um bom trabalho de iniciação científica veio coroar a participação maciça de estudantes.

Os trabalhos apresentados foram publicados em 4 volumes e ainda podem ser solicitados à Secretaria da ABCM. Este conjunto de anais representa um retrato muito razoável do potencial de pesquisa e desenvolvimento na área de Engenharia Mecânica no Brasil. Quando juntados aos anais anteriores, eles permitem uma análise evolutiva interessante, mostrando, de um lado, o de sabrochar e por outro lado, a morte da pesquisa nas Instituições brasileiras. No total houve um crescimento razoável nestes 10 anos de existência dos COBEM mas, paradoxalmente, o estágio continua embrionário. Os grupos de trabalho têm normalmente condições de sobrevivência apenas a curto prazo, tornando difíceis extrapolações e previsões.

Com o intuito de analisar os problemas de financiamento à pesquisa em Engenharia Mecânica foi realizada uma reunião à qual foram convidados muitas das Instituições que suportam ou compram pesquisa no Brasil. O documento final será apresentado em futuro boletim da ABCM. Na realidade, os problemas da classe são sobejamente conhecidos, veja-se o documento Avaliação e Perspectiva do CNPq e o Plano Nacional de Pós-Graduação, documento base para discussão, da CAPES. Se nada se faz é porque nada se deseja fazer. Quando decidirem liberar recursos para adquirir o remédio, não vão encontrar nem mais o doente.



Fausto Rodrigues FQ



Hans Ingo Weber

# ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS DO CHICOTEAMENTO DE TUBULAÇÕES

JOÃO N. C. GUERREIRO

ABIMAEI F. D. LOULA

AUGUSTO C. N. R. GALEÃO

LAB. DE CALCULO, CBPF, CNPq, RIO DE JANEIRO, RJ.

## SUMÁRIO

O problema do chicoteamento em tubulações de alta energia (pipe-whip) é estudado, admitindo-se um comportamento elasto-plástico para o material do tubo, e levando-se em conta o efeito da pressão interna. As restrições são simuladas como molas bilineares e amortecedores viscosos. Um programa geral, baseado no método dos elementos finitos, foi desenvolvido para análise do fenômeno. A influência dos parâmetros: "gap", coeficiente de amortecimento, rigidez, posicionamento da restrição e pressão interna do tubo, é estudada.

## INTRODUÇÃO

Critérios de normas, relativos à análise estrutural de tubulações nucleares [1], [2], admitem a possibilidade de ruptura brusca em tubulações de alta energia, e exigem a análise da segurança da planta em presença deste tipo de acidente. A localização dos pontos prováveis de ruptura é feita segundo critérios específicos, geralmente baseados em níveis de tensão, fadiga, imperfeições e pontos críticos da linha, tais como, conexões, joelhos e pontos terminais. Portanto, os pontos prováveis de ruptura são podem ser localizados após uma análise global da tubulação [3], [4], e uma análise local de concentração de tensões em regiões críticas.

Com a ruptura e o conseqüente escapamento do fluido, surge a força responsável pelo chicoteamento da tubulação rompida ("pipe-whip"); torna-se, então, necessário controlar os movimentos da mesma de modo a evitar maiores danos.

A análise estrutural do "pipe-whip" consiste justamente na verificação da eficiência dos dispositivos (restrições) projetados com o ob-

jetivo de limitar o chicoteamento do tubo rompido. Geralmente esta análise é restrita a um pequeno trecho da tubulação, vizinho à ruptura (análise local) [5], [6], [7], entretanto, em certos casos, pode ser necessário a consideração de situações mais gerais.

O presente trabalho tem como objetivo principal a análise da influência de alguns parâmetros relevantes do "pipe-whip", tais como pressão interna do tubo, rigidez, amortecimento e posicionamento das restrições. Nas seções seguintes apresenta-se o problema na forma variacional do princípio dos trabalhos virtuais e obtêm-se soluções numéricas usando o algoritmo de Newmark [15], para discretização no tempo e o método dos elementos finitos para discretização espacial. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando um programa automático desenvolvido especificamente para este fim [3], [8], [9].

## MODELO MECÂNICO DO "PIPE-WHIP"

Na análise estrutural deste problema, devem

ser considerados os seguintes aspectos:

- localização dos pontos prováveis de rutura;
- tipos de rutura;
- sollicitação dinâmica (força de chicoteamento);
- restrições contra "pipe-whip";
- modelo mecânico para o tubo.

Uma vez realizada a análise elástica global da tubulação e determinadas as tensões atuantes sobre a mesma, um passo seguinte no projeto de tubulações nucleares é postular pontos prováveis de rutura. Para isto as normas [1] e [2] adotam basicamente dois tipos de critérios:

a) critérios objetivos baseados em níveis de tensões admissíveis e ciclos de carga e descarga a que a tubulação estará sujeita durante a sua vida útil.

b) critérios que utilizam uma "base razoável" [2] para localização de pontos prováveis de rutura. Estes critérios são aplicáveis quando, pelos critérios anteriores, obtêm-se menos de dois pontos prováveis de rutura por ramal da tubulação, ou quando se considera que as restrições impostas pelas ruturas previstas no item (a) não são suficientes para produzirem adequada proteção contra o "pipe-whip".

As ruturas podem ser longitudinais (paralelas ao eixo do tubo) e circunferenciais (perpendiculares ao eixo do tubo). Admite-se que ruturas circunferenciais podem ocorrer em tubulações cujo diâmetro é maior que 1". Dada a ausência de costuras em tubulações de até 4" de diâmetro, admite-se que a probabilidade de rutura longitudinal destas tubulações é muito pequena e portanto não é considerada.

A força de chicoteamento ("blowdown force"), originada pelo escapamento do fluido através da rutura, é determinada em função da geometria da rutura e das condições termo-hidráulicas do fluxo. Na análise estrutural do "pipe-whip" admite-se que esta força é um dado do problema.

Conforme ressaltado anteriormente, as restrições visam limitar os movimentos do tubo rompido, de modo a evitar que este atinja equi-

pamentos vitais à segurança. Durante o funcionamento normal da planta, existe uma folga ("gap") entre a tubulação e as restrições para permitir movimentos de origem térmica e não afetar o isolamento térmico da linha, (Fig. 1). Após a rutura dá-se o choque do tubo contra a restrição; neste momento espera-se que a restrição absorva o máximo de energia cinética do tubo de sorte a pará-lo antes de atingir outros equipamentos. Tanto o tubo quanto a restrição devem experimentar deformações plásticas significativas, tendo em vista a necessidade de dissipar a energia liberada pela rutura brusca da tubulação. Para maiores detalhes ver referências [5], [7], [13].

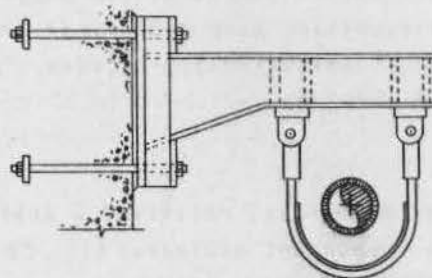


Fig. 1 - Restrição em forma de U.

Diferentes modelos têm sido propostos para a análise estrutural do "pipe-whip". Em ordem crescente de complexidade citam-se os seguintes:

- modelo massa-mola [7],
- modelo cinemático [11],
- modelo clássico de Viga [3], [8], [9],
- modelo de estado plano de tensões [7],
- modelo de membrana cilíndrica [14].

A decisão quanto à utilização de um destes modelos irá depender do grau de precisão exigido na análise do problema. É claro que modelos bidimensionais (estado plano de tensões ou membrana cilíndrica), determinam de modo mais preciso a energia dissipada por plastifi-

cação do tubo do que o modelo clássico de vigas, que por sua vez é mais preciso do que os modelos cinemático e massa-mola. Entretanto, do ponto de vista prático, uma análise bidimensional apresenta o sério inconveniente de ser computacionalmente demorada e portanto antieconômica.

Estudos comparativos, realizados anteriormente [8], [12], demonstraram uma boa concordância entre soluções obtidas com o modelo de estado plano de tensões apresentado por Ma-Bathe [7] e o modelo clássico de vigas desenvolvido nas referências [3] e [8]. Portanto, dentro dos limites de precisão exigidos numa análise de "pipe-whip", o tubo pode ser adequadamente simulado como uma viga.

No presente estudo o tubo será modelado como uma viga de comportamento elasto-plástico bilinear, as restrições contra "pipe-whip" são compostas de molas de comportamento também elasto-plástico bilinear, e amortecedores viscosos; a força de chicoteamento, sempre considerada como um dado, é uma função seccionalmente linear com o tempo. Considera-se ainda a influência da pressão interna na plastificação do tubo.

EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Desprezando a deformação por cortante e a inércia de rotação, a equação do movimento, na forma do princípio dos trabalhos virtuais, para uma viga de comprimento L, seção transversal A e massa específica ρ, sujeita a N restrições compostas de molas elasto-plásticas e amortecedores viscosos, é

$$\int_0^L \rho A \hat{\omega} \ddot{\omega} dx + \int_0^L \int_A \sigma_x \hat{\epsilon}_x dA dx + \sum_{r=1}^N H(\omega_r - G_r) C^r \dot{\omega}_r \hat{\omega}_r + \sum_{r=1}^N F^r \hat{\omega}_r = \hat{W}, \tag{1}$$

onde ω(x,t) é o campo de deslocamentos transversais da viga, ω̂(x) representa o campo de deslocamentos virtuais e ω̇\_r(t) é o deslocamento transversal no ponto onde atua a restrição r. C<sup>r</sup>, F<sup>r</sup> e G<sub>r</sub> são, respectivamente, o coeficiente de amortecimento, a força na mola e a folga ("gap") da restrição r. Ŵ é o trabalho virtual da força de chicoteamento. σ<sub>x</sub> = σ<sub>x</sub>(x,z,t)

é a tensão longitudinal, e ε<sub>x</sub> é a deformação longitudinal do tubo dada por:

$$\epsilon_x = \epsilon_0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2}$$

sendo x e z ordenadas segundo as direções longitudinal e transversal respectivamente. ε<sub>0</sub>, deformação média, é devida unicamente à consideração da influência da pressão interna, e é determinada através de equilíbrio estático na direção longitudinal. A pressão interna desloca a linha neutra e provoca assimétrica na plastificação da seção transversal da viga.

Tendo em vista a folga G<sub>r</sub> e o comportamento elasto-plástico da mola da restrição, o gráfico de F<sup>r</sup> com ω<sub>r</sub> é do tipo mostrado na figura 2. Deve-se notar que devido a plastificação da restrição, o "gap" G<sub>r</sub> é variável em função da deformação plástica. O limite elástico F<sub>e</sub><sup>r</sup> é também função da deformação plástica, quando a mola apresenta endurecimento (strain-hardening).

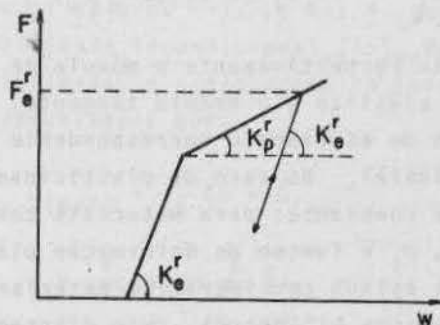


Fig. 2 - Curva força-deslocamento das restrições

A função H(s) é definida da seguinte maneira,

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } s < 0 \\ 1 & \text{para } s \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Desprezando a tensão cisalhante e considerando a tensão circunferencial σ<sub>θ</sub> gerada por uma pressão interna p, o critério de plastificação de von Mises, neste caso, fica redu



zido a,

$$F = (\sigma_x - \sigma_\theta)^2 + \sigma_x \sigma_\theta - \sigma_s^2 = 0, \quad (4)$$

onde

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{h}, \quad (5)$$

$R$  é o raio e  $h$  a espessura do tubo.

Para a lei de fluência associativa, a relação constitutiva elasto-plástica correspondente é

$$d\sigma_x = E d\epsilon_x \quad (6)$$

com,

$$E = E_e, \text{ para } \begin{cases} F < 0, \text{ (regime elástico), ou} \\ F = 0 \text{ e } (2\sigma_x - \sigma_\theta)d\sigma_x < 0 \text{ (descarregamento elástico)} \end{cases} \quad (7)$$

ou

$$E = E_p, \text{ para } F = 0 \text{ e } (2\sigma_x - \sigma_\theta)d\sigma_x \geq 0 \quad (8)$$

sendo,

$$E_p = E_e \left[ 1 - \frac{(E - E_T)(2\sigma_x - \sigma_\theta)}{2\sigma_s E_T + (E - E_T)(2\sigma_x - \sigma_\theta)} \right] \quad (9)$$

$E_e$  e  $E_T$  são respectivamente o módulo de Young do trecho elástico e o módulo tangente, e  $\sigma_s$  é a tensão de escoamento correspondente a um ensaio uniaxial. No caso de plasticidade perfeita  $\sigma_s$  é constante; para materiais com endurecimento,  $\sigma_s$  é função da deformação plástica  $E_p$ . Neste estudo consideram-se materiais elasto-plásticos bilineares, cujo diagrama tensão e deformação é do tipo mostrado na figura 3.

Tendo em vista a não linearidade do problema proposto, tanto na equação constitutiva elasto-plástica quanto no tipo de restrições consideradas, propõe-se um esquema de solução incremental e iterativo, no qual o problema original é substituído por uma seqüência de problemas lineares.

Para se obter a forma incremental do PTV entre duas configurações próximas  $n$  e  $n+1$ , de finem-se,

$$\omega(n+1) = \omega(n) + \Delta\omega,$$

$$\sigma_x(n+1) = \sigma_x(n) + \Delta\sigma_x, \quad (10a,b)$$

e considera-se a expressão do PTV relativo à configuração  $n+1$ ,

$$\int_0^L \rho \dot{\omega}(n+1) \dot{\omega} dx + \int_0^L [\sigma_x(n+1) + \Delta\sigma_x] \dot{\epsilon}_x dA dx + \sum_{r=1}^N H(n+1) C_r^r \dot{\omega}_r(n+1) \dot{\omega}_r + \sum_{r=1}^N F_r^r(n+1) \dot{\omega}_r = \dot{W}(n+1) \quad (11)$$

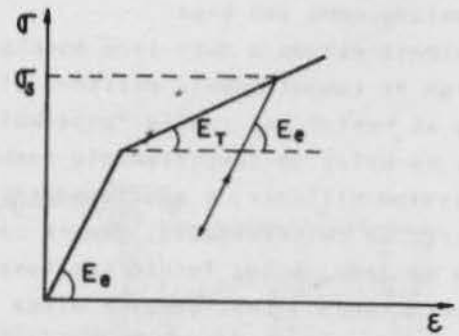


Fig. 3 - Curva tensão-deformação do tubo

Visando a linearização do problema incremental, admitem-se as seguintes aproximações:

$$\Delta\sigma_x = E(n) \Delta\epsilon_x$$

$$H(n+1) = H(n) = H[\omega_r(n) - G_r],$$

$$F_r(n+1) = F_r(n) + K_r(n) \Delta\omega_r, \quad (12a,c)$$

onde,

$$K_r(n) = 0 \text{ para } \omega_r(n) < G_r, \quad (13)$$

$$K_r(n) = K_e^r \text{ para } \begin{cases} F_r^r(n) < F_s^r \text{ ou} \\ F_r^r(n) = F_s^r \text{ e } \omega_r \dot{\omega}_r < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$K_r(n) = K_p^r \text{ para } F_r^r(n) = F_s^r \text{ e } \omega_r \dot{\omega}_r \geq 0, \quad (15)$$

introduzindo as aproximações (12a-c) na equação (11) obtém-se, então, a expressão linearizada do princípio dos trabalhos virtuais incremental,

$$\int_0^L \rho A \ddot{\hat{w}}_{(n+1)} \hat{w} dx + \int_0^L \int_A E_{(n)} \Delta \epsilon_x \hat{\epsilon}_x dA dx + \sum_{r=1}^N H_{(n)} C_{r(n+1)}^r \hat{w}_r + \sum_{r=1}^N K_{(n)}^r \Delta w_r \hat{w}_r = \hat{W}_{(n+1)} - \int_0^L \int_A \sigma_x(n) \hat{\epsilon}_x dA dx - \sum_{r=1}^N F_{(n)}^r \hat{w}_r \quad (16)$$

que será usada para determinação de soluções aproximadas do problema do pipe-whip. A solução de (16) fornece uma primeira aproximação dos incrementos de deslocamentos entre as configurações n e n+1; aproximações de ordem superior podem ser obtidas fazendo-se iterações de equilíbrio dentro de cada incremento. Define-se, então, o seguinte esquema iterativo,

$$\begin{aligned} \omega_{(n+1)}^{(k+1)} &= \omega_{(n+1)}^{(k)} + \Delta \omega^{(k)}, \\ \sigma_{x(n+1)}^{(k+1)} &= \sigma_{x(n+1)}^{(k)} + \Delta \sigma_x^{(k)} \end{aligned} \quad (17a,b)$$

que conduz à equação de iteração,

$$\int_0^L \rho A \ddot{\hat{w}}_{(n+1)}^{(k+1)} \hat{w} dx + \int_0^L \int_A E_{(n+1)}^{(k)} \Delta \epsilon_x^{(k)} \hat{\epsilon}_x dA dx + \sum_{r=1}^N H_{(n+1)}^{(k)} C_{r(n+1)}^r \hat{w}_r + \sum_{r=1}^N K_{(n+1)}^r \Delta w_r^{(k)} \hat{w}_r = \hat{W}_{(n+1)} - \int_0^L \int_A \sigma_{x(n+1)}^{(k)} \hat{\epsilon}_x dA dx - \sum_{r=1}^N F_{(n+1)}^r \hat{w}_r \quad (18)$$

onde, k=0, 1, 2... representa a ordem da iteração que está se realizando. Para k=0, faz-se,

$$\begin{aligned} \omega_{(n+1)}^{(0)} &= \omega_{(n)} \\ \sigma_{x(n+1)}^{(0)} &= \sigma_{x(n)} \end{aligned} \quad (19a,b)$$

**SOLUÇÃO NUMÉRICA**

Por simplicidade apresenta-se apenas o algoritmo correspondente ao esquema incremental simples (sem iteração), relativo à equação (16).

Para solução deste problema utilizou-se o método dos elementos finitos na discretização espacial da equação (16); o elemento utilizado foi o elemento clássico de viga, com dois

nós e dois graus de liberdade por nó (função de interpolação cúbica de Hermite). Após a discretização obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo,

$$M \ddot{\underline{D}}_{(n+1)} + \underline{C}_{(n)} \dot{\underline{D}}_{(n+1)} + \underline{K}_{(n)} \Delta \underline{D} = \underline{F}_{(n+1)} - \underline{P}_{(n)} \quad (20)$$

onde M é a matriz de massa global, constante, C<sub>(n)</sub> é a matriz de amortecimento no instante n, esta matriz é devida ao amortecimento das restrições, e pode também representar o amortecimento estrutural do tubo, considerado como sendo combinação linear das matrizes de massa e de rigidez elástica. K<sub>(n)</sub> é a matriz de rigidez tangente à configuração n. D<sub>(n+1)</sub> e Ḋ<sub>(n+1)</sub> são os vetores de acelerações e velocidades nodais na configuração n+1. ΔD é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais, entre as configurações n e n+1. O vetor de ações F<sub>(n+1)</sub> é obtido de Ŵ<sub>(n+1)</sub> e P<sub>(n)</sub> é obtido da discretização dos demais termos do segundo membro de (16).

Soluções numéricas de (20), num intervalo de tempo limitado [0,T], são calculadas usando o algoritmo implícito de Newmark. Adotou-se sempre os valores γ=1/2 e β=1/4, que fornecem estabilidade incondicional [15]. Neste caso as velocidades e acelerações no instante n+1 são aproximadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{D}}_{(n+1)} &= \frac{2}{\Delta t} \Delta \underline{D} - \dot{\underline{D}}_{(n)} \\ \ddot{\underline{D}}_{(n+1)} &= \frac{4}{\Delta t^2} \Delta \underline{D} - \frac{4}{\Delta t} \dot{\underline{D}}_{(n)} - \ddot{\underline{D}}_{(n)} \end{aligned} \quad (21a,b)$$

Substituindo (21a,b) em (20), obtém-se o sistema de equações algébricas lineares,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C_{(n)} + K_{(n)} \right] \Delta \underline{D} &= \underline{F}_{(n+1)} - \underline{P}_{(n)} + \\ &+ M \left[ \frac{4}{\Delta t} \dot{\underline{D}}_{(n)} + \ddot{\underline{D}}_{(n)} \right] + C_{(n)} \dot{\underline{D}}_{(n)} \end{aligned} \quad (22)$$

cuja solução fornece os incrementos de deslocamentos entre dois instantes próximos t<sub>(n)</sub> e t<sub>(n+1)</sub> = t<sub>(n)</sub> + Δt. As velocidades e acelerações no instante t<sub>(n+1)</sub> são calculadas através das equações (21a,b).

## EXEMPLOS NUMERICOS

Os resultados apresentados a seguir visam a análise da influência de parâmetros do pipe whip e o estudo de um exemplo geral que ilustra a versatilidade do programa desenvolvido.

## Estudo da influência de parâmetros.

Analisou-se o problema apresentado na figura 4, variando-se a pressão interna e o comprimento do tubo, o posicionamento das restrições e os parâmetros relativos à mola e ao amortecedor. Nesta análise foram utilizados seis elementos iguais, na discretização de elementos finitos, exceto no estudo relativo ao posicionamento da restrição, onde são utilizados sete elementos. Em todos os casos, o intervalo de tempo de integração utilizado, foi  $5 \times 10^{-5}$  s.

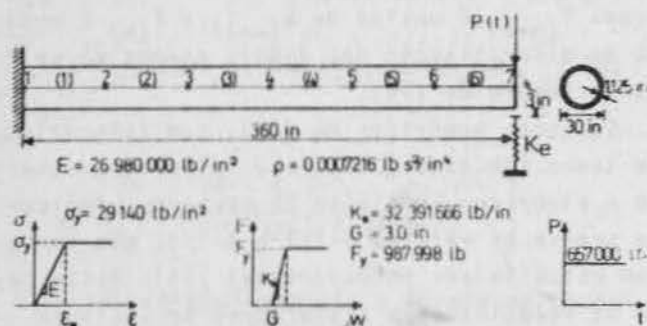


Fig. 4 - Características do exemplo analisado

## a) - Influência do gap e do amortecimento da restrição.

Na figura 5 estão apresentadas histórias no tempo do deslocamento transversal da extremidade livre do tubo, onde está aplicada a força de chicoteamento e posicionada a restrição, correspondentes a folgas ("gap") de 1.5 e 3.0 polegadas, e para diferentes coeficientes de amortecimento da restrição; O coeficiente usado como referência é  $\bar{C} = 380.27$  lbf.s/in. Observa-se que a redução do "gap" implica em redução do deslocamento máximo do tubo, e do tempo de parada. Efeito semelhante é verificado com o crescimento do coeficiente de amortecimento. A força do amortecedor surge de forma brusca, uma vez que no instante do choque o tubo possui grande velocidade. Entre-

tanto, a ação isolada do amortecedor, sem a mola, não é capaz de parar o tubo porque quando a velocidade tende a zero, a reação no amortecedor também tende a zero, ficando a força de chicoteamento para ser equilibrada apenas pelo tubo.

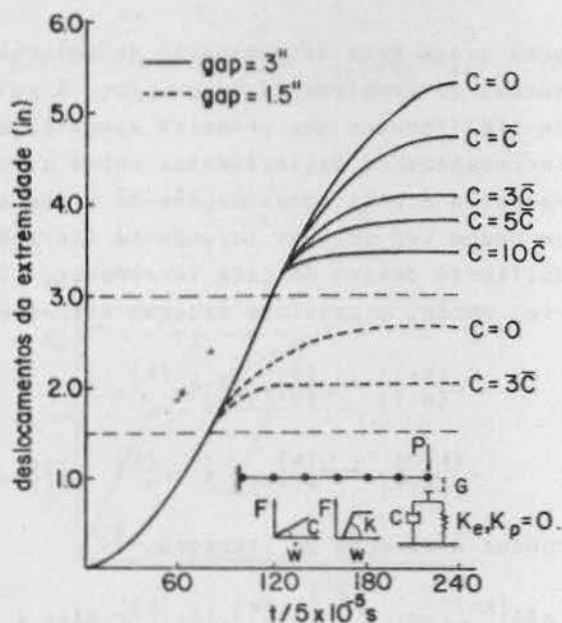


Fig. 5 - Influência do "gap" e do amortecimento da restrição

## b) - Influência da rigidez da restrição.

Resultados referentes a diferentes valores de rigidez elástica e do coeficiente de amortecimento da mola da restrição, são apresentados nas figuras 6 a 7. Da análise dos resultados apresentados na figura 6, conclui-se que aumentando o coeficiente de endurecimento da restrição, diminui o deslocamento máximo do tubo. Porém, o sistema passa a oscilar em torno de uma posição final, como consequência de menores deformações plásticas da mola e portanto, de redução da sua capacidade de dissipação de energia. Maior rigidez elástica da mola, figura 7, implica em menores deslocamentos máximos e menores tempos de parada, no entanto, como será visto na tabela I, aumenta as deformações relativas do tubo que passa a absorver uma maior porcentagem de energia.

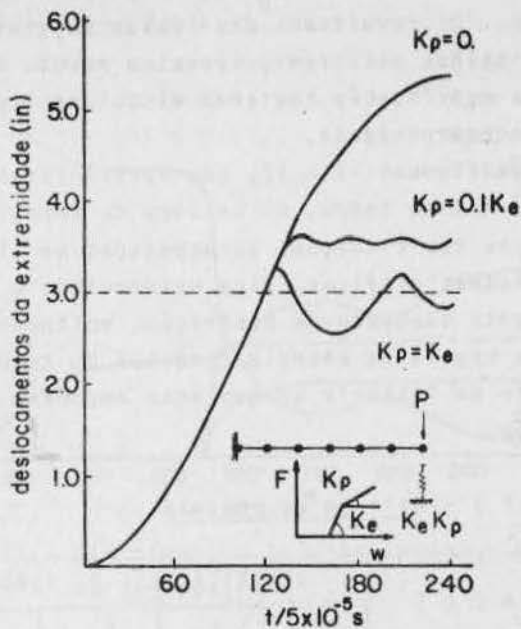


Fig. 6 - Influência do coeficiente de endurecimento da restrição

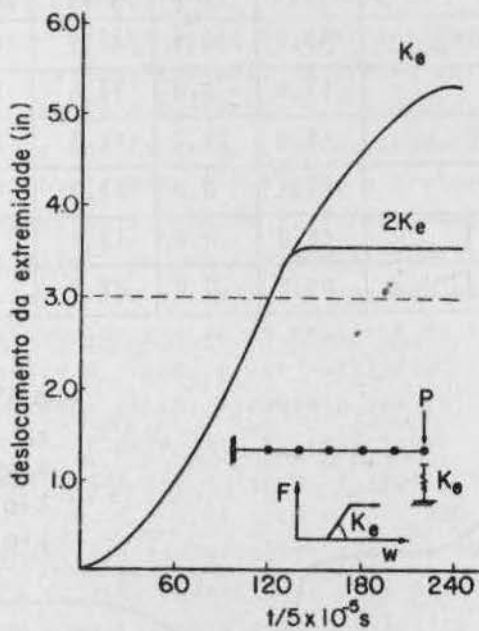


Fig. 7 - Influência da rigidez elástica da restrição

- Variação da posição da restrição e do comprimento do tubo.

Na figura 8, procura-se evidenciar a importância que tem a previsão dos pontos de ruína e o adequado posicionamento das restrições.

Para tanto, apresenta-se o estado do tubo (deslocamentos e velocidades), para diferentes posicionamentos da restrição, no instante em que se anula a velocidade do ponto onde ela está colocada. Nota-se que à medida em que cresce a distância entre o ponto de aplicação da força e o ponto onde se encontra a restrição, aumentam os deslocamentos do tubo, o que acarretará numa redução da eficiência da restrição.

Foram analisados, ainda, tubos com as mesmas características daquele da figura 4, porém com diferentes comprimentos. As restrições são idênticas às anteriores, com  $K_p = 0.1K_e$  e  $C = 0$ . Neste estudo, fig. 9, observa-se um deslocamento das regiões plastificadas do tubo, em direção ao apoio, à medida em que cresce o seu comprimento. Para os três casos analisados, os deslocamentos máximos, tempos de parada e as reações máximas da mola, são praticamente iguais, e que significa que os três tubos absorveram praticamente a mesma quantidade de energia.

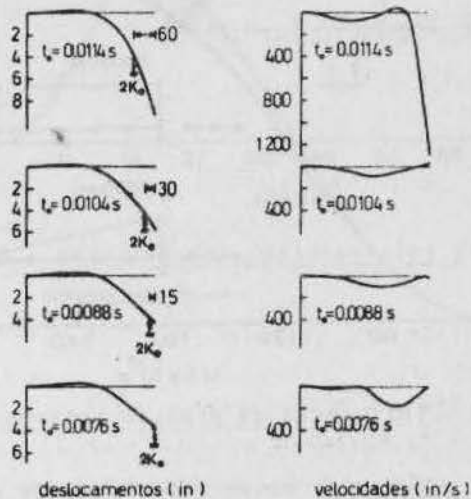


Fig. 8 - Deslocamentos e velocidades do tubo, para diferentes posicionamentos da restrição.

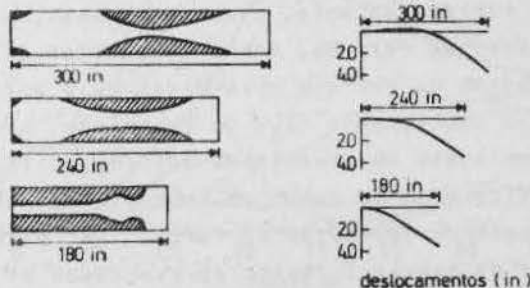


Fig. 9 - Regiões de plastificação e deformadas para tubos de diferentes comprimentos.

## d) - Influência da pressão interna

Na figura 10 procura-se mostrar a influência da consideração da pressão interna, sobre os deslocamentos do tubo. A tensão circunferencial gerada pela pressão interna, torna assimétrico o critério de plasticidade, reduzindo a rigidez da seção e a sua capacidade de absorção de energia. O surgimento de regiões plásticas com menores tensões longitudinais, implica em maiores deslocamentos do tubo conforme mostrado na figura 10. A maior influência da distribuição trapezoidal de pressão, deve-se ao fato de que no exemplo analisado, a região central do tubo, é aquela que apresenta maior grau de plastificação.

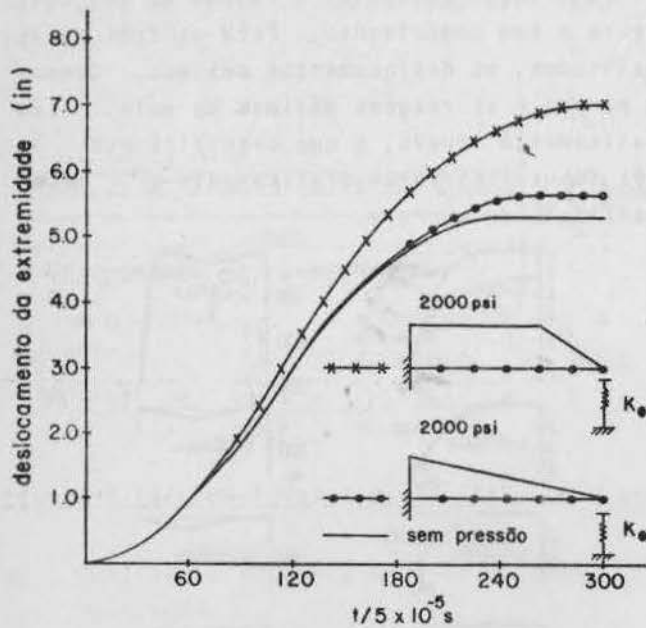


Fig. 10 - Influência da pressão interna

Para alguns dos casos anteriormente estudados, mantendo-se fixas as características do tubo e a força de chicoteamento, e variando-se a rigidez da mola, o amortecimento, o gap e a pressão interna, foram calculadas as porcentagens de energia absorvidas pela mola ( $E_M$ ) e pelo amortecedor ( $E_A$ ) da restrição, e as porcentagens de energia de deformação ( $E_D$ ) e cinética ( $E_C$ ) do tubo, no instante de parada do ponto de aplicação da força. Na primeira linha da tabela I, estão apresentados os resultados referentes ao caso em que  $G = 3''$ ,

$K_e = 32391666$  lbf/in,  $K_p = 0$ ,  $C = 0$  e sem pressão interna. Os resultados das linhas seguintes, foram obtidos utilizando-se estes mesmos dados, com a modificação indicada na coluna 1 da linha correspondente.

Nas figuras 11 e 12, são apresentadas as histórias no tempo, do balanço de energia para duas das situações apresentadas na tabela I. Nestes gráficos, fica evidenciado o funcionamento adequado da restrição, notando-se uma queda brusca na energia cinética do tubo, a partir do instante em que este encontra a restrição.

TABELA I - Balanço de energia

D A D O S	% RESTRIÇÃO		% TUBO	
	$E_M$	$E_A$	$E_D$	$E_C$
$G = 3''$ , $K_e, K_p = 0$ . $C = 0$ ; $p = 0$	65,0	0,0	23,0	12,0
$2K_e$	45,1	0,0	43,0	11,9
$K_p = 0,1K_e$	45,7	0,0	45,1	12,2
$C = \bar{C}$	53,8	9,4	24,6	12,2
$C = 10 \bar{C}$	19,3	29,7	38,5	12,5
$G = 1.5''$	64,1	0,0	21,7	14,2
$p \neq 0$ .	86,0	0,0	12,6	1,4
$p \neq 0$ .	69,8	0,0	23,3	6,9

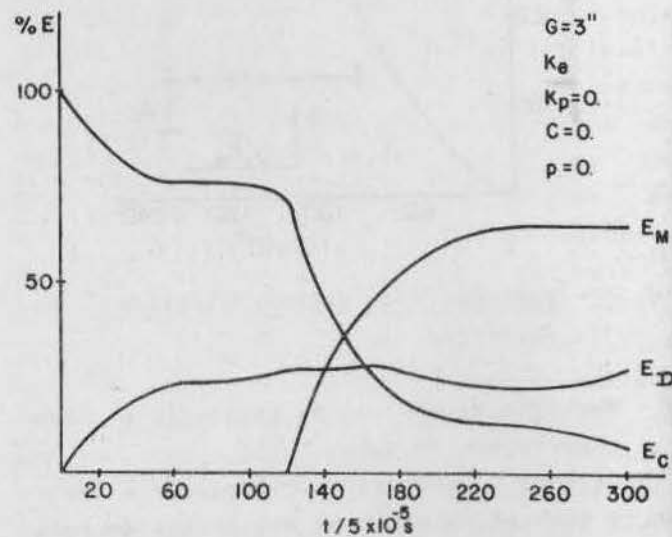


Fig. 11 - Distribuição da energia do sistema, em diferentes instantes.

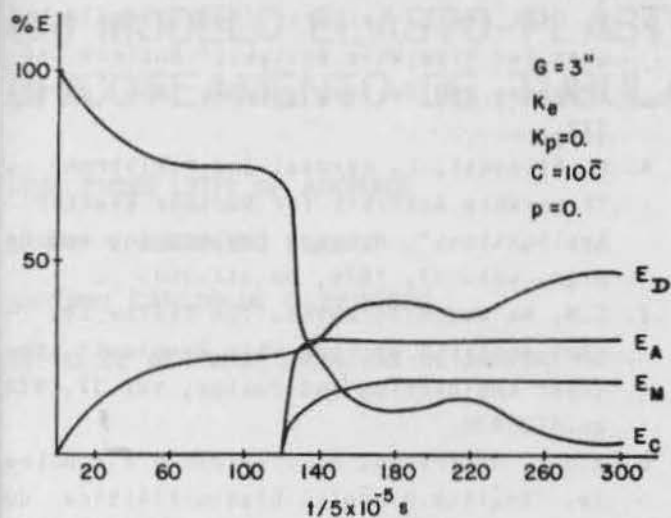


Fig. 12 - Distribuição da energia do sistema, em diferentes instantes

Exemplo geral.

O exemplo apresentado a seguir, tem como finalidade ilustrar algumas características do programa desenvolvido. Procurou-se simular um trecho de tubulação da qual teria havido uma rutura longitudinal. O trecho considerado tem 16m de comprimento e foi dividido em 8 elementos com 2m cada, como mostrado na figura 13. O elemento 6 é rígido e pretende simular uma válvula. No nó 9, foram introduzidos apoios elásticos com constantes iguais a 32 tf/cm e 1100 tf.cm/rd, e que têm por finalidade simular a ação do restante da tubulação, sobre o trecho a ser analisado. A história da força de chicoteamento (em tf) está plotada na figura 13. As restrições contra pipe-whip, têm gap = 7,5cm,  $K_e = 80\text{tf/cm}$ ,  $K_p = 8\text{tf/cm}$ ,  $C = 1\text{tf.s/cm}$  e  $F_e = 200\text{tf}$ . O tubo analisado tem diâmetro igual a 60cm e espessura de 3cm. Admitiu-se para o material do tubo um comportamento elasto-plástico bilinear com  $E = 2.1 \times 10^3\text{tf/cm}^2$ ,  $E_T = 0,5E$ ,  $T = 4.2\text{tf/cm}^2$  e massa específica  $\rho = 7 \times 10^{-9}\text{tf.s}^2/\text{cm}^4$  (para a válvula, admitiu-se uma massa específica cinco vezes maior).

Na figura 13 estão plotadas as histórias no tempo dos deslocamentos do nó 6 (onde está aplicada a força) e do nó 5 onde se encontra uma das restrições. O comportamento observado é semelhante ao que foi visto no exemplo

anterior com exceção de que aqui, os deslocamentos destes pontos não se mantêm estacionários o que se deve principalmente ao fato de ter sido reduzido o grau de plastificação do tubo, restando portanto uma parcela significativa de energia elástica. Na figura 14, são apresentadas as histórias no tempo do balanço de energia que também apresentam comportamento semelhante ao observado anteriormente. A variação da energia do tubo ( $E_D$ ), confirma o que foi dito sobre os deslocamentos.

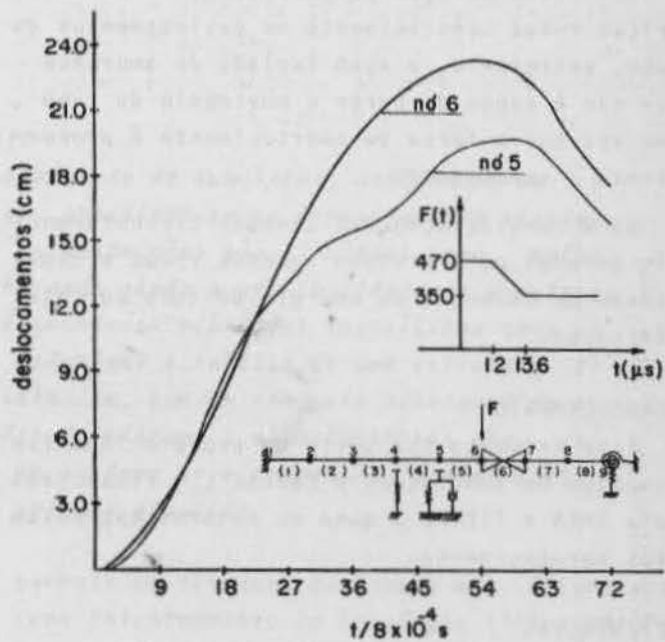


Fig. 13 - História dos deslocamentos dos pontos 5 e 6.

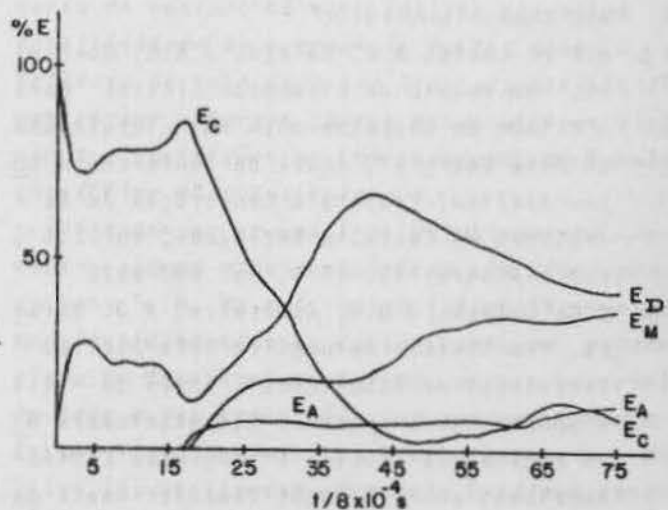


Fig. 14 - Distribuição da energia do sistema.

## CONCLUSÕES

a) A localização dos prováveis pontos de ruptura e o adequado posicionamento das restrições é fator importante na limitação dos movimentos do tubo.

b) Aumentando-se a rigidez da mola da restrição, diminuem os deslocamentos do tubo, mas por outro lado decresce a porcentagem de energia total, absorvida pela mola.

c) A consideração do amortecimento da restrição reduz sensivelmente os deslocamentos do tubo, entretanto, a ação isolada do amortecedor não é capaz de parar o movimento do tubo, uma vez que a força de amortecimento é proporcional à velocidade.

d) A consideração das tensões circunferenciais geradas pela pressão interna reduz a capacidade de absorção de energia do tubo por plastificação.

## AGRADECIMENTO

Este trabalho faz parte do projeto "Análise Dinâmica de Tubulações e Cascas", financiado pela CNEN e FINEP, a quem os autores expressam seus agradecimentos.

## REFERÊNCIAS

1. ASME Boiler Pressure Vessel Code, Section III, Nuclear Power Plant Components, 1974.
2. Protection Against Pipe-Whip Inside Containment, Regulatory Guide 1.46, US Atomic Commission, 1973.
3. A.F.D. Loula, A.C. Galeão, J.N.C. Guerreiro, "Um Modelo de Elementos Finitos para o Estudo do Chicoteamento em Tubulações de Alta Energia", Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, vol.III, Porto Alegre, RS, 1978, pp. 983-997.
4. A.C. Galeão, J.N.C. Guerreiro, H.J. Barbosa, "Um Sistema Automático para Análise Estrutural de Tubulações", Anais do III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, vol.I, Porto Alegre, RS, 1979, pp.109-128.
5. D. Dini and L. Lazzeri, "Modelling Techniques for Pipe-Whip Analysis" Nuclear Engineering and Design, vol.37, 1976, pp.361-372.
6. N. Bisconti, L. Lazzeri and P.P.Strona, "Pipe-Whip Analysis for Nuclear Reactor Applications", Nuclear Engineering and Design, vol. 37, 1976, pp.347-360.
7. S.M. Ma and K.J. Bathe, "On Finite Element Analysis of Pipe-Whip Problems", Nuclear Engineering and Design, vol.37, 1976, pp.413-430.
8. J.N.C. Guerreiro, A.C. Galeão e A.F.D.Loula, "Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Vigas", Anais das XX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, vol.II, Córdoba-Argentina, 1979, pp.B13-1/B-13-17.
9. J.N.C. Guerreiro, A.C. Galeão e A.F.D.Loula, "Pipe-Whip - Um Programa Geral de Análise", Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, vol.D, Campinas, SP, 1979, pp.119-129.
10. M.A.G. Silva, L. Bevilacqua, "Estudo do "Pipe-Whip" para Tubulações Nucleares", I Escola de Matemática Aplicada, LAC/CBPF/CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1978.
11. L. Bevilacqua, M.A.G. Silva, "A Rigid-Plastic Model for Pipe-Whip Analysis", Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, vol.III, Porto Alegre, RS, 1978, pp.825-838.
12. M.A.G. Silva, L. Bevilacqua, "Comparative Study of Models for Pipe-Whip Analysis", V SMIRT Conf., Paper F7/5, Berlim, 1979.
13. M.A.G. Silva, "Projeto de Suportes Dissipadores de Energia para Tubulações", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol.I, 1979, pp.1-10.
14. L.Lazzeri, "A model for strain hardening pipe element", paper ASME 76-127.
15. N.M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics", Proc.ASCE, vol. 85, EM-3, 1959, pp.67-94.

# UM MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE CHICOTEAMENTO DE TUBULAÇÃO

JOSÉ EUDES LEITE DE ANDRADE

SÉRGIO V. GUERREIRO RIBEIRO

ANTÔNIO CARLOS DE O. BARROSO

DEPTO. DE REATORES, CNEN, RIO DE JANEIRO, RJ.

## SUMÁRIO

*Neste trabalho estuda-se o problema do chicoteamento de tubulação, analisando-se o tubo de acordo com a teoria clássica de vigas, admitindo-se um comportamento elasto-plástico bilinear para o material do tubo. As restrições são simuladas como molas de comportamento elasto-plástico bilinear, havendo ainda a possibilidade de amortecimento viscoso. O método implementado trata deformações plásticas específicas como excitações (forças ou momentos) equivalentes, reduzindo a análise de uma estrutura elasto-plástica a de uma estrutura elástica idêntica, com um conjunto adicional de excitações aplicadas. Assim, a matriz de rigidez do sistema e os autovetores não variam com o tempo, permitindo que a resposta do sistema seja computada, usando coeficientes de influência dinâmicos, obtidos da solução elástica.*

## INTRODUÇÃO

Verificando as possíveis consequências de um acidente com liberação de radioatividade, a indústria nuclear e os órgãos responsáveis têm criado regulamentos específicos, de modo que as centrais nucleares sejam projetadas com o objetivo de resistirem a certos tipos de acidentes postulados. Um dos principais requisitos de um projeto para acidente postulado é garantir um seguro desligamento ("Shutdown") do reator, caso tal acidente ocorra.

A ruptura da tubulação é um destes acidentes postulados. No projeto de tais tubulações, utilizam-se certos critérios estabelecidos em normas, que permitem postular número, tipo e localização de possíveis rupturas [1,2]. Como as tubulações em um reator a água pressurizada (PWR) contêm fluidos a alta pressão, a consequência de uma ruptura é que o tubo fica repentinamente sujeito a violento impulso externo. A resposta do tubo rompido a tal força a-

carreta um fenômeno designado na literatura como Chicoteamento de Tubulação ("Pipe Whip"). É necessário, portanto, fazer uma análise para determinar se o tubo deforma a ponto de pôr em risco a integridade de equipamentos essenciais a uma condição segura de desligamento do reator. Se esta análise demonstra a possibilidade de ocorrência desses danos, a deflexão do tubo deve ser limitada através de restrições externas contra esses efeitos dinâmicos - Restrições ao Chicoteamento de Tubulação ("Pipe Whip Restraints").

Tratando-se de uma área relativamente recente, alguns modelos teóricos têm sido propostos: S. M. Ma e K. Bathe [3] utilizaram um modelo bidimensional, considerando um estado plano de tensões e admitindo, para o material do tubo e das restrições, um comportamento elasto-plástico perfeito; L. Bevilacqua e M. Silva [4] utilizaram um modelo unidimensional rígido-plástico; A. Loula, A. Galeão e J. N.



Guerreiro [5] analisaram o tubo de acordo com a teoria de vigas e simularam as restrições como molas, admitindo, para ambos, um comportamento elasto-plástico bilinear. As restrições admitem a possibilidade de amortecimento viscoso.

A equação do movimento de uma estrutura elástica linear pelo método dos elementos finitos, desprezando o amortecimento, pode ser escrita como

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{R\},$$

onde  $[M]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa e de rigidez,  $\{R\}$  o vetor de carregamento externo,  $\{U\}$  e  $\{\ddot{U}\}$  são os vetores deslocamento e aceleração. Dois métodos geralmente usados para resolver esta equação são integração direta e superposição modal [6]. Em integração direta, as equações acima são integradas usando um procedimento numérico passo a passo, como usado em alguns modelos de Chicoteamento de Tubulação, já citados. No método de superposição modal, as equações do movimento são desacopladas em cada modo. A superposição das soluções de todos os modos dá a resposta total do sistema.

Neste trabalho utiliza-se um método matemático que permite analisar o tubo, de acordo com a teoria clássica de vigas, admitindo-se um comportamento elasto-plástico bilinear. As restrições são simuladas como molas de comportamento elasto-plástico bilinear, havendo ainda a possibilidade de amortecimento viscoso. A história no tempo, da força de chicoteamento, é considerada como um dado. Além disso, a utilização do conceito de "força equivalente" permite o uso dos coeficientes de influência dinâmicos, obtidos da solução elástica, mesmo depois que a deformação plástica tenha ocorrido. No cálculo de um campo de deformação específica num corpo elasto-plástico, mostra-se que o gradiente da deformação plástica específica tem o mesmo efeito que uma força aplicada [7]. A analogia entre deformação plástica específica e forças aplicadas reduz a análise inicial de um corpo elasto-plástico à de um corpo elástico, idêntico ao inicial, com um

conjunto adicional de forças aplicadas. Isto possibilita o uso de soluções elásticas conhecidas para analisar a deformação específica, tensão e, portanto, os deslocamentos das estruturas elasto-plásticas correspondentes. No uso combinado de deformação específica inicial e superposição modal, utilizando-se o conceito de "força equivalente", já proposto por S. C. Liu e T. H. Lin [8] para vigas de seção cheia e lajes biapoiadas, os cálculos são baseados na matriz de rigidez elástica e modos normais, que já não variam com o tempo, eliminando o cálculo dos autovetores a cada novo intervalo de tempo. Assim, do ponto de vista computacional, o método proposto torna-se consideravelmente mais simples que outros métodos.

O método de superposição modal aplicado à análise dinâmica de estruturas elásticas é bem conhecido. Para estruturas mais complicadas, onde as soluções elásticas dinâmicas analíticas não são disponíveis, estas soluções elásticas podem ser obtidas pelo método dos elementos finitos.

Neste trabalho, o tubo é analisado como viga biapoiada, exemplificando o caso onde a solução elástica analítica é disponível, ou como viga em balanço com ponto anguloso, caso onde tal solução não é disponível.

Finalmente, este trabalho permite que o tubo seja analisado como uma estrutura tipo viga, com vários apoios e admitindo a possibilidade de ponto anguloso. Pode-se, também, introduzir restrições ao chicoteamento em qualquer ponto da tubulação.

#### ANÁLISE DINÂMICA ELASTO-PLÁSTICA DE VIGAS

Descrição do método. Considere-se uma viga prismática submetida a um carregamento transversal por unidade de comprimento  $q(x,t)$  e, a um momento por unidade de comprimento  $b(x,t)$ , além do limite elástico. O deslocamento transversal em qualquer ponto  $x$  e tempo  $t$  é designado por  $w(x,t)$ . Os parâmetros do sistema são a massa por unidade de comprimento  $m$  e a rigidez à flexão  $EI$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young, e  $I$ , o momento de inércia da área da seção transversal em torno de

um eixo  $z$  normal a  $x$  e  $y$ , passando pelo centro de gravidade da área. Admite-se o uso da "teoria simples de vigas", na qual a rotação do elemento é insignificante quando comparada com a translação vertical, e a deformação por cisalhamento é pequena em relação àquela proveniente da flexão. Fazendo-se estas considerações, obtêm-se a equação do movimento

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t) - \frac{\partial b(x,t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

onde  $M(x,t)$  representa o momento fletor.

Designando a deformação total específica por  $\epsilon$ , a tensão longitudinal por  $\sigma$  e a deformação plástica específica por  $\epsilon^p$ , tem-se, então,

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon^p). \quad (2)$$

De acordo com a hipótese de Bernoulli-Euler,

$$\epsilon = -y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

onde  $y$  representa a distância da linha neutra ao elemento de área, da seção transversal,  $dA$ . Logo, pode-se escrever:

$$M(x,t) = \int_A -y \sigma dA \quad (4)$$

usando as equações (2), (3) e (4), tem-se,

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - E \int_A \epsilon^p y dA. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (1), obtêm-se:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \\ &= q(x,t) - \frac{\partial b(x,t)}{\partial x} + F(x,t), \end{aligned} \quad (6)$$

onde o termo

$$F(x,t) = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_A \epsilon^p y dA$$

pode ser considerado sob dois aspectos. Uma maneira é considerá-lo como um carregamento fictício  $\bar{q}(x,t)$ , desde que este é equivalente

a  $q(x,t)$  na equação do movimento. Assim, o movimento de uma viga elasto-plástica é análogo ao de uma viga elástica idêntica, com um carregamento adicional

$$\bar{q}(x,t) = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_A \epsilon^p y dA. \quad (7)$$

Uma outra maneira é considerá-lo como um momento distribuído fictício  $\bar{b}(x,t)$ , pois o mesmo é equivalente a  $\frac{\partial b(x,t)}{\partial x}$  na equação do

movimento. Deste modo, o movimento de uma viga elasto-plástica é análogo ao de uma viga elástica idêntica, com um momento por unidade de comprimento adicional

$$\bar{b}(x,t) = E \frac{\partial}{\partial x} \int_A \epsilon^p y dA. \quad (8)$$

Observa-se que, no método de deformação específica inicial incremental [9] em textos de elementos finitos, a excitação equivalente, causada pela deformação plástica específica incremental, é aplicada a cada elemento, enquanto, no presente método, a resposta dinâmica da viga, causada por uma excitação  $f(x,t)$ , é escrita analiticamente em forma de série, uma vez que a excitação equivalente  $\bar{f}(x,t)$  é aplicada a toda a estrutura, e não a cada elemento.

Forma incremental. Divide-se a viga em  $(n-1)$  segmentos de comprimentos iguais a  $\Delta L$  e o tempo  $t$ , em  $N$  incrementos iguais a  $\Delta t$ . Considere-se, genericamente, o coeficiente de influência dinâmico  $G(i,j,k)$ , que é definido como o deslocamento na direção do grau de liberdade  $i$ , no instante  $t=k\Delta t$ , causado por uma excitação (força ou momento) unitária degrau, aplicada na direção do grau de liberdade  $j$ , no instante  $t=0$ . Desta forma, o deslocamento  $w(i,n)$  do grau de liberdade  $i$ , no instante  $t=n\Delta t$ , devido à excitação (força ou momento) degrau  $\Delta f(j,k)$ , aplicada no grau de liberdade  $j$ , no instante  $t=k\Delta t$ , com  $k < n$ , é dado por:

$$w(i,n) = G(i,j,n-k) \Delta f(j,k).$$

Quando ocorre a deformação plástica específica, devemos considerar a excitação (carregamento ou momento distribuído) equivalente  $\bar{f}(x,t)$ . Escrevendo-se (7) e (8) na forma incremental, tem-se:

$$\Delta \bar{q}(x,t) = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_A \Delta \epsilon^P y \, dA, \quad (9)$$

e

$$\Delta \bar{b}(x,t) = E \frac{\partial}{\partial x} \int_A \Delta \epsilon^P y \, dA, \quad (10)$$

onde

$$\Delta \bar{f}(x,t) = \Delta \bar{q}(x,t)$$

ou

$$\Delta \bar{f}(x,t) = \Delta \bar{b}(x,t).$$

Na figura 1, mostra-se a curva excitação - tempo, onde  $\Delta f(j,k)$ , ou  $\Delta \bar{f}(j,k)$  representam o incremento de  $(k-1)\Delta t$  a  $k\Delta t$ . Na aproximação da curva da excitação no tempo, utiliza-se o valor no ponto médio de cada intervalo de tempo, significando que metade da excitação incremental,  $\Delta f(x,t)$  ou  $\Delta \bar{f}(x,t)$ , ocorre em  $t = (k-1)\Delta t$  e metade, em  $t = k\Delta t$ .

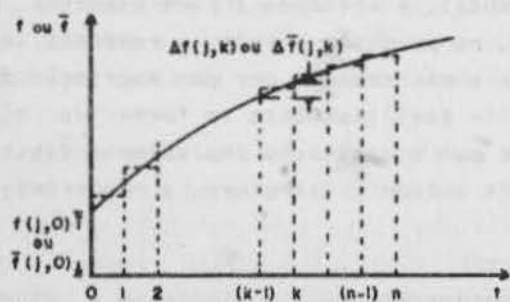


Fig. 1 - Curva excitação-tempo no grau de liberdade "j".

O deslocamento do grau de liberdade  $i$ , no instante  $t=n\Delta t$ , causado pela excitação incremental  $|\Delta f(j,k) + \Delta \bar{f}(j,k)|$ , é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta w(i,n) &= \frac{1}{2} |G(i,j,n-k) + G(i,j,n-k-1)| \times \\ &\quad \times |\Delta f(j,k) + \Delta \bar{f}(j,k)| = \\ &= \bar{G}(i,j,n-k) |\Delta f(j,k) + \Delta \bar{f}(j,k)|. \end{aligned}$$

O deslocamento causado pelas excitações real e fictícia de  $t=0$  a  $t = n\Delta t$ , aplicadas em

todos os "L" graus de liberdade da viga, é

$$\begin{aligned} w(i,n) &= \sum_{j=1}^L G(i,j,n) |f(j,0) + \bar{f}(j,0)| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^L \bar{G}(i,j,n-k) |\Delta f(j,k) + \Delta \bar{f}(j,k)| + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L G(i,j,1) |\Delta f(j,n) + \Delta \bar{f}(j,n)|. \quad (11) \end{aligned}$$

Inicialmente, estima-se  $w(i,n)$ , desprezando-se  $\Delta \bar{f}(j,n)$ . Com este  $w(i,n)$ , calcula-se

$$\Delta \epsilon(i,n) = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w(i,n) \quad (12)$$

e, portanto,  $\Delta \epsilon^P(i,n)$  da relação tensão-deformação específica do material. Deste  $\Delta \epsilon^P(i,n)$ , calcula-se  $\Delta \bar{f}(j,n)$  de (9) ou (10). Agora, estima-se um novo valor para  $w(i,n)$ , usando a equação (11), sem desprezar o termo  $\Delta \bar{f}(j,n)$ . Com este novo valor de  $w(i,n)$ , calculam-se novamente  $\Delta \epsilon(i,n)$  e  $\Delta \epsilon^P(i,n)$ . Repete-se este processo iterativo, até que dois valores consecutivos de  $w(i,n)$  sejam suficientemente próximos. Observa-se que o único termo a ser iterado é o que contém  $\Delta \bar{f}(j,n)$ , pois, todos os outros envolvem carregamentos incrementais de intervalos de tempo anteriores e, portanto, já conhecidos. Além disso, este termo tem somatório simples, que também contribui para uma rápida convergência.

Considera-se que a relação tensão-deformação específica do material é bilinear, conforme mostrado na figura 2. A inclinação da curva é igual ao módulo de elasticidade de Young  $E$ , no trecho elástico, e a  $\alpha E$ , além do limite elástico, onde  $\alpha$  é o coeficiente de encruamento ("coefficient of strain hardening"). Quando ocorre o descarregamento, admite-se que tal relação segue o percurso BCDGF, onde BC e DF são paralelos a OA, e CD paralelo a AB.

Observa-se que, para a curva tensão-deformação específica do material, utilizou-se um processo comumente conhecido como ENCRUAMENTO CINEMÁTICO ("Kinematic hardening"), onde a curva de Huber-Mises de escoamento inicial translaciona como um corpo rígido; isto é, a dimensão e forma da superfície de escoamento permanece inalterada durante o carregamento,

mas a origem sofre uma translação. Este critério não exerce nenhuma influência no método utilizado, concluindo-se que poderia ter sido usado outro critério qualquer para a plastificação, por exemplo, ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO, correspondendo ao crescimento uniforme da superfície de escoamento.

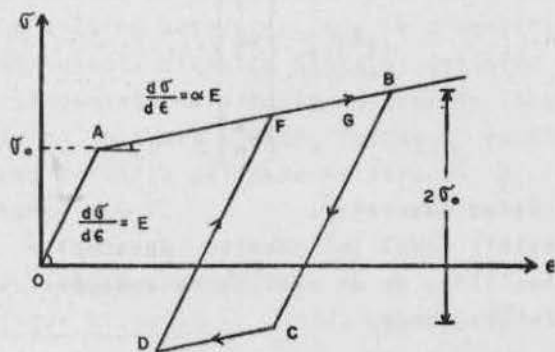


Fig. 2 - Curva tensão-deformação específica bilinear, para o material do tubo.

Na figura 3, verifica-se o comportamento do material da restrição.

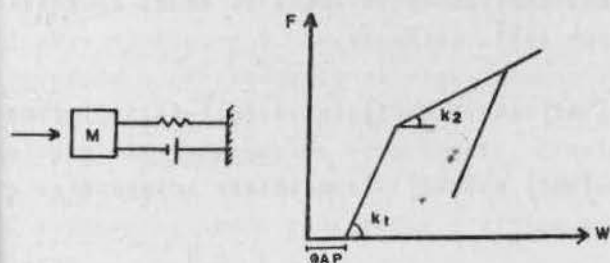


Fig. 3 - Curva força-deslocamento para o material da restrição.

A força atuante na tubulação (viga), oriunda da restrição, é dada por:

$$F(w, \dot{w}) = -R(w) - C \times \dot{w},$$

onde  $P(w)$  é a força correspondente à atuação da mola, função do deslocamento  $w$ , e  $(C \times \dot{w})$  é o termo de força correspondente ao amortecimento viscoso da restrição.

Método de cálculo numérico. Considera-se a viga dividida em segmentos de comprimentos iguais, e a seção transversal dividida em fibras. Para as estruturas, onde se conhecem as soluções elásticas analíticas dos deslocamentos, no cálculo das deformações específicas

$$\epsilon(x,t) = -y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2},$$

as derivadas segundas dos deslocamentos podem ser obtidas, usando a solução analítica ou, nos casos onde só se conhecem os deslocamentos transversais em pontos discretos da viga, o método das diferenças finitas. Para as estruturas em que as soluções elásticas analíticas não são disponíveis, as soluções são obtidas pelo método dos elementos finitos. O elemento finito utilizado é o elemento clássico de vigas com 4 graus de liberdade por elemento. A solução pelo método dos elementos finitos é obtida através do uso de um código computacional, já implantado na Control Data Corporation, o EASE2. Este código gera os autovalores e autovetores da estrutura. A partir daí, calculam-se os coeficientes de influência dinâmicos. Os deslocamentos dos elementos de viga são, neste caso, aproximados por polinômios do 3º grau. Agora, as curvaturas  $(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$  são obtidas das derivadas segundas destes polinômios.

No cálculo de  $\Delta \bar{f}(x,t)$ , caso o termo seja considerado como um carregamento distribuído equivalente  $\Delta \bar{q}(x,t)$ , necessita-se calcular uma derivada segunda da integral de área; se é considerado como um momento distribuído equivalente  $\Delta \bar{b}(x,t)$ , necessita-se calcular uma derivada primeira da integral de área. Em ambos os casos, utiliza-se o método das diferenças finitas para o cálculo da derivada.

Verifica-se que a precisão atingível com o método das diferenças finitas, no cálculo de  $\bar{b}(x,t)$ , deve ser maior que no cálculo de  $\bar{q}(x,t)$ , pois, no primeiro tem-se uma derivada primeira, enquanto no outro, uma derivada segunda, concluindo-se que é preferível o uso de  $\bar{b}(x,t)$  em lugar de  $\bar{q}(x,t)$ .

## COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA DINÂMICOS

Vigas biapoçadas. A equação do movimento

é

$$E I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t).$$

Considere-se uma força unitária concentrada no ponto  $x=x_j$ , aplicada subitamente no instante  $t = 0$ , como sendo

$$q(x,t) = 1(t) \delta(x-x_j),$$

onde  $\delta(x-x_j)$  é a função delta de Dirac. A resposta da viga é dada por:

$$G(i,j,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 L^3}{EI \pi^4} \frac{\sin \frac{n \pi x_i}{L} \sin \frac{n \pi x_j}{L}}{n^4} \times (1 - \cos \beta_n k \Delta t), \quad (13)$$

onde  $x_i = (i-1)\Delta L$ ,

$$x_j = (j-1)\Delta L,$$

$$\beta_n^2 = \frac{E I}{m} \left( \frac{n \pi}{L} \right)^4,$$

$n$  é um número inteiro,  $L$  é o comprimento da viga e  $G(i,j,k)$  são os coeficientes de influência dinâmicos, definidos como os deslocamentos nas seções  $x_i = (i-1)\Delta L$ , no instante  $t = k\Delta t$ , causado por uma força unitária degrau, aplicada nas seções  $x_j = (j-1)\Delta L$ , no instante  $t = 0$ .

Estruturas onde a solução elástica analítica não é disponível. As equações do movimento de uma estrutura elástica linear pelo método dos elementos finitos, desprezando o amortecimento, deve ser escrita como

$$[M] \{\ddot{W}\} + [K] \{W\} = \{F\}, \quad (14)$$

onde  $[M]$  e  $[K]$  são as matrizes de massa e de rigidez,  $\{F\}$  o vetor de carregamento externo,  $\{W\}$  e  $\{\ddot{W}\}$  são os vetores deslocamento e aceleração.

Considere-se o sistema vibrando no  $l$ -ésimo harmônico; então os deslocamentos serão:

$$\{W(t)\} = \{V^l\} \sin \beta_l t,$$

onde  $\beta_l$  é a  $l$ -ésima frequência natural de vibração, e

$$\{V^l\} = \begin{Bmatrix} v_1^l \\ v_2^l \\ \vdots \\ v_n^l \end{Bmatrix}$$

é o  $l$ -ésimo autovetor.

A matriz modal  $[\phi]$  permite desacoplar as equações (14), em um sistema de equações independentes, onde

$$[\phi] = [\{V^1\} \{V^2\} \dots \{V^L\}].$$

Substituindo-se

$$\{W\} = [\phi] \{n\}, \quad (15)$$

onde  $\{n\}$  é a nova variável, nas equações (14), e premultiplicando-se ambos os lados da equação por  $[\phi]^T$ , obtêm-se

$$[M^*] \{\ddot{n}\} + [K^*] \{n\} = [\phi]^T \{f_j(t)\} \quad (16)$$

onde  $[M^*]$  e  $[K^*]$  são matrizes diagonais e

$$\{F(t)\} = \{f_j(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1(t) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

é o carregamento aplicado no grau de liberdade  $j$ . O sistema de equações (16) pode ser escrito como " $L$ " equações desacopladas, onde a solução de qualquer uma delas, por exemplo, a  $l$ -ésima, é

$$n_l(t) = \frac{v_j^l}{m_l^* \beta_l^2} (1 - \cos \beta_l t).$$

Agora, para a determinação do deslocamento  $w_i$ , usa-se a equação (15), resultando

$$w_i = G(i,j,k) = \sum_{\ell=1}^N \frac{v_i^{\ell} v_j^{\ell}}{m_{\ell}^* \beta_{\ell}^2} (1 - \cos \beta_{\ell} t),$$

onde  $N$  é o número de modos considerados,  $v_i^{\ell}$  é a componente na direção do grau de liberdade  $i$ , do  $\ell$ -ésimo autovetor, e  $w_i$  é o coeficiente de influência dinâmico  $G(i,j,k)$  definido como o deslocamento na direção do grau de liberdade  $i$ , no instante  $t = k\Delta t$ , devido à excitação de grau unitária aplicada na direção  $j$ , no instante  $t = 0$ .

RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Vigas biapoiadas. Para efeito de cálculo, considera-se, inicialmente, que a deformação plástica é substituída por um carregamento distribuído equivalente. Utilizando este conceito, considera-se uma viga biapoiada, de seção tubular, submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a 175130 N/m. As propriedades do material da viga são:  $E = 1.86021 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $\sigma_0 = 2.00913 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>,  $\rho = 7800$  N x s<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>. As dimensões da viga são indicadas na figura 4. Devido à simetria da configuração e carregamento da viga, somente um quarto desta necessita ser analisado. Para o cálculo das deformações específicas, considera-se a viga dividida por 21 seções igualmente espaçadas, sendo cada seção dividida em 50 fibras.

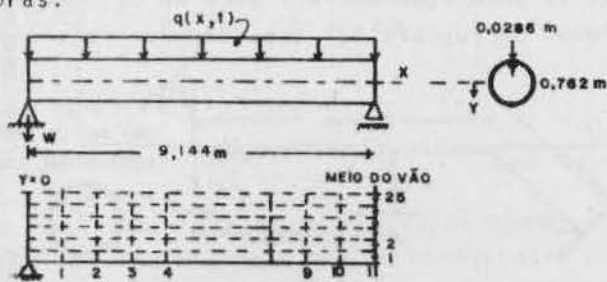


Fig. 4 - Dimensões da viga e sua divisão em seções.

Compara-se o presente método com a referência [5], para valores de  $\alpha = 0.5$ ,  $q = 175130$  N/m e o intervalo de tempo  $\Delta t = 6.001 \times 10^{-4}$  s, verificando-se que ambos os métodos apresentam o

mesmo grau de precisão, como se vê na fig. 5.

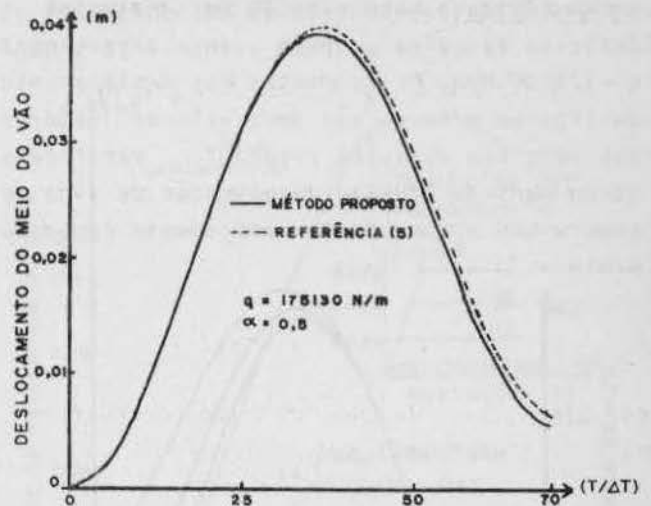


Fig. 5 - Resultados de diferentes métodos.

Na figura 6 estuda-se a resposta da viga quando submetida a diferentes magnitudes de carregamentos. Para o carregamento  $q = 175130$  N/m, usou-se  $\Delta t = 6.001 \times 10^{-4}$  s. Para o carregamento  $q = 525390$  N/m, variou-se o incremento de tempo, usando um  $\Delta t = 6.001 \times 10^{-4}$  s e depois  $\Delta t = 1.8003 \times 10^{-3}$  s. Desta forma, verificou-se a influência do amortecimento e observou-se que a variação em  $\Delta t$  não alterou a precisão da resposta. Verificou-se, também, que o período efetivo (tempo para alcançar a máxima deflexão) de vibração da viga elasto-plástica aumenta com a intensidade do carregamento, devido à maior zona de plastificação.

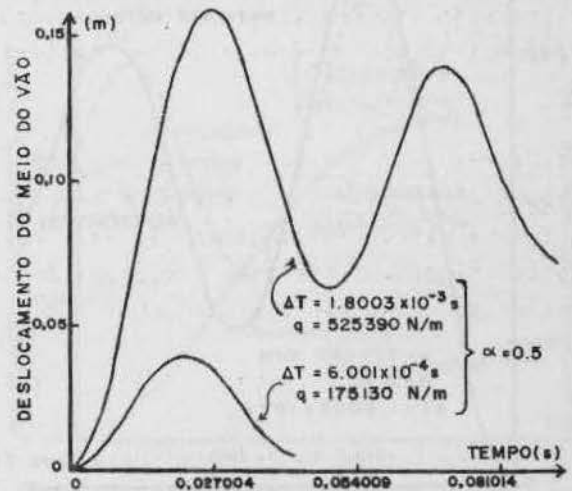


Fig. 6 - Viga biapoiada submetida a diferentes carregamentos.

Em seguida, estuda-se o efeito do encruamento ("Strain hardening") do material na deflexão da viga, para um carregamento  $q = 175130 \text{ N/m}$ . As respostas dos deslocamentos da viga no meio do vão para valores diferentes de  $\alpha$  são dadas na figura 7. Verifica-se que o período efetivo de vibração da viga decresce com o aumento do coeficiente de encruamento  $\alpha$ .

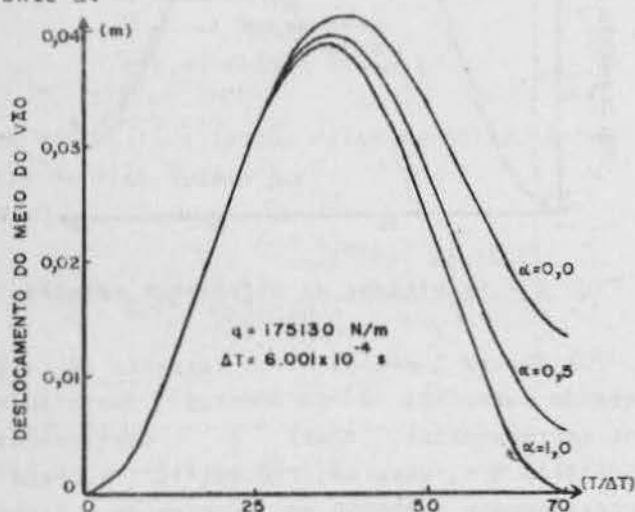


Fig. 7 - Efeito do encruamento do material nos deslocamentos da viga.

Depois partiu-se para obter resultados, no caso onde a deformação plástica é substituída por um momento distribuído equivalente. Neste caso, considerou-se a viga do caso anterior,

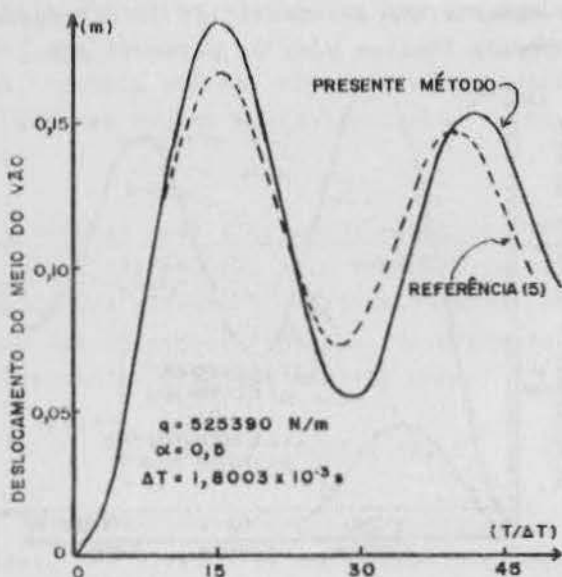


Fig. 8 - Resultados de diferentes métodos.

com  $\alpha=0.5$ ,  $q=525390 \text{ N/m}$ ,  $\Delta t=1.8003 \times 10^{-3} \text{ s}$ , onde os resultados são comparados aos da referência [5], verificando-se na figura 8 que os resultados estão coerentes.

Ainda neste caso, introduziu-se uma restrição no meio do vão. A constante elástica da restrição é  $5.67275 \times 10^8 \text{ N/m}$  e a deformação elástica máxima é  $7.7474 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Considera-se um "GAP" de  $7.62 \times 10^{-2} \text{ m}$  e admite-se que o comportamento do material da restrição é elasto-plástico perfeito. Estes resultados são comparados com os da referência [5], na figura 9.

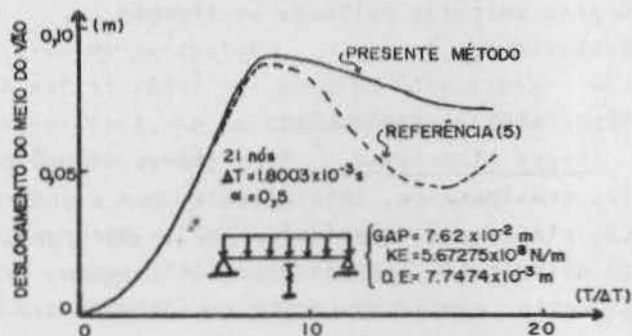


Fig. 9 - Resultados de diferentes métodos, com restrição.

Aplicação a um caso real de ruptura de tubulação nuclear. Entre os dois conceitos utilizados no cálculo do termo equivalente à deformação plástica, optou-se pelo uso do momento distribuído equivalente, por se considerar que o mesmo atinge uma maior precisão.

Aqui, estuda-se o problema do chicoteamento de tubulação nuclear para um caso real. O local de ruptura foi considerado próximo à

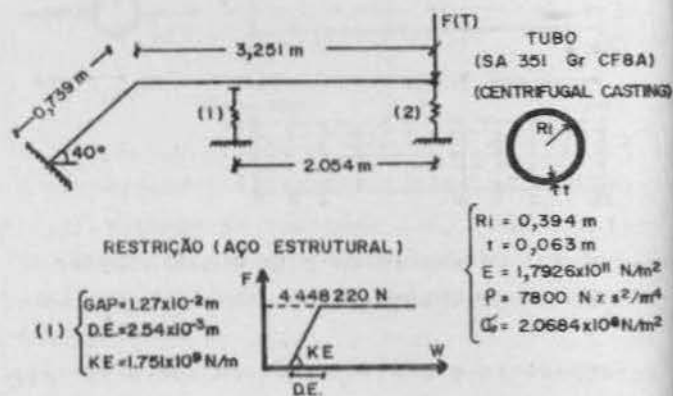


Fig. 10 - Dimensões da tubulação e da restrição (1).

Finalmente, traça-se um diagrama momento máximo - força de restrição máxima. Desta forma, conhecendo-se o momento máximo permitido no local (engaste), pode-se estimar qual a restrição que se deve usar para limitar o momento no local. Sabendo-se que o momento máximo permitido pela "Westinghouse" é de  $1.163743 \times 10^7$  Nxm, obtêm-se do diagrama mostrado na figura 15, qual a força máxima de restrição necessária.

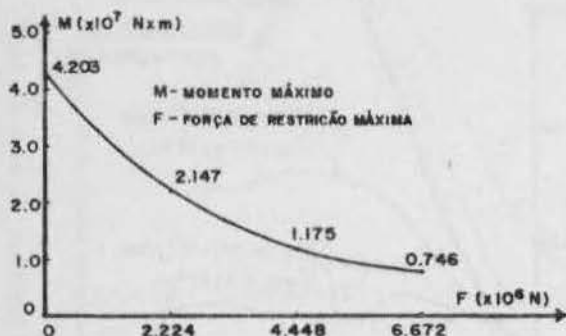


Fig. 15 - Diagrama momento máximo - força de restrição máxima.

#### CONCLUSÕES

O método proposto destina-se à análise dinâmica elasto-plástica de estruturas a partir da solução elástica. Este método é aplicado a estruturas onde se dispõe das soluções elásticas analíticas (vigas biapoiadas), e a casos onde não se dispõe da mesma. Para estas estruturas, onde não se dispõe da solução elástica analítica, utiliza-se o método dos elementos finitos para a sua obtenção.

A necessidade de se usar um processo iterativo, para o cálculo da excitação equivalente à deformação plástica, não comprometeu as vantagens do método, já que a convergência foi rápida. Na maioria dos casos, duas, três ou quatro iterações foram suficientes, onde o erro admitido foi de 0.1%. Os resultados numéricos obtidos, utilizando-se este método, concordaram perfeitamente bem com os da referência [5].

#### REFERÊNCIAS

1. Regulatory Guide 1.46, Protection Against Pipe Whip Inside Containment, U. S. Atomic Energy Commission, May (1973).
2. ANSI #176, Design Basis for Protection Against Pipe Whip, Amer. Nuclear Soc., June (1973).
3. Ma, S. M., and Bathe, K., On Finite Element Analysis of Pipe Whip Problems, Nuclear Engineering Design, pp 413 - 430, (1976).
4. Bevilacqua, L., e Silva, M., Estudo do "Pipe-Whip" para tubulações Nucleares, I Escola de Matemática Aplicada, CDPF/CNPq, Rio de Janeiro, (1978).
5. Loula, A., Galeão, A. C., e Guerreiro, J. H., Um Modelo de Elemento Finito para o Estudo do Chicoteamento em Tubulações de Alta Energia, Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, Porto Alegre, RS, Paper Nº 53, (1978).
6. Bathe, K., and Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, pp. 308-344, (1976).
7. Lin, T. H., Theory of Inelastic Structures, John Wiley and Sons, pp. 43-45, (1968).
8. Liu, S. C., and Lin, T. H., Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Structures Using Known Elastic Solutions, Mechanics and Structures Deptº, Univ. of California.
9. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Book Co., 1971.



# SOBRE A FORÇA RESISTIVA EM MEIOS POROSOS ANISOTRÓPICOS

I-SHIH LIU

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, UFRJ, RIO DE JANEIRO, RJ.

R. SAMPAIO

ESCOLA DE QUÍMICA E COPPE, UFRJ, RIO DE JANEIRO, RJ.

## SUMMARY

*In this work we derive the representations for the constitutive equations of the resistive force for several classes of transversely isotropic porous media and show that for some class it does not reduce to the form of Darcy's equation. Consequently, it does not exclude the possibility of the existence of asymmetric directional resistivity for certain materials.*

## INTRODUÇÃO

Na teoria clássica de meios porosos isotrópicos a força resistiva  $L$ , i.e., a força que se opõe ao escoamento do fluido através da matriz sólida, é usualmente suposta proporcional à velocidade relativa  $u$  do fluido relativo a matriz sólida

$$L = ku$$

onde  $k$  é um escalar denominado de resistividade. Esta é a famosa equação de Darcy. Ainda na teoria clássica, a generalização da equação de Darcy para meios porosos anisotrópicos é feita mantendo-se a forma da equação, i.e.,  $L = Ru$ , onde agora  $R$  é um tensor que, em geral, é suposto simétrico [1].

Essa generalização, entretanto, não é suficiente para explicar o comportamento apresentado por alguns materiais que, considerando uma mesma direção, encontramos resistividades direcionais diferentes em valor absoluto, num mesmo ponto, quando medimos em sentidos opostos (i.e., da direita para a esquerda e vice-versa). Este fato está, obviamente, em desacordo com a equação de Darcy.

Nesse trabalho consideraremos materiais anisotrópicos que possuem alguma forma de isotropia transversal e, para esses casos, mostraremos que a generalização da equação de Darcy não é tão simples como faz crer a teoria clássica. Além disso, o comportamento descrito no parágrafo anterior, i.e., a desigualdade das resistividades direcionais num mesmo ponto em sentidos opostos, é explicado satisfatoriamente.

## A FORÇA RESISTIVA

Consideremos a classe de meios porosos em que a força resistiva  $L$  é definida constitutivamente por

$$L(e, \rho, u, F) \quad (1)$$

onde  $e$  porosidade  
 $\rho$  massa específica do fluido  
 $u$  velocidade do fluido relativo à matriz sólida  
 $F$  gradiente de deformação da matriz sólida relativo a uma configuração de referência (estado natural)  
 O princípio da Invariância à Mudanças de

Observador [2] requer que tenha-se

$$L(\epsilon, \rho, Qu, QF) = QL(\epsilon, \rho, u, F); \quad \forall Q \in \text{Ort} \quad (2)$$

onde  $\text{Ort}$  é o conjunto dos tensores ortogonais sobre  $R^3$ .

Seja  $G \subset \text{Ort}$  o grupo de simetria da matriz porosa com relação a configuração de referência, então se  $H \in G$

$$L(\epsilon, \rho, u, FH) = L(\epsilon, \rho, u, F) \quad (3)$$

Como na maioria das aplicações de meios porosos a matriz sólida acha-se no seu estado natural, i.e.,  $F = \underline{1}$ , restringiremo-nos apenas ao estudo desse caso onde representações explícitas podem ser encontradas. Definiremos

$$L_0(\epsilon, \rho, u) \equiv L(\epsilon, \rho, u, \underline{1})$$

De (3) concluímos

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = L(\epsilon, \rho, u, H); \quad \forall H \in G \quad (4)$$

Como  $G \subset \text{Ort}$ , (2) implica que

$$L(\epsilon, \rho, Hu, H) = H L(\epsilon, \rho, u, \underline{1}) \quad (5)$$

então de (4) e (5) temos

$$L_0(\epsilon, \rho, Hu) = H L_0(\epsilon, \rho, u); \quad \forall H \in G \quad (6)$$

Logo  $L_0$  é uma função vetorial invariante com relação ao grupo  $G$ . Procuraremos agora, através da teoria dos invariantes [3,4,5,6], representação para  $L_0$  para várias escolhas de  $G$  de interesse em meios porosos. Por exemplo, se  $G = \text{Ort}$ , caso em que a matriz sólida é isotrópica, (6) implica que

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = k(\epsilon, \rho, |u|)u \quad (7)$$

onde  $k(\dots)$  é uma função material escalar denominada resistividade do meio poroso e a equação (7) é comumente chamada de equação de Darcy.

Para meios porosos anisotrópicos,  $G \neq \text{Ort}$ , é comumente postulado que  $L_0(\epsilon, \rho, u) = R(\epsilon, \rho, |u|)u$ ,

i.e., que a resistividade  $\bar{e}$  é um tensor diferente de  $k \underline{1}$ . Infelizmente esta suposição não é necessariamente verdadeira, como mostraremos teoricamente para alguma classe de isotropia transversal, e como pode ser concluídos dos resultados experimentais de Johnson et al [7,8]. Grosseiramente podemos dizer que um material é dito possuir isotropia transversal se nele existir uma direção preferencial única, sendo que em secções normais a essa direção o material é isotrópico.

Seja  $e_3$  uma direção arbitrariamente escolhida de  $R^3$  e  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal desse espaço. Diremos que um material possui isotropia transversal se o seu grupo de simetria  $G$  é um dos grupos descritos abaixo:

$$1) \quad G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad Q \in \text{Ort}(R^2) \right\}$$

$$2) \quad G_2 = G_1 \cup (-G_1)$$

$$3) \quad G_3 = G_0 \cup (-G_0)$$

$$\text{onde } G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad Q \in \text{Ort}^+(R^2) \right\}$$

Aqui,  $\text{Ort}(R^2)$  é o conjunto das transformações ortogonais sobre o  $R^2$ ,  $\text{Ort}^+(R^2)$  é o conjunto das transformações ortogonais próprias de  $R^2$ , i.e., matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{e } -G = \{-H, \forall H \in G\}.$$

Obviamente as classes 1, 2 e 3 são definições distintas de isotropia transversal. Na nossa opinião a classe 2 é a mais adequada para descrever materiais possuindo uma estrutura laminada ou fibrosa, porém a classe 1 é a definição que aparece mais comumente na literatura da teoria dos invariantes [5] e a classe 3 foi a usada em [2], manual de enorme influência em Termomecânica do Contínuo. Convém ressaltar ainda que  $G_3$  é um subgrupo próprio de  $G_2$ , pois a transformação cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pertence a } G_2 \text{ mas não a } G_3.$$

A seguir apresentaremos as representações de  $L_0$  com relação a estas três classes. Denotaremos por  $u_i$  a componente da velocidade  $u$  com relação à base  $\{e_i\}$ .

1) Se  $G = G_2$

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = \bar{\alpha}(u_1 e_1 + u_2 e_2) + \bar{\beta} e_3 \quad (8)$$

onde  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são funções materiais escalares da tripla  $(\epsilon, \rho, u_1^2 + u_2^2, u_3)$ .

2) Se  $G = G_2$

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

3) Se  $G = G_3$

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ -\gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma$  são funções materiais escalares da tripla  $(\epsilon, \rho, u_1^2 + u_2^2, u_3)$ .

Convém observar que as equações (9) e (10) são da forma  $L_0 = Ru$ , sendo  $R$  um tensor, denominado de resistividade, enquanto que (8) não é dessa forma. Para o grupo  $G_1$  não existe uma representação tensorial. No caso de  $G_2$  e  $G_3$  existe, porém  $R$  é simétrico para  $G_2$  e não é simétrico para  $G_3$ .

Agora, como faz a literatura clássica de escoamentos em Meios Porosos, introduziremos um conceito mais fraco de resistividade, a resistividade na direção  $n$ ,  $\gamma_n$ , onde  $n$  é um vetor unitário em  $R^3$ .

$$\gamma_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} n \cdot \frac{L_0(\epsilon, \rho, \lambda n)}{\lambda} \quad (11)$$

Para as classes 2 e 3 temos então que

$$\lambda_n = n \cdot R_0 n \quad (12)$$

onde  $R_0 = R(\epsilon, \rho, 0)$ . Obviamente (12) implica que

$$\gamma_n = \gamma_{-n} \quad (13)$$

Por outro lado se  $G = G_1$  esse resultado não é necessariamente válido, isso é devido a falta de simetria do material com respeito a inversões. A possibilidade de tal assimetria para alguns materiais foi já observada em [7,8,9].

No que se segue postularemos que  $L_0(\epsilon, \rho, u)$  é linear em  $u$ . Isso implica que as funções  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  de (8) são da forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha_0(\epsilon, \rho) \\ \bar{\beta} &= \beta_0(\epsilon, \rho)u_3 \end{aligned}$$

e a equação (8) pode então ser reescrita na forma

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Sendo assim (12) e (13) são verdadeiras. Logo, sob a hipótese que  $L_0$  é linear, não há diferença entre as classes 1 e 2 e, portanto, não é possível que  $\gamma_n \neq \gamma_{-n}$ .

O postulado de linearidade implica que a equação de Darcy é válida, i.e.

$$L_0(\epsilon, \rho, u) = R_0(\epsilon, \rho)u \quad (14)$$

onde  $R_0(\epsilon, \rho)$  é o tensor resistividade.

Logo, a equação (6) implica adicionalmente que

$$\begin{aligned} R_0(\epsilon, \rho)Hu &= HR_0(\epsilon, \rho)u ; \quad \forall H \in G \\ \text{ou,} \\ R_0(\epsilon, \rho)H &= HR_0(\epsilon, \rho) ; \quad \forall H \in G \end{aligned} \quad (15)$$

O problema de determinar as restrições impostas por (15) em  $R_0$  para um grupo de simetria  $G$  qualquer é similar ao problema estudado por Wang [10] para o tensor condutividade térmica. Como este estudo já foi reproduzido

em [9] para vários grupos de isotropia, além da isotropia transversal, não reproduziremo-nos aqui. Gostaríamos porém de observar que a definição de isotropia transversal utilizada em [9] e [10] corresponde a classe 3 desse trabalho e, portanto,  $R_0$  tem a forma (10), correspondente a equação (24) em [9].

#### REFERÊNCIAS

1. Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier (1972).
2. Truesdell, C. e Noll, W., *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. *Handbuch der Physik*, Vol. III/3 (ed. S.Flügge), Springer-Verlag (1965).
3. Smith, G.F. e Rivlin, R.S., *Quart. Appl. Math.* 15, 308 (1957).
4. Pipkin, A.C. e Rivlin, R. S., *Arch. Rational Mech. Anal.* 4, 129 (1959).
5. Adkins, J.E., *Arch. Rational Mech. Anal.* 5, 263 (1960).
6. Smith, G.F. e Rivlin, R.S., *Arch. Rational Mech. Anal.* 15, 169 (1964).
7. Johnson, W.E. e Hughes, R.V., *Producers Monthly* 13, 17 (1948).
8. Johnson, W.E. e Breston, J.M., *Producers Monthly* 15, 10 (1951).
9. Telles, A.S. e Massarani, G., *Revista Brasileira de Física* 5, 1 (1975).
10. Wang, C.C., *On the Symmetry of the Heat Conduction Tensor*, in *Rational Thermodynamics* (C. Truesdell), McGraw-Hill (1969).

# RELAÇÕES ENTRE PROPRIEDADES E MICRO-ESTRUTURA DE MATERIAIS BIFÁSICOS

EMÍLIO DA SILVA NETO

IND. MOTORES WEG, JARAGUÁ DO SUL, SC.

SILVESTRE NAZARÉ

KFZ KARLSRUHE, INST. FÜR MATERIALFORSCHUNG I, RFA.

BEREND SNOEIJER

DEPTO. ENG. MECÂNICA, UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC.

## SUMÁRIO

*As propriedades de um material bifásico dependem das propriedades das fases e da concentração, geometria e arranjo geométrico da fase dispersa. O presente trabalho procura examinar tal dependência para o caso específico dos ferros fundidos nodular e cinzento ferrítico. Para uma série de ensaios procura-se estabelecer relações entre algumas propriedades (módulo de Young, condutibilidade térmica e coeficiente de expansão térmica linear) e o teor e forma da grafita. Valores experimentais são comparados com curvas teóricas.*

## INTRODUÇÃO

As propriedades de materiais bifásicos apresentam uma relação direta com as propriedades específicas de suas fases e com a sua microestrutura, ou seja, com as geometrias e arranjos geométricos das fases, que constituem o material. Neste trabalho, procura-se obter a comprovação experimental de relações matemáticas entre a microestrutura e algumas propriedades - condutibilidade térmica, módulo de Young e coeficiente de expansão térmica linear - de materiais bifásicos.

É importante que se faça uma diferenciação genérica entre os diversos grupos de propriedades, com base em analogias entre as equações microestrutura-propriedades. Assim, por exemplo, aos comportamentos de materiais, sujeitos a campos térmicos, elétricos ou magnéticos, é atribuída a denominação propriedade de campo. Da constatação da analogia matemática [1] entre as diversas equações de campo (e equações microestrutura-propriedades de campo) surge a possibilidade de transposições dire-

tas destas, de uma propriedade de campo para outra. É o caso, por exemplo, das equações deduzidas para a condutibilidade térmica, que podem ser diretamente utilizadas para a condutibilidade elétrica e para a permeabilidade magnética.

A intercambialidade entre equações microestrutura-propriedades não ocorre, contudo, para as chamadas propriedades mecânicas, onde se faz essencial a diferenciação entre os distintos campos de deformação mecânica. Ainda assim evidenciam-se analogias. Por exemplo, considerações feitas para o módulo de Young podem ser utilizadas para propriedades acústicas, porque ondas desta natureza promovem deformações elásticas no material e, tal como para os campos de tensão-deformação mecânicos, estão sempre vinculados à existência de matéria.

Algumas relações microestrutura-propriedades termodinâmicas têm significativa simplicidade, já que são influenciadas exclusivamente pelas concentrações. Outras relações, contudo,

apresentam um certo grau de complexidade. É o caso, por exemplo, das relações para o coeficiente de expansão térmica, como resultado do envolvimento de tensões mecânicas internas, tensões estas consideravelmente dependentes da microestrutura do material.

As equações de Maxwell [2], Bruggemann [3] e Niesel [4] apresentam uma boa confiabilidade para as relações microestrutura-propriedades de campo.

Tais equações são aplicáveis a materiais bifásicos com estrutura dispersa, isto é, a materiais que apresentam uma matriz - contínua - e uma fase dispersa - descontínua - contida na mesma. A equação de Maxwell faz-se válida apenas para baixas concentrações de partículas, de forma esférica, da fase dispersa. As equações de Bruggemann e de Niesel, permitem o contorno às limitações da equação de Maxwell, no que concerne à concentração (baixa) e à forma (esférica) das partículas da fase dispersa, proporcionando uma melhor adaptação da teoria às condições presentes em materiais reais.

A equação de Bruggemann possibilita uma ampliação do intervalo de validade para quaisquer concentrações de fases, embora ainda permaneça limitada à forma esférica para as partículas da fase dispersa. Tal limitação é contudo, suplantada pela equação de Niesel, que se aplica a esferóides, permitindo, assim, a descrição de formas irregulares.

Em tais trabalhos são também apresentados aqueles parâmetros das equações das propriedades de campo, que podem ser determinados através da análise estereológica em secções da microestrutura de materiais reais, e que dizem respeito:

- à concentração da fase dispersa
- à forma das partículas da fase dispersa
- à orientação das partículas da fase dispersa.

No caso das propriedades de campo, estes três parâmetros, denominados fatores estereológicos, são independentemente variáveis entre si.

Neste trabalho são apresentados resultados de ensaios e feitas comparações destes com curvas calculadas para o caso específico dos

ferros fundidos ferríticos (cinzento e nodular).

#### DESCRIÇÃO QUANTITATIVA DA MICROESTRUTURA

A análise quantitativa da relação microestrutura-propriedades requer, além dos valores indicativos das propriedades, também outros para a descrição da microestrutura. Estes últimos, para um material polifásico, constituem-se aqueles parâmetros que fornecem informações sobre:

- o tamanho
- a concentração
- a forma
- a orientação e
- o tipo da distribuição local das partículas de cada fase.

Na descrição quantitativa da microestrutura é preciso fazer a conversão de grandezas, do plano (secção da microestrutura) para o espaço tridimensional. No que diz respeito à forma e à orientação dos componentes da estrutura, os componentes irregulares da microestrutura são substituídos por regulares, de geometrias matematicamente representáveis.

Para materiais bifásicos, foi comprovado que a esferóide possui a geometria mais adequada para a descrição estereológica aproximada das partículas de fases reais.

Assim, a descrição quantitativa da microestrutura pode ser efetivada através de apenas três fatores estereológicos:

- o fator de concentração de fases
- o fator de forma e
- o fator de arranjo (orientação).

Em outras palavras, a combinação de tais fatores estereológicos, independentemente variáveis entre si, identificam suficientemente a microestrutura de um dado material.

Os três fatores estereológicos, citados acima, no caso particular da estrutura dispersa, podem ser obtidos, como segue [5]:

- o fator de concentração de fases consiste na percentagem volumétrica da fase dispersa ou da matriz;
- o fator de forma resulta das relações entre eixos das esferóides representativas das partículas da fase dispersa (Fig. 1) [6]
- o fator de arranjo (orientação) representa

o valor médio do quadrado do cosseno do ângulo formado entre os eixos de rotação (das esferóides representativas das partículas da fase dispersa) e a "direção da propriedade" (Fig. 1) [6].

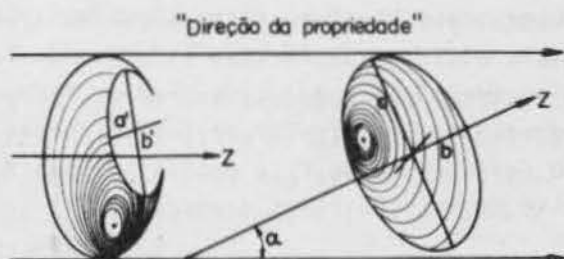


Fig. 1 A esferóide e seus dados estereológicos.

#### MATERIAL USADO NOS ENSAIOS

O material usado para análise foi fornecido pela Fundação Tupy S.A., na forma de tarugos de diâmetros entre 26 e 27 mm e comprimentos próximos a 300 mm. De acordo com o certificado de análise química expedido, os tarugos apresentaram as seguintes composições químicas:

a) Composição química do ferro fundido cinzento ferrítico.

Elementos	C	Si	Mn	S	P
Tarugos					
1	3,89	1,78	0,39	0,10	0,055
2	3,81	1,80	0,38	0,10	0,055
3	3,55	1,80	0,38	0,10	0,055
4	3,26	1,78	0,38	0,10	0,055
5	2,98	1,81	0,38	0,10	0,055

b) Composição química do ferro fundido nodular ferrítico

Elementos	C	Si	Mn	S	P
Tarugos					
N1	3,10	2,68	0,21	0,019	0,036
N2	3,27	2,63	0,21	0,018	0,036
N3	3,52	2,75	0,21	0,018	0,036
N4 - N5	3,72	2,75	0,21	0,016	0,036
N6 - N7	3,82	2,73	0,21	0,015	0,036

As figuras 2 e 3 mostram as micrografias dos dois ferros fundidos.

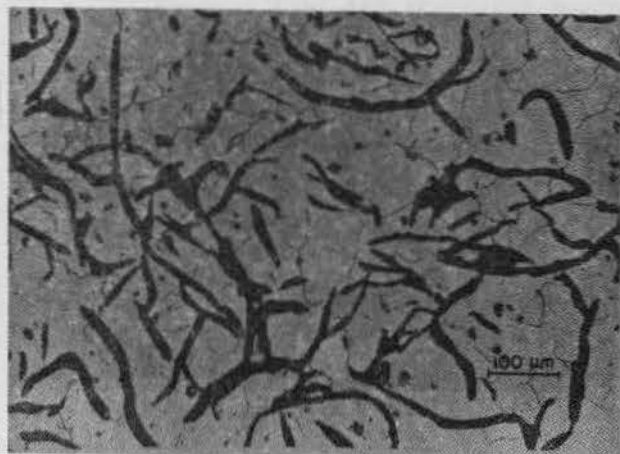


Fig. 2 Micrografia do ferro fundido cinzento ferrítico. Ataque: Nital - 2%.

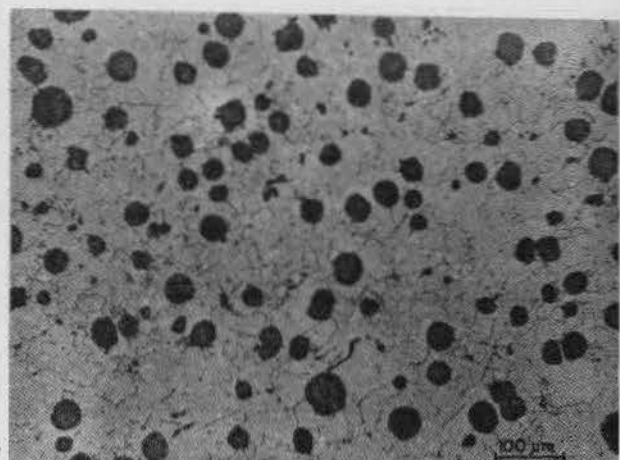


Fig. 3 Micrografia do ferro fundido nodular. Ataque: Nital - 2%

#### RELAÇÃO ENTRE A MICROESTRUTURA E A CONDUTIBILIDADE TÉRMICA.

Considerações gerais. As propriedades de campo são caracterizadas pelas equações de campo. Uma dedução teórica para uma determinada propriedade de campo tem validade para outras propriedades do mesmo grupo.

Entre a resistividade e a condutibilidade térmica, existe uma proporcionalidade inversa ( $\rho = \lambda^{-1}$ ).

Como a equação microestrutura-propriedade, para uma determinada propriedade de campo po-

de ser transposta a outras propriedades do mesmo grupo, conforme já citado acima, as equações desenvolvidas para a condutibilidade elétrica são, por exemplo, diretamente aplicáveis para a condutibilidade térmica, valendo para ambos os casos a proporcionalidade inversa  $\rho = \lambda^{-1}$  ( $\rho$  = resistividade,  $\lambda$  = condutibilidade).

Sob a hipótese da forma esferoidal para as partículas da fase dispersa e levando em consideração a sua orientação, a equação microestrutura-propriedade para um campo elétrico estacionário sob a forma de integral, na qual pode ser introduzida uma determinada propriedade de campo em análise [3] é:

$$\int_0^{c_D} \frac{dc}{1-c} = \int_0^{p_C} \frac{dp}{\rho_M \left( \frac{1-p}{\rho_D} \right) \left| \frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{1 + \left( \frac{1-p}{\rho_D} \right) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{1 + \left( \frac{1-p}{\rho_D} \right) (1-2F_D)} \right|} \quad \dots (1)$$

Esta equação, quando calculada explicitamente [7], constitui-se a denominada equação genérica microestrutura-resistividade:

$$1-c_D = \frac{\rho_C - \rho_D}{\rho_M - \rho_D} \frac{\rho_M}{\rho_C} \left| \frac{\rho_C}{\rho_M} \right| f(F_D \cos^2 \alpha_D) A \psi(F_D, \cos^2 \alpha_D) \quad \dots (2)$$

onde

$$A = \frac{\rho_D + \left( \frac{1}{(1-F_D) \cos^2 \alpha_D + 2F_D (1-\cos^2 \alpha_D)} - 1 \right) \rho_C}{\rho_D + \left( \frac{1}{(1-F_D) \cos^2 \alpha_D + 2F_D (1-\cos^2 \alpha_D)} - 1 \right) \rho_M} \frac{\rho_M}{\rho_C}$$

$$f(F_D, \cos^2 \alpha_D) = \frac{F_D (1-2F_D)}{1 - (1-F_D) \cos^2 \alpha_D - 2F_D (1-\cos^2 \alpha_D)} \quad (3)$$

$$A \psi(F_D, \cos^2 \alpha_D) = \frac{F_D (1-2F_D)}{1 - (1-F_D) \cos^2 \alpha_D - 2F_D (1-\cos^2 \alpha_D)} + \frac{2F_D (1-F_D)}{(1-F_D) \cos^2 \alpha_D + 2F_D (1-\cos^2 \alpha_D)} - 1 \quad (4)$$

$F_D$  = fator de forma indireto  
 $\cos^2 \alpha$  = fator de orientação

$\rho$  = resistividade

$c$  = percentagem volumétrica

Índices:

D - para a fase dispersa

M - para a matriz, e

C - para o material bifásico.

Nestas equações, as influências da microestrutura estão quantificadas através dos fatores estereológicos de concentração, forma e orientação das partículas da fase dispersa.

O fator de forma  $F_D$  é obtido na figura 4, a partir da relação entre eixos Z/X.

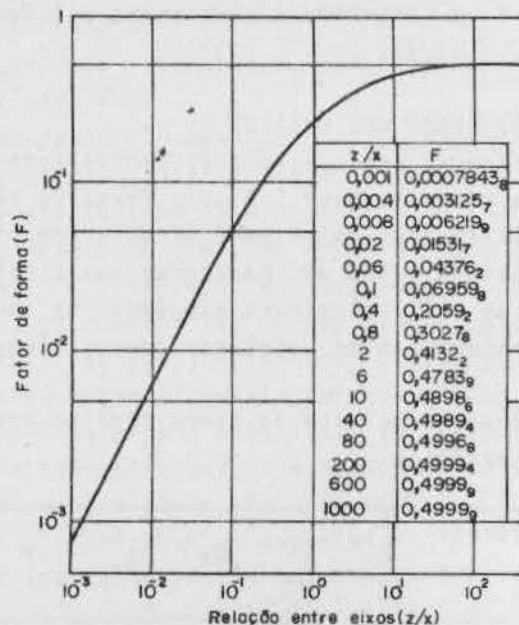


Fig. 4 Fator de forma, indireto, para propriedades de campo, como função da relação entre eixos das esferoides.

Para alguns casos especiais de orientação e forma, a equação (2) simplifica-se consideravelmente.

Como casos especiais de orientação, merecem menção os seguintes:

- orientação estatística (as esferoides dispersas não estão orientadas);
- completa orientação na direção do campo (todas as esferoides dispersas estão orientadas, com os seus eixos de simetria, paralelamente



à direção do campo,  $\cos^2 \alpha = 1$ );

- completa orientação numa direção perpendicular à direção do campo (os eixos de simetria, z, de todas as esferóides dispersas, estão orientados perpendicularmente à direção do campo;  $\cos^2 \alpha = 0$ ).

Como casos especiais de forma podem ser citados:

- o disco cilíndrico achatado, que ocorre quando a relação entre os eixos de simetria (z) e secundário (x), das esferóides dispersas, se torna muito pequena ( $F = 0$ ) para ( $z/x = 0$ );
- a esfera, para a qual a relação entre os eixos de simetria (z) e secundário (x) das esferóides dispersas é igual a um ( $F = 1/3$  para ( $z/x = 1$ );
- a barra (bastão) cilíndrica, que ocorre quando a relação entre os eixos de simetria (z) e secundário (x) das esferóides dispersas se torna muito grande, isto é, ocorre no caso limite, no qual o eixo secundário torna-se "infinitamente" pequeno em confronto com o eixo de simetria, finitamente grande ( $F = 1/2$  para ( $z/x = \infty$ ).

O quadro 1, contém as expressões resultantes da equação (2), para as combinações possíveis dos casos especiais de forma e de orientação das partículas da fase dispersa [8], onde a resistividade (elétrica ou térmica) é substituída pelo seu inverso ( $\rho = \lambda^{-1}$ ), ou seja, pela condutibilidade (elétrica ou térmica).

Os discos cilíndricos dispersos - caso extremo onde  $\lim z/x = 0$  -, orientados perpendicularmente à direção do campo, e as barras (bastões) cilíndricas dispersas - caso extremo onde  $\lim z/x = \infty$  -, orientadas na direção do campo, correspondem ao arranjo das fases em paralelo (equações (5) e (11), respectivamente). Por outro lado, os discos cilíndricos dispersos, orientados na direção do campo, correspondem ao arranjo das fases em série (equação (7)).

A influência da estrutura cristalina e da microestrutura de cada fase, sobre as respectivas condutibilidades, é verificada em todas as equações. Assim, por exemplo, a mesma fase

$\cos^2 \alpha$	0 Orientação perpendicular à direção do campo	0,33 Orientação estatística	1 Orientação na direção do campo
0 disco	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_D - \lambda_N}$ (arranjo em paralelo) (5)	$1 - c_D = \frac{(\lambda_D - \lambda_C)(\lambda_N^2 \lambda_D)}{(\lambda_D - \lambda_N)(\lambda_C^2 \lambda_D)}$ (6)	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_D - \lambda_N} \frac{\lambda_N}{\lambda_C}$ (arranjo em série) (7)
0,33 esfera	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_N} \frac{\lambda_N}{\lambda_C}^{1/3}$ (8)		
0,5 cilindro	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_D - \lambda_N} \left[ \frac{\lambda_N}{\lambda_C} \right]^{1/2}$ (9)	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_D - \lambda_N} \left[ \frac{\lambda_N + \frac{\lambda_D}{5}}{\lambda_C + \frac{\lambda_D}{5}} \right]^{2/5}$ (10)	$1 - c_D = \frac{\lambda_D - \lambda_C}{\lambda_D - \lambda_N}$ (arranjo em paralelo) (11)

Quadro 1 Casos especiais da equação genérica microestrutura-condutibilidade de materiais bifásicos com estrutura dispersa.

em diferentes materiais bifásicos, pode apresentar diferentes condutibilidades, como resultado de diferentes tamanhos dos cristais (ora finos, ora grossos) [9] (influências da microestrutura em materiais monofásicos). Em função disto, a influência das grandezas de estado é conhecida, através da condutibilidade de cada fase isoladamente.

#### RESULTADOS EXPERIMENTAIS COM FERROS FUNDIDOS CINZENTO E NODULAR, FERRÍTICOS

Dentre os diversos métodos existentes para a determinação da condutibilidade de materiais, pode ser feita menção ao desenvolvido por Schroeder [10].

De acordo com este método, um certo material pode ter a sua condutibilidade térmica determinada através de mera medição do tempo necessário para a condensação de determinado volume de um líquido, que se vaporiza em consequência do calor recebido do corpo de prova em análise.

Este princípio básico do método desenvolvido por Schroeder é utilizado no condutômetro térmico COLORA, aparelho usado durante a realização dos ensaios, figura 5.

Foram usados corpos de prova cilíndricos, de diâmetros e alturas nominais de 17,5 mm e 20 mm, respectivamente.

Com o intuito de uma minimização das resis

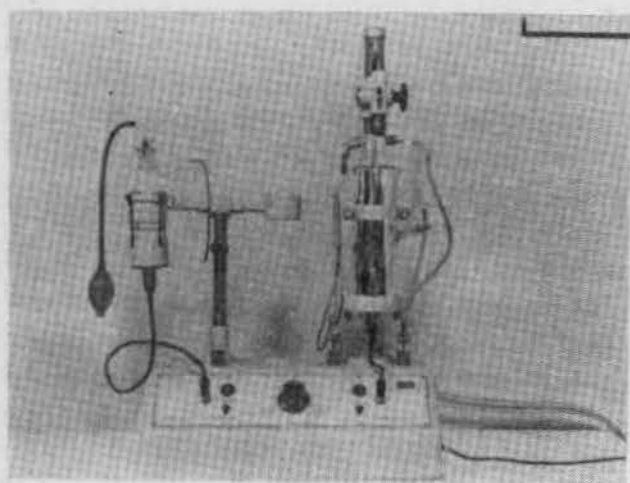


Fig. 5 Conduto metro térmico COLORA.

tências de contato entre os corpos de prova e os discos de prata do conduto metro, as superfícies planas extremas dos corpos foram submetidas a uma operação de polimento, sendo assegurado, ainda assim, um suficiente paralelismo entre as mesmas.

A figura 6, mostra os valores experimentais, para a condutibilidade térmica, obtidos nos ensaios realizados com corpos de prova de ferro fundido cinzento e ferro fundido nodular, ambos com matriz ferrítica e a comparação destes resultados com curvas teóricas.

Na comparação entre valores experimentais e teóricos, supos-se que as partículas de grafita, no ferro fundido cinzento, apresentam-se sob a forma de discos, estatisticamente orientados, e que, no ferro fundido nodular, as partículas de grafita apresentam-se sob a forma de esferas.

Com base em valores médios da literatura [11, 12], para as condutibilidades térmicas das fases ( $\lambda_{\text{ferrita}} = 0,064 \text{ cal.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;  $\lambda_{\text{grafita}} = 0,268 \text{ cal.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ), verifica-se a existência de uma boa concordância entre os valores experimentais e a curva teórica, para o ferro fundido nodular, não ocorrendo o mesmo para o ferro fundido cinzento. Isto pode ser justificado pela expressiva influência de silício sobre a condutibilidade térmica da matriz ferrítica. Assim, a inclusão de 1% (em peso) de silício, na ferrita, reduz a condutibilidade térmica em 50% e a inclusão de 2%

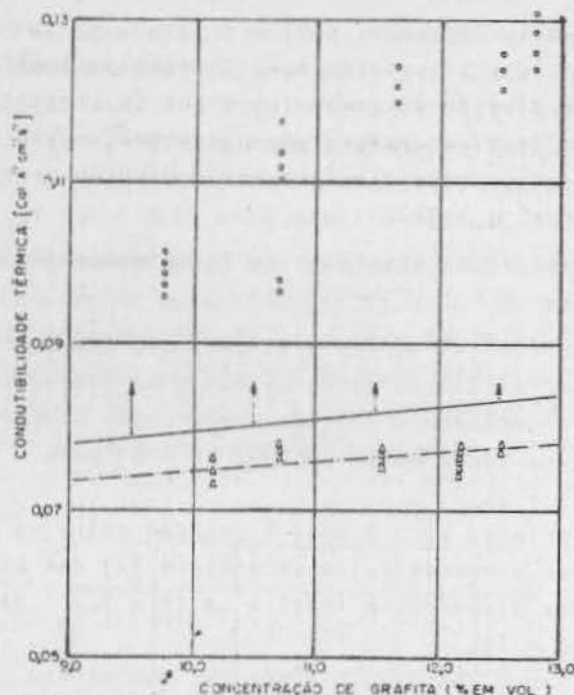


Fig. 6 Condutibilidade térmica em função da concentração de grafita.

Valores experimentais:

-ferro fundido cinzento ferrítico ○

-ferro fundido nodular ferrítico ▲

Curvas calculadas:

Para partículas dispersas esféricas

--- (equação (8), quadro 1); para partículas dispersas, sob a forma de discos, estatisticamente orientados

— (equação (6), quadro 1);

$\lambda_M = 0,064 \text{ cal/s.cm.K}$ , matriz: ferrita

$\lambda_D = 0,268 \text{ cal/s.cm.K}$ , fase dispersa: grafita).

(em peso), em 64% [13]. Como ambas as curvas teóricas da figura 6 foram calculadas para uma mesma condutibilidade térmica da matriz (igual a da matriz ferrítica - com 2,7%, em peso, de silício, aproximadamente - do ferro fundido nodular), torna-se explicável a localização dos valores experimentais, para o ferro fundido cinzento, acima da curva teórica correspondente, já que, neste caso, a matriz ferrítica (com 1,8%, em peso, aproximadamente, de silício) apresenta, na realidade, uma maior condutibilidade térmica do que aquela do ferro fundido nodular.

Um outro fator responsável pela divergên-

cia entre valores experimentais e a curva teórica, para o caso do ferro fundido ferrítico, é a fragilidade da suposição feita de que as partículas de grafita possuem a forma de discos estatisticamente orientados.

As setas apresentadas, junto à curva teórica obtida da equação (6) (para partículas dispersas, sob a forma de discos, estatisticamente orientados), indicam que, se a citada curva for calculada para o conteúdo de silício que efetivamente existe na matriz ferrítica (1,8%, em peso, aproximadamente) do ferro fundido cinzento, haverá uma melhor concordância entre os valores experimentais e a curva teórica, para tal ferro fundido.

No mais, destaque-se a confirmação do previsto pela teoria: para concentrações de carbono iguais, o ferro fundido cinzento apresenta maiores valores para a condutibilidade térmica do que o ferro fundido nodular.

#### RELAÇÃO ENTRE A MICROESTRUTURA E O MÓDULO DE YOUNG

##### Considerações gerais

Em um material monofásico, submetido a uma força unidimensional, reina um estado homogêneo de tensão e deformação, o qual experimenta alterações, quando uma segunda fase é dispersa no material.

As concentrações de tensões, resultantes da inclusão da fase dispersa, dependem - como comprovam os cálculos teóricos de elasticidade e as medições óticas de tensões [14] - da concentração, da forma e da orientação - em relação ao campo - das partículas da fase dispersa, assim como das constantes elásticas (módulo de compressão  $K$ , módulo de cisalhamento  $G$ , módulo de Young  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ ) da matriz e da fase dispersa.

As concentrações de tensões são máximas em  $B'$  (eixo vertical, figura 7a), quando as partículas da fase dispersa são elasticamente mais "duras" ( $E_D > E_M$ ) do que a matriz, e máximas em  $A', A$  (eixo horizontal, figura 7a), quando as partículas da fase dispersa são elasticamente mais "moles" ( $E_D < E_M$ ) do que a matriz. E, quanto maior a distância a partir da superfície limite entre as fases, mais reduzidas se tornam as tensões, as quais atin-

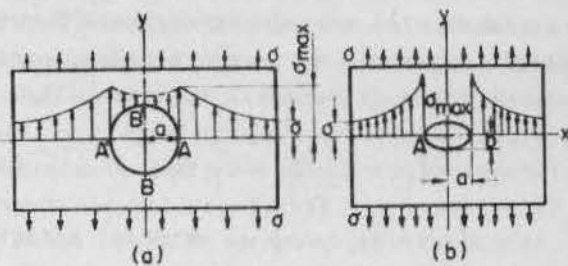


Fig. 7 Concentrações de tensões: a) devido a uma partícula dispersa esférica; b) devido a um poro esferoidal.

gem o valor da tensão normal, a uma distância de três a quatro vezes o raio da partícula dispersa.

Para a dedução de uma relação quantitativa entre o módulo de Young e a microestrutura de materiais bifásicos, utiliza-se informações estatísticas, resultantes de medições com sistemas de um, dois, três ou  $n$  pontos e que são reunidas nas chamadas "funções de correlação". Os fatores estereológicos são então correlacionados com informações obtidas dos pontos de medição sobre a frequência de aparecimento de uma certa tensão e respectiva deformação. O tratamento estatístico de tais funções de correlação fornece duas soluções [15], das quais são obtidos os valores limites máximo e mínimo, entre os quais situa-se o módulo de Young do material bifásico. As sucessões de valores limites, para todas as concentrações de fases possíveis, de um material bifásico resultam nas curvas limites, as quais situam-se tanto mais próximas entre si, quanto maior for o número de informações sobre a microestrutura, ou seja, quanto mais estas confirmarem a homogeneidade, a isotropia, ou a desordem da estrutura do material (bond principle).

O conteúdo de informações, que serve de base para as curvas limites é estabelecido por meio do sistema de medição de um, dois ou mais pontos e é expresso através do denominado "número de ordem". O número de ordem um corresponde ao caso em que as curvas limites são relativas aos arranjos das fases em paralelo e em série.

No caso de um estado de tensão uni-axial e elástica, e para um arranjo em paralelo, ocor-

re uma mesma intensidade de deformação em ambas as fases. Tal arranjo corresponde à curva limítrofe superior, de primeira ordem, para o módulo de Young de material bifásico [16]:

$$E_C = c_2 E_2 + c_1 E_1 \quad (12)$$

$E_C$  = módulo de Young do material bifásico  
 $E_1, E_2$  = módulos de Young das fases 1 e 2, respectivamente  
 $c_1, c_2$  = porcentagens volumétricas das fases 1 e 2, respectivamente.

O arranjo das fases em série, por outro lado, implica em igualdade de tensão em ambas as fases e corresponde à curva limítrofe inferior, de primeira ordem, para o módulo de Young de um material bifásico [16]:

$$E_C = \frac{E_1 E_2}{c_2 E_1 + c_1 E_2} \quad (13)$$

Para outros módulos elásticos (G, K), são válidas, exatamente, as mesmas relações, nas quais os módulos de Young são substituídos, nas equações (12) e (13), pelos módulos de cisalhamento (G) e de compressão (K) [17].

As curvas limítrofes de segunda ordem, para o módulo de Young de materiais bifásicos, com estrutura dispersa, são obtidas da resolução das funções de correlação correspondentes

$$E_C = \frac{9G_C K_C}{3K_C + G_C} \quad (14)$$

sendo que  $K_C$  e  $G_C$ , para discos cilíndricos, orientados estatisticamente, são dados pelas equações (A1) e (A2) do Apêndice e para esferas, pelas equações (A3) e (A4) do Apêndice.

O cálculo do módulo de Young de materiais bifásicos requer, de acordo com as expressões citadas anteriormente (Vide Apêndice), o conhecimento dos coeficientes de Poisson e dos módulos de suas fases.

Muitas vezes, a influência da microestrutura é "ofuscada" pela dispersão dos valores medidos e que assim tal influência só será nítida - e, conseqüentemente, de relevância técnica -, quando os módulos de Young das fases do

material bifásico diferenciarem-se de mais de uma ordem de grandeza.

#### RESULTADOS EXPERIMENTAIS COM FERROS FUNDIDOS CINZENTO E NODULAR

Pode-se mencionar dois métodos básicos para a medição do módulo de elasticidade:

- Método da resposta em frequência
- Método da reverberação.

No presente trabalho, foi usado o "Método da resposta em frequência".

Neste método, uma amostra do material a ser analisado é usinada em forma de barra e, em seguida, engastada em uma ou em ambas as extremidades. Esta barra sofre uma excitação através de uma força harmônica, cuja frequência pode ser variada dentro de um certo intervalo de valores. Deste procedimento resulta um gráfico amplitude x frequência, no qual se procede a leitura da frequência natural, correspondente aos pontos de máxima amplitude.

Com base na equação (A4), do Apêndice, [18] pode-se calcular o módulo E, a partir de uma frequência natural, de ordem n, dada em Hertz:

$$E = (4,026 \cdot 10^{-2}) \frac{m}{I} \left( l^2 \frac{f_n}{(\beta l)^2} \right)^2 \quad (15)$$

onde: E - kgf/cm<sup>2</sup> (kgf/cm<sup>2</sup> · 9,80665 · 10<sup>-2</sup> = N/mm<sup>2</sup>)  
 I - cm<sup>4</sup>  
 m - kg/cm  
 l - cm  
 f<sub>n</sub> - Hz  
 βl - adimensional

Os corpos de prova (barras de seção retangular com comprimento livre de 200 mm) são rigidamente afixados (por engastamento simples) ao suporte do "Modulus Apparatus" onde são submetidos a uma varredura de frequências - 2 a 2000 Hz, com controle manual - através do transdutor indutivo, ligado ao oscilador de frequências, veja figura 8.

Os movimentos de vibração produzidos nos corpos de prova são captados pelo transdutor capacitivo, cujo sinal, passando pelo pré-amplificador, chega ao amplificador, onde se torna possível, por um visor, a avaliação das

amplitudes das vibrações.

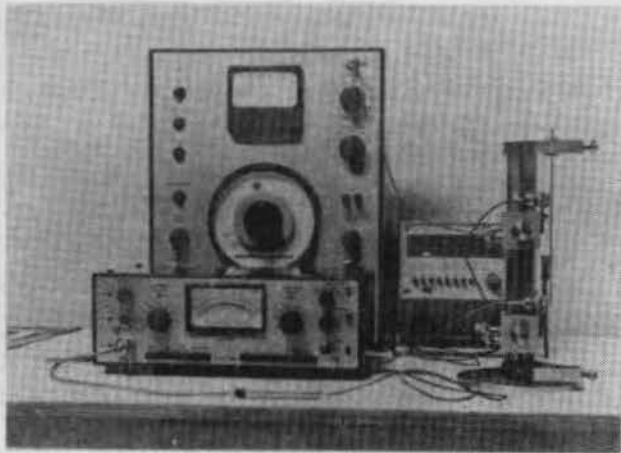


Fig. 8 - Equipamento usado na determinação das frequências naturais dos corpos de prova de ferro fundido cinzento nodular [19].

Assim procura-se detectar várias frequências naturais (de ordens diferentes) de oscilação dos corpos de prova, por meio de simples verificação (no visor do amplificador) dos "picos" de amplitude de oscilação e subseqüente medição das frequências de oscilações equivalentes (que pode ser feita, por exemplo por um contador de pulsos "Racal").

Na figura 9, os valores experimentais, para o módulo de Young, obtidos nos ensaios, são comparados com curvas teóricas, calculados usando-se as equações (14, 15 e 16) para o ferro fundido cinzento e as equações (14, A3 e A4) para o ferro fundido nodular. Para a comparação entre os valores experimentais e os valores teóricos, supõe-se, que as partículas de grafita, no ferro fundido cinzento, apresentam-se sob a forma de discos, estatisticamente orientados, e que, no ferro fundido nodular, as partículas de grafita apresentam-se sob a forma de esferas.

Sendo tomados valores médios da literatura [11, 12, 13], para os módulos de Young e os coeficientes de Poisson das fases ( $E_M = E_{ferrita} = 200000 \text{ N.mm}^{-2}$ ;  $\nu_M = \nu_{ferrita} = 0,31$ ;  $E_D = E_{grafita} = 10500 \text{ N.mm}^{-2}$ ;  $\nu_D = \nu_{grafita} = 0,14$ ), verifica-se uma boa concordância entre os valores experimentais e a cur-

va teórica, para o ferro fundido nodular, o que confirma, para este caso, a validade da suposição feita (forma esférica, para as partículas de grafita). Para o ferro fundido cinzento, entretanto, não é verificada uma boa concordância entre os valores experimentais e a curva teórica, denotando, para este caso, uma fragilidade da suposição feita (forma de discos, estatisticamente orientados, para as partículas de grafita). Isto significa que a microestrutura real, para este caso do ferro fundido cinzento, é relativamente diversa da hipoteticamente suposta.

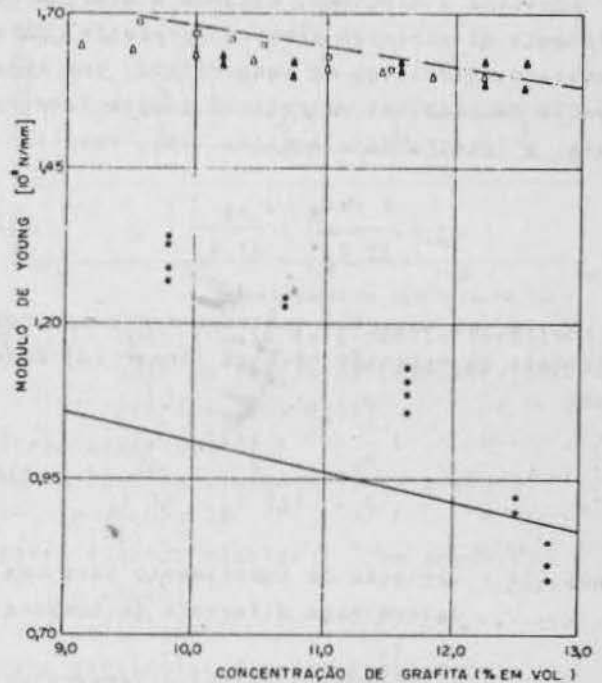


Fig. 9 - Módulo de Young em função da concentração de grafita. Valores experimentais - para ferro fundido cinzento - para ferro fundido nodular

Valores da literatura:

- para ferro fundido nodular, .
- Curvas calculadas: Para partículas dispersas esféricas: -.-.- (equações (14, A3, A4); para partículas dispersas, sob forma de discos, estatisticamente orientadas — (equações (14, A1, A2);  $E_M = 200000 \text{ N.mm}^{-2}$  (matriz: ferrita)  $E_D = 10500 \text{ N.mm}^{-2}$  (fase dispersa: grafita);  $\nu_M = 0,31$ ;  $\nu_D = 0,14$ .

## RELAÇÃO ENTRE A MICROESTRUTURA E O COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA LINEAR

Considerações gerais. O coeficiente de expansão térmica ( $\alpha_v$ ) é definido como a variação de volume ( $\delta V$ ) - em decorrência de uma mudança de temperatura ( $\delta T$ ) - relacionada a um volume inicial ( $V_A$ ), para pressão ( $p$ ) constante e composição química ( $c_i$ ) imutável:

$$\alpha_v = \frac{1}{V_A} \left| \frac{\delta V}{\delta T} \right|_{p, c_i} \quad (16)$$

Admitida a hipótese, segundo a qual, o coeficiente de expansão térmica apresenta, para pequenos intervalos de temperatura, uma dependência desprezível em relação a esta temperatura, e integrando a equação (16), resulta:

$$\alpha_v = \frac{V - V_A}{\Delta T V_A} = \frac{\Delta V}{\Delta T V_A} \quad (17)$$

Assim, um material isotrópico tem o seu coeficiente de expansão térmica linear ( $\alpha$ ) dado por:

$$\alpha = \frac{\alpha_v}{3} = \frac{V}{3\Delta T V_A} \approx \frac{\Delta l}{\Delta T l_A} \quad (18)$$

onde:  $\Delta l$  = variação de comprimento para uma determinada diferença de temperatura  $T$ ;

$l_A$  = comprimento inicial à temperatura ambiente  $T_A$ .

Quando um material bifásico - pressuposta uma isotropia e admitido um comportamento elástico linear de suas fases - é aquecido ( $\Delta T = T - T_A$ ), as suas fases expandem-se desigualmente, de modo que cada uma delas se constitui um "obstáculo" para a expansão da outra, originando-se em consequência, tensões internas. Quando, por exemplo, a matriz se expande termicamente menos do que a fase dispersa ( $\alpha_M < \alpha_D$ ), surgem, então, tensões de tração (+ $\sigma$ ) na matriz e tensões de compressão (- $\sigma$ ) na fase dispersa.

A equação genérica microestrutura-coeficiente de expansão térmica linear de materiais

bifásicos, com estrutura dispersa é [13]:

$$\alpha_C = \alpha_M + (\alpha_D - \alpha_M) \left| \frac{E_D \{3K_C(1-2\nu_M) - E_M\}}{3K_C(E_D(1-2\nu_M) - E_M(1-2\nu_D))} \right| \quad (19)$$

Tal equação, conforme pode ser notado, está diretamente associada às propriedades elásticas do material bifásico, dependendo, assim, das suas respectivas determinações.

Dentre os diversos métodos existentes para a determinação do coeficiente de expansão térmica linear de materiais, pode ser feita referência ao utilizado no desenvolvimento do dilatômetro eletrônico comparativo, [20] para altas temperaturas.

A figura 10, mostra o dilatômetro eletrônico comparativo Netzsch 402E e o forno que garante um aumento contínuo de temperatura sobre o corpo de prova em análise, inserido no dilatômetro, equipamento usado nos ensaios para a determinação do coeficiente de expansão linear.

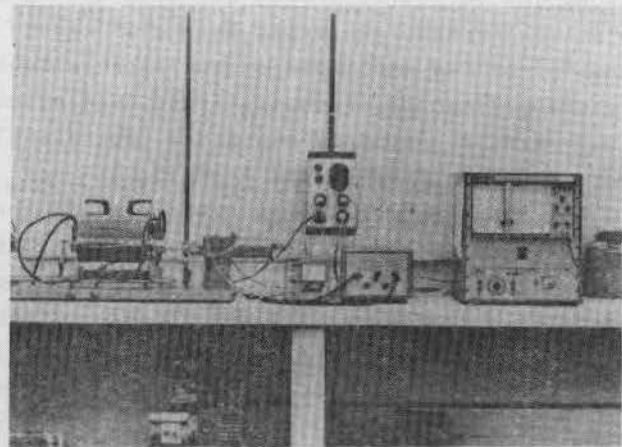


Fig. 10 - Dilatômetro eletrônico comparativo Hetzsch 402E.

Resultados experimentais com ferros fundidos cinzento e nodular. Foram usados corpos de prova cilíndricos com diâmetros e comprimentos nominais de 6,0 mm e 45,0 mm, respectivamente.

Com o intuito de se garantir uma suficiente precisão nas medições das expansões térmicas lineares dos corpos de prova, as superfícies

cies planas extremas dos mesmos foram submetidas a uma retificação, sendo assegurado, um suficiente paralelismo entre as faces.

Nos ensaios realizados, o intervalo de temperatura selecionado foi fixado entre 20°C e 600°C. A seleção do limite inferior do intervalo foi feita em função da temperatura ambiente aproximada de 20°C e a seleção do limite superior foi feita de modo a tornar tão grande quanto possível, fazendo com que, de um lado, os ensaios proporcionem uma boa representatividade do comportamento térmico do material do corpo de prova e, de outro lado, com que não seja atingida a temperatura de transformação da estrutura ferrítica em austenítica.

A figura 11, apresenta valores experimentais, para o coeficiente de expansão térmica linear - obtidos de ensaios realizados com corpos de prova de ferro fundido cinzento e ferro fundido nodular, ambos com matriz ferrítica e sua comparação com curvas teóricas.

As curvas teóricas foram calculadas usando-se as equações (19) e (15) para o ferro fundido cinzento e (19) e (A3) para o ferro fundido nodular.

Para a comparação entre valores experimentais e valores teóricos, é suposto, no ferro fundido cinzento, que as partículas de grafita se apresentam sob a forma de discos, estatisticamente orientados, e que, no ferro fundido nodular, as partículas de grafita se apresentam sob a forma de esferas.

Foram tomados valores médios da literatura [11, 12, 13], para os módulos de Young, para os coeficientes de Poisson e para os coeficientes de expansão térmica linear, das fases ( $E_M = E_{\text{ferrita}} = 200000 \text{ N.mm}^{-2}$ ;  $\nu_M = \nu_{\text{ferrita}} = 0,31$ ;  $\alpha_M = \alpha_{\text{ferrita}} = (14,0)(10^{-6})\text{K}^{-1}$ ;  $E_D = E_{\text{grafita}} = 10500 \text{ N.mm}^{-2}$ ;  $\nu_D = \nu_{\text{grafita}} = 0,14$ ;  $\alpha_D = \alpha_{\text{grafita}} = (2,90)(10^{-6})\text{K}^{-1}$ ). Verificou-se a existência de uma boa concordância entre os valores experimentais e as curvas teóricas para os ferros fundidos cinzento e nodular.

Devido à grande diferença entre os módulos de Young da matriz (ferrita) e da fase dispersa (grafita), as partículas de grafita não constituem, praticamente, obstáculo algum à livre expansão da ferrita. Assim a forma das

partículas tem uma influência muito pequena sobre o coeficiente de expansão térmica linear, de modo que os valores teóricos e experimentais para o ferro fundido nodular devem estar bem próximos aos correspondentes para o ferro fundido cinzento. No caso do material analisado, a diferença entre a composição química do ferro fundido cinzento e a do nodular constituiu-se num fator responsável pela diferença dos resultados experimentais e teóricos.

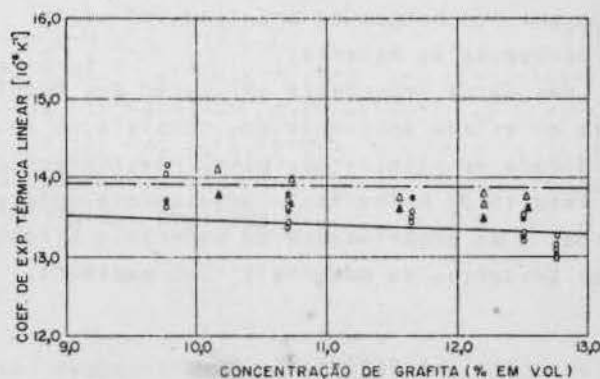


Fig. 11 - Coeficiente de expansão térmica linear em função da concentração de grafita (293-873K).

Valores experimentais:

- ferro fundido cinzento (o em argônio; no vácuo)
- ferro fundido nodular (Δ em argônio; no vácuo)

Curvas calculadas:

- Para partículas dispersas esféricas: - - - - (equações (19) e (A3));
- Para partículas dispersas, sob forma de discos, estatisticamente orientados — (equações (19) e (A1));

$$\alpha_M = 14,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \text{ (matriz: ferrita);}$$

$$E_M = 200000 \text{ N.mm}^{-2}; \nu_M = 0,31; \alpha_D = 2,90 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \text{ (fase dispersa: grafita);}$$

$$E_D = 10500 \text{ N.mm}^{-2}; \nu_D = 0,14.$$

## CONCLUSÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido permite um melhor entendimento sobre as relações quantitativas, existentes entre a microestrutura e algumas propriedades de materiais bifásicos.

Ensaio foram realizados com ferros fundidos nodular e cinzento, ferríticos, sendo constatada uma considerável concordância en-

tre resultados experimentais e valores teóricos para propriedades, tais como a condutibilidade térmica, o módulo de Young e o coeficiente de expansão térmica linear. Isto vem com provar que, sendo conhecidos os valores, de uma dada propriedade, para ambas as fases de um dado material bifásico (grafita e ferrita, no caso do ferro fundido ferrítico), assim como, a concentração, forma e o arranjo geométrico da fase dispersa (grafita, no caso do ferro fundido), torna-se possível a previsão, com uma boa margem de precisão, do valor da propriedade do material.

Uma outra importante aplicação dos resultados do estudo desenvolvido, consiste na possibilidade de otimizações da microestrutura, com o intuito de melhorias - previamente estabelecidas - de propriedades de materiais bifásicos (obtenção de materiais "sob medida").

#### REFERÊNCIAS

- [1] G. Ondracek, Zeitschrift für Werkstoff - technik, vol. 8, 1977 pp. 240 - 246 e pp. 280 - 287; vol. 9 (1978) pp. 31 - 36 e pp. 96 - 100.
- [2] J.C.Maxwell, "Treatise on Electricity and Magnetism" Vol. 1 (1904) pp. 309, Clarendon Oxford.
- [3] D.A.G.Brugemann, Ann. Phys. Vol. 24, 1935 636 e Vol. 25, 1936 645.
- [4] W.Niesel, Ann. Phys. Vol. 41, 1952 pp. 6 - 10.
- [5] G.Ondracek, Newsletter'73 in Stereology , KFK - Ext. Vol. 2, 1973 pp. 129.
- [6] S.Nazaré, G.Ondracek, Powder Metallurgy International, Vol. 1, 1978.
- [7] B.Schulz, Tese de Doutorado, Universidade Karlsruhe, Alemanha, 1974.
- [8] G.Ondracek, Zeitschrift für Werkstofftechnik Vol. 5, 1974 pp. 416.
- [9] Z.Hashin, S.Schtrikman, J.Mech. Phys. Solids Vol. 10, 1972 pp. 355.
- [10] J.Schroeder, Phillips Technical Review Vol. 21 1959/1960 pp. 364 - 368.
- [11] A.K.Verlag, Werkstofftabellen der Metalle, 1972 pp. A44.
- [12] E.Gebhardt, F.Thümmel, "Reaktorwerkstoffe. Vol. 2 1969 pp. 169, B.G.Teubner Verlag.
- [13] S.Nazaré, G.Ondracek, Zeitschrift für Werkstofftechnik Vol. 9, 1978 pp. 140-147.
- [14] W.Niesel, Tese de Doutorado, Universidade de Karlsruhe, 1953.
- [15] L.J.Walpole, J.Mech. Phys. Solids Vol. 14 1966 pp. 151.
- [16] W.Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik 1910, B.G.Teubner Verlag.
- [17] R.Hill, J. Mech. Phys. Solids Vol. 11 1962 pp. 357.
- [18] O.Wiener, Abh. Math. Phys. Vol. 6, 1909 pp. 509.
- [19] Brüel & Kjaer, Catálogo Complex Modulus Apparatus, Type 3930.
- [20] Hetzsch, Operating Instructions for Electronic Dilatometer 402E for high-temperatures.



## APÊNDICE

$$K_C = \frac{E_D}{3(1-2\nu_D)} - \frac{E_D(1-c_D)(1-\nu_D)\{E_D(1-2\nu_M) - (E_M(1-2\nu_D))\}}{3E_D(1-2\nu_D)(1-\nu_D)(1-2\nu_M) - c_D(1-2\nu_D)(1+\nu_D)\{E_D(1-2\nu_M) - E_M(1-2\nu_D)\}} \quad (A1)$$

$$G_C = \frac{E_D}{2(1+\nu_D)} - \frac{15E_D(1-c_D)(1-\nu_D)\{E_D(1+\nu_M) - E_M(1+\nu_D)\}}{30E_D(1+\nu_D)(1-\nu_D)(1+\nu_M) - 4c_D(1+\nu_D)(4-5\nu_D)\{E_D(1+\nu_M) - E_M(1+\nu_D)\}} \quad (A2)$$

$$K_C = \frac{4G_C\{E_D c_D(1-2\nu_M) + E_M(1-c_D)(1-2\nu_D)\} + E_D E_M}{12G_C(1-2\nu_M)(1-2\nu_D) + 3E_M c_D(1-2\nu_D) + 3E_D(1-c_D)(1-2\nu_M)} \quad (A3)$$

$$G_C = \frac{E_M(3-5c_D)}{12(1+\nu_M)} - \frac{E_D(2-5c_D)}{12(1+\nu_D)} + \frac{E_D E_M}{6(1+\nu_D)(1+\nu_M)} + \left| \frac{E_M(3-5c_D)}{12(1+\nu_M)} - \frac{E_D(2-5c_D)}{12(1+\nu_D)} \right|^2 \quad (A4)$$

- $K_C, G_C$  = módulos de compressão e de cisalhamento, respectivamente, do material bifásico.  
 $E_C, E_M, E_D$  = módulos de Young do material bifásico, da matriz e da fase dispersa, respectivamente.  
 $c_D$  = concentração volumétrica da fase dispersa.  
 $a, b$  = eixos grande e pequeno, respectivamente, das esferóides dispersas.  
 $\nu_C, \nu_M, \nu_D$  = coeficientes de Poisson do material bifásico, da matriz e da fase dispersa, respectivamente.

# ESTUDO COMPARATIVO DA SOLDAGEM MIG-MAG DO AÇO SAE 1008 COM DOIS TIPOS DE ARAMES-ELÉTRODOS

ALMIR MONTEIRO QUITES

JAIR CARLOS DUTRA

FAUSTO MORENO DE MIRA

CENTRO TECNOLÓGICO, UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC.

## SUMÁRIO

Os autores estudaram o desempenho de dois elétrodos de aço, diferenciados pela composição química, e compararam as soldas obtidas com os processos MIG e MAG, utilizando corrente contínua nas duas polaridades. Os elétrodos estudados são típicos das classes AWS-E-70S-3 e AWS-E-70S-6.

## INTRODUÇÃO

Objetivo do trabalho. Este trabalho é parte de uma pesquisa bem mais ampla que visa desenvolver o conhecimento básico dos processos de soldagem, a tal ponto que se possa prever determinar a geometria, as propriedades mecânicas e as metalúrgicas da solda a partir do conhecimento dos insumos e outros dados de entrada do processo.

Entende-se que a pesquisa assim concebida é mais promissora, permitindo uma ulterior aplicação prática sobre uma base mais sólida e mais extensa. Não se pode conceber de outra forma a missão de pesquisadores de soldagem no âmbito da universidade.

Visa-se aqui divulgar o desenvolvimento desta pesquisa apresentando, a título de exemplificação, aspectos relativos à influência da composição do arame-eléttrodo combinada com influências de insumos e restrições.

Visão global do processo de soldagem. Soldagem a arco voltaico é o processo que transforma porções do material de base e do material de adição em uma junção permanente chamada solda.

As soldas resultantes diferenciam-se pela

sua geometria e propriedades mecânicas e metalúrgicas tanto da solda como da área adjacente pertencente ao material de base, que foi afetada pelo calor (Fig. 1).



Fig. 1 Entrada e saída do processo de soldagem.

Fixado o material de base, quanto à forma, às dimensões, à composição química, à preparação dos bordos e o espaçamento entre eles, e fixadas também as características do material de adição, a solda resultante dependerá apenas dos insumos e restrições próprias do pro-

cesso. Os insumos são:

- o gás de proteção;
- energia elétrica.

As restrições são:

- o comportamento estático e dinâmico da fonte de energia;
- a velocidade de soldagem;
- a velocidade do arame de material de adição
- a posição de soldagem;
- as restrições estruturais.

A característica estática de arco, o tipo de transferência do material, a distribuição do calor e a solda resultante, dependem de ambos, insumos e restrições (Fig. 2) e definem as características básicas da operação de soldagem.

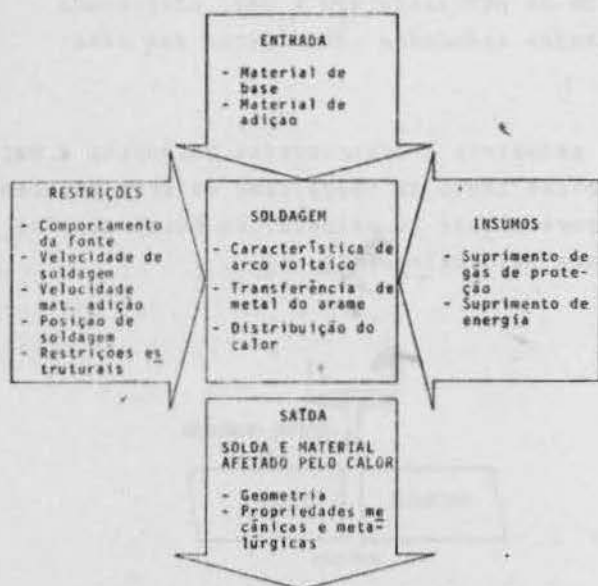


Fig. 2 Fluxograma do desenvolvimento dos processos de soldagem.

Enquanto a questão se coloca em determinar as relações existentes entre insumos, restrições e a geometria da solda, pesquisa-se a soldagem quanto aos processos.

Por outro lado, enquanto a questão é determinar a influência das composições do material de adição e do material de base sobre a solda e suas propriedades, pesquisa-se no campo da metalurgia da solda e da soldabilidade dos materiais.

A figura 2 mostra que o estudo dos processos se faz no campo indicado pelas setas horizontais, enquanto que o estudo da metalurgia da solda e da soldabilidade dos materiais se faz no campo indicado pelas setas verticais. Todavia, esta é uma classificação formal, pois um estudo promissor deverá integrar estes dois aspectos da soldagem.

Após vários anos dedicados à pesquisa com ênfase nos processos de soldagem, tendo resultado daí a edição do livro intitulado TECNOLOGIA DA SOLDAGEM A ARCO VOLTAICO, a equipe do LABSOLDA-UFSC volta-se agora para o estudo da metalurgia da solda e da soldabilidade. Esta nova ênfase não provocará descontinuidades no programa geral de pesquisas, porque se desenvolverá integrada com o estudo dos processos.

A abordagem proposta neste trabalho. Neste trabalho apresenta-se um estudo da soldagem MIG/MAG do aço SAE 1008 com dois eletrodos de composições diferentes.

O  $\text{CO}_2$  e o argônio são os gases que, puros ou misturados, são usados como protetores do arco atuando diferentemente. O primeiro age como agente carburante-oxidante e o segundo não tem função química, mas apenas física.

Face ao exposto e ainda tendo-se em vista que o material de adição no processo MIG/MAG é o próprio eletrodo, acredita-se que o teor de C, Si e Mn nele contido, bem como a natureza do gás de proteção originam influências: no consumo do arame-eletrodo, na produção de material de adição, na geometria da solda, nas suas propriedades.

Inicialmente fixam-se a corrente, a tensão, o diâmetro do eletrodo e a velocidade de soldagem e adota-se: (a) como variáveis independentes: a composição do material de adição, a polaridade do eletrodo e a natureza do gás de proteção; e (b) como variáveis dependentes: o consumo do eletrodo, a produção de material de adição, a área adicionada da solda, a penetração linear, a penetração em área e a dureza máxima.

Posteriormente, para complementar o estudo, cada uma das variáveis dependentes será estudada em função também da corrente, da tensão e da velocidade de soldagem. Neste trabalho,

esta última parte se restringe ao estudo do consumo do eletrodo.

### ESPECIFICAÇÕES

**Arares-eléetrodo.** Neste trabalho comparam-se dois tipos de arames comerciais, de 1,2 mm de diâmetro, um deles (E 70S-3) possuindo um baixo nível de elementos endurecedores (Si, Mn) e outro (E 70S-6) tendo alto nível destes elementos. As composições limites são mostradas na tabela 1.

Eléetrodos	C (%)	Si (%)	Mn (%)	P (%)	S (%)	Cu (revestimento)
E 70S-3	0,100	0,60	1,20	0,045	0,024	0,40
E 70S-6	0,130	0,92	1,60	0,042	0,020	0,31

Tabela 1 Composição química dos arames-eléetrodos utilizados.

**Outras especificações.** Em todo o trabalho as seguintes variáveis foram mantidas constantes no valor especificado:

- material de base: - aço SAE 1008 de 6,35 mm de espessura (1/4"); composição: C-0,072; Mn-0,41.
- gás protetor : - argônio e CO<sub>2</sub> puros
- processo : - soldagem plana sobre face
- eléetrodo com movimento retilíneo uniforme (sem oscilações transversais)
  - distância da tomada de corrente à chapa: 15,5 mm
  - corrente contínua em polaridade direta e inversa
- fonte de corrente:- marca Carl Cloos, modelo GLC-303-PA/3 com amperagem máxima de 350 A e tensão de 34 volts.

### ESTUDO EXPERIMENTAL DA GEOMETRIA DA SOLDA

**Procedimento experimental.** Para melhor estudar o assunto fixaram-se, além das variáveis já especificadas nas seções anteriores deste trabalho, mais as seguintes:

$$I = 180 \text{ A}; \quad V = 30 \text{ volts}; \quad v_s = 30 \text{ cm/min}$$

Como variáveis independentes foram conside-

radas: a composição do arame (E 70S-3 ou E 70S-6); o gás de proteção (argônio ou CO<sub>2</sub>); e a polaridade (CC+ ou CC-). As variáveis dependentes, determinadas por medições nos corpos de prova, foram: a área adicionada (A<sub>1</sub>); a área penetrada (A<sub>2</sub>); a área afetada pelo calor (A<sub>3</sub>); a largura da solda (b); o reforço da solda (r); e a penetração linear (p).

As medidas foram tomadas sobre uma seção reta particular da solda, a qual foi escolhida, de modo a garantir a legitimidade dos valores, pelo "critério do rendimento de deposição", o qual passa-se a expor.

O rendimento de deposição pode ser determinado, para a solda inteira, por pesagens. Assim

$$\eta_d = \frac{P_2 - P_1}{P_e}$$

onde P<sub>1</sub> é o peso do material de base antes da deposição por soldagem;

P<sub>2</sub> é o peso do material de base e da solda após a soldagem;

P<sub>e</sub> é o peso do material do eléetrodo que foi consumido na execução da soldagem.

O rendimento de deposição também pode ser calculado para uma seção particular da solda. Assim

$$\eta'_d = \frac{4 A_1 v_s}{d^2 v_a}$$

onde A<sub>1</sub> é a área adicionada da solda;

d o diâmetro do arame (1,2 mm);

v<sub>s</sub> a velocidade de soldagem; e

v<sub>a</sub> a velocidade de mergulho do arame.

O critério para selecionar uma seção reta particular da solda, de tal modo que se pudessem garantir que esta seção é representativa da solda como um todo, consistiu em escolher a seção para a qual

$$|\eta_d - \eta'_d| \leq 0,05,$$

expressão que resume o critério proposto pelos autores e denominado, simplificada, de "critério de rendimento de deposição".

A tabela 2 indica os valores determinados experimentalmente.

			Áreas de mm <sup>2</sup>			Comprimentos em mm		
			A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	b	r	p
E 70S-3	CO <sub>2</sub>	CC+	17,5	18,9	54,2	11,7	2,1	2,80
		CC-	30,0	8,4	37,6	12,0	3,2	1,65
	Arg	CC+	17,6	7,0	55,7	10,2	2,6	1,20
		CC-	26,9	5,8	50,0	10,5	3,5	1,10
E 70S-6	CO <sub>2</sub>	CC+	15,8	15,9	35,2	10,5	2,3	2,55
		CC-	30,0	12,1	44,6	10,6	3,9	2,10
	Arg	CC+	15,6	5,3	47,4	8,8	2,6	1,20
		CC-	28,3	5,2	28,3	10,4	3,9	1,05

Tabela 2

### Análise dos resultados

#### a) Quanto à área adicionada (A<sub>1</sub>)

Observou-se que o fator preponderante a influenciar no valor da área adicionada é a polaridade. Sendo idênticas as demais condições de soldagem, pode-se dizer que a polaridade direta (CC-) sempre conduz a uma maior área adicionada.

O segundo fator, em ordem de importância, é a composição do arame. Nas condições das experiências relatadas, a máxima área adicionada foi obtida na polaridade direta (CC-) e com proteção de CO<sub>2</sub>, sendo seu valor de 30 mm<sup>2</sup>, para os dois tipos de amares-elétrodos utilizados. Porém, com a mesma polaridade (CC-), mas com proteção de argônio, obtém-se maior área adicionada com eletrodo E 70S-6. Soldando-se com a polaridade inversa (CC+), a área adicionada é maior com eletrodo E 70S-3, seja qual for o gás protetor.

Nas condições desta experiência, observou-se que, para igual arame-elétrodo e para polaridade inversa (CC+), a área adicionada praticamente não varia com a mudança do gás. Porém, na polaridade direta (CC-) o CO<sub>2</sub> oferece uma maior área adicionada.

#### b) Quanto à área penetrada (A<sub>2</sub>)

A experiência indicou que o fator mais importante a afetar o tamanho da área penetrada é o gás de proteção. Em condições idênticas de soldagem, exceto quanto à natureza do gás de proteção, o CO<sub>2</sub> produz maior área penetrada.

A composição do arame influi fazendo com que, sendo idênticas as demais condições de soldagem, o arame E 70S-3 produza maior penetração em área, exceto no caso da soldagem

sob CO<sub>2</sub> em polaridade direta.

A polaridade tem influência marcante quando a proteção é de CO<sub>2</sub>, especialmente com arame E 70S-3. Em condições estritamente comparáveis, a polaridade inversa (CC+) sempre oferece maior penetração em área. Porém, com proteção de argônio e arame E 70S-6, quase não há influência da polaridade.

#### c) Quanto à área afetada pelo calor (A<sub>3</sub>)

Verificou-se que o fator mais importante quanto ao tamanho da área afetada é a composição do eletrodo. Analogamente ao que acontece com a área penetrada (A<sub>2</sub>), a área afetada (A<sub>3</sub>) é maior com E 70S-3, quando as demais condições de soldagem são idênticas. A única exceção a esta afirmativa é o caso da soldagem com CO<sub>2</sub> em polaridade direta.

A influência da polaridade se caracteriza por uma maior área afetada no caso de polaridade inversa (CC+), exceto no caso de soldagem com arame E 70S-6 sob CO<sub>2</sub>.

A proteção com argônio gera uma maior área afetada do que a proteção com CO<sub>2</sub>, exceto no caso de E 70S-6 em CC-. Para E 70S-3 e CC+ a diferença é desprezível.

#### d) Quanto à largura da solda (b)

As maiores larguras de solda ocorrem com arame E 70S-3 e proteção de CO<sub>2</sub>. A menor largura foi obtida com eletrodo E 70S-6 em soldagem sob argônio com polaridade inversa (CC+). As demais condições de soldagem se equivalem quanto à largura da solda resultante.

#### e) Quanto ao reforço (r)

Neste caso, a polaridade é o fator mais influente. A polaridade direta (CC-) gera maior reforço.

A composição do arame que causa maior reforço é a do E 70S-6, sendo iguais as demais condições.

O gás de proteção influi, produzindo maior reforço a soldagem sob argônio, mantidas as demais condições iguais.

#### f) Quanto à penetração (p)

O fator mais marcante, neste caso, é o gás de proteção. Sendo idênticas as outras variáveis, o CO<sub>2</sub> causa maior penetração que o argônio.

O segundo fator em importância é a polaridade, onde a polaridade inversa alcança maiores penetrações que a direta, em iguais condições de teste.

No tocante à composição do arame, verificou-se que a troca de E 70S-3 para E 70S-6 não modifica a penetração se a soldagem se fizer sob argônio. Sob  $CO_2$  a polaridade inversa (CC+) dá vantagem no caso de eletrodo E 70S-3, enquanto que a polaridade direta (CC-) dá vantagem no caso de uso do eletrodo E 70S-6.

#### ESTUDO EXPERIMENTAL DA DUREZA DA SOLDA

Procedimento experimental. Para estudar os efeitos da composição do arame, do gás de proteção e da polaridade sobre a solda de aço, procurou-se comparar as durezas da solda obtida.

Para melhor caracterização de condições comparáveis, os autores adotaram o critério da dureza na raiz da solda. Assim, mediram-se durezas, em cada seção reta do corpo de prova, ao longo da linha paralela à superfície das chapas que tangenciava a solda em seu ponto de maior penetração. Desta maneira foi mais fácil caracterizar o máximo da distribuição de dureza ao longo de tal linha. Conforme se observa nas figuras 3 e 4, a dureza varia desde a dureza do material base (135 Hv) até um máximo, quando a linha de referência tangencia a solda.

Convém esclarecer que em todos os corpos de prova, e também nas figuras 3 e 4, cada ponto do diagrama de distribuição de durezas é realmente a média de, no mínimo, três (3) medidas. Especialmente no intervalo (-1 mm, +1 mm) no entorno da dureza máxima, tomada com referência zero, cada ponto representa a média de cinco (5) medidas.

A tabela 3 apresenta a média das durezas obtidas no citado intervalo (-1 mm, +1 mm).

Análise dos resultados. Quando se solda sob proteção de  $CO_2$  a composição tem influência primordial; sob proteção de argônio é a polaridade que possui influência mais notável.

Quanto à composição do arame-eletrodo, constatou-se que, quando todas as demais variáveis permanecem constantes, o arame E 70S-6

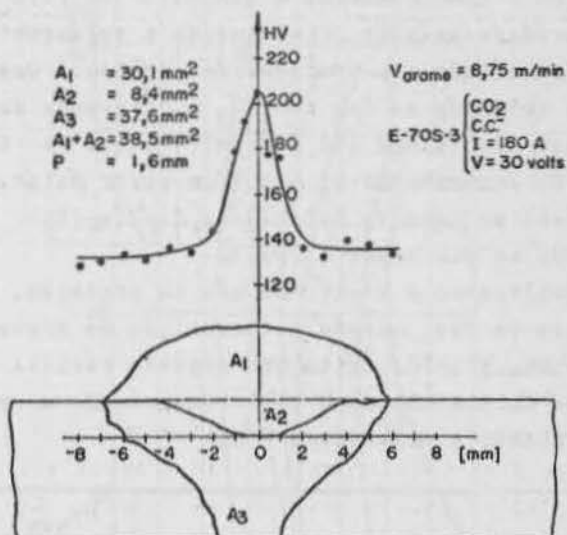


Fig. 3 Distribuição da dureza e geometria da solda, obtida com o eletrodo E 70S-3, em polaridade direta (CC-) e arco em atmosfera de  $CO_2$ .

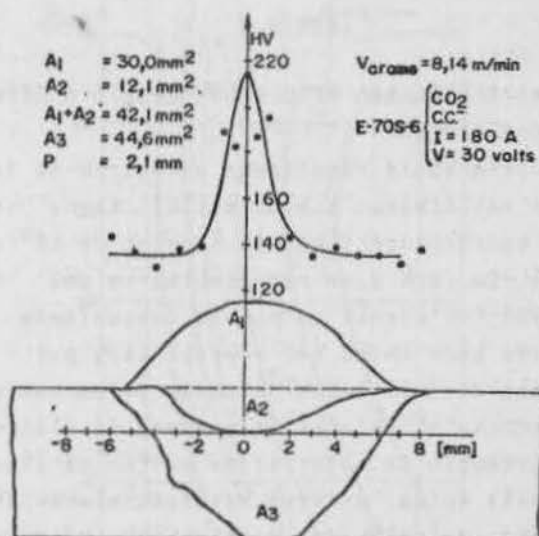


Fig. 4 Distribuição da dureza e geometria da solda, obtida com o eletrodo E 70S-6, em polaridade direta (CC-) e arco em atmosfera de  $CO_2$ .

apresenta maior dureza que o E 70S-3.

Por outro lado, sendo invariável a composição do arame, a dureza é bem maior no caso de polaridade inversa (CC+) quando a soldagem foi executada com proteção de argônio. Quando a soldagem se faz sob  $CO_2$  a diferença de dureza resultante não é significativa no caso do arame E 70S-6; mas é um pouco maior, favorável ao caso de polaridade direta (CC-) quando se usa arame E 70S-3.

Analisando o efeito do gás de proteção, verifica-se que, quando a composição do arame é a mesma, a solda feita sob argônio resulta de maior dureza quando a polaridade é CC+ e menor quando a polaridade é CC-.

			Hv máx
E 70S-3	CO <sub>2</sub>	CC+	168,0
		CC-	183,8
	Arg	CC+	202,2
		CC-	150,0
E 70S-6	CO <sub>2</sub>	CC+	192,6
		CC-	193,0
	Arg	CC+	205,0
		CC-	164,0

Tabela 3

#### ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS QUANTO A GEOMETRIA E A DUREZA

Os principais resultados encontram-se integrados nas figuras 5 e 6. Nestas, temos seis eixos coordenados formando ângulos de  $60^\circ$  entre si. Em cada eixo representou-se uma das variáveis estudadas em escala conveniente. Cada solda pode então ser representada por um polígono de seis lados definido pelos pontos que indicam os valores do consumo do eletrodo e da produção de material de adição na execução desta solda, da área adicionada e da área penetrada da solda, da penetração e da dureza alcançada. Quando o polígono se alonga para baixo significa que a solda tem boas características para passes de enchimento; quando se alonga para cima significa boas características para passes em que se requer penetração; quando se alonga para a direita, significa que a solda tem maior resistência.

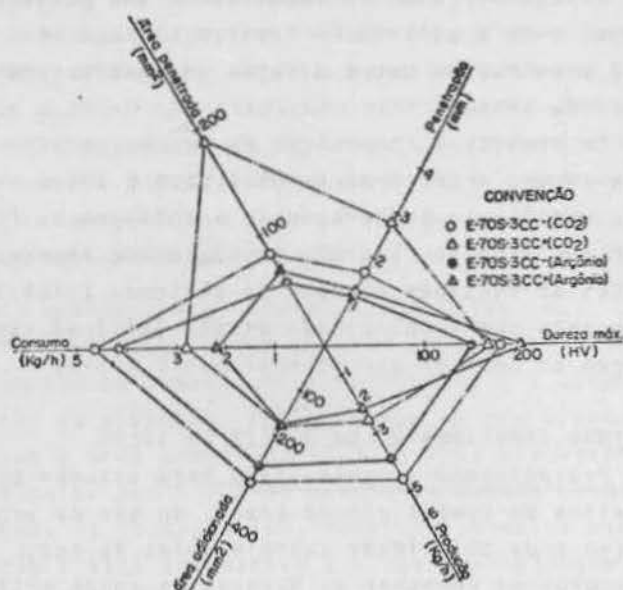


Fig. 5 Polígono de resultados obtidos com o eletrodo E 70S-3 em polaridade direta (CC-) e inversa (CC+) e arco em atmosfera de  $CO_2$  e de argônio.

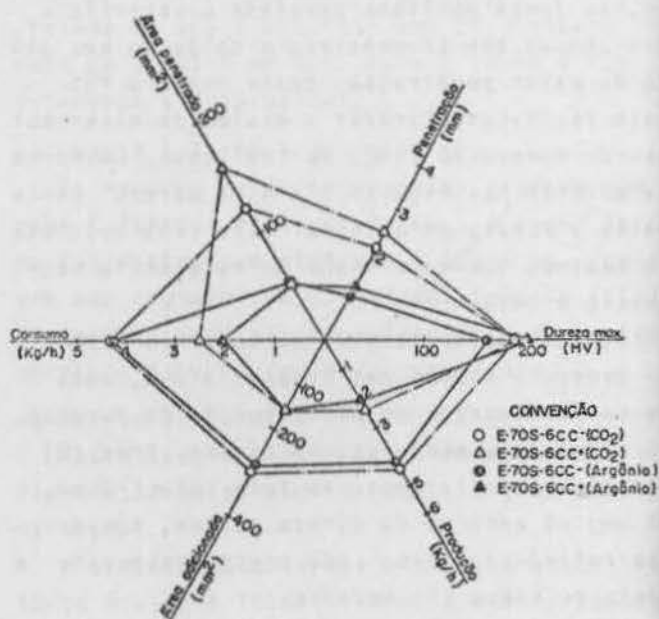


Fig. 6 Polígono de resultados obtidos com o eletrodo E 70S-6, em polaridade direta (CC-) e inversa (CC+) e arco em atmosfera de  $CO_2$  e de argônio.

Examinando-se a figura 5, verifica-se que, para o caso do eletrodo E 70S-3, é vantajoso utilizar:

(a) para passes de enchimento, a polaridade

direta (CC-), preferentemente sob proteção de  $\text{CO}_2$ ;

(b) para passes de penetração, a proteção de  $\text{CO}_2$ , com nítida vantagem na polaridade inversa (CC+);

(c) para alcançar maior dureza, polaridade inversa e proteção de argônio.

Examinando-se agora a figura 6, referente ao eletrodo E 70S-6, verifica-se que são válidas as mesmas conclusões obtidas da figura anterior.

No entanto, comparando a figura 5 com a figura 6, verifica-se que:

(a) para passes de enchimento, é praticamente indiferente a composição do eletrodo;

(b) para passes de penetração, o eletrodo E 70S-3 apresenta nítida vantagem para o caso de proteção de  $\text{CO}_2$  com polaridade CC+;

(c) para alcançar maior dureza, é praticamente indiferente o eletrodo que se escolhe.

#### ESTUDO EXPERIMENTAL DO CONSUMO DO ELÉTRODO

Para continuar este trabalho, cada uma das variáveis dependentes - aquelas representadas sobre os eixos do hexágono - deve ser estudada em função também da corrente, da tensão e da velocidade de soldagem.

Apresenta-se aqui o estudo experimental do consumo do eletrodo, em função da corrente e da tensão, já que a velocidade de soldagem não influi no mesmo.

Para melhor estudar o assunto, determinou-se experimentalmente curvas de iso-consumo. Cada curva é formada por pontos, cujas coordenadas cartesianas são a tensão e a corrente, onde se obtém o mesmo consumo do eletrodo. As figuras 7 e 8 mostram as curvas citadas para eletrodo E 70S-6 e arco regado a  $\text{CO}_2$  em ambas as polaridades, respectivamente, CC+ e CC-. Como se observa, para o mesmo par tensão-corrente, a polaridade direta implica em obter-se maior consumo do eletrodo. Para maiores tensões mais se acentua esta diferença a uma mesma corrente (ampères), qualquer que seja ela. Pode-se verificar isso facilmente sobrepondo-se os gráficos. Isto também foi verificado experimentalmente [1], para arcos regados com outros gases e para outros diâmetros de arame.

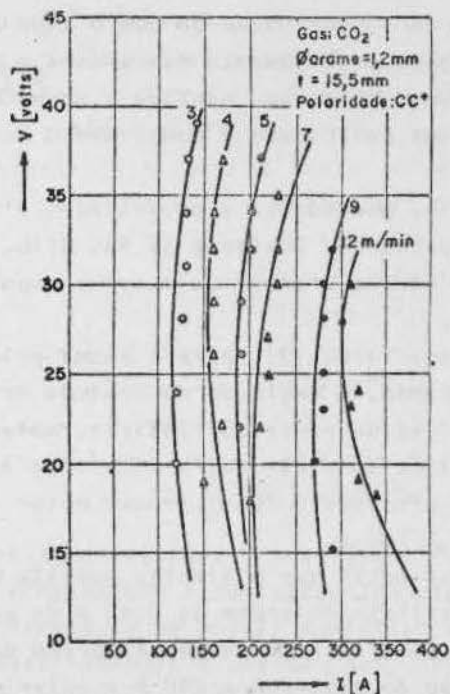


Fig. 7 Linhas de iso-consumo (m/min) para arame de 1,2 mm, tipo E 70S-6, em polaridade inversa (CC+) e arco regado a  $\text{CO}_2$  puro.

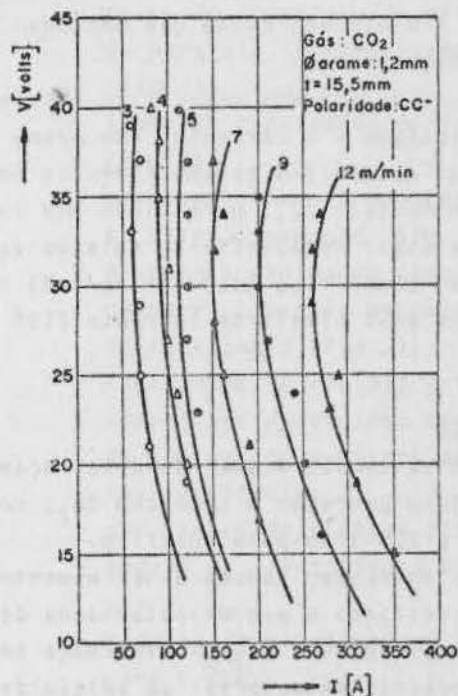


Fig. 8 Linhas de iso-consumo (m/min) para arame de 1,2 mm, tipo E 70S-6, em polaridade direta (CC-) e arco regado a  $\text{CO}_2$  puro.



Para o elétrodo E 70S-6 de 1,2 mm, trabalhando a 25 V, verificou-se que o tipo de gás de proteção, praticamente não altera o consumo do mesmo, desde que mantida a mesma corrente, a mesma polaridade e comprimento do elétrodo [2].

Todavia, mudando-se a polaridade, a diferença é evidente. Conforme já foi dito, a polaridade direta oferece um maior consumo de elétrodo.

Da mesma forma [2], para a mesma polaridade e elétrodo, a evolução do consumo não depende do gás de proteção. Todavia, mudando-se a composição do elétrodo, a diferença é evidente. O elétrodo E 70S-3 produz maior consumo que o E 70S-6.

É de se notar que o simples aumento do teor de silício da ordem de 0,4% e de manganês de 0,5% produz uma queda da ordem de 20% no consumo do elétrodo a 240 A e polaridade inversa.

Por outro lado, verificou-se [2] que, no caso particular do arco regado a argônio, a composição do elétrodo, não é fundamental. Em outras palavras, o consumo não varia quando se troca o elétrodo, desde que mantidas as demais condições.

Chama-se de consumo específico a relação entre o consumo e a corrente, num mesmo nível de tensão. A tabela 3 resume todos os resultados experimentais [2], permitindo uma comparação entre eles. Apresentam-se nela os valores do consumo específico (dado em Kg/h.A) a 25 volts e em dois níveis de corrente (150 A e 250 A).

#### CONCLUSÕES

1. Quando se requer passes de penetração é vantajoso proteger o arco com CO<sub>2</sub>, com elétrodo E 70S-3 no polo positivo.
2. Quando se requer passes de enchimento em aço é vantajoso o uso da polaridade direta com arco regado a CO<sub>2</sub>. A diferença entre as produções de material de adição de ambos os elétrodos é tão pequena que é preferível trabalhar com o E 70S-6 por apresentar menor consumo.
3. A máxima dureza, medida na raiz da solda, foi obtida com o uso da polaridade inversa

e arco sob argônio, sendo o elétrodo do tipo E 70S-6.

Relação consumo e corrente		Atmosfera de argônio		Atmosfera de CO <sub>2</sub>	
		E 70S-3	E 70S-6	E 70S-3	E 70S-6
Polaridade CC+	I <sub>150</sub>	1,33 x 10 <sup>2</sup>	1,33 x 10 <sup>2</sup>	1,60 x 10 <sup>2</sup>	1,42 x 10 <sup>2</sup>
	I <sub>250</sub>	1,92 x 10 <sup>2</sup>	1,71 x 10 <sup>2</sup>	2,08 x 10 <sup>2</sup>	1,68 x 10 <sup>2</sup>
Polaridade CC-	I <sub>150</sub>	2,20 x 10 <sup>2</sup>	2,10 x 10 <sup>2</sup>	2,44 x 10 <sup>2</sup>	2,13 x 10 <sup>2</sup>
	I <sub>250</sub>	2,51 x 10 <sup>2</sup>	2,27 x 10 <sup>2</sup>	2,66 x 10 <sup>2</sup>	2,29 x 10 <sup>2</sup>

Tabela 3 Consumo específico dos elétrodos E 70S-3 e E 70S-6 em dois níveis de corrente a 25 volts.

4. Nas composições estudadas, o uso da polaridade direta (CC-) resulta em maior consumo do arame-elétrodo, mantidas iguais as demais condições.
5. O consumo do arame-elétrodo não se altera quando se troca o gás de proteção de argônio para CO<sub>2</sub>, ou vice-versa desde que se trabalhe com E 70S-6 a 25 volts, mantidas as demais condições.
6. O consumo do elétrodo é muito dependente da polaridade.
7. Soldando com E 70S-3 obtêm-se maior consumo de elétrodo com proteção de CO<sub>2</sub> do que com argônio, mantidas iguais as demais condições.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Quites, A.M. e Dutra, J.C., Contribuição ao estudo do arco voltaico aplicado à soldagem. Poços de Caldas, Encontro Nacional de Tecnologia da Soldagem, 4, out. 1978, 26 p.
2. Quites, A.M.; Dutra, J.C.; Mira, F.M., Influência da composição química do elétrodo nos parâmetros de soldagem e na solda resultante. Guarujá, Congresso Latino Americano de Tecnologia da Soldagem, 3, out. 1979.

# ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS ORTOTRÓPICAS DE REVOLUÇÃO

RAUL GUENTHER

DOMINGOS BOECHAT ALVES

CENTRO TECNOLÓGICO, UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC.

## SUMÁRIO

Em diversas situações, como em reservatórios e vasos de contenção, cascas finas de revolução podem estar submetidas a distribuições de temperatura e carregamentos estáticos das mais diferentes formas. Neste trabalho apresenta-se um modelo analítico-numérico para a determinação de tensões resultantes, deslocamentos e deformações, objetivando possibilitar a análise do comportamento de cascas nestas situações. O desenvolvimento analítico é realizado a partir da teoria de cascas conhecida como primeira aproximação de Love, e a formulação numérica é feita através de diferenças finitas, sendo os resultados apresentados obtidos através de um programa digital.

## NOTAÇÃO

$a_0$	- comprimento de referência	$r_1, r_2$	- raios de curvatura do meridiano e do paralelo, respectivamente (fig. 1)
$a_{pq}$	- constantes de rigidez extencional adimensionalizadas	$s$	- linha de coordenada meridional (fig. 1)
$d_{pq}$	- constantes de rigidez flexional adimensionalizadas	$u, v, w$	- deslocamentos nas direções (s, $\theta$ , z) respectivamente (fig. 1)
$e_p, g_p, h_p, p=1,4$	- constantes que definem as condições de contorno	$z$	- distância medida ao longo da espessura, a partir da superfície de referência (fig. 1)
$h$	- espessura da casca	$A_{pq}$	- constantes de rigidez extencional
$h_0$	- espessura de referência	$A_{cpq}$	- constantes de rigidez que acoplam as tensões de membrana aos momentos resultantes
$k_s, k_\theta, k_{s\theta}$	- componentes do vetor mudança de curvatura da superfície de referência	$D_{pq}$	- constantes de rigidez flexional
$L$	- comprimento da casca	$E_0$	- módulo de elasticidade de referência
$m$	- número de pontos pivotais	$E_s, E_\theta$	- módulos de elasticidade nas direções s e $\theta$
$n$	- ordem do harmônico da série de Fourier	$G_{s0}$	- módulo de elasticidade transversal
$P_s, P_\theta, P_z$	- carregamentos por unidade de área (fig. 3)	$M_s, M_\theta, M_{s\theta}$	- momentos por unidade de comprimento (fig. 3)
$r$	- distância medida perpendicularmente ao eixo de revolução, entre este e um ponto sobre a superfície de referência (fig. 2).		

- $M_{Ts}, M_{T\theta}$  - "momentos térmicos" nas direções  $s$  e  $\theta$   
 $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$  - tensões de membrana por unidade de comprimento (fig. 3)  
 $\bar{N}_{s\theta}, \bar{Q}_s$  - tensões efetivas no contorno  
 $P_{Ts}, P_{T\theta}$  - "forças térmicas" nas direções  $s$  e  $\theta$   
 $Q_s, Q_\theta$  - tensões transversais por unidade de comprimento (fig. 3)  
 $T$  - temperatura no ponto  $(s, \theta, z)$   
 $T_1$  - temperatura interna da casca  
 $T_2$  - temperatura externa da casca  
 $T_0$  - temperatura de referência  
 $\alpha_s, \alpha_\theta$  - coeficientes de dilatação térmica nas direções  $s$  e  $\theta$   
 $B$  -  $h_0^2/a_0^2$   
 $\Delta$  - espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência  
 $\Delta T$  -  $T_2 - T_1$   
 $\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta}$  - componentes do vetor deformação da superfície de referência  
 $\theta$  - ângulo circunferencial  
 $\nu$  -  $4 \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2}}$   
 $\nu_{s\theta}, \nu_{\theta s}$  - coeficientes de Poisson  
 $\xi$  -  $s/a_0$  - comprimento ao longo do meridiano adimensionalizado  
 $\rho$  - distância adimensionalizada perpendicular ao eixo de revolução até um ponto sobre a superfície de referência  
 $\rho_1$  - raio de curvatura meridional adimensionalizado  
 $\sigma_0$  - tensão de referência  
 $\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_{s\theta}$  - componentes do vetor tensão  
 $\phi$  - ângulo meridional (fig. 2)  
 $\phi_s$  - rotação da tangente à linha de coordenadas  $s$ .

#### MATRIZES E ÍNDICES

- $E, F, P, Q, R, S_{pq}, \bar{S}_{pq}$  - matrizes  $4 \times 4$   
 $A, A_c, D, H, \theta$  - matrizes  $3 \times 3$   
 $C, \bar{C}, X, Y$  - matrizes coluna  $1 \times 4$   
 $B, K, M, M_T, N, P_T, U, E, \bar{O}$  - matrizes coluna  $1 \times 3$   
 $Q_s$  - matriz coluna  $1 \times 2$

- $i$  - estação ao longo do meridiano  
 $m$  - última estação  
 $n$  - coeficiente de Fourier

#### INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um modelo analítico-numérico para o cálculo de tensões resultantes, deslocamentos, tensões e deformações em cascas finas de revolução, quando submetidas a distribuições de temperatura  $T=T(s, \theta, z)$  e carga  $P = P(s, \theta)$  quaisquer, que devem apenas ser suficientemente suaves na direção circunferencial, para que possam ser expandidas em série de Fourier. O material da casca é considerado elasto-termicamente ortotrópico, podendo ter propriedades variáveis ao longo do meridiano e da espessura. Na direção circunferencial estas propriedades são consideradas constantes devendo, portanto, serem tomadas para a temperatura média. Considera-se ainda que todas as propriedades dos materiais tenham um comportamento semelhante ao longo da espessura.

A formulação analítica obtida a partir da primeira aproximação de Love, resulta num sistema de quatro equações diferenciais parciais e expandindo todas as variáveis em série de Fourier na direção circunferencial chega-se a um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias para cada harmônico da série.

A formulação numérica é baseada no método das diferenças finitas e os resultados são obtidos através de um programa digital em FORTRAN IV.

Com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do modelo, apresentam-se as soluções de alguns problemas.

#### FORMULAÇÃO ANALÍTICA

A formulação analítica do problema é desenvolvida a partir das hipóteses básicas consideradas na primeira aproximação de Love [6], a partir das quais são obtidas as relações de formações-deslocamentos, as relações tensões resultantes-deformações e as equações de equilíbrio de um elemento genérico de casca. Para tal, considera-se um sistema de referência triortogonal como o mostrado na figura 1.

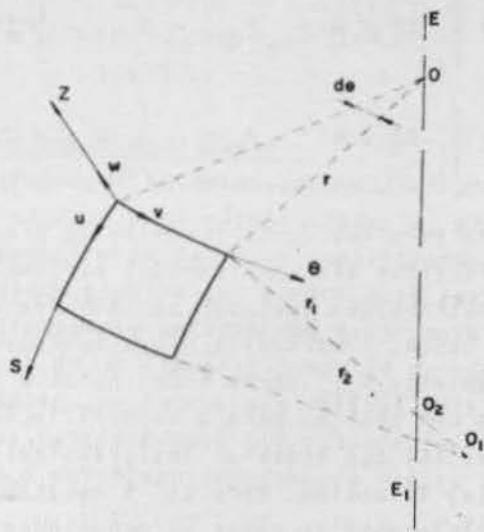


Fig. 1 Sistema de referência e elemento de casca.

Uma relação geométrica importante, bastante utilizada neste trabalho, pode ser determinada a partir da figura 2, observando-se que  $dr/ds = \cos \phi$  e lembrando que  $ds = r_1 d\phi$ . Assim

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dr}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\cos \phi) = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} (\cos \phi) = -\frac{1}{r_1} \sin \phi$$

Da figura 2,  $r_2 = r/\sin \phi$ , então

$$r_2 = -\frac{r}{r_1} \frac{dr}{ds^2} \quad (a)$$

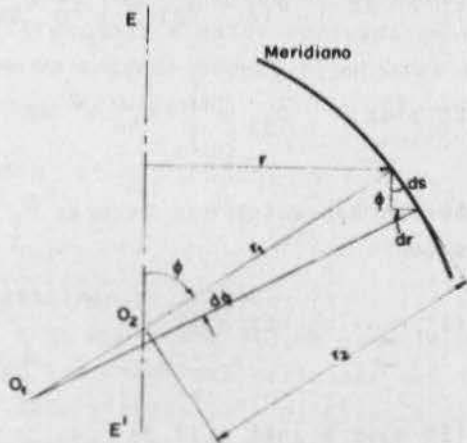


Fig. 2 Parâmetros geométricos do meridiano.

a- Relações deformações-deslocamentos

As relações entre os vetores deformação da superfície de referência  $\epsilon = (\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta})^t$  e deslocamento  $U = (u, v, w)^t$ , e entre os vetores mudança de curvatura  $K = (k_s, k_\theta, k_{s\theta})^t$  e deslocamento utilizadas neste trabalho, foram desenvolvidas a partir das relações deformações-deslocamentos estabelecidas na teoria da elasticidade [2], observando-se as hipóteses e as particularidades geométricas do problema de cascas delgadas de revolução [6].

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= u' + r_1^{-1} w \\ \epsilon_\theta &= r^{-1} (r'u + \dot{v} - r_1 r'' w) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\epsilon_{s\theta} = r^{-1} \dot{u} - r' r^{-1} v + v'$$

$$k_s = -r_1' r_1^{-2} u + r_1^{-1} u' - w''$$

$$k_\theta = r' (r r_1)^{-1} u - r_1 r'' r^{-2} \dot{v} - r^{-2} \ddot{w} - r' r^{-1} w'$$

$$\begin{aligned} k_{s\theta} &= (r r_1)^{-1} \dot{u} + [2r_1 r' r'' r^{-2} - (r_1 r'')' r^{-1}] v - \\ &\quad - r_1 r'' r^{-1} v' + 2r' r^{-2} \dot{w} - 2r^{-1} \dot{w}' \end{aligned} \quad \dots (2)$$

onde  $( )' = \partial/\partial s$  e  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial/\partial \theta$ .

b - Relações tensões resultantes-deformações

A partir da lei de Hooke para materiais ortotrópicos [6], considerando as hipóteses de Love pode-se chegar às relações tensão-deformação para cascas finas de revolução:

$$\sigma = H \epsilon + z H K - B T \quad (b)$$

onde T é a temperatura no ponto  $(s, \theta, z)$  e

$$\sigma = (\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_{s\theta})^t$$

$$B = \begin{Bmatrix} E_s^* \alpha_s + \nu_{\theta s} E_\theta^* \alpha_\theta \\ E_\theta^* \alpha_\theta + \nu_{s\theta} E_s^* \alpha_s \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} E_s^* & \nu_{\theta s} E_\theta^* & 0 \\ \nu_{s\theta} E_s^* & E_\theta^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{s\theta} \end{bmatrix}$$

com

$$E_S^* = \frac{E_S}{(1 - \nu_{S\theta} \nu_{\theta S})} \quad \text{e} \quad E_\theta^* = \frac{E_\theta}{(1 - \nu_{S\theta} \nu_{\theta S})}$$

Para cascas finas as tensões resultantes por unidade de comprimento (figura 3) são definidas da seguinte maneira [6]:

$$N = \{N_S, N_\theta, N_{S\theta}\}^t = \int_z \{\sigma_S, \sigma_\theta, \sigma_{S\theta}\}^t dz$$

$$Q = \{Q_S, Q_\theta\}^t = \int_z \{\sigma_{Sz}, \sigma_{\theta z}\}^t dz \quad (c)$$

$$M = \{M_S, M_\theta, M_{S\theta}\}^t = \int_z \{\sigma_S, \sigma_\theta, \sigma_{S\theta}\}^t z dz$$

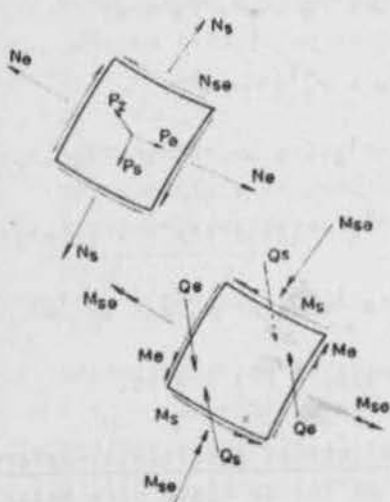


Fig. 3 Elemento genérico de casca com os carregamentos e as tensões resultantes.

Desta forma, substituindo as relações (b) nas equações (c) obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A_c \\ A_c^t & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_T \\ M_T \end{Bmatrix} \quad (d)$$

onde  $A$  representa a rigidez extencional,  $D$  a rigidez flexional,  $A_c$  o acoplamento entre as tensões e os momentos resultantes,  $P_T = \{P_{Ts}, P_{T\theta}, 0\}^t$  é o vetor "força térmica" e  $M_T = \{M_{Ts}, M_{T\theta}, 0\}^t$  é o vetor "momento térmico".

Observando a matriz  $A_c$  verifica-se que seus elementos não nulos são:

$$A_{c11} = \int_z E_S^* z dz \quad A_{c12} = A_{c21} = \int_z E_\theta^* \nu_{\theta S} z dz \quad (e)$$

$$A_{c22} = \int_z E_\theta^* z dz \quad A_{c33} = \int_z G_{S\theta} z dz$$

Lembrando que neste trabalho as propriedades elásticas são consideradas variáveis com uma distribuição qualquer ao longo da espessura da casca, verifica-se que a condição para os elementos  $A_{cpg}$  serem todos nulos é a escolha de uma posição para a superfície de referência, tal que todas as integrais das equações (e) se anulem. Para tal é necessário que o comportamento de todas as propriedades elásticas seja semelhante ao longo da espessura. Como isto ocorre na maioria dos casos práticos, esta consideração é introduzida neste trabalho, e a equação (d) resulta

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \theta \\ \theta & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_T \\ M_T \end{Bmatrix} \quad (3)$$

com os elementos não nulos de  $A$  e  $D$  dados por

$$A_{11} = \int_z E_S^* dz \quad A_{12} = A_{21} = \int_z E_\theta^* \nu_{\theta S} dz$$

$$A_{22} = \int_z E_\theta^* dz \quad A_{33} = \int_z G_{S\theta} dz$$

$$D_{11} = \int_z E_S^* z^2 dz \quad D_{12} = D_{21} = \int_z E_\theta^* \nu_{\theta S} z^2 dz$$

$$D_{22} = \int_z E_\theta^* z^2 dz \quad D_{33} = \int_z G_{S\theta} z^2 dz$$

e os elementos não nulos dos vetores  $P_T$  e  $M_T$  expressos por

$$P_{Ts} = \int_z (E_S^* \alpha_S + \nu_{\theta S} E_\theta^* \alpha_\theta) T dz$$

$$P_{T\theta} = \int_z (E_\theta^* \alpha_\theta + \nu_{S\theta} E_S^* \alpha_S) T dz$$

$$M_{Ts} = \int_z (E_S^* \alpha_S + \nu_{\theta S} E_\theta^* \alpha_\theta) T z dz$$

$$M_{T\theta} = \int_z (E_{\theta}^* \alpha_{\theta} + \nu_{s\theta} E_s^* \alpha_s) T z dz$$

c - Equações de equilíbrio

Integrando as equações de equilíbrio determinadas na teoria da elasticidade [2] ao longo da espessura da casca, e considerando as propriedades geométricas para o problema em questão, obtêm-se as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento genérico de casca de revolução, em termos das tensões resultantes e dos carregamentos por unidade de área ( $p_s, p_{\theta}, p_z$ ) orientadas conforme a figura 3.

$$\begin{aligned} (rN_s)' + \dot{N}_{s\theta} - r'N_{\theta} + \frac{r}{r_1} Q_s &= -r p_s \\ (rN_{s\theta})' + \dot{N}_{\theta} + r'N_{s\theta} - r_1 r'' Q_{\theta} &= -r p_{\theta} \\ (rQ_s)' + \dot{Q}_{\theta} - \frac{r}{r_1} N_s + r_1 r'' N_{\theta} &= -r p_z \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (rM_s)' + \dot{M}_{s\theta} - r'M_{\theta} - rQ_s &= 0 \\ (rM_{s\theta})' + \dot{M}_{\theta} + r'M_{s\theta} - rQ_{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

d - Equações fundamentais, adimensionalização e expansão das variáveis em série de Fourier

Eliminando  $Q_s$  e  $Q_{\theta}$  das equações (4) obtêm-se três equações. Para que no sistema de equações diferenciais a maior derivada em relação a  $s$  seja de segunda ordem, elimina-se  $k_s$  da equação (3), resultando:

$$M_{\theta} = \frac{D_{12}}{D_{11}} M_s + (D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) k_{\theta} + (\frac{D_{12}}{D_{11}} M_{Ts} - M_{T\theta}) \dots (f)$$

Substituindo as relações (1) e (2) na equação (3) e na expressão (f), e as relações resultantes bem como suas derivadas nas três equações determinadas pela eliminação de  $Q_s$  e  $Q_{\theta}$  das equações (4), obtêm-se três equações diferenciais parciais em termos dos deslocamentos  $u, v, w$  e do momento meridional  $M_s$  e suas derivadas.

A substituição das relações deformações-deslocamentos (1) e (2) na expressão de  $M_s$  da equação (3) fornece uma quarta.

Expandindo todas as variáveis em série de Fourier na direção circunferencial, transforma-se este sistema de quatro equações diferenciais parciais em um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias em relação a  $s$ , para cada harmônico da série. Para tornar este sistema adimensional, procede-se a adimensionalização de todas as variáveis.

A adimensionalização e expansão das variáveis compatível com a das cargas e temperaturas é a seguinte:

$$p_s = \frac{\sigma_0 h_0}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} p_{sn}(s) \cos(n\theta)$$

$$p_{\theta} = \frac{\sigma_0 h_0}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} p_{\theta n}(s) \sin(n\theta)$$

$$p_z = \frac{\sigma_0 h_0}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} p_{zn}(s) \cos(n\theta)$$

$$T = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(s) \cos(n\theta)$$

$$N_s = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{sn}(s) \cos(n\theta)$$

$$N_{\theta} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta n}(s) \cos(n\theta)$$

$$N_{s\theta} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{s\theta n}(s) \sin(n\theta)$$

$$Q_s = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} Q_{sn}(s) \cos(n\theta)$$

$$Q_{\theta} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\theta n}(s) \sin(n\theta)$$

$$M_s = \frac{\sigma_0 h_0^3}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} M_{sn}(s) \cos(n\theta)$$

$$M_{\theta} = \frac{\sigma_0 h_0^3}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta n}(s) \cos(n\theta)$$

$$M_{s\theta} = \frac{\sigma_0 h_0^3}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} M_{s\theta n}(s) \sin(n\theta)$$

$$P_{Ts} = \frac{\sigma_0 h_0 T_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{Ts n}(s) \cos(n\theta)$$

$$P_{T\theta} = \frac{\sigma_0 h_0 T_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{T\theta n}(s) \cos(n\theta)$$

$$M_{Ts} = \frac{\sigma_0 h_0^3 T_0}{a_0 E_0} \sum_{n=0}^{\infty} M_{Ts n}(s) \cos(n\theta)$$

$$M_{T\theta} = \frac{\sigma_0 h_0^3 T_0}{a_0 E_0} \sum_{n=0}^{\infty} M_{T\theta n}(s) \cos(n\theta)$$

$$u = \frac{a_0 \sigma_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) \cos(n\theta)$$

$$v = \frac{a_0 \sigma_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(s) \sin(n\theta)$$

$$w = \frac{a_0 \sigma_0}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(s) \cos(n\theta)$$

Desta maneira, o problema será resolvido para apenas uma componente da expansão de Fourier (a simétrica ou a anti-simétrica). A solução para a outra componente é conseguida através de um deslocamento da origem do sistema de referência.

O sistema de equações diferenciais ordinárias (equações fundamentais) pode então ser posto na seguinte forma:

$$P X'' + Q X' + R X = C \quad (5)$$

onde  $X = \{u_n, v_n, w_n, M_{s\theta n}\}^T$ ,

$P$ ,  $Q$  e  $R$  são matrizes cujos elementos são funções dos parâmetros geométricos e das constantes de rigidez da casca, estando indicados no apêndice,

$C$  é o vetor carga função dos carregamentos, da distribuição de temperaturas e dos parâmetros geométricos, e suas componentes são dadas no apêndice, e

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial(s/a_0)} (\ ) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\ ) \quad \text{com } \xi = s/a_0$$

e - Condições de contorno

A equação (5) representa um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e portanto requer a prescrição de quatro condições de contorno na estação inicial da casca, e quatro na estação final. Se

$$\bar{N}_{s\theta n} = N_{s\theta n} - \frac{\rho_1 \rho''}{\rho} \beta M_{s\theta n} \quad e \quad (g)$$

$$\bar{Q}_{s\theta n} = Q_{s\theta n} + n \frac{\beta}{\rho} M_{s\theta n}$$

forem as tensões resultantes efetivas nas bordas [6], as condições de contorno podem ser dadas [1]:

$$g_1 N_{s\theta n} + h_1 u_n = e_1$$

$$g_2 \bar{N}_{s\theta n} + h_2 v_n = e_2 \quad (6)$$

$$g_3 \bar{Q}_{s\theta n} + h_3 w_n = e_3$$

$$g_4 \phi_{s\theta n} + h_4 M_{s\theta n} = e_4$$

onde  $\phi_{s\theta n} = \rho_1^{-1} u_n - w_n'$  é a rotação da tangente à linha de coordenada  $s$ .

Para um contorno engastado ( $u_n = v_n = w_n = \phi_{s\theta n} = 0$ ) ter-se-ia por exemplo  $g_1 = g_2 = g_3 = h_4 = e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$  e  $g_4 = h_1 = h_2 = h_3 = 1$ .

Como  $N_{s\theta n}$ ,  $\bar{N}_{s\theta n}$ ,  $\bar{Q}_{s\theta n}$  e  $\phi_{s\theta n}$  podem ser escritas em função de  $X$  e  $X'$ , a equação que estipula as condições de contorno fica

$$E X' + F X = Y \quad (7)$$

e os elementos das matrizes  $E$ ,  $F$  e do vetor  $Y$  são dados no apêndice.

#### FORMULAÇÃO NUMÉRICA

A formulação numérica das equações (5) e (7) é feita por diferenças finitas usando-se:

$$X_1' = (2\Delta)^{-1} (-3X_1 + 4X_2 - X_3) + \theta\Delta^2$$

$$X_i' = (2\Delta)^{-1} (X_{i+1} - X_{i-1}) + \theta\Delta^2 \quad i = 2, m-1$$

$$X_m' = (2\Delta)^{-1} (X_{m-2} - 4X_{m-1} + 3X_m) + \theta\Delta^2$$

$$X_i'' = \Delta^{-2}(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}) + \theta\Delta^2 \quad i = 2, m-1 \quad \dots(8)$$

Aplicando as equações (8) na equação (5), obtêm-se:

$$S_{1i} X_{i-1} + S_{2i} X_i + S_{3i} X_{i+1} = C_i \quad i = 2, m-1 \quad \dots(9)$$

$$\text{onde } S_{1i} = \Delta^{-2} P_i - (2\Delta)^{-1} Q_i$$

$$S_{2i} = R_i - 2\Delta^{-2} P_i \quad \text{e}$$

$$S_{3i} = \Delta^{-2} P_i + (2\Delta)^{-1} Q_i$$

com as matrizes P, Q, R e o vetor C calculados no i-ésimo ponto pivotal.

Aplicando as equações (8) na equação (7), obtêm-se para as estações de contorno:

$$S_{11} X_1 + S_{21} X_2 + S_{31} X_3 = Y_1 \quad (10)$$

$$S_{1m} X_{m-2} + S_{2m} X_{m-1} + S_{3m} X_m = Y_m$$

$$\text{onde } S_{11} = F_1 - 1.5\Delta^{-1} E_1, \quad S_{21} = 2\Delta^{-1} E_1$$

$$S_{31} = -(2\Delta)^{-1} E_1, \quad S_{1m} = (2\Delta)^{-1} E_m$$

$$S_{2m} = -2\Delta^{-1} E_m, \quad S_{3m} = 1.5\Delta^{-1} E_m + F_m$$

com as matrizes E, F e o vetor Y calculados no primeiro e no último (m-ésimo) ponto pivotal.

Como as matrizes  $S_{11}$  e  $S_{3m}$  podem ser singulares, o sistema deve ser modificado antes de se proceder sua solução. Essa modificação consiste na obtenção de duas equações pela aplicação de (9) nos pontos  $i = 2$  e  $i = m-1$ , com as quais elimina-se respectivamente  $S_{11}$  e  $S_{3m}$ , obtendo-se:

$$\bar{S}_{22} X_2 + \bar{S}_{32} X_3 = \bar{C}_2 \quad (11)$$

$$\bar{S}_{1,m-1} X_{m-2} + \bar{S}_{2,m-1} X_{m-1} = \bar{C}_{m-1}$$

$$\text{onde } \bar{S}_{22} = S_{11}(S_{12})^{-1}S_{22} - S_{21}$$

$$\bar{S}_{32} = S_{11}(S_{12})^{-1}S_{32} - S_{31}$$

$$\bar{C}_2 = S_{11}(S_{12})^{-1}C_2 - Y_1$$

$$\bar{S}_{1,m-1} = S_{3m}(S_{3,m-1})^{-1}S_{1,m-1} - S_{1,m}$$

$$\bar{S}_{2,m-1} = S_{3m}(S_{3,m-1})^{-1}S_{2,m-1} - S_{2m}$$

$$\bar{C}_{m-1} = S_{3m}(S_{3,m-1})^{-1}C_{m-1} - Y_m$$

Utilizando as equações (9) e (11) constrói-se um sistema linear com uma forma característica, cuja solução através de um esquema numérico simples encontra-se desenvolvido na referência [3]. Obtêm-se assim a solução para  $X_i$ ,  $i = 2, m-1$ , podendo-se então determinar  $X_1$  e  $X_m$  por

$$X_1 = (S_{12})^{-1}(C_2 - S_{22} X_2 - S_{32} X_3) \quad (12)$$

$$X_m = (S_{3,m-1})^{-1}(C_{m-1} - S_{1,m-1} X_{m-2} - S_{2,m-1} X_{m-1})$$

## RESULTADOS

Com o objetivo de testar a validade da formulação analítico-numérica desenvolvida, criando simultaneamente uma ferramenta computacional que pudesse ser usada na análise de problemas práticos, desenvolveu-se um programa digital em FORTRAN IV [4].

Utilizando este programa foram resolvidos alguns problemas com solução analítica conhecida, para que se pudesse comparar os resultados e demonstrar a validade da solução numérica.

a - Casca cilíndrica submetida a uma distribuição linear de temperatura ao longo da espessura, com uma extremidade livre.

Características:

$$E_s = E_0 = E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2, \quad \nu_{s0} = \nu_{0s} = \nu = 0.25, \quad \alpha_s = \alpha_0 = \alpha = 6.10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C},$$

$$h = 0.5 \text{ m}, \quad r = 10 \text{ m}, \quad L = 30 \text{ m}, \quad T_1 = -50^\circ\text{C} \text{ (temperatura interna em toda casca), } T_2 = 50^\circ\text{C} \text{ (temperatura externa em toda a casca),}$$

$$\sigma_0 = 4.10^8 \text{ N/m}^2, \quad h_0 = 0.5 \text{ m}, \quad a_0 = 10 \text{ m},$$



$E_0 = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\Delta = 0,01$ ,  
 $m = 301$ .

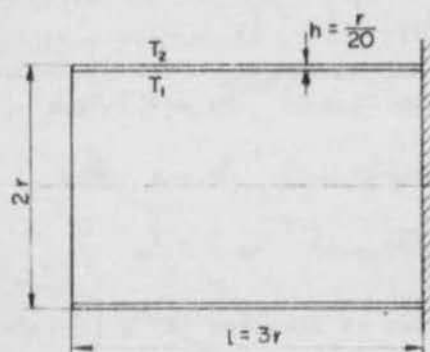


Figura 4

A solução analítica deste problema, válida somente perto da extremidade livre da casca, encontra-se desenvolvida na referência [5], sendo dada em termos do deslocamento radial  $w$  e do momento meridional  $M_s$ .

Para resolver este problema numericamente, tomou-se uma casca com um comprimento tal que as condições no contorno não livre não influíssem nos resultados próximos à extremidade livre. Além disso, tomou-se o cuidado de escolher uma condição de contorno não livre, tal que as variáveis tivessem a mesma tendência dos pontos longe da extremidade livre (ou seja,  $w \rightarrow 0$  e  $M_s \rightarrow M_{Ts}$ ). Por estes critérios foram escolhidas condições de engastamento.

Os resultados obtidos pelas soluções analítica [5] e numérica, estão apresentados na figura 5 em função do comprimento do meridiano adimensionalizado, medido a partir da extremidade livre.

b - Casca cilíndrica de espessura constante, engastada, uniformemente aquecida.

Características:

$E_s = E_0 = 2,06.10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\nu_{s0} = \nu_{0s} = 0,3$ ,  
 $\alpha_s = \alpha_0 = 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  
 $h = 0,5 \text{ m}$ ,  $r = 10 \text{ m}$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $T = 100^\circ\text{C}$ ,  
 $\sigma_0 = 4.10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $h_0 = 0,5 \text{ m}$ ,  $a_0 = 10 \text{ m}$ ,  
 $E_0 = 2,06.10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ,  $\Delta = 0,01$   
 $m = 101$ .

A referência [6] apresenta a solução analítica deste problema, considerando implicitamente nulas a "força térmica" ao longo da cas

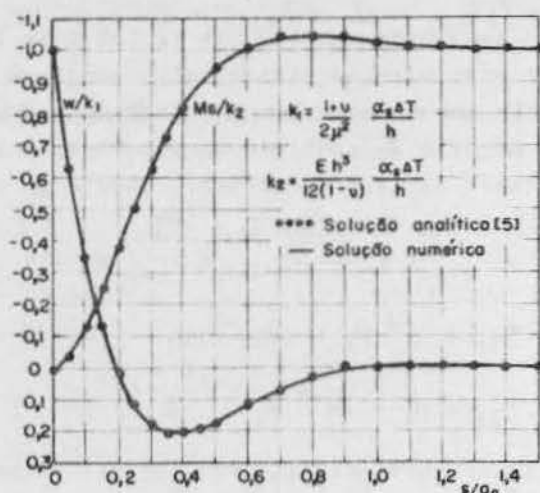


Fig. 5 Deslocamento radial e momento meridional.

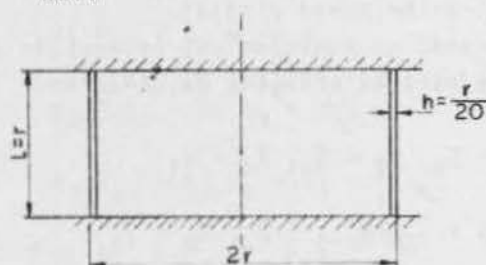


Figura 6

ca na direção meridional ( $P_{Ts} = 0$ ), e a tensão de membrana  $N_s$  nos contornos. A solução é fornecida em termos do deslocamento radial  $w$  e do momento meridional  $M_s$ .

Para que a comparação entre os resultados pudesse ser procedida introduziu-se na solução numérica as mesmas simplificações utilizadas na obtenção da solução analítica.

Estas simplificações foram introduzidas tomando como condições de contorno  $N_{sn} = \nu_n = w_n = \phi_{sn} = 0$ , ao invés das condições de engastamento  $u_n = v_n = w_n = \phi_{sn} = 0$ , e tornando a "força térmica" na direção meridional nula ( $P_{Ts} = 0$ ) ao longo da casca. Pode-se notar pela equação (3) que esta última condição implica em considerar o coeficiente de dilatação térmica nulo na direção meridional ( $\alpha_s = 0$ ), e o coeficiente de Poisson  $\nu_{0s}$  igual a zero para fins de determinação da "força térmica".

Para testar quantitativamente a validade destas simplificações, resolveu-se também o problema numericamente sem que elas fossem in

troduzidas.

Os resultados obtidos com as soluções analítica [6], numérica com simplificações (1) e numérica sem simplificações (2) estão apresentados na figura 7, em função do comprimento do meridiano adimensionalizado, medido a partir do engastamento.

Devido à simetria do problema, apresenta-se somente os resultados até a metade do comprimento do meridiano.

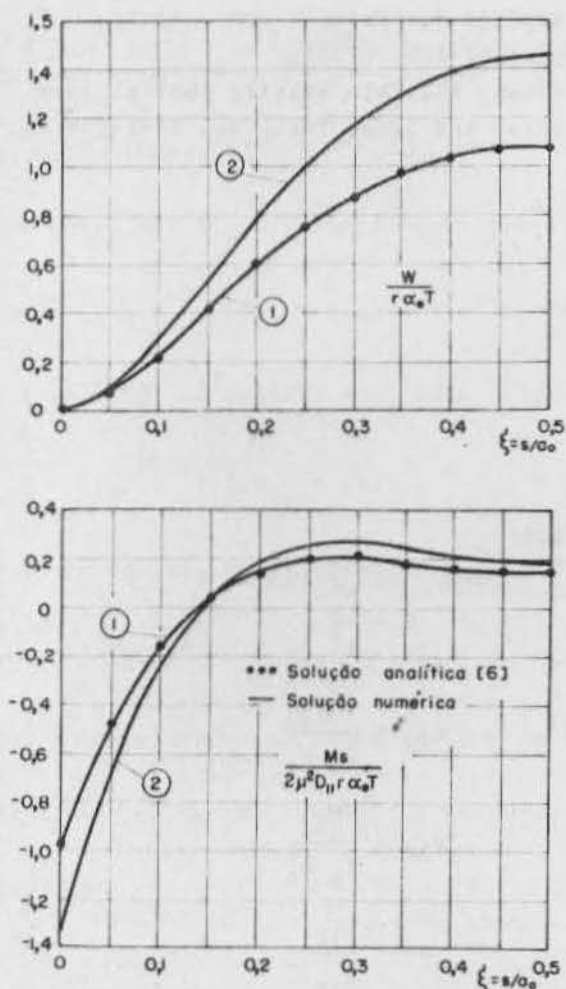


Fig. 7 Deslocamento radial e momento meridional com simplificações (1) e sem simplificações (2).

c - Casca cilíndrica de espessura constante, engastada, submetida a uma distribuição de temperatura  $T = T_n \cos(n\theta)$

Considerando uma casca bi-engastada, com uma configuração geométrica conforme a figura

6, e características iguais às do problema do item b, obteve-se os resultados apresentados na figura 8, em função do comprimento do meridiano adimensionalizado, medido a partir do engastamento. Novamente devido à simetria do problema, apresenta-se os resultados só até a metade do meridiano.

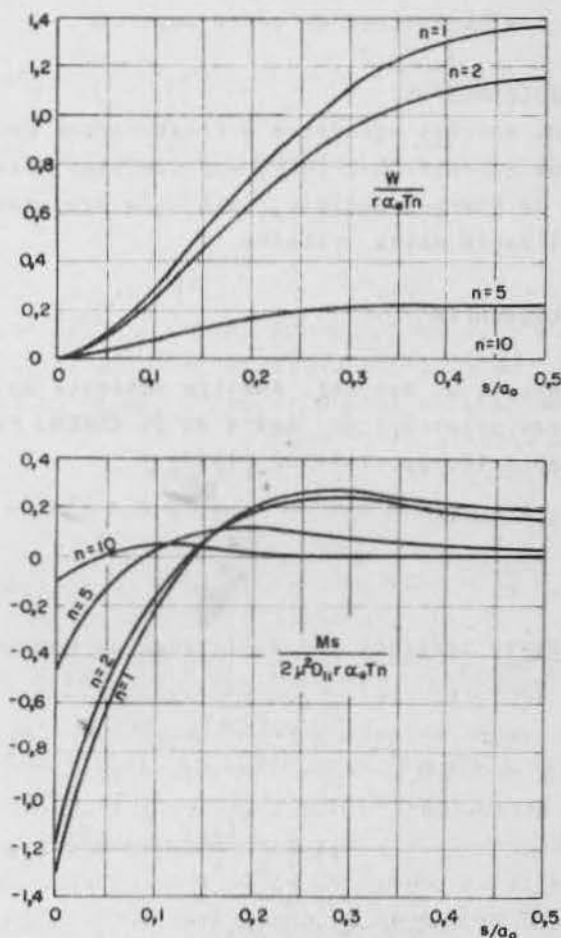


Fig. 8 Deslocamento radial e momento meridional para vários harmônicos.

CONCLUSÕES

A apreciação dos resultados fornece uma indicação da excelente precisão numérica do método desenvolvido neste trabalho, o que demonstra sua validade e aplicabilidade.

No caso do problema resolvido no item b, observa-se da figura 7 que as simplificações adotadas na solução analítica [6] implicam em valores absolutos aproximadamente 25% menores para as variáveis. Desta forma, pode-se con-

cluír que desprezar o coeficiente de dilata-  
ção térmica na direção meridional, o coefi-  
ciente de Poisson  $\nu_{0s}$  para efeito de determina-  
ção da força térmica ao longo da casca, e a  
tensão de membrana  $N_s$  nos contornos, não são  
boas hipóteses para a solução deste problema.

Pela figura 8 verifica-se a rápida conver-  
gência dos coeficientes de Fourier em proble-  
mas com harmônicos de ordem superior.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Financiadora de Es-  
tudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacio-  
nal de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a  
realização deste trabalho.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Alves, D. Boechat, Análise numérica de cas-  
cas ortotrópicas. Anais do IV COBEM, Paper  
nº A-11, pp. 131-142 (1977).

2. Alves, D. Boechat, Teoria da elasticidade.  
Centro Tecnológico/UFSC (1977).
3. Guenther, R., Análise de tensões em cascas  
de revolução, incluindo efeitos térmicos,  
através do método das diferenças finitas.  
Dissertação de Mestrado - UFSC (1979).
4. Guenther, R., Manual de utilização dos pro-  
gramas CORTER e CORTERDE. Centro Tecnológi-  
co - UFSC (1979).
5. Kent, C.H., Thermal stresses in thin-  
walled cylinders. Transactions of ASME -  
Applied Mechanics - APM - 53-13,  
pp. 167-180, (1953).
6. Kraus, H., Thin elastic shells. John  
Wiley and Sons, Inc., New York (1967).

#### APÊNDICE

Neste apêndice são utilizadas as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a_0} & \rho_1 &= \frac{r_1}{a_0} & \beta &= \frac{h_0^2}{a_0^2} \\ a_{11} &= \frac{A_{11}}{E_0 h_0} & a_{12} &= \frac{A_{12}}{E_0 h_0} & a_{22} &= \frac{A_{22}}{E_0 h_0} \\ a_{33} &= \frac{A_{33}}{E_0 h_0} & d_{11} &= \frac{D_{11}}{E_0 h_0^3} & d_{12} &= \frac{D_{12}}{E_0 h_0^3} \\ d_{22} &= \frac{D_{22}}{E_0 h_0^3} & d_{33} &= \frac{D_{33}}{E_0 h_0^3} & ds &= \frac{D_{12}}{D_{11}} \\ d\theta &= \frac{1}{E_0 h_0^3} (D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}) \end{aligned}$$

Elementos não nulos das matrizes P, Q, R e do vetor C:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \rho a_{11}, & p_{22} &= \rho a_{33} + (\rho_1 \rho^n)^2 (2\rho)^{-1} \beta d_{33}, & p_{23} &= -\rho^{-1} \rho_1 \rho^n \beta d_{33} n, & p_{32} &= -\rho^{-1} \rho_1 \rho^n \beta d_{33} n \\ p_{33} &= \rho^{-1} (\rho^n)^2 \beta d\theta + 2\rho^{-1} \beta d_{33} n^2, & p_{34} &= \rho \beta, & p_{43} &= d_{11}, & q_{11} &= \rho' a_{11} + \rho a_{11}' \end{aligned}$$

$$q_{12} = [a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1}\rho''\beta d_{33}]n, \quad q_{13} = \rho_1^{-1}\rho a_{11} - \rho_1\rho''a_{12} + (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\beta d\theta + \\ + (\rho\rho_1)^{-1}\beta d_{33} n^2, \quad q_{14} = \rho_1^{-1}\rho\beta, \quad q_{21} = -[a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1}\rho''\beta d_{33}]n,$$

$$q_{22} = \rho'a_{33} + \rho a_{33}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta\{[(\rho_1\rho'')' - (2\rho)^{-1}\rho_1\rho''\rho']d_{33} + \rho_1\rho''d_{33}'/2\}$$

$$q_{23} = -(\rho^{-1}\rho_1\rho''d_{33}' + \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'd\theta)\beta n, \quad q_{31} = \rho_1\rho''a_{12} - \rho_1^{-1}\rho a_{11} - (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\beta d\theta - \\ - (\rho\rho_1)^{-1}\beta d_{33} n^2, \quad q_{32} = \{2[\rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')']d_{33} - \rho^{-1}\rho_1\rho''d_{33}' + \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'd\theta\}\beta n$$

$$q_{33} = \{[2\rho^{-1}\rho'\rho'' - \rho^{-2}(\rho')^3]d\theta + \rho^{-1}(\rho')^2d\theta'\}\beta - 2(\rho^{-2}\rho'd_{33} - \rho^{-1}d_{33}')\beta n^2, \quad q_{34} = \rho'(2 - ds)\beta,$$

$$q_{41} = -\rho_1^{-1}d_{11}, \quad q_{43} = \rho^{-1}\rho'd_{12},$$

$$r_{11} = \rho''a_{12} + \rho'a_{12}' - \rho^{-1}(\rho')^2a_{22} - (\rho\rho_1^2)^{-1}(\rho')^2\beta d\theta - [\rho^{-1}a_{33} + (2\rho\rho_1^2)^{-1}\beta d_{33}] n^2$$

$$r_{12} = (a_{12}' - \rho^{-1}\rho'(a_{22} + a_{33}) + \beta[\rho^{-2}\rho'\rho''(d_{33} + d\theta) - (2\rho\rho_1^2)^{-1}(\rho_1\rho'')'d_{33}]) n$$

$$r_{13} = (\rho_1^{-1}\rho' - \rho_1^{-2}\rho\rho_1')a_{11} + \rho_1^{-1}\rho a_{11}' - [(\rho_1\rho'')' + \rho_1^{-1}\rho']a_{12} - \rho_1\rho''a_{12}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho'a_{22} - \\ - (\rho_1\rho^2)^{-1}\rho'\beta(d_{33} + d\theta)n^2, \quad r_{14} = \rho_1^{-1}\rho'\beta(1 - ds),$$

$$r_{21} = -[\rho^{-1}\rho'(a_{22} + a_{33}) + a_{33}' - \rho^{-2}\rho'\rho''\beta(d_{33}/2 + d\theta) - (2\rho)^{-1}\rho''\beta d_{33}' + (2\rho\rho_1)^{-1}\rho_1'\rho''\beta d_{33}] n$$

$$r_{22} = -[\rho^{-1}(\rho')^2 + \rho'']a_{33} - \rho'a_{33}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta\{[(\rho_1\rho'')''/2 - (2\rho)^{-1}(\rho_1\rho'')'\rho' - \rho^{-1}\rho_1(\rho'')^2]d_{33} + \\ + [(\rho_1\rho'')'/2 - \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho']d_{33}'\} - [\rho^{-1}a_{22} + \rho^{-3}(\rho_1\rho'')^2\beta d\theta]n^2$$

$$r_{23} = \rho^{-3}\rho_1\rho''\beta d\theta n^3 - [\rho_1^{-1}a_{12} - \rho^{-1}\rho_1\rho''a_{22} - \rho^{-2}\rho_1(\rho'')^2\beta d_{33} - \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'\beta d_{33}'] n$$

$$r_{24} = \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta ds n$$

$$r_{31} = \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho'a_{22} - \rho_1^{-1}\rho'a_{12} + [(\rho^2\rho_1)^{-1}(\rho')^3 - 2(\rho\rho_1)^{-1}\rho'\rho'' + (\rho\rho_1^2)^{-1}(\rho')^2\rho_1']\beta d\theta - \\ - (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\beta d\theta' - [(\rho\rho_1)^{-1}d_{33}' - (\rho\rho_1^2)^{-1}\rho_1'd_{33} + (\rho^2\rho_1)^{-1}\rho'd\theta]\beta n^2$$

$$r_{32} = [-\rho_1^{-1}a_{12} + \rho^{-1}\rho_1\rho''a_{22} + [2\rho^{-2}(\rho_1\rho'')'\rho' + 2\rho^{-2}(\rho_1\rho'')\rho'' - 2\rho^{-3}\rho_1\rho''(\rho')^2 - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')'']\beta d_{33} + \\ + [2\rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')']\beta d_{33}' + [\rho^{-2}(\rho_1\rho'')'\rho' - 2\rho^{-3}\rho_1\rho''(\rho')^2 + \rho^{-2}\rho_1(\rho'')^2]\beta d\theta + \\ + \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'\beta d\theta']n + \rho^{-3}\rho_1\rho''\beta d\theta n^3$$

$$r_{33} = 2\rho''a_{12} - \rho_1^{-2}\rho a_{11} - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')^2 a_{22} - \{2[\rho^{-2}\rho'' - \rho^{-3}(\rho')^2]d_{33} + 2\rho^{-2}\rho' d'_{33} + [\rho^{-2}\rho'' - 2\rho^{-3}(\rho')^2]d\theta + \rho^{-2}\rho' d\theta'\} \beta n^2 - \rho^{-3}\beta d\theta n^4$$

$$r_{34} = [\rho''(1 - ds) - \rho' ds'] \beta - \rho^{-1}\beta ds n^2, \quad r_{41} = \rho_1^{-2}\rho_1' d_{11} - (\rho\rho_1)^{-1}\rho' d_{12}, \quad r_{42} = \rho^{-2}\rho_1\rho'' d_{12} n$$

$$r_{43} = -\rho^{-2}d_{12} n^2, \quad r_{44} = 1$$

$$c_1 = -\rho p_{sn} + \rho p'_{Tsn} + \rho'(p_{Tsn} - p_{T\theta n}) + \rho_1^{-1}\rho' \beta (ds M_{Tsn} - M_{T\theta n})$$

$$c_2 = -\rho p_{\theta n} - n p_{T\theta n} - \rho^{-1}\rho_1\rho'' \beta n (ds M_{Tsn} - M_{T\theta n})$$

$$c_3 = -\rho p_{zn} + \rho_1\rho'' p_{T\theta n} - \rho_1^{-1}\rho p_{Tsn} + \beta [\rho' ds' M_{Tsn} + \rho''(ds M_{Tsn} - M_{T\theta n}) + \rho^{-1}(ds M_{Tsn} - M_{T\theta n})n^2 + \rho'(ds M'_{Tsn} - M'_{T\theta n})], \quad c_4 = -M_{Tsn}$$

Elementos não nulos das matrizes E, F e do vetor Y

$$e_{11} = g_1 a_{11}, \quad e_{22} = g_2 [(2\rho^2)^{-1}(\rho_1\rho'')^2 \beta d_{33} + a_{33}], \quad e_{23} = -g_2 \rho^{-2}\rho_1\rho'' \beta d_{33} n,$$

$$e_{32} = -g_3 \rho^{-2}\rho_1\rho'' \beta d_{33} n, \quad e_{33} = g_3 [\rho^{-2}(\rho')^2 \beta d\theta + 2\rho^{-2}\beta d_{33} n^2], \quad e_{34} = g_3 \beta, \quad e_{43} = -g_4$$

$$f_{11} = g_1 \rho^{-1}\rho' a_{12} + h_1, \quad f_{12} = g_1 \rho^{-1} a_{12} n, \quad f_{13} = g_1 (\rho_1^{-1} a_{11} - \rho^{-1}\rho_1\rho'' a_{12})$$

$$f_{21} = g_2 [(2\rho^2)^{-1}\rho'' \beta d_{33} - \rho^{-1} a_{33}] n,$$

$$f_{22} = -g_2 \{\rho^{-1}\rho' a_{33} + \rho^{-1}\rho_1\rho'' [\rho^{-2}\rho_1\rho'' \rho' - (2\rho)^{-1}(\rho_1\rho'')'] \beta d_{33}\} + h_2, \quad f_{23} = g_2 \rho^{-3}\rho_1\rho'' \rho' \beta d_{33} n,$$

$$f_{31} = -g_3 [(\rho_1\rho^2)^{-1}(\rho')^2 \beta d\theta + (\rho_1\rho^2)^{-1}\beta d_{33} n^2],$$

$$f_{32} = g_3 [\rho^{-3}\rho_1\rho'' \rho' (2d_{33} + d\theta) - \rho^{-2}(\rho_1\rho'')' d_{33}] \beta n, \quad f_{33} = -g_3 \rho^{-3}\rho' (2d_{33} + d\theta) \beta n^2 + h_3,$$

$$f_{34} = g_3 \rho^{-1}\rho' (1 - ds) \beta, \quad f_{41} = g_4 \rho_1^{-1}, \quad f_{44} = h_4$$

$$y_1 = e_1 + g_1 p_{Tsn}, \quad y_2 = e_2, \quad y_3 = e_3 + g_3 \rho^{-1}\rho' \beta (ds M_{Tsn} - M_{T\theta n}), \quad y_4 = e_4$$

# TENSÕES POR AÇÃO GRAVITACIONAL EM UMA ESFERA MACIÇA - APLICAÇÕES PARA O ESTUDO DOS PLANETAS -

CARLOS FERNANDO MARTINS PAMPLONA

SIDNEY STUCKENBRUCK

DEPTO. DE ENG. MEC., PUC/RJ, RIO DE JANEIRO, RJ.

## SUMÁRIO

No presente trabalho, uma análise da distribuição de densidades em corpos esféricos de grandes dimensões é feita com base nas tensões geradas pela ação gravitacional. Verificou-se que uma expressão na forma elíptica para a distribuição radial de massas específicas fornece resultados razoáveis para as propriedades mecânicas no interior da Terra. Partindo dessa informação, diversos modelos para a distribuição de densidades dos planetas terrestres e Lua são analisados e propostos, baseados na hipótese de que os materiais dos núcleos desses astros são semelhantes. O valor do momento de inércia bem como do diâmetro do núcleo pesado dos planetas interiores do Sistema Solar são estimados, a partir da análise feita. Os modelos foram elaborados admitindo a variação das propriedades mecânicas com a pressão, bem como levando em consideração a existência de descontinuidade na distribuição de densidades, sendo os resultados comparados com as informações sismológicas fornecidas pela Geodesia e Selenodesia. Esses resultados são estendidos aos demais planetas terrestres com o intuito de obter novas informações sobre esses astros dos quais pouco se conhece sobre a natureza de seu interior.

## INTRODUÇÃO

O rápido desenvolvimento da ciência nos últimos vinte anos permitiu que o conhecimento sobre o interior da Lua e outros planetas se aprofundasse consideravelmente nas últimas duas décadas [1]. Em particular, o desenvolvimento da geociência, e o consequente enriquecimento do conhecimento do interior da Terra, tem servido de orientação na elaboração de modelos para o interior dos demais planetas [2].

Desde a famosa experiência de Cavendish (1799), foi determinada a densidade média da Terra. A constatação de que a densidade média das rochas na superfície era cerca da metade da densidade média da Terra já indicava a existência de materiais mais densos em seu interior. Assim, já no século passado, tentou-se elaborar modelos de representação da variação de densidade terrestre com o seu raio, de modo a satisfazer as condições de equilíbrio das tensões no interior da Terra sob a ação gravitacional. Laplace,

Roche, Emden e outros matemáticos, no final do século passado, propuseram relações baseadas nas propriedades elásticas dos materiais, supondo estes quimicamente homogêneos.

Em 1906, o cientista inglês R.D. Oldham conseguiu mostrar, através da análise da propagação de ondas sísmicas, que a Terra tem um núcleo de material mais denso. Três anos mais tarde, a sismologista croata Andrija Mohorovićić mostrou a primeira evidência de outra descontinuidade de densidades, separando o manto de uma crosta menos densa. Cálculos notáveis feitos pelo geofísico alemão Beno Gutenberg em 1914, permitiram, pela primeira vez, determinar a profundidade do contorno do núcleo pesado. No ano de 1936 o sismologista dinamarquês Inge Lehmann demonstrou a existência de uma descontinuidade de segunda ordem, evidenciando que o núcleo é formado de um núcleo interno, possivelmente sólido, envolvido por uma parte líquida, o núcleo ex

terno.

Em 1939, Sir Harold Jeffreys e K.E. Bullen [3] de envolveram medições sismológicas que permitiram obter informações detalhadas sobre velocidades das ondas sísmicas a grandes profundidades e, um ano mais tarde, a elaboração de um modelo de distribuição de densidades e propriedades elásticas em função da distância ao centro. Nesta determinação foram utilizadas as equações de L.H. Adams e E.D. Williamson, deduzidas em 1923 e que levam em conta as condições de equilíbrio sob compressão hidrostática.

O momento de inércia adimensional  $z = C/MR^2$ , onde  $C$  é o momento de inércia em relação ao eixo polar,  $M$  a massa e  $R$  o raio médio do planeta, nos dá uma idéia da distribuição de massas em função da distância ao centro. Um planeta em forma de uma casca ôca teria para  $z$  o valor  $2/3$  enquanto, para um planeta de material homogêneo,  $z = 2/5$ . Esse valor tende a diminuir quando a densidade cresce no sentido do centro. Para a Terra,  $z$  é aproximadamente igual a 0,33, evidenciando o aumento de densidade na parte central. Para a Lua  $z$  é aproximadamente 0,4, mostrando que nosso satélite pode ser tratado como uma esfera praticamente homogênea.

Os valores de  $M$ ,  $R$  e  $C$  são conhecidos para a maioria dos planetas, especialmente aqueles que têm satélites, para os quais a massa  $M$  pode ser obtida pelo conhecimento do semi-eixo maior e o período da órbita, enquanto  $C$  é obtido pelo movimento de regressão dos nodos da órbita do satélite. A Tabela I indica esses valores para alguns astros do sistema solar.

Além da composição química, estrutura cristalográfica e massa específica  $\rho$ , são importantes as propriedades elásticas dos materiais que constituem os planetas (módulo de elasticidade volumétrico  $K$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ ), bem como sua variação com a pressão. Um valor de especial interesse é a razão  $K/\rho$  que está relacionada com a velocidade de propagação das ondas sísmicas longitudinais (principais) de compressão e das ondas transversais (secundárias), conforme se estuda na teoria das vibrações em meios contínuos. Outro valor que ocupa uma posição de destaque na análise do comportamento elástico de materiais submetidos a altas pressões ( $P$ ) é a relação  $\partial K/\partial P$ .

P.W. Bridgman e F. Birch, dois cientistas norte-americanos, apresentaram vastas informações experimentais sobre o comportamento mecânico das rochas e metais à alta pressão. Birch (1952) [4] também desenvolveu uma versão simplificada da teoria de deformações finitas,

TABELA I - PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS ASTROS DO SISTEMA SOLAR

A S T R O	RAIO MÉDIO R ( $10^6$ m)	MASSA ESPECÍFICA MÉDIA $\bar{\rho}$ ( $10^3$ kg m $^{-3}$ )	MOMENTO DE INÉRCIA $z$ $z = C/MR^2$
SOL	696	1,39	
MERCÚRIO	2,443	5,40	
VÊNUS	6,055	5,246	
TERRA	6,371	5,517	0,3315 <sub>2</sub>
Lua	1,738	3,34	0,395 <sub>3</sub>
MARTE	3,394	3,937	0,376 <sub>4</sub>
Fobos	0,008		
Deimos	0,004		
PLANETÓIDES			
Ceres	0,385		
Palas	0,245		
Juno	0,095		
Vesta	0,195		
JÚPITER	70,85	1,36	0,264
Io	1,87	2,7	
Europa	1,58	2,9	
Ganimedes	2,58	2,2	
Calisto	2,59	1,3	
SATURNO	60,30	0,715	0,207
Tetis	0,60	0,76	
Dione	0,65	1,0	
Rhea	0,70	1,6	
Titã	2,40	2,3	
URANO	25,40	1,33	(0,26)
Titãnea	0,50	(7,6)	
Oberon	0,40	(9,7)	
NETUNO	25,20	1,57	0,26
Tritão	2,20	(4,2)	
Nereida	0,15	(7,2)	
PLUTÃO	(3,22) ou (2,75)	(4,8) ou (7,9)	

1 Compilado de diversas fontes sendo a mais recente a referência [2] (1975)

2 0,3308 quando calculado em função do raio equatorial  $a$  ( $z = C/Ma^2$ )

3  $0,391 \pm 0,002$  [12]

4  $0,3654 \pm 0,001$  [8]

aplicada ao interior da Terra, obtendo informações técnicas sobre a variação das propriedades mecânicas com a pressão. Durante o período de 1961 a 1963, Birch acumulou inúmeros dados experimentais a cerca da elasticidade dos materiais submetidos a pressões transitórias da ordem de milhões de atmosferas, obtidas por cargas explosivas, determinando inclusive um limite superior para a densidade no centro da Terra.

Modelos propostos por Bear, Haddon & Bullen e Press (1969) permitiram estabelecer relações entre o módulo de elasticidade volumétrico e a pressão, para diversas profundidades na Terra. Estudos mais recentes, realiza-

dos por Sammis e Liebermann (1970) e O. Anderson (1972), indicam o relacionamento entre as propriedades elásticas e o volume molar, permitindo a G.F. Davies (1975) [5] desenvolver o levantamento de propriedades elásticas e sua variação com a pressão, para um enorme número de substâncias e compostos (Tabela II).

TABELA II - PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS TERRESTRES

Nomenclatura	Fórmula	$\rho$ (1)	K (2)	$\partial K/\partial P$
<b>Elementos</b>				
Carbono	C	3,51	4,42	
Silício	Si	2,33	0,978	
Germânio	Ge	5,32	0,750	
Lítio	Li	0,53	0,121	
Sódio	Na	0,97	0,066	
Potássio	K	0,85	0,033	
Berílio	Be	1,85	1,14	
Magnésio	Mg	1,74	0,353	
Cálcio	Ca	1,54	0,155	
Bário	Ba	3,62	0,105	
Ferro	Fe	7,87	1,684	3,9
<b>Oxidos</b>				
Manganesia	MgO	3,58	1,63	2,8
Cal	CaO	3,35	1,14	5,0
Oxido de Berílio	BeO	3,01	2,24	4,5
Oxido Ferroso	FeO	5,91	1,74	
Alumina	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,99	2,54	3,0
Hematita	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5,27	2,07	3,5
Quartzo	SiO <sub>2</sub>	2,65	0,371	
Rutilo	TiO <sub>2</sub>	4,28	2,15	5,7
Oxido de Germânio	GeO <sub>2</sub>	6,28	2,59	5,2
Magnetita	FeO Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5,16	1,76	
Espinélio	MgO Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,58	1,97	3,9
Espinélio S	MgO.2.6Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,62	2,02	3,2
Pleonaste	(Mg, Fe, Al)O <sub>n</sub>	3,83	1,99	3,9
<b>Silicatos</b>				
Albita	Na <sub>2</sub> O.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .6SiO <sub>2</sub>	2,62	0,524	
Ortoclássio	K <sub>2</sub> O.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .6SiO <sub>2</sub>	2,60	0,468	
Jadeíta	Na <sub>2</sub> O.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .4SiO <sub>2</sub>	3,33	1,30	
Esodumênio	Li <sub>2</sub> O.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .4SiO <sub>2</sub>	3,19	1,44	
Anortita	CaO.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .2SiO <sub>2</sub>	2,76	0,911	
Diopsídio	CaO.MgO.2SiO <sub>2</sub>	3,26	0,913	
Enstatita	MgO.SiO <sub>2</sub>	3,21	1,16	
Hiperstênio	(Mg, Fe)O.SiO <sub>2</sub>	3,35	1,05	
Forsterita	2MgO.SiO <sub>2</sub>	3,22	1,29	3,9
Faialita	2FeO.SiO <sub>2</sub>	4,39	1,32	4,9
Andradita	3CaO.Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .3SiO <sub>2</sub>	3,48	1,50	
Glossuralita	3CaO.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .3SiO <sub>2</sub>	3,62	1,71	3,3
Almandita	3FeO.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .3SiO <sub>2</sub>	4,16	1,66	
Piropo	3MgO.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .3SiO <sub>2</sub>	4,12	1,81	
Berilo	3BeO.Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .3SiO <sub>2</sub>	2,75	1,84	

(1)  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$

(2)  $10^{11} \text{ Nm}^{-2}$

Trabalhos recentes de Anderson & Hart (1977) [6], apresentaram um modelo detalhado de distribuição das propriedades mecânicas do material terrestres em função da profundidade (Fig. 1). Na elaboração desses modelos, é levada em conta a composição média da crosta terrestre, do manto superior e dos meteoritos, já que esses materiais fornecem a melhor amostra pela qual se

podem deduzir as abundâncias das substâncias no sistema solar.

O conhecimento da estrutura interna dos planetas é de grande interesse, especialmente pelo que pode informar a cerca da origem e formação do sistema solar. Infelizmente o problema é de difícil tratamento teórico a menos que muitas hipóteses simplificadoras sejam estabelecidas. Uma primeira é a utilização da teoria hidrostática das tensões, não se levando em conta a presença de tensões tangenciais, e representando o estado de tensões através da pressão.

A simetria esférica e as equações de equilíbrio nos permitem obter uma relação entre a pressão (P), massa específica ( $\rho$ ) e distância ao centro (r). A introdução de uma equação empírica de estado relacionando  $\rho$  e P, através de propriedades elásticas do material, nos fornece, combinada com as condições de equilíbrio, uma equação diferencial relacionando a massa específica e a distância ao centro.

A utilização de funções arbitrárias que exprimem a relação  $\rho = \rho(r)$  é desenvolvida no presente trabalho, baseada na adequação dos valores obtidos para o parâmetro  $dK/dP$ ; (entre 3,0 e 3,6 para a equação na forma elíptica  $\rho = \rho_0 [1 - a(r/R^2)^{1/2}]$ ).

Modelos propostos para o interior da Terra através do método citado são confrontados com os modelos aceitos levando em conta as informações sismométricas.

A suposição de que os planetas terrestres (Mercúrio, Vênus, Marte) sejam constituídos por materiais semelhantes aos de nosso planeta nos permite propor modelos para aqueles astros.

#### TENSÕES DEVIDO A AÇÃO GRAVITACIONAL

A ação gravitacional auto-induzida em um elemento de massa de uma esfera maciça formada de camadas esféricas concêntricas, isotrópicas e homogêneas, provoca tensões que, levando em consideração as condições de equilíbrio do elemento, nos permite escrever, dada a simetria geométrica e do carregamento, que

$$r^2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2r(\sigma_r - \sigma_\theta) = G \rho M_r \quad (1)$$

onde  $M_r$  é a massa do núcleo interno de raio  $r$ .

Tensões Considerando a Esfera Homogênea - Para uma esfera homogênea com propriedades elásticas constantes (caso simplificado para astros de pequenas dimensões como



a Lua, cujo valor do momento de inércia adimensional  $z$  se aproxima do valor 2/5 correspondente ao de uma esfe

ra homogênea) teremos:  $\rho(r) = \bar{\rho}$ ,  $M_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \bar{\rho}$  e, chamando  $\eta = r/R$ , (1) se torna:

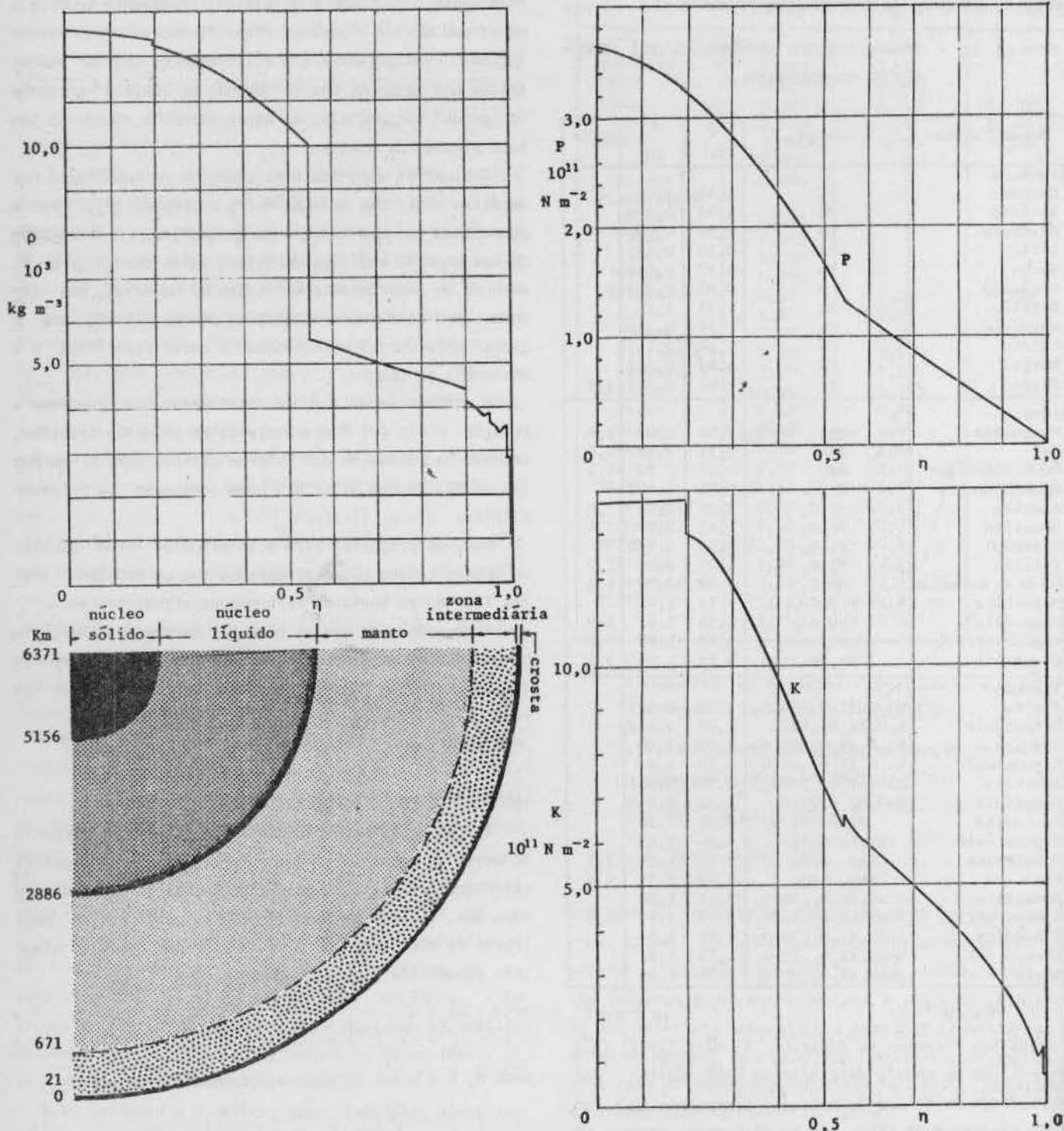


FIG. 1 - MODELO PARA A TERRA SEGUNDO ANDERSON e HART (1977) [ 6 ]

$$\eta^2 \frac{d\sigma_r}{d\eta} + 2\eta(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{4}{3} \pi G R^2 \bar{\rho}^2 \eta^3 \quad (2)$$

Para um material sem rigidez, incapaz de suportar tensões tangenciais (o que para esferas de grandes proporções como os corpos celestes é uma hipótese razoável tendo em vista o fenômeno da fluência [4], teremos um estado hidrostático de tensões ( $\sigma_r = \sigma_\theta = -P$ ) e obtemos, da integração de (2)

$$P = \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho}^2 R^2 (1 - \eta^2). \quad (3)$$

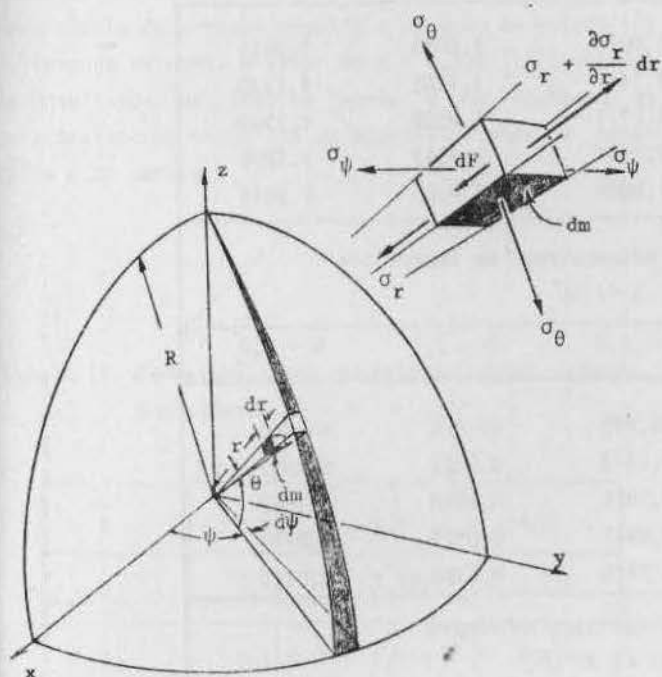


FIG. 2 - TENSÕES DEVIDO A AÇÃO GRAVITACIONAL EM UM ELEMENTO EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Para uma esfera com as dimensões da Lua (Tabela I), suposta homogênea, obtêm-se para o centro:

$$(P_o)_{\text{Lua}} = 0,0472 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

Supondo, por outro lado, que não ocorra o escoamento do material e que este se comporte na fase elástica, a integração de (2), usando a Lei de Hooke para pequenas deformações [7], nos leva a

$$\sigma_r = -2 \pi G \bar{\rho}^2 R^2 \frac{3-\nu}{15(1-\nu)} (1 - \eta^2) \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = -2 \pi G \bar{\rho}^2 R^2 \frac{3-\nu}{15(1-\nu)} \left(1 - \frac{1+3}{3-\nu} \eta^2\right) \quad (5)$$

que aplicadas à Lua (para um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,300$ ) nos fornecem para o centro:

$$(P_o)_{\text{Lua}} = 0,0364 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}.$$

Tensões Considerando a Variação das Propriedades Mecânicas com a Pressão - O elevado valor das tensões calculadas no item precedente nos permite concluir que a hipótese da invariância das propriedades mecânicas (densidade e elasticidade) com a distância ao centro é descabida, exceto para astros de pequenas dimensões. Desta forma, consideraremos para os demais casos a massa específica  $\rho$ , o módulo de elasticidade volumétrico  $K$  e a pressão  $P$  (estado hidrostático de tensões), em pontos do interior da esfera, como variáveis em função da distância ao centro  $r$ .

Para um estado hidrostático de tensões de (1) obtemos

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{-\delta}{\eta^2} \int_0^\eta \delta \eta^2 d\eta \quad (6)$$

e da definição do módulo de elasticidade volumétrico [4]

$$K = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad \text{ou} \quad k = \delta \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\delta} \quad (7)$$

obtemos

$$k = - \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^2 \left(\frac{d\eta}{d\delta}\right) \int_0^\eta \delta \eta^2 d\eta. \quad (8)$$

onde  $\delta = \rho/\bar{\rho}$ ,  $k = K/4 \pi G R^2 \bar{\rho}^2$  e  $p = P/4 \pi G R^2 \bar{\rho}^2$ .

Supondo que o material tenha um módulo de elasticidade variável com a pressão segundo a lei linear [4].

$$k = k_1 + b p \quad (9)$$

onde  $k_1$  é o valor de  $k$  na superfície ( $\eta=1$ ) onde  $P=0$  e  $b$  é o valor de  $dk/dp$ , suposto constante, obtêm-se a equação de estado:

$$k = \frac{k_1}{(\delta_1)^b} \delta^b. \quad (10)$$

Substituindo (10) em (8), obtemos a equação diferencial para  $\delta$  (Equação de Emden [3]):

$$\frac{d^2 \delta}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{d\delta}{d\eta} + \frac{b-2}{\delta} \left( \frac{d\delta}{d\eta} \right)^2 + \frac{\delta_1}{k_1} \delta^2 - b = 0. \quad (11)$$

A integração de (11) foi feita [1] numericamente pe

lo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Os resultados obtido são apresentados na Tabela III para valores de  $b = dk/dp$  entre 2,0 e 4,0 (faixa que abrange a maioria dos materiais terrestres e meteoríticos [5]).

Tabela III. Parâmetros Adimensionais Correspondentes a um Módulo de Elasticidade (K) variável na forma

$$k = k_1 + b p \quad (b = dk/dp)$$

(a)	Densidade Relativa no Centro da Esfera ( $\delta_0 = \rho_0/\rho$ )				
	$b = 2,0$	$b = 2,5$	$b = 3,0$	$b = 3,5$	$b = 4,0$
$\delta_1$					
0,999	1,0015	1,0015	1,0015	1,0015	1,0015
0,900	1,1580	1,1509	1,1444	1,1385	1,1330
0,800	1,3324	1,3021	1,2771	1,2559	1,2369
0,700	1,5232	1,4514	1,3947	1,3547	1,3206
0,600	1,7303	1,5972	1,5048	1,4365	1,3849
(b)	Módulo de Elasticidade Adimensional na Superfície $k_1 = -\delta_1^2 / 3\delta_1'$				
	$b = 2,0$	$b = 2,5$	$b = 3,0$	$b = 3,5$	$b = 4,0$
$\delta_1$					
0,999	66,497	66,472	66,448	66,425	66,403
0,900	0,5637	0,5423	0,5218	0,5021	0,4832
0,800	0,2325	0,2137	0,1966	0,1810	0,1669
0,700	0,1239	0,1079	0,0942	0,0823	0,0720
0,600	0,0712	0,0582	0,0478	0,0393	0,0323
(c)	Pressão Adimensionalizada no Centro ( $p_0 = P_0 / 4 \pi G R^2 \rho^2$ )				
	$b = 2,0$	$b = 2,5$	$b = 3,0$	$b = 3,5$	$b = 4,0$
$\delta_1$					
0,999	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
0,900	0,1848	0,1842	0,1836	0,1831	0,1826
0,800	0,2062	0,2034	0,2011	0,1990	0,1968
0,700	0,2313	0,2241	0,2184	0,2137	0,2101
0,600	0,2606	0,2460	0,2353	0,2270	0,2211
(d)	Momento de Inércia Adimensional ( $z = C/MR^2$ )				
	$b = 2,0$	$b = 2,5$	$b = 3,0$	$b = 3,5$	$b = 4,0$
$\delta_1$					
0,999	0,3999	0,3999	0,3999	0,3999	0,3999
0,900	0,3883	0,3885	0,3888	0,3890	0,3892
0,800	0,3761	0,3771	0,3780	0,3789	0,3797
0,700	0,3633	0,3657	0,3679	0,3698	0,3715
0,600	0,3501	0,3546	0,3584	0,3618	0,3647

Na integração de (11) levou-se em conta que o valor de massa total do planeta e de seu momento de inércia, nos permitem escrever, respectivamente:

$$\int_0^1 \delta \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$\int_0^1 \delta \eta^4 d\eta = \frac{z}{2} \quad (13)$$

Supondo a Lua constituída de uma única fase de um mesmo material que se adensa no sentido do centro em decorrência da pressão segundo a equação de estado (10) e, levando em conta o valor de  $z = 0,392$  [12], obtemos os resultados indicados na Tabela IV que fornecem as características mecânicas do material lunar na superfície e no centro.

$$\delta = \delta_0 (1 - a\eta^2)^{1/2} \quad (14)$$

Das equações (12) e (14) obtemos para a densidade no centro da esfera ( $\eta = 0$ ):

$$\delta_0 = \frac{8a}{3} \left[ (1-a)^{1/2} + \frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{a}}{\sqrt{a}} - 2(1-a)^{3/2} \right]^{-1} \quad (15)$$

e na superfície ( $\eta = 1$ ):

$$\delta_1 = \delta_0 (1-a)^{1/2} \quad (16)$$

Por outro lado, de (13) e (14):

$$z = \frac{1}{3a} \left[ 1 - \delta_0 (1-a)^{3/2} \right] \quad (17)$$

Quanto à variação das propriedades elásticas, suponho ainda o material sem rigidez, de (8) e (14) obtemos:

$$k = \frac{\delta_0^2}{8a} \left( \frac{1-a\eta^2}{\eta^3} \right)^{3/2} \left\{ \eta (1-a\eta^2)^{1/2} + \frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{a\eta}}{\sqrt{a}} - 2\eta (1-a\eta^2)^{3/2} \right\} \quad (18)$$

que na superfície da esfera nos fornece

$$k_1 = \frac{\delta_1}{3} \left( \frac{1-a}{a} \right) \quad (19)$$

e para o centro:

$$k_0 = \frac{\delta_0^2}{3a} \quad (20)$$

Com relação à variação do módulo de elasticidade  $k$  com a pressão  $p$ , obtêm-se das equações (6), (7) e (8) para a superfície da esfera:

$$\left( \frac{dk}{dp} \right)_1 = 3 \left[ 1 + \frac{1-a}{a} (1-\delta_1) \right] = 9z \quad (21)$$

e para o centro:

$$\left( \frac{dk}{dp} \right)_0 = 3,6 \quad (22)$$

A variação da pressão (adimensionalizada) com o raio

Tabela IV. Características do material lunar segundo a hipótese  $K = K_1 + bP$

b	3,0	3,5	4,0
$\rho_1$	3,109	3,102	3,100
$K_1$	0,219	0,212	0,198
$\rho_0$	3,689	3,684	3,676
$K_0$	0,371	0,389	0,400
$P_0$	50,60	50,57	50,53

Unidades:  $\rho + 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $K + 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ;

$P + 10^9 \text{ N m}^{-2} \text{ (kb)}$

Tensões Considerando uma Distribuição de Densidades Segundo a Forma Elíptica - Uma distribuição para a massa específica que se ajusta à condição  $dk/dp = 3,5$  ( $b = 3,5$ ) [1] é

da esfera  $\bar{e}$  obtida das equações (6) e (14) na forma:

$$p = \frac{\delta_0^2}{8} \left\{ \frac{3}{2} (1 - \eta^2) - \frac{a}{2} (1 - \eta^4) + \frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{a} \eta (1 - a\eta^2)^{1/2}}{a \sqrt{a} \eta} - \frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{a} (1 - a)^{1/2}}{a \sqrt{a}} + \frac{1}{2a} \left[ (\text{sen}^{-1} \sqrt{a} \eta)^2 - (\text{sen}^{-1} \sqrt{a})^2 \right] \right\} \quad (23)$$

Portanto, no centro da esfera ( $\eta=0$ ) a expressão para a pressão  $\bar{e}$ :

$$p_0 = \frac{\delta_0^2}{8} \left[ \frac{3}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{a} - \frac{\text{sen}^{-1} \sqrt{a} (1 - a)^{1/2}}{a \sqrt{a}} - \frac{1}{2a} (\text{sen}^{-1} \sqrt{a})^2 \right] \quad (24)$$

Observe-se que para o caso limite de  $a$  próximo a zero (esfera homogênea), a pressão adimensionalizada  $p_0$  tende para 1/6, valor também obtido através da equação (3).

A Tabela V mostra os valores adimensionais da densidade  $\delta$ , módulo de elasticidade  $k$ , pressão  $p$  e variação do módulo de elasticidade com a pressão  $dk/dp$ ,

para o centro e para a superfície, correspondentes a diversos valores do parâmetro  $a$  entre 0 e 1 [1].

Para uma esfera com as dimensões da Lua, obtemos  $\rho_1 = 3,10$  e  $\rho_0 = 3,64 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $K_1 = 0,215$  e  $K_0 = 0,396 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ;  $P_0 = 50,6 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$ ; valores que se ajustam aos obtidos anteriormente (Tab. IV).

Tensões Considerando a Presença de Um Núcleo

- O baixo valor do momento de inércia adimensional da Terra ( $z = 0,331$ ) e de outros planetas (Tabela I) quando comparados com os valores apresentados nas Tabelas III(d) e V, é uma evidência de que não se pode supor o planeta como constituído de um único material que se adensa continuamente no sentido do centro. Esta conclusão está de acordo com a hipótese da formação da Terra por acrescentamento de partículas em um certo ponto da nebulosa solar, que gerou a formação de um corpo esférico basicamente homogêneo [9]. O estágio seguinte consistiu no aquecimento, principalmente devido à radioatividade, que resultou na fusão do ferro junto à superfície, onde eram menores as pressões, dando formação a grandes "gotas" que depois afundaram na direção do centro pela ação gravitacional. Segundo B.H. Mason [10],

Tabela V . Parâmetros Adimensionais correspondentes à distribuição de densidades na forma elíptica:

$$\delta = \delta_0 (1 - a\eta^2)^{1/2}$$

a	$\delta_1$	$k_1$	$(dk/dp)_1$	$\delta_0$	$k_0$	$P_0$	z
0,000	1,0000	$\infty$	3,6000	1,0000	$\infty$	0,1667	0,4000
0,001	0,9998	332,93	3,5997	1,0003	333,53	0,1667	0,3999
0,010	0,9980	32,933	3,5979	1,0030	33,534	0,1670	0,3998
0,100	0,9786	2,9358	3,5782	1,0315	3,5468	0,1702	0,3976
0,200	0,9539	1,2718	3,5534	1,0665	1,8956	0,1743	0,3948
0,300	0,9250	0,7194	3,5251	1,1056	1,3581	0,1791	0,3917
0,400	0,8906	0,4453	3,4922	1,1498	1,1017	0,1847	0,3880
0,500	0,8488	0,2829	3,4545	1,2004	0,9607	0,1914	0,3837
0,600	0,7965	0,1770	3,4069	1,2594	0,8812	0,1996	0,3786
0,700	0,7284	0,1041	3,3493	1,3298	0,8421	0,2099	0,3721
0,800	0,6334	0,0528	3,2749	1,4164	0,8359	0,2237	0,3639
0,900	0,4835	0,0179	3,1722	1,5291	0,8659	0,2431	0,3525
1,000	0,0000	0,0000	3,0000	1,6977	0,9607	0,2761	0,3333

a superfície original da proto-Terra teria sido "engolfada e digerida", não restando hoje nenhum vestígio da mesma.

Imaginaremos neste item a esfera constituída de dois materiais, ou duas fases de um mesmo material: a) um núcleo denso (metálico) e b) um manto mais leve (silicatado).

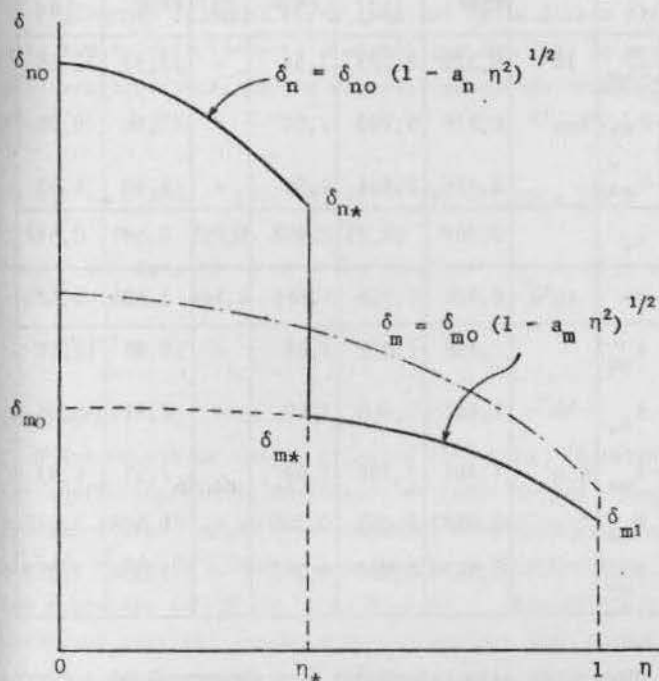


FIG. 3 - DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADES CONSIDERANDO A PRESENÇA DE UM NÚCLEO PESADO

A Fig. 3 mostra a distribuição de densidades em função da distância ao centro tendo-se adotado a relação (14) que se mostrou satisfatória em termos do valor  $dk/d\rho$  e onde o índice  $n$  se refere ao núcleo,  $m$  ao manto e o subscrito  $(*)$  à interface entre o núcleo e o manto.

Na superfície teremos,

$$\delta_{m_1} = \delta_{m_0} (1 - a_m)^{1/2} ; k_{m_1} = \frac{\delta_{m_1}}{3} \left( \frac{1 - a_m}{a_m} \right)$$

$$a_m = \frac{\delta_{m_1}}{\delta_{m_1} + 3k_{m_1}} \quad (25)$$

que nos dão a distribuição de densidades no manto, pelo conhecimento das características mecânicas do material na superfície ( $\delta_{m_1}$  e  $k_{m_1}$ ).

A distribuição de densidades no núcleo (determinada pelos parâmetros  $\delta_{n_0}$ ,  $a_n$  e  $\eta_*$ ) pode ser obtida [1] levando em conta os valores conhecidos da massa total, do momento de inércia  $z$  e do fato que o módulo de elasticidade não sofre descontinuidade entre o manto e o núcleo ( $K_{m*} = K_{n*}$ ) [3] vínculos que nos permitem obter um sistema determinado de 3 equações a 3 incógnitas.

Como um teste do método proposto, utilizaremos os valores conhecidos para o manto superior da Terra (indicados pelo equilíbrio da crosta - Isostasia [4]), a saber

$$\rho_{m_1} = 3,31 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \text{ e } k_{m_1} = 0,800 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

bem como os dados conhecidos [2]

$$\bar{\rho} = 5,52 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}, R = 6,37 \times 10^6 \text{ m e } z = 0,331$$

que nos permitem obter  $\delta_{m_1} = 0,600$  e  $k_{m_1} = 0,0742$ , que levados em (25) fornecem  $a_m = 0,7214$  e  $\delta_{m_0} = 1,137$ .

As restrições de massa total, momento de inércia e módulo de elasticidade, nos conduzem a

$$\eta_* = 0,556 \quad a_n = 1,10 \quad \text{e} \quad \delta_{n_0} = 2,20$$

A Tabela VI dá uma idéia da precisão do método, comparando os resultados obtidos com as informações sísmológicas disponíveis [6].

Calculando as pressões na Terra através da integração de (6), utilizando-se os valores adotados para  $a_m$ ,  $\delta_{m_0}$ ,  $a_n$ ,  $\delta_{n_0}$  e  $\eta_*$ , obtemos:

$$P_* = 0,1269 \quad P_* = 1,315 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$P_0 = 0,3421 \quad P_0 = 3,544 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

que comparados com os valores obtidos pelas informações sísmológicas [6], a saber,

$$P_* = 1,352 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2} \text{ e } P_0 = 3,617 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

nos indicam uma diferença de 3%.

#### MODELOS PARA OS PLANETAS TERRESTRES

O conhecimento do interior de nosso planeta, desenvolvido pelos estudos sísmológicos, nos permite estabelecer pares de valores para a massa específica ( $\rho_{m_1}$ ) e módulo de elasticidade volumétrica ( $K_{m_1}$ ) na superfície que, segundo o método introduzido no capítulo preceden

Tabela VI. Propriedades Mecânicas do Material Terrestres (a) calculadas segundo o método proposto e (b) determinadas pelas informações sísmológicas [6]

	(a)	(b)	USI
$\rho_{no}$	12,1	12,6	$10^3 \text{ kg m}^{-3}$
$\rho_{n*}$	9,89	9,96	
$\rho_{m*}$	5,53	5,53	
$K_{no}$	15,2	13,6	$10^{11} \text{ N m}^{-2}$
$K_{n*}$	7,26	6,35	
$K_{m*}$	7,26	6,43	
$R_*$	3,54	3,49	$10^6 \text{ m}$

te, nos levam a obter o valor conhecido  $q_* = 0,547$  para o raio do núcleo pesado da Terra. A partir desses resultados é possível construir-se uma série de modelos para o interior da Terra dos quais foi selecionado o que mais se ajusta aos valores indicados por Anderson e Hart (1977) [6] que correspondem, para o material do núcleo, a uma massa específica  $\rho_{n1} = 5,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , reduzida à pressão zero.

A partir dos resultados obtidos para a Terra e, partindo do pressuposto que o material do núcleo da Lua e Marte é da mesma natureza, tornou-se possível elaborar a Tabela VII que apresenta um modelo proposto para cada um destes astros, dos quais se conhece o momento de inércia  $z$ .

**Modelos para Venus e Mercúrio** - A ausência de satélites naturais para esses dois planetas interiores do sistema solar impossibilitou, até o presente, o conhecimento do momento de inércia, importante informação relativa ao desenvolvimento de modelos para suas constituição.

No caso do planeta Venus, que por suas propriedades muito se assemelha à Terra, faremos a hipótese de que os materiais do manto e do núcleo sejam da mesma natureza dos materiais terrestres ( $\rho_{m1} = 3,30 \times 10^3$  e  $K = 0,770 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ).

Adotando-se os valores conhecidos ( $R = 6,055 \times 10^6 \text{ m}$  e  $\bar{\rho} = 5,246 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  (Tabela I) obtemos

$$\delta_{m1} = 0,629 \quad k_{m1} = 0,0910 \quad a_m = 0,6973 \quad \delta_{m0} = 1,1433$$

Tabela VII. Modelos propostos para a Lua, Marte e Terra.

	(USI)	L U A		M A R T E		T E R R A	
		PROP. [11]	[11]	PROP. [8]	[8]	PROP. [6]	[6]
$\rho_{no}$	$10^3$	6,320	5,223	7,54	-	12,32	12,58
$\rho_{n*}$	$\text{Kgm}^{-3}$	6,275	5,209	7,04	-	10,06	9,96
$\rho_{m*}$		3,415	3,434	3,94	-	5,60	5,53
$\eta_*$		0,249	(0,2)	0,458	0,455	0,547	0,547
$R_*$	$10^6 \text{ m}$	0,438	0,338	1,555	1,544	3,485	3,485
$K_{no}$		1,498	1,423	3,04	-	15,45	13,64
$K_{n*}$	$10^{11}$	1,461	1,400	1,59	-	7,51	6,35
$K_{m*}$	$\text{N m}^{-2}$	1,461	1,745	1,59	-	7,51	6,43
$P_{no}$		0,0583	0,053	0,385	-	3,584	3,617
$P_{n*}$		0,0479	0,048	0,203	-	1,354	1,352

Para cada valor atribuído a  $\eta_*$  obteve-se os correspondentes de  $a_n$ ,  $\delta_{no}$  e  $z$ . Desses valores, selecionou-se aquele que dá, para o material do núcleo, o valor  $\rho_{n1} = 5,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , correspondente ao material terrestre reduzido à pressão zero, nos permitindo propor para Venus:

$$\eta_* = 0,532 \quad z = 0,336 \quad R_* = 3,22 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\rho_{no} = 11,6 \times 10^3 \quad \rho_{n*} = 9,65 \times 10^3 \quad \rho_{m*} = 5,37 \times 10^3 \quad (\text{kg m}^{-3}).$$

A incerteza na determinação do diâmetro de Mercúrio nos permite apenas uma estimativa grosseira de sua massa específica mas que, apesar de tudo, desde 1960 [2] se sabe que é grande para as dimensões do planeta ( $\bar{\rho} = 5,4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ). Não seria plausível portanto, supor-se que o material do manto fosse semelhante ao da Terra e Venus.

Adotando-se para o material do manto de Mercúrio as características mecânicas da Olivina Ferrosa (Faialita)

para a qual se conhece (Tabela II)

$$\rho = 4,39 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad \text{e} \quad K = 1,32 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

e como para Mercúrio,  $R = 2,443 \times 10^6 \text{ m}$ , obtemos:

$$\delta_{m_1} = 0,8130 \quad k_{m_1} = 0,9045 \quad \text{e} \quad (dk/dp)_1 = 4,9$$

Procedendo da mesma forma como foi feito para o planeta Venus, selecionou-se o modelo que nos leva às mesmas características para o material do núcleo de Mercúrio:

$$n_* = 0,760 \quad z = 0,371 \quad R_* = 1,86 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\rho_{no} = 6,89 \times 10^3 \quad \rho_{n_*} = 6,27 \times 10^3 \quad \rho_{m_*} = 4,66 \times$$

$$\times 10^3 \text{ (kg m}^{-3}\text{)}.$$

#### CONCLUSÃO:

A introdução da função elíptica (14) para representar a distribuição de densidades no interior dos planetas terrestres se mostrou adequada, principalmente no que diz respeito à variação do módulo de elasticidade com a pressão ( $dK/dP$  em torno de 3,5). Através dela tornou-se possível estabelecer estimativas dos parâmetros que descrevem as propriedades mecânicas daqueles astros, baseado na hipótese da uniformidade de propriedades mecânicas para os materiais de seus núcleos densos. Os resultados obtidos nos permitem propor uma equação que se ajusta ao comportamento do módulo de elasticidade em função da pressão, a saber

$$K = 1,31 + 4,69 P - 0,0222 P^2 \text{ (} 10^{11} \text{ N m}^{-2}\text{)} \quad (26)$$

onde  $K_1 = 1,31 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$  e  $(dK/dP)_1 = 4,69$ , valores compatíveis com os materiais meteoríticos (olivina, piroxênio, etc [5]).

A estimativa da pressão no centro da Terra, do módulo de elasticidade do material no centro da Lua, do raio do núcleo pesado de Venus ou do momento de inércia de Mercúrio, presentes neste trabalho, não visam o interesse intrínseco dessas determinações. Da mesma forma que um astrônomo, ao medir a distância de uma galáxia longínqua, está motivado pelo problema maior da natureza do Cosmos, teve-se em mente coletar informações que possam fortalecer uma teoria sobre a origem e a formação do Sistema Solar.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Pamplona, C.F.M., "Tensões Geradas por Ação Gravitacional Auto-Induzida em uma Esfera Maciça", Tese de Mestrado - PUC/RJ, (1978)
- [2] Cook, A.H., "The Internal Structures of the Planets", Journal of Geophysical Research, Vol.42, (1975).
- [3] Bullen, K.E., "An Introduction to the Theory of Seismology", (3ª ed.), Cambridge University Press, (1963).
- [4] Birch, F., "Elasticity and Constitution of the Earth's Interior", J.G.R. - Vol. 57 (1952).
- [5] Davies, G.F., "The Estimation of Elastic Properties from Analogue Compounds", J.G.R. - Vol. 44, (1976).
- [6] Anderson & Hart, "Earth Model", J.G.R. - Vol. 82, (1977).
- [7] Lowe, A.E.H., "The Mathematical Theory of Elasticity", (4ª ed.), Dover Publications, N.Y., (1944).
- [8] Reasenberg, R., "The Moment of Inertia and Isostasy of Mars", J.G.R. - Vol. 82, (1977).
- [9] Elsasser, W.M., "Historia Precoce da Terra", Earth Science and Meteoritics (1-30), John Wiley e Sons, (1963).
- [10] Mason, B.H., "Princípios de Geoquímica", Tradução: Rui Ribeiro Franco, Editora U.S.P., (1966).
- [11] Bills, B.G. & Ferrari, A.J., "A Lunar Density Model Consistent With Topography, Gravitational, Librational and Seismic Data", J.G.R. - Vol. 82, (1977).
- [12] Blackshear, W.T. & Capcynski, J.P., "An Improved Value of the Lunar Moment of Inertia", J.G.R., Vol. 82, (1977).



# CONGRESSOS E ENCONTROS

1. ABCM - I SIBRAT - I Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão  
Data e local: 19 a 21 de Novembro de 1980  
Salvador - Bahia  
Correspondência:  
Prof. Cid Gesteira  
NST/EPUFBA  
Rua Aristides Novaes, 2  
Federação, Salvador - Bahia - 40.000
2. ASME - JOINT CONFERENCE - Pressure Vessel and Piping and Solar Energy Division  
Data e local: 21 a 26 de Junho de 1981  
Denver - Colorado  
Correspondência:  
A.C. Gangadharan  
Foster Wheeler Energy Corp.  
12 Peachtree Hill Rd.  
Livingston, N.J. 07030 - USA
3. ASME - WAM - Winter Annual Meeting  
Data e local: 16 a 21 de Novembro de 1980  
Chicago - Illinois  
Correspondência:  
Secretaria da ASME  
345 East 47<sup>th</sup> Street  
New York, N.Y. 10017 - USA
4. AIChE - 19<sup>th</sup> National Heat Transfer Conference  
Data e local: 27 a 30 de Julho de 1980  
Orlando - Flórida  
Correspondência:  
Prof. J.K. Ferrel  
Department of Chemical Engineering  
North Carolina State University  
Raleigh, NC 27607 - USA
5. INSTITUT FUR THERMO-UND FLUIDDYNAMIK/VDI/ASME/IMEKO - International Symposium on Flow Visualization  
Data e local: 9 a 12 de Setembro de 1980  
Ruhr-Universität Bochum, Germany  
Correspondência:  
Prof. W.J. Yang  
Dept. of Mechanical Engineering  
University of Michigan, Ann Arbor, MI-48109
6. SPE ANNUAL FALL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION  
Data e local: 21 a 24 de Setembro de 1980  
Dallas - Texas  
Correspondência:  
SPE, 6200 N. Central Expwy  
Dallas, Texas 75206 - USA
7. IAHR - INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR HIDRAULIC RESEARCH - Hydraulic Machinery and Equipment Associated with Energy Systems in the New Decade of 1980's  
Data e local: 29 Setembro a 2 Outubro de 1980  
Tokyo, Japan  
Correspondência:  
Secretariat of IAHR Symposium 1980  
Prof. Dr. Masaaki Shirakura  
Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo  
3-1, Hongo 7-chrome, Bunkyo-Ku  
Tokyo, 113 Japan

8. ANS/ASME - Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics Topical Meeting

Data e local: 6 a 10 de Outubro de 1980  
Saratoga - N.Y.

Correspondência:

ASME, Technical Affairs Dept.  
345 East 47<sup>th</sup> Street, N.Y. 10017 - USA

9. AIAA - 13<sup>th</sup> Fluid and Plasmadynamics Conference

Data e local: 14 a 16 de Julho de 1980  
Snowmass - Co.

Correspondência:

AIAA Meetings Dept.  
1290 Ave. of the Americas, N.Y. 10019  
USA

10. ASME - Century 2 Emerging Technology Conferences

Data e local: 10 a 23 de Agosto de 1980  
San Francisco - Ca.

Correspondência:

ASME, Technical Affairs Dept.  
345 East 47<sup>th</sup> Street, N.Y. 10017 - USA

11. ASME - CENTENIAL MEETING - International Computer Technology Conference

Data e local: 13 a 15 de Agosto de 1980  
San Francisco - Ca.

Correspondência:

Ali Seireg  
Dept. of Mech. Eng.  
University of Wisconsin  
Madison, WI 53706 - USA

12. ASME/AIAA - 15<sup>th</sup> Intersociety Energy Conversion Engineering Conference

Data e local: 17 a 22 de Agosto de 1980  
Seattle - Wa.

Correspondência:

ASME, Technical Affairs Dept.  
345 East 47<sup>th</sup> Street, N.Y. 10017 - USA

13. ASME - International Conference on Vibrations in Rotating Machinery

Data e local: 2 a 4 de Setembro de 1980  
Cambridge - England

Correspondência:

ASME, Technical Affairs Dept.

345 East 47<sup>th</sup> Street, N.Y. 10017 - USA

14. EAM - 5<sup>th</sup> Symposium on Engineering Applications of Mechanics

Data e local: 16 a 17 de Junho de 1980  
University of Ottawa - Canada

Correspondência:

K. Charbonneau  
National Research Council of Canada  
Ottawa, Ontario, Canada KIA, 0R6

15. IUTAM - XV<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics

Data e local: 17 a 23 de Agosto de 1980  
University of Toronto,  
Ontario - Canada

Correspondência:

K. Charbonneau  
National Research Council of Canada  
Ottawa, Ontario, Canada KIA, 0R6

16. SMIRT - 6<sup>th</sup> International Congress on Structural Mechanics in Reactor Technology

Data e local: 17 a 21 de Agosto de 1981  
Paris - França

Correspondência:

Mr. J. Rastoin  
Department des Etudes Mecaniques e  
Thermiques  
C.E.A./C.E.N., Saclay  
B.P. n° 2  
F-91190 Gif-sur-Yvette, France

17. ASME - Summer Annual Meeting

Data e local: 22 a 26 de Junho de 1980

Correspondência:

ASME, Technical Affairs Dept.  
345 East 47<sup>th</sup> Street, N.Y. 10017 - USA

**REVISTA**  
**B** **BRASILEIRA** **DE**  
**C** **CIENCIAS**  
**M** **MECANICAS**

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, destinada a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de engenharia mecânica e de mecânica teórica. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes, obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se, em alguns casos, publicação em anais de Congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade do Editor Responsável e do Conselho Editorial.

Os trabalhos devem ser escritos em português, espanhol ou inglês. As normas detalhadas para a datilografia e montagem do trabalho, bem como as folhas padrão, devem ser solicitadas ao Editor Responsável no endereço abaixo.

L. Bevilacqua  
Depto. de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - R. J.

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas não excedente a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas cópias reduzidas - aproximadamente 28x12 cm - para o Editor Responsável ou um dos membros do Conselho Editorial, com uma carta de encaminhamento contendo o título do trabalho, o(s) nome(s), instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es). Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

This journal is published by the ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS aiming the diffusion of meaningful results of scientific research and technological development in the fields of mechanical engineering, applied and theoretical mechanics. Short communications based on well-known theories and techniques presenting meaningful contributions to science and/or technology will be published under the title "Notas Técnicas".

The submitted papers should not have been published elsewhere, except for some special cases of papers appearing in Proceedings of Congresses or Meetings.

Refereeing the contents of paper will take into account originality, contribution to science and technology, clearness of style, adequacy of the subject and quality of typing. The final decision concerning recommendation for publication is responsibility of the Editor in Chief and the Editorial Board.

Papers may be written in Portuguese, Spanish or English. Detailed instructions for typing and preparation of the papers are available under request in the following address:

L. Bevilacqua  
Dept. Eng. Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22.453 - Rio de Janeiro - R. J. - Brasil

Directions for typing must be strictly respected. Papers not exceeding 10 (ten) pages will be free of charge. Each additional page will be charged.

Two reduced copies of the original, 28x12 cm approximately, should be sent to the Editor in Chief or any other member of the Editorial Board, together with a letter containing the title of the paper, name(s), affiliation(s) and address(es) of the author(s). In any circumstance a copy of this letter must be forwarded to the Editor in Chief. Do not forward the originals before having your paper accepted for publication.

Assinaturas

Subscriptions

Prof. Arno Blass  
Centro Tecnológico  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Caixa Postal 476  
88.000 - Florianópolis - S. C. - Brasil

REVISTA

BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

VOL.11 SET.1980 Nº 2



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

CONSELHO DIRETOR

Arno Blass (Presidente); Hans Ingo Weber; Sérgio Colle;  
Guilherme Creus; Raul Guenther; Samir Nagi Yousri Gerges

L. Bevilacqua  
Editor Responsável

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J. J. de Espíndola

R. A. Feijoo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarani

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Editorial ..... i3

Um método racional explícito para  
projeto de componentes mecânicos su  
jeitos a carregamentos dinâmicos ge  
rais - Jaime T. P. de Castro ..... 71

Queda de uma partícula num fluido  
em regime transiente - Rubens Sam  
paio ..... 81

Fórmula de Green de fronteira modi  
ficada para a solução do problema  
de Neumann e aplicações à engenha  
ria - Sérgio Colle ..... 85

Região de equilíbrio na convecção  
térmica turbulenta entre superfí  
cies planas horizontais - Rogério  
T. da S. Ferreira ..... 95

Refino de grão em alumínio e ligas  
alumínio-cobre obtido pela alimenta  
ção de moldes através de canais re  
frigerados a água - Antonio C. da  
F. Arruda e Maurício P. de Campos  
Filho ..... 103

Estudo analítico de um rotor hori  
zontal sujeito à ação de mancais a  
tivos - Douglas E. Zampieri e Wer  
ner Schiehlen ..... 109

Congressos e encontros ..... a1

## EDITORIAL

Lenta mas progressivamente a Revista Brasileira de Ciências Mecânicas vai caminhando. Os trabalhos vem sendo enviados com maior frequência e esperamos já para o próximo ano aumentar o número de edições anuais para quatro.

Ouvir as críticas, aproveitar aquelas que são lúcidas e viáveis, não deixar que os defeitos de forma se transformem em cavalos de batalha, desvirtuando o objetivo principal da Revista que é a divulgação dos resultados de pesquisa, tem sido o caminho seguido até aqui e o que pretendemos continuar trilhando.

Ao que tudo indica a Revista Brasileira de Ciências Mecânicas está tomando força. Agora, mais que nunca necessita do apoio dos associados da ABCM, da comunidade científica, das Instituições de Ensino Superior e de Empresas e Indústrias. Quando se fala em apoio, pensa-se logo em apoio financeiro e em geral, apoio financeiro gratuito, doação. Embora o apoio financeiro seja necessário, e muitas vezes desvinculado de um fim específico, mas sempre associado a um benefício maior e mais amplo, não é dele a que me refiro agora. O apoio a que me refiro é mais importante que o apoio financeiro, porque é justamente o que lhe dá conteúdo e razão de ser.

É indispensável que as publicações da Revista sejam usadas e tenham significado. Sejam usadas principalmente pelos membros da nossa comunidade científica e das nossas empresas. Sirvam de base ou comparação para novos desenvolvimentos tanto teóricos como aplicados. É preciso que o engenheiro de projeto se habitue a usar os trabalhos publicados como pontos de referência sobre os quais possa desenvolver suas aplicações. É preciso, principalmente, que a Revista abra um veículo de comunicação extremamente fértil entre a Empresa e as Universidades e os Institutos de Pesquisa. Muitas vezes o trabalho publicado é apenas o indicador de potencialidade. Todos os autores, estou certo, estão interessados em atenderem a quaisquer solicitações que estejam dentro das suas possibilidades. É necessário que se deflagre um maior intercâmbio direto entre os membros da comunidade científica e tecnológica. Este é um apoio de que necessitamos.

Tenham significado, isto é, contem ponto, sejam avaliados com justiça. Quando recebemos nas Universidades, formulários de órgãos de Ensino e/ou Pesquisa, ou de Agencias Financiadoras dirigidos com propósitos de avaliação, é praticamente invariável a distinção de trabalhos publicados, ou pelo menos duas categorias: trabalhos publicados em revistas "nacionais" e "estrangeiras". Sem querer entrar em uma análise detalhada da questão, é evidente que para fins de avaliação a classificação não faz sentido. O que existe são revistas científicas de "boa qualidade" e revistas científicas de "mã qualidade". Certamente a atribuição de uma escala de qualidade para revistas científicas é uma boa idéia e pode ser usada no estabelecimento de índices médios para avaliação da qualidade de produção científica. O critério para se estabelecer esta escala não deve ser, no entanto, um critério de "nacionalidade". O Conselho Editorial, o modo de seleção dos trabalhos, o objetivo da Revista são dados muito mais significativos. Neste sentido a Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é competitiva e está disposta a ser julgada com as demais congêneres, quaisquer que sejam as suas "nacionalidades".

Estes são os apoios de que necessitamos, especialmente neste momento em que a Revista Brasileira de Ciências Mecânicas começa a crescer.

Não quero terminar sem antes agradecer ao Professor Hans Ingo Weber pelo seu excelente e incansável trabalho na publicação do primeiro número da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas de 1980. A sua colaboração foi decisiva na publicação daquele número. Estendo meus agradecimentos também ao Professor Francisco Eduardo Mourão Saboya pelo apoio que me deu na preparação do material para publicação do primeiro número de 1980.

Luiz Bevilacqua

Editor

## UM MÉTODO RACIONAL EXPLÍCITO PARA PROJETO DE COMPONENTES MECÂNICOS SUJEITOS A CARREGAMENTOS DINÂMICOS GERAIS

JAIME TUPIASSU PINHO DE CASTRO

PROFESSOR AUXILIAR

DEPTO. DE ENG. MEC., PUC/RJ, RIO DE JANEIRO, RJ

### SUMÁRIO

*É feita uma revisão dos métodos utilizados atualmente no projeto à fadiga de peças sujeitas a um carregamento dinâmico complexo. É proposta uma ferramenta, utilizável explicitamente durante o estágio de dimensionamento, baseada no método de análise local de tensões e deformações e em uma acumulação linear de dano. O tipo de sollicitação considerada é geral, admitindo um estado tri-axial de tensões e a existência de tensões residuais provocadas por escoamento ou por fabricação, e é permitido ao projetista a especificação da resistência do material à fadiga, inclusive através de curvas experimentais.*

### INTRODUÇÃO

O problema do dimensionamento de peças ou estruturas sujeitas a um carregamento dinâmico complexo ainda não tem uma solução universalmente aceita. O conhecimento atual do mecanismo de falhas mecânicas devido a fadiga dos materiais é incompleto, e portanto não nos permite uma solução matemática única, utilizável diretamente em projetos. Em Engenharia são usados métodos racionais que combinam, em vários graus de sofisticação, análise de tensões e deformações, mecânica da fratura, dados experimentais e/ou (se possível) experiência acumulada em casos semelhantes.

Experiência acumulada - "know how" - é tecnologia, e como tal dificilmente acessível na literatura, já que é um bem com valor econômico. Daí a necessidade do desenvolvimento de métodos racionais explícitos, que possam utilizar de forma direta, na fase de projeto, hipóteses razoáveis e coerentes com a realidade física.

Os objetivos deste trabalho são rever os

métodos de projeto à fadiga e apresentar uma ferramenta, de utilização relativamente simples, capaz de atacar problemas de projeto mecânico onde a suposição de um carregamento constante seja irreal. O tipo de sollicitação considerada é bastante geral - um estado bi ou tri-axial de tensões, com componentes média e alternada, de amplitude variável no tempo. É suposta uma acumulação linear de dano, e é permitido ao projetista a escolha do tipo da resistência do material à fadiga - por exemplo através de curvas obtidas experimentalmente.

### UMA VISTA GERAL SOBRE O PROBLEMA DO PROJETO À FADIGA

Podem ser identificados três correntes no ataque moderno ao problema do projeto à fadiga, que podemos chamar de: estatística, mecânica da fratura e análise de tensões/deformações. Estes enfoques evidentemente não são estanques, mas identificam filosofias diferentes de se encarar um mesmo problema. O obje-



tivo básico é único - prever a vida (ou a resistência) de uma peça ou estrutura sujeita a carregamento dinâmico.

O enfoque estatístico parte da suposição de que fadiga é um fenômeno aleatório, e procura descrever, da maneira mais precisa possível, a forma das distribuições de probabilidade de relevantes ao problema. Por exemplo, é usual descrever-se a variação da vida à fadiga de peças idênticas, submetidas a carregamentos iguais, através de uma distribuição log-normal ou de uma distribuição de Weibull com 2 ou 3 parâmetros. A linha de pesquisa em estatística visa atacar o problema mais geral de solicitações variáveis, descrevendo matematicamente as funções de probabilidade de falha. As referências [1-6] exploram este enfoque.

A Mecânica da Fratura visa descrever o campo de tensões no entorno de fendas internas ao material, e a velocidade de propagação das fendas quando as solicitações são dinâmicas [7-10]. É um enfoque mais básico, que preocupa-se com fenômenos microscópicos e com a descrição do mecanismo de falha propriamente dito. As dificuldades matemáticas são muitas vezes consideráveis, mas em projetos onde fratura pode ser catastrófica - em aviação ou em reatores nucleares por exemplo - este método pode prever os intervalos necessários entre manutenções preventivas. A idéia básica é supor que toda estrutura possui, inevitavelmente, fendas internas que tendem a propagar-se com o uso. Se a lei de propagação das fendas for conhecida, se o método de inspeção usado durante as vistorias periódicas detectar todas as rachas maiores do que um valor mínimo, e se for possível estimar-se o máximo tamanho de fenda capaz de evitar uma fratura súbita (função da velocidade e do tipo de carregamento, tenacidade do material, temperatura, geometria da estrutura, existência de retardadores de fendas, etc...), há possibilidade de se chegar ao esquema de manutenção necessário para não ter-se falhas.

Em projeto de grandes estruturas, onde a probabilidade de existência de fendas é muito grande e onde inspeções periódicas são viáveis,

este método é talvez o mais racional. Mas no projeto de peças pequenas, submetidas a um bom controle de qualidade durante a fabricação e/ou montagem, que trabalhem sob solicitações predominantemente elásticas (fadiga de longa vida), sabe-se que a maior parte da vida da peça é usada na geração de fendas macroscópicas, e não na sua propagação (70-80% é um valor típico [11-12]). Logo, supor a pré-existência de rachaduras internas pode ser desnecessariamente conservativo.

A terceira maneira de ataque parte dos pressupostos que:

- (a) uma descrição "precisa" das tensões e deformações (elásticas e inelásticas, incluindo tensões residuais nos pontos mais solicitados das peças, às raízes dos concentradores de tensões);
  - (b) uma descrição "precisa" do comportamento do material (através das curvas tensão/deformação  $\sigma \cdot \epsilon$ , estática (monótona) e cíclica, e das curvas de vida à fadiga S-N);
  - (c) uma contagem "precisa" dos ciclos de solicitação, e
  - (d) uma teoria de acumulação de dano (em geral a regra de Palmgren-Miner),
- são as quatro ferramentas suficientes para resolver o problema do projeto à fadiga. Ou seja, a idéia é chegar-se a descrição mais real possível do carregamento e do seu efeito sobre a resposta do material, e usar estas informações no projeto. Este é um enfoque macroscópico, onde os mecanismos de geração e propagação de fendas só são levados em consideração de forma indireta, através das curvas S-N do material. Entretanto as dificuldades matemáticas deste método não são intransponíveis, e sua aplicação leva a uma ótima visão geral do problema de projeto. E ele é particularmente útil para engenheiros com formação mecânica, habituados aos métodos usados em mecânica dos sólidos [13]. A seguir alguns detalhes dos passos (a)-(d) são comentados.

#### ANÁLISE DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Uma das razões da discrepância entre o comportamento em serviço e o comportamento previsto de peças sujeitas a fadiga é, sem dúvida,

da, uma análise de tensões e deformações mal feita. As fendas quase sempre iniciam-se em pontos de concentração de tensões, onde a combinação  $\sigma \cdot \epsilon$  pode ser totalmente diferente do estado nominal previsto, mesmo que um fator de concentração de tensões seja usado no projeto, devido a efeitos de escoamento localizado. Tensões residuais causadas por sobre cargas eventuais, diferença entre o comportamento cíclico e monótono dos materiais, relaxamento de tensões, são fenômenos que acontecem em serviço e que devem ser considerados numa previsão mais correta. Na literatura são reportadas melhorias consideráveis em previsões que consideram estes fenômenos em pontos críticos de peças [14-18].

Uma das soluções usadas é aplicar a regra de Neuber [19], que relaciona a deformação e a tensão na raiz de um entalhe com a deformação e a tensão nominal da peça, mesmo que escoamento ocorra:

$$K_t = (K_\sigma K_\epsilon)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

onde  $K_\sigma$  e  $K_\epsilon$  são os fatores reais de concentração de tensões e deformações, respectivamente, e  $K_t$  é o fator teórico (geométrico) de concentração de tensões, válido na fase elástica. Uma justificação intuitiva de que o produto  $K_\sigma K_\epsilon$  possa permanecer constante encontra-se no fato que  $K_\sigma$  diminui enquanto  $K_\epsilon$  aumenta no escoamento. No caso de fadiga onde, devido a diferentes sensibilidades ao entalhe,  $K_t$  deve ser substituído por  $K_f$  (o fator de concentração de tensões à fadiga), a regra de Neuber pode ser escrita como:

$$K_f (\sigma_{nom} \epsilon_{nom} E)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sigma \epsilon} E \quad (2)$$

onde  $\sigma_{nom}$ ,  $\epsilon_{nom}$  são a tensão e a deformação nominais da peça;  $\sigma$ ,  $\epsilon$  a tensão e a deformação na raiz do entalhe;  $E$  o módulo de elasticidade. Se o estado nominal de tensões for elástico, o que é usual em casos práticos, obtemos:

$$K_f \sigma_{nom} = \sqrt{\sigma \epsilon} E \quad (3)$$

que é uma equação conveniente para o uso em projetos. Se a curva  $\sigma \cdot \epsilon$  for conhecida, (3) nos dá a tensão e a deformação real que ocorrem no ponto mais solicitado da seção mais solicitada, e é esta a combinação que dará início a falha por fadiga da peça.  $\sigma_{nom}$  é obtido através de uma análise comum de tensões (por exemplo  $P/A$ , onde  $P$  é força e  $A$  área numa solicitação axial, etc...), e  $K_f$  é função da geometria e do material, e é uma constante da peça.

#### COMPORTAMENTO DO MATERIAL SOB CARREGAMENTO DINÂMICO

Um fator frequentemente não considerado em projetos é a diferença que existe entre o comportamento  $\sigma \cdot \epsilon$  estático e cíclico dos materiais. Por exemplo, na figura 1 as curvas  $\sigma \cdot \epsilon$  cíclica (estabilizada) e monótona de alguns materiais são apresentadas. As tensões e deformações na fase plástica podem ser relacionadas matematicamente, tanto no caso monótono como no cíclico, através de leis exponenciais:

$$\sigma = K \epsilon_p^\alpha \quad \text{ou} \quad \sigma = K' \epsilon_p^{\alpha'} \quad (4)$$

onde  $K$ ,  $K'$  são os coeficientes de resistência estático e cíclico e  $\alpha$ ,  $\alpha'$  os expoentes de en

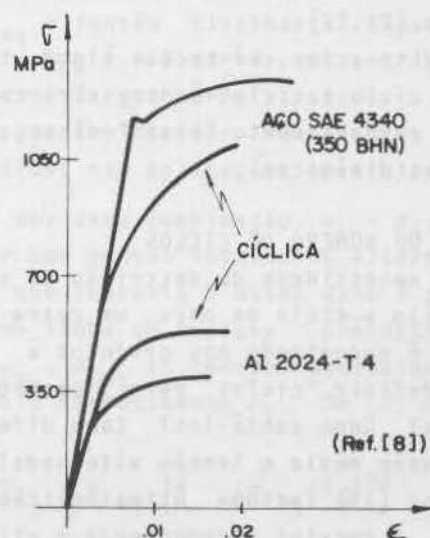


Figura 1

cruamento, estático e cíclico, respectivamente. Valores das constantes  $K$ ,  $K'$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  podem ser obtidos através de testes de tração estáticos e dinâmicos. Landgraf et.al. [20] mostram que para vários materiais  $0.10 < \alpha' < 0.20$ , com  $\alpha' = 0.15$  sendo o valor mais comum. Se  $\alpha < -0.10$  o material tende a "amolecer" sob tensões cíclicas; se  $\alpha > -0.20$  tende a "endurecer" e se  $-0.10 < \alpha < -0.20$  o comportamento cíclico tende a ser aproximadamente estável. Estes números, evidentemente, são devem ser interpretados como orientação, bem como a clássica receita de que metais recozidos tendem a endurecer e metais altamente trabalhados a frio tendem a amolecer, quando solicitados ciclicamente.

Em projetos, a variação do efeito de encruamento sob solicitações cíclicas implica que, durante a aplicação da regra de Neuber, os valores de  $\sigma$  e  $\epsilon$  devem ser considerados função da história do carregamento. Ou, em outras palavras, os materiais tem memória. [21-25]

Um outro efeito importantíssimo do escoamento é a possibilidade da criação de tensões residuais [13,26]. Variações de duas ordens de grandeza entre a vida prevista e a obtida podem ocorrer se este fenômeno for ignorado. Tensões residuais compressivas são benéficas e trativas são prejudiciais à vida da peça. Logo, uma sobre-carga trativa numa peça entalhada pode ser útil, o que não é um fenômeno intuitivo [26,27].

Pelo dito acima, vê-se que algum tipo de "análise ciclo a ciclo" é necessário para descrever o comportamento "exato" da peça sob solicitações dinâmicas.

#### CONTAGEM DO NÚMERO DE CICLOS

Com a necessidade da descrição do comportamento ciclo a ciclo da peça, um outro problema sério é encontrado nos projetos à fadiga:

Como definir "ciclos" para carregamentos complexos? Como contá-los? Como diferenciar entre tensão média e tensão alternada?

Dowling [14] faz uma ótima revisão deste problema, e conclui recomendando a utilização do "chuveiro" (rain-flow) ou do "faixa-par" (range-pair) como os únicos métodos, dos atu-

almente disponíveis, capazes de contar ciclos de carregamento de forma confiável. Programas de computador para executar uma contagem segundo estes métodos são disponíveis na literatura [28,29].

Contar ciclos um a um é, no mínimo, uma tarefa tediosa. Nelson e Fuchs [30,31] propõem um método, chamado "raia" (race-track), para condensar a história de tensões desprezando valores pequenos que não causem dano detectável, o que permite diminuir o tempo necessário para contagem (ou teste).

Mas, lamentavelmente, ainda são pouquíssimas as soluções analíticas disponíveis para evitar este trabalho. Crandall e Mark [32] apresentam um modelo utilizável em peças cujas tensões, causadas por uma solicitação aleatória, sejam estacionárias e de faixa estreita. Muita pesquisa ainda é necessária nesta área, principalmente para relacionar diversos tipos de espectro com a contagem feita pelos métodos "chuveiro" ou "faixa-par".

#### ACUMULAÇÃO DE DANO

Palmgren publicou em 1924 a regra de acumulação linear de dano,  $\sum n_i/N_i = 1$  ( $n_i$  número de ciclos de solicitação na tensão  $\sigma_i$ ,  $N_i$  número de ciclos necessários para falha nesta tensão). Até hoje este ainda é o modelo mais usado em projeto. Muitas das deficiências intrínsecas desta regra, principalmente ser independente da ordem de aplicação do carregamento, são contornáveis calculando-se dano ciclo a ciclo, através dos métodos discutidos nos itens acima.

Grover [33] propõe uma variante da regra de acumulação linear, onde os períodos de início e propagação de fendas são diferenciados. Stallmeyer e Walker [34] discutem várias outras variações. Mas todo modelo macroscópico é, necessariamente, uma racionalização da realidade física, e portanto em nenhum há uma vantagem intrínseca sobre a regra de Palmgren-Miner. Como esta é a mais simples e a mais documentada seu uso é recomendável, principalmente com uma contagem que preserve a ordem de carregamento.

Alguns modelos recentes [35] usam a regra

de Palmgren-Miner para prever início de fenda, e empregam conceitos de Mecânica da Fratura para o estágio de propagação.

#### SIMPLIFICAÇÕES UTILIZÁVEIS EM PROJETOS

Modelos que descrevam "exatamente" o comportamento tensão-deformação-resistência cíclico são necessariamente complexos, e necessitam de um computador para executar os cálculos indispensáveis para as previsões. Além disso, em projetos as dimensões não são conhecidas a priori, o que impede a especificação das tensões de trabalho.

Logo, é justificável e necessário o desenvolvimento de modelos simplificados, que possam ser utilizados de forma direta e explícita em projetos. A idéia é tentar incluir a melhor descrição da realidade física compatível com um mínimo de computação.

Castro [36] descreve um método racional explícito para projeto de componentes mecânicos sujeitos a carregamentos dinâmicos gerais. Aqui retomamos esta linha e desenvolvemos algumas fórmulas utilizáveis diretamente no dimensionamento de várias peças comuns.

As simplificações usadas são:

1- Supor que as resistências  $S$  do material sejam especificadas por:

(a)  $S_u$ ,  $S_y$ ,  $S_e$  e  $S_f$ , respectivamente as resistências à ruptura, ao escoamento, à fadiga para vida infinita e finita.  $S_e$  leva em consideração os efeitos de acabamento superficial, tamanho, etc..., e  $S_f$  é função do número de ciclos.

(b) A Linha de Wöhler (diagrama S·N) dada por uma linha reta em loglog:

$$NS^b = c \quad (5)$$

ou, se o material possuir limite de fadiga em  $B$  ciclos:

$$NS^b = c, \quad N < B; \quad S = S_e, \quad N \geq B \quad (6)$$

(c) Diagrama  $\sigma_a \cdot \sigma_m$  (tensão alternada-tensão média), tipo linha de Goodman, dado por uma linha de ruptura geral de equação:

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_a}\right)^r + \left(\frac{\sigma_m}{S_m}\right)^s = 1 \quad (7)$$

onde  $S_a$ ,  $S_m$  são resistências às solicitações alternadas e médias, respectivamente.

2- Supor que o carregamento  $F$  possa ser de composto em componentes  $F_i$ , que ajam durante  $n_i$  ciclos, contados por algum método especificado.

$F$  é geral e pode provocar momentos fletores ( $M$ ) e torsões ( $T$ ), bem como esforços normais ( $P$ ) e cortantes ( $C$ ). As tensões equivalentes são calculadas segundo uma teoria de falha escolhida pelo projetista. Por exemplo, no caso de um estado bi-dimensional de tensões, usando-se a teoria da máxima energia de distorção, a  $i$ -ésima tensão alternada equivalente,  $\sigma_{Ea_i}$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_{Ea_i} = & \left[ (K_{fP} \sigma_{xPa_i} + K_{fM} \sigma_{xMa_i})^2 - \right. \\ & - (K_{fP} \sigma_{xPa_i} + K_{fM} \sigma_{xMa_i}) \cdot \\ & \cdot (K_{fP} \sigma_{yPa_i} + K_{fM} \sigma_{yMa_i}) + \\ & + (K_{fP} \sigma_{yPa_i} + K_{fM} \sigma_{yMa_i})^2 + \\ & \left. + 3(K_{fT} \tau_{Ta_i} + K_{fC} \tau_{Ca_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8) \end{aligned}$$

onde  $\sigma_{yMa_i}$  é a tensão normal na direção  $y$  causada pela componente alternada do  $i$ -ésimo fletor,  $\tau_{Ta_i}$  a tensão cisalhante causada pelo tissor,  $K_{fP}$  é o fator de concentração de tensões para esforços normais, etc... (Sempre que for possível evitar dúvidas, os índices são omitidos nas aplicações abaixo).

Para uma dada combinação  $\sigma_a \cdot \sigma_m$ , podemos calcular uma tensão totalmente alternada (com  $\sigma_m = 0$ ) que causaria o mesmo dano à peça, segundo uma linha de ruptura pré-determinada. Sejam  $\sigma_{Ea_i}$ ,  $\sigma_{Em_i}$  as tensões equivalentes causadas pelo carregamento  $F_i$ . De (7) temos:

$$S_{f_i} = \sigma_{Ea_i} \left[ 1 - (\sigma_{Em_i}/S_m)^s \right]^{-1/r} \quad (9)$$

De posse deste valor  $S_{f_i}$  e usando a linha de Wöhler do material, calculamos o número de

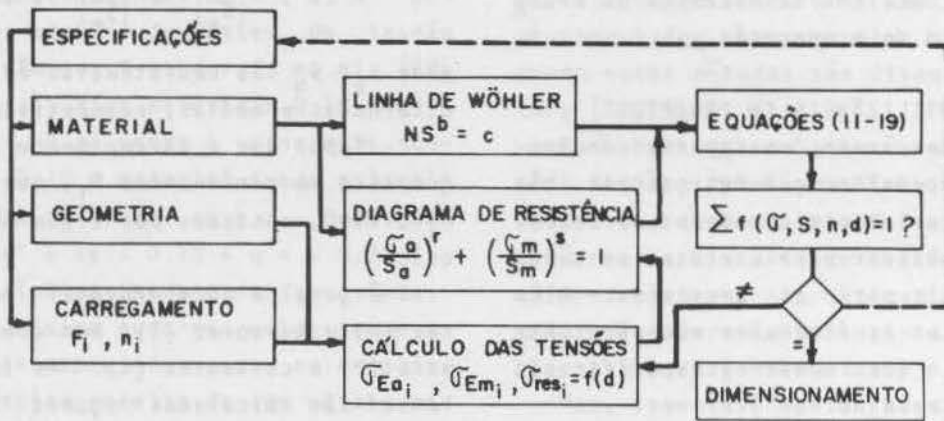


Figura 2

ciclos  $N_i$  que causariam falha por fadiga com esta tensão alternada:

$$N_i = \frac{c}{S_{fi}^b} = \frac{c [1 - (\sigma_{Emi}/S_m)^s]^{b/r}}{\sigma_{Eai}^b} \quad (10)$$

Note-se que o símbolo  $S_{fi}$  é usado porque  $N_i$  é, em geral, finito. Usando-se a regra de Palmgren-Miner, soma-se o dano causado pelas diversas componentes  $F_i$  da sollicitação:

$$\sum \frac{n_i \sigma_{Eai}^b}{c [1 - (\sigma_{Emi}/S_m)^s]^{b/r}} = 1 \quad (11)$$

(11) é uma equação em  $d^{-2}$  e  $d^{-3}$ , onde  $d$  é uma dimensão característica da peça, e é em geral resolvida por métodos iterativos. É importante realçar que esta equação é aplicável de forma direta e explícita em projetos. A figura 2 ilustra a filosofia de aplicação deste método.

Em muitos casos práticos a sollicitação  $F$  causa só momentos ou só esforços, o que torna a equação (11) função só de  $d^{-2}$  ou  $d^{-3}$ , respectivamente. Nestes casos esta equação pode ser trabalhada em formas mais úteis.

Se somente momentos fletores e torsões so licitarem a peça, a teoria da máxima energia de distorção nos dá:

$$\sigma_E = \sqrt{(K_{fM} \frac{M}{q_M d^3})^2 + 3(K_{fT} \frac{T}{q_T d^3})^2} \quad (12)$$

onde  $q_M, q_T$  são constantes, função da geometria da peça. Para seção circular, por exemplo:

$$q_M = \frac{\pi}{32} \quad q_T = \frac{\pi}{16} \quad \sigma_E = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{(K_{fM} M)^2 + \frac{3}{4}(K_{fT} T)^2} \quad (13)$$

Em [37] podem ser encontrados valores de  $q_M$  e  $q_T$  para várias formas de seção. (12) pode ser escrito de forma mais conveniente como:

$$\sigma_E = \frac{1}{d^3} Q, \quad Q = \sqrt{(K_{fM} \frac{M}{q_M})^2 + 3(K_{fT} \frac{T}{q_T})^2} \quad (14)$$

Após um pouco de ginástica algébrica, e usando coerentemente os índices já definidos acima, obtemos uma variação de (11) onde o número de contas necessárias é minimizado (o que facilita o seu uso em calculadoras de bolso programáveis):

$$\frac{S_m^{sb/r} d^{3b(s/r-1)}}{c} \left( \sum \frac{n_i Q_{ai}^b}{[q - q_m^s]^{b/r}} \right) = 1 \quad (15)$$

$$q = (S_m d^3)^s \quad (16)$$

Caso as sollicitações provoquem somente esforços normais e cortantes, uma equação seme-

lhante em  $d^2$  é obtida. Se o projetista preferir o uso da teoria da máxima tensão cisalhante, ou de qualquer outra teoria de falha, o valor de  $Q$  deve ser calculado de acordo.

Um problema um pouco mais complexo ocorre quando há tensões residuais na peça, induzidas por escoamento ou tratamento térmico. Se  $\sigma_{resj}$  a tensão residual superposta ao carregamento  $\sigma_{Ei} \cdot \sigma_{res}$  pode ser constante caso não haja escoamento durante o uso da peça, mas em geral  $\sigma_{resj}$  é função da história do carregamento anterior a  $\sigma_{Ei}$ , isto é,  $\sigma_{resj} = f(\sigma_{Ej})$ ,  $j=0, \dots, i-1$ . Se  $\sigma_{res}$  for de sentido contrário a  $\sigma_E$ , a equação (11) pode ser escrita como:

$$\sum \frac{n_i \sigma_{Ea_i}^b}{c \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{Em_i} - \sigma_{res_j}}{s_m} \right)^s \right]^{b/r}} = 1 \quad (17)$$

Se  $\sigma_{res}$  tiver o mesmo sentido de  $\sigma_E$ , deve-se usar a soma das duas em (17). Um caso particular vale a pena ser explicitado: quando tensões residuais são propositadamente induzidas durante a fabricação e não há escoamento em serviço, carregamentos causados somente por momentos levam a uma equação semelhante a (15):

$$\frac{s_m^{sb/r} d^{3b(s/r-1)}}{c} \left( \sum \frac{n_i Q_{a_i}^b}{[q - (Q_{m_i} - Q_{res})^s]^{b/r}} \right) = 1 \quad (18)$$

onde

$$Q_{res} = d^3 \sigma_{res} \quad (19)$$

As equações (11)-(19) cobrem a maioria dos problemas de dimensionamento que um projetista encontra na prática.

#### APLICAÇÕES

Usaremos o método desenvolvido acima para estimar as dimensões de uma barra de torsão para um automóvel médio, problema onde supor que o carregamento tenha amplitude constante não é razoável. Já que o método intitula-se

"racional", para este exemplo escolhemos dados que se baseiam apenas em bom senso, ou seja: a ausência de dados experimentais e/ou tecnologia acumulada - "know-how" - é contornada por suposições coerentes e por uma análise que considera a realidade física. Na figura 3 é apresentado um esquema do mecanismo proposto.

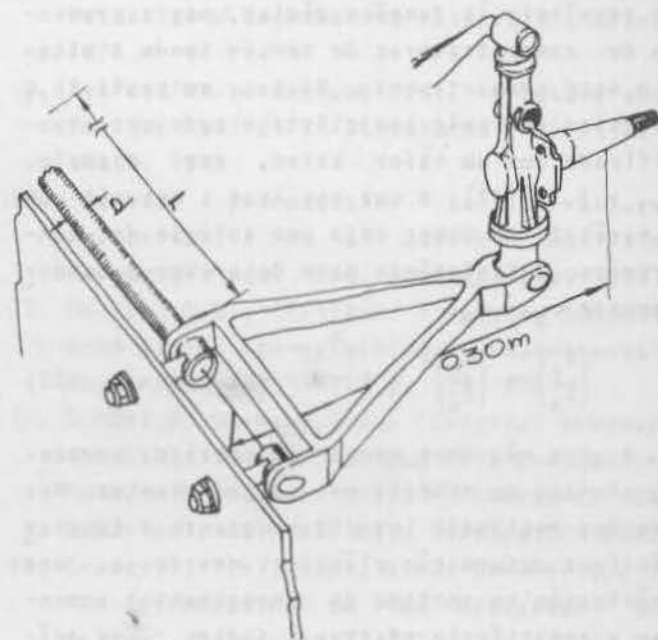


Figura 3

A peça trabalha como mola, logo o material escolhido deve maximizar resiliência e ter  $S_e$  definido, para que um serviço normal não provoque fadiga. Um aço de alta resistência é uma escolha natural, pela disponibilidade no mercado, preço acessível, comportamento conhecido. Boa temperabilidade e tenacidade são requisitos paralelos. O aço SAE 5160, por exemplo, é uma boa escolha. Suas propriedades (monótonas) são [38]:

$$S_u = 1,65 \text{ GPa} \quad S_y = 1,5 \text{ GPa} \quad G = 74,1 \text{ GPa} \quad (20)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade à torsão. A resistência à fadiga é estimada como [26, 39-41]:

$$S_e = 0,3 \text{ GPa} \quad N > 10^6 \text{ ciclos}$$

$$NS^b = c \Rightarrow NS^{4,292} = 5700 \cdot 10^3 < N < 10^6 \text{ (S em GPa)} \quad (21)$$

Como a barra de torsão é fundamental para a segurança do veículo, a confiabilidade do projeto deve ser muito alta e, em primeira aproximação, este requisito reflete-se no valor de  $S_e$ .

Aços solicitados somente à torsão são pouco sensíveis às tensões médias, mas a presença de concentradores de tensão tende a alterar este comportamento. No caso em pauta,  $K_{fT}$  é controlado pelo projetista e pode ser especificado com um valor baixo, por exemplo,  $K_{fT} = 1,15$  [42], o que nos leva a assumir que a parábola de Geber seja uma solução de compromisso satisfatório para descrever o comportamento  $\sigma_a \cdot \sigma_m$ :

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_a}\right) + \left(\frac{\sigma_m}{S_u}\right)^2 = 1 \Rightarrow r = 1, s = 2 \quad (22)$$

A peça não deve escoar em serviço, portanto efeitos de memória não são relevantes. Mas tensões residuais induzidas durante a fabricação (por deformação plásticas devido a uma pré-torsão no sentido do carregamento) aumentam a resistência efetiva à fadiga. Uma análise simplificada, onde um comportamento plástico perfeito é assumido e  $K_{fT}$  é desprezado, mostra que  $\sigma_{res} = S_y/3$  é o valor limite da tensão residual no caso de torsão [13], e este valor será usado no projeto.

Assumindo a deflexão estática da suspensão, devido ao peso próprio do carro, como  $\delta_{est} = 0,10$  m (o que dá uma frequência natural de  $\sim 1,5$  Hz), e uma carga nominal de 3000 N por roda, obtemos a constante de mola de barra de torsão:

$$k = \frac{G\pi d^4}{32 \cdot L} = \frac{T_{est}}{\theta_{est}} = \frac{3000 \times 0,30}{\text{arc sen } 1/3} = 2650 \text{ Nm/rd} \quad (23)$$

O carregamento deve ser "racionalmente estimado". Uma operação normal não deve causar dano à peça, (isto é, todas as tensões advindas de pequenas deflexões da suspensão devem estar abaixo de  $S_e$ ), mas projetá-la para vida

infinita sob solicitações máximas implica numa barra de torsão desnecessariamente superdimensionada. Assumimos que um batente limite o curso da suspensão a  $\delta_{max} = 0,15$  m (além de  $\delta_{est}$ ) e que 300000 Km seja a vida estimada para a peça. Sobre cargas existem em serviço e devem ser consideradas no projeto; e supomos que elas possam ser descritas por:

$$\text{a cada } 1 \text{ Km } \delta_1 = 0,4 \delta_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 = 300000 \text{ ciclos, } T_1 = 1400 \text{ Nm}$$

$$\text{a cada } 3 \text{ Km } \delta_2 = 0,6 \delta_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_2 = 100000 \text{ ciclos, } T_2 = 1700 \text{ Nm}$$

(24)

$$\text{a cada } 10 \text{ Km } \delta_3 = 0,8 \delta_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_3 = 30000 \text{ ciclos, } T_3 = 2000 \text{ Nm}$$

$$\text{a cada } 100 \text{ Km } \delta_4 = 1,0 \delta_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_4 = 3000 \text{ ciclos, } T_4 = 2300 \text{ Nm}$$

O amortecimento usado em automóveis é aproximadamente o crítico, logo  $T_{min} = T_{est}$  ("overshoot" desprezível), mas, por segurança, assumimos  $T_{4min} = 0$  (o carro pode "decolar"). Usando a teoria de von Mises:

$$\sigma_E = \sqrt{3} \left( k_{fT} \frac{16T}{\pi d^3} \right) = \frac{10T}{d^3} \quad (25)$$

Dimensionando o diâmetro da barra de torsão a:

I) Escoamento:

$$\frac{10 T_{max}}{d^3} - \sigma_{res} < S_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{23000}{d^3} < 1,5 + 0,5 \Rightarrow d \geq 22,6 \text{ mm}$$

$$L = \frac{G\pi a^4}{32k} > 0,72 \text{ m}$$

II) A fadiga usando o carregamento especificado em (24):

Neste caso usamos as equações (16), (18) e (19) com:

$$b = 4,292, c = 5700, r = 1, s = 2, S_m = S_u =$$

$$= 1,65, Q_{res} = 0,5 d^3, q = (1,65 d^3)^2, Q_{a1} =$$

$$= 2500, Q_{a2} = 4000, Q_{a3} = 5500, Q_{a4} = 11500,$$

$$Q_{m1} = Q_{m4} = 11500, Q_{m2} = 13000, Q_{m3} = 14500 \rightarrow$$

$$\rightarrow d \geq 23,4 \text{ mm}, L \geq 0,82 \text{ m}.$$

Estes valores foram obtidos numa calculadora de bolso programável. Se projetássemos a barra de torsão para vida infinita sob  $T_{\max}$  obteríamos:

$$\frac{10 T_{a \max}}{d^3} \leq S_e \rightarrow d \geq 33,7 \text{ mm}, L \geq 3,55 \text{ m}$$

O que, indubitavelmente, é um valor excessivo.

### CONCLUSÃO

Problemas do projeto à fadiga sob carregamentos complexos são discutidos neste trabalho. É feita uma revisão crítica de três caminhos diferentes para atacar-se este problema: estatístico, mecânica da fratura e análise de tensões e deformações. Vantagens e defeitos de cada um são analisados, e é dada ênfase à necessidade de se considerar o comportamento dos pontos críticos das peças. Identificação e contagem do número de ciclos, análise elasto-plástica dinâmica, efeitos de tensões residuais, são fenômenos que devem ser considerados em previsões mais confiáveis. É apresentado um método explícito para o uso direto em projeto mecânico, onde a regra de acumulação linear de dano e condições gerais de carregamento e resistência são combinadas em equações que cobrem a maioria dos casos encontrados na prática.

### REFERÊNCIAS

1. Gertsbakh, I.B., Kordonskiy, Kh.B., "Models of Failure", Springer-Verlag, 1969.
2. Weibull, W., "Fatigue Testing and Analysis of Results", Pergamon, 1961.
3. Johnson, L.G., "The Statistical Treatment of Fatigue Experiments", Elsevier, 1964.
4. Bolotin, V.V., "Statistical Methods in Structural Mechanics", Holden-Day, 1969.
5. Kordonskiy, Kh.B., Fridman, Ya.F., "Certain Questions Concerning the Probabilistic Description of Fatigue Longevity (Survey)", Industrial Laboratory, Jan. 77, pp. 1098-1120.
6. Bogdanoff, J.L., "A New Cumulative Damage Model", J. App. Mech., June 78, pp. 246-257.
7. Rice, J.R., "Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture", em "Fracture - Vol. II", Academic Press, 1968.
8. Hertzberg, R.W., "Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials", Wiley 1976.
9. Rolfe, T.R., Barsom, J.M., "Fracture and Fatigue Control in Structures", Prentice-Hall, 1977.
10. "General Introduction to Fracture Mechanics", a J. of Strain Analysis Monograph, Mech. Eng. Publications, 1978.
11. Manson, S.S., "Fatigue: A Complex Subject Some Simple Approximations", Experimental Mechanics, July 1975, pp. 193-226.
12. Schutz, D., Gerharz, J.J., "Critical Remarks on the Validity of Fatigue Life Evaluation Methods Based on Local Stress-Strain Behavior", ASTM STP 637, 1977, pp. 209-223.
13. Crandall, S.H., Dahl, N.C., Lardner, T.J., "An Introduction to the Mechanics of Solids", McGraw-Hill, 1978.
14. Dowling, N.E., "Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories", J. of Materials, March, 1972, pp. 71-87.
15. Topper, T.H., Wetzel, R.M., Morrow, J., "Neuber's Rule Applied to Fatigue of Notched Specimens", J. of Materials, March 1969, pp. 200-209.
16. "Fatigue Under Complex Loading - Analysis and Experiments", Advances in Engineering Vol. 6, SAE, 1977.
17. Topper, T.H., Sandor, B.I., Morrow, J., "Cumulative Fatigue Damage Under Cyclic Strain Control", J. of Materials, March 1969, pp. 189-199.
18. Landgraf, R.W., "Cumulative Fatigue Damage Under Complex Strain Histories", ASTM STP 519, 1973, pp. 213-228.
19. Neuber, H., "Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law", J. of App. Mech., December 1961,



- pp. 544-550.
20. Landgraf, R.W., Morrow, J., Endo, T., "Determination of the Cyclic Stress-Strain Curve", *J. of Materials*, March 1969, pp. 176-188.
  21. Impellizzeri, L.F., "Cumulative Damage Analysis in Structural Fatigue", *ASTM STP 462*, pp. 40-68.
  22. Morrow, J., Wetzel, R.M., Topper, T.H., "Laboratory Simulation of Structural Fatigue Behavior", *ASTM 462*, 1970, pp. 74-91.
  23. Jacoby, G.H., Nowack, H., van Lipzig, H. T.M., "Experimental Results and a Hypothesis for Fatigue Crack Propagation Under Variable Amplitude Loading", *ASTM STP 595*, 1976, pp. 172-183.
  24. Potter, J.M., "The Effect of Load Interaction and Sequence on the Fatigue Behavior of Notched Coupons", *ASTM STP 519*, 1973, pp. 109-132.
  25. Koibuchi, K., Kotani, S., "The Role of Cyclic Stress-Strain Behavior on Fatigue Damage Under Varying Load", *ASTM STP 519*, 1973, pp. 229-245.
  26. Juvinall, R.C., "Stress, Strain and Strength", McGraw-Hill, 1967.
  27. Schijve, J., "Observations on the Prediction of Fatigue Crack Growth Propagation Under Variable Amplitude Loading", *ASTM STP 595*, 1976, pp. 3-23.
  28. Tischler, V.A., "A Computer Program for Counting Load Spectrum Cycles Based on the Range Pair Cycle Counting Method", *AFFDL-TM-FBR-72-4 Air Force Flight Dynamics Laboratory, Ohio*, 1972.
  29. Richards, F.D., La Pointe, N.R., Wetzel, R.M., "A Cycle Counting Algorithm for Fatigue Damage Analysis", *SAE paper 740278*, Feb. 1974.
  30. Nelson, D.V., Fuchs, H.O., "Prediction of Fatigue Crack Growth Under Irregular Loading", *ASTM STP 595*, 1976, pp.267-291.
  31. Nelson, D.V., et.al., pp.145-187, ref. [16].
  32. Crandall, S.H., Mark, W.D., "Random Vibrations in Mechanical Systems", Academic Press, 1963.
  33. Grover, H.J., "An Observation Concerning the Cycle Ratio in Cumulative Damage", *ASTM STP 274*, 1960, pp. 120-124.
  34. Stallmeyer, J.E., Walker, W.H., "Cumulative Damage Theories and Application", *J. of the Structural Division, ASCE*, Dec. 1968, pp. 2739-2750.
  35. Socie, D.F., "Fatigue Life Estimates for Bluntly Notched Members", *J. of Eng. Materials and Technology, ASME*, Jan.1980, pp. 153-158.
  36. Castro, J.T.P., "Um Método Racional Explícito para Projeto de Componentes Mecânicos Sujeitos a Carregamentos Dinâmicos Gerais", *Anais do V COBEM, Vol. C*, pp. 213-222, 1979.
  37. Roark, R.J., Young, W.C., "Formulas for Stress and Strain", McGraw-Hill, 1975.
  38. *SAE Handbook 1977, Vol. 1.*
  39. Shigley, J.E., "Mechanical Engineering Design", McGraw-Hill, 1977.
  40. Duggan, T.V., Byrne, J., "Fatigue as a Design Criterion", McMillan Press, 1977.
  41. Leever, R.C., "A User's View of Fatigue Life Predictions", *SAE Transactions*, 1978, pp. 359-384.
  42. Peterson, R.E., "Stress Concentration Factors", Wiley, 1974.

## QUEDA DE UMA PARTÍCULA NUM FLUIDO EM REGIME TRANSITÓRIO

RUBENS SAMPAIO FILHO

PROFESSOR ASSOCIADO

DEPTO. DE ENG. MEC., PUC/RJ, RIO DE JANEIRO, RJ

### SUMÁRIO

Usando-se Transformada de Laplace e série de potências obtêm-se uma solução da equação íntegro-diferencial que governa o movimento lento de uma esfera rígida num fluido viscoso em regime transiente. Esta solução, representada por uma série de potências, é mais simples que as já existentes na literatura.

### INTRODUÇÃO

Sob certas restrições, a equação íntegro-diferencial que governa o movimento de uma esfera rígida num fluido viscoso, em regime transiente, pode ser encontrada em [1,2]. Em [2], utilizando aproximações sucessivas, uma solução aproximada de tal equação é obtida. Neste trabalho, usando-se transformada de Laplace, cuja inversa é obtida por meio de uma série de Laurent, a solução da equação íntegro-diferencial do problema é representada por uma série de potências.

### ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

Apresentaremos a seguir alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Seja  $C^*$  o conjunto dos números complexos estendidos e  $f : C^* \rightarrow C^*$  definida por

$$f(w) = \frac{1}{\alpha w^2 + \beta w + 1} \quad (1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais positivos satisfazendo  $4\alpha - \beta^2 > 0$ . (2)

A expressão (1) pode ainda ser escrita

$$f(w) = \frac{1}{\alpha(w+w_1)(w+w_2)} = \frac{1}{\alpha(w_1-w_2)} \left( \frac{1}{w+w_2} - \frac{1}{w+w_1} \right) \quad (3)$$

onde  $w_1$  e  $w_2$  são dados por

$$w_1 = \frac{\beta + \sqrt{4\alpha - \beta^2} i}{2\alpha} \quad (4)$$

$$w_2 = \frac{\beta - \sqrt{4\alpha - \beta^2} i}{2\alpha}$$

Vê-se logo que

$$|w_1| = |w_2| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (5)$$

logo

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{i\theta}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-i\theta} \quad (6)$$

onde  $\theta$  satisfaz

$$\text{Sen } \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\alpha - \beta^2}{\alpha}}, \quad \text{Cos } \theta = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \quad (7)$$

Observe que como  $\alpha$  e  $\beta$  são números positivos segue de (2) e (7) que  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Representaremos agora a função  $f$  como uma série de Taylor em torno do ponto  $w=0$ . Para isto, basta lembrar que se  $X$  é uma variável

complexa, segue da série geométrica que

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n, \quad |X| < 1 \quad (8)$$

Desse modo, usando (8) em (3) para  $X = \frac{w}{w_1}$  e  $X = \frac{w}{w_2}$  podemos escrever

$$f(w) = \frac{1}{\alpha(w_1 - w_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{w_2^{n+1}} - \frac{1}{w_1^{n+1}} \right] (-1)^n w^n, \quad |w| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (9)$$

onde (5) foi levada em consideração.

Substituindo agora (4) e (6) em (9) obtemos

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\sqrt{\alpha})^n w^n, \quad |w| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (10)$$

onde

$$b_n = \frac{4\alpha}{4\alpha - \beta^2} (-1)^n \text{Sen}(n+1) \theta$$

É fácil ver que  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$  e  $b_n = -(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} b_{n-1} + b_{n-2})$  se  $n \geq 2$ .

Outro resultado que usaremos é relacionado com a função gama:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \infty, \quad \forall y > 0 \quad (11)$$

#### MOVIMENTO DE UMA ESFERA NUM FLUIDO VISCOZO

Consideremos uma esfera rígida de raio  $a$  imersa num fluido viscoso que ocupa todo espaço exterior à esfera e suponha que a única força de ação à distância que atua na esfera é a gravidade.

Se  $v(t)$  é o valor da velocidade da esfera no instante  $t$  a equação do movimento é

$$m \frac{dv(t)}{dt} = (P-E) - R(t) \quad (12)$$

onde  $m$  é a massa da esfera,  $P$  o seu peso,  $E$  empuxo e  $R$  a resistência dinâmica oferecida pelo fluido ao movimento da esfera. Se  $\rho_s$  e  $\rho$  denotam as massas específicas da esfera e do fluido, respectivamente, e  $g$  a aceleração da gravidade, temos

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_s$$

$$P-E = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_s - \rho) g$$

$R(t)$  pode ser calculado a partir do movimento do fluido. Considerando que o fluido é incompressível, newtoniano, a temperatura constante, desprezando os termos não-lineares da equação do movimento do fluido e considerando que a esfera parte do repouso, [1,2] fornece-nos uma expressão para  $R(t)$ :

$$R(t) = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho V'(t) + 6 \pi \mu a V(t) + 6 a^2 \sqrt{\pi} \mu \rho \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

onde  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Podemos agora reescrever (12), a equação que governa o movimento da esfera rígida.

$$V'(t) + A V(t) + B \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = C \quad (13)$$

onde

$$A = \frac{9 \mu}{a^2 (2 \rho_s + \rho)}$$

$$B = \frac{9 \sqrt{\mu \rho}}{a \sqrt{\pi} (2 \rho_s + \rho)}$$

$$C = \frac{2 (\rho_s - \rho) g}{2 \rho_s + \rho}$$

Seja  $t = t_e$  o instante onde  $V'(t) = 0$  para  $t > t_e$ , i.e., quando é alcançado regime permanente, então

$$V(t) = \frac{C}{A} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho_s - \rho}{\mu} g, \quad t > t_e$$

(Caso  $t_e$  não exista tome  $t \rightarrow \infty$ ).

Assim,  $V(t)$  é de ordem exponencial e podemos resolver (13) empregando Transformada de Laplace.

$$s L[V(t)] = \frac{C}{(s + B\sqrt{\pi} \sqrt{s} + A)} \quad s > 0 \quad (14)$$

Agora é necessário inverter (14). Fazendo  $\alpha=A$ ,  $\beta=B\sqrt{\pi}$  encontramos

$$4\alpha - \beta^2 = \frac{9\mu(8\rho_s - 5\rho)}{a^2 (2\rho_s + \rho)^2}$$

Como  $\rho_s > \rho$ , a condição (2) é satisfeita e podemos fazer  $w = \frac{1}{\sqrt{s}}$  e (9) nos fornece:

$$s L[V(t)] = C \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{A})^n \frac{b_n}{(\sqrt{s})^{n+2}} \quad s > A$$

invertendo,

$$V(t) = \frac{C}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)} (\sqrt{At})^{n+2} \quad (15)$$

A convergência dessa série é consequência imediata de (11) e seu raio de convergência é infinito, logo (15) representa a solução de (13). Convém frisar que

$$|b_n| < \frac{4\alpha}{4\alpha - \beta^2}$$

logo, a série converge exponencialmente e presta-se bem para a análise numérica do problema, uns poucos termos já nos fornecem uma aproximação satisfatória.

#### REFERÊNCIAS

1. Berker, R., "Intégration des Équations du Mouvement d'un Fluide Visqueux Incompressible", Handbuck der Physik, VIII/2.
2. Basset, A.B., "A Treatise on Hydrodynamics", Dover.

## FÓRMULA DE GREEN DE FRONTEIRA MODIFICADA PARA A SOLUÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA DE NEUMANN E APLICAÇÕES À ENGENHARIA

SERGIO COLLE

PROFESSOR TITULAR

DEPTO. ENG. MEC., UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC

### SUMÁRIO

*Este artigo apresenta um esquema numérico alternativo de equações integrais para determinar a solução aproximada de problemas lineares de engenharia, traduzidos por operadores de Laplace e bi-harmônicos com condições de contorno arbitrarias. Esses tipos de problemas são muito frequentes em vários ramos da Engenharia Mecânica básica. O método é especialmente adaptado para o problema da torção de barras prismáticas. Resultados numéricos foram comparados com dados de soluções analíticas e integrais existentes.*

### INTRODUÇÃO

Existe uma quantidade razoável de métodos de solução de problemas a valores de contorno na engenharia, para o operador de Laplace e bi-harmônico. Dentre esses métodos, podemos citar os mais conhecidos que são: o método das diferenças finitas, os métodos variacionais em geral, os métodos analíticos, para geometrias particulares. Esses métodos podem ser utilizados com sucesso em problemas a valores de contorno compostos, isto é, problemas a valores de contorno em regiões compostas, sendo que em cada região simples, o operador é especificado. A técnica de equações integrais na engenharia tem sido pouco utilizada, principalmente nas áreas de engenharia mecânica, em especial, na transferência de calor e mecânica dos fluidos. A causa dessa pouca utilização, parece estar relacionada com a grande ênfase dada à teoria dos elementos finitos nos últimos anos e também com a pouca relevância dada à teoria de distribuições e das funções de Green nos cursos regulares de equações diferenciais parciais em engenharia avançada.

Na área de transferência de calor, as primeiras aplicações do método de equações integrais foram feitas por Sparrow et al. [4], Chang et al. [5], Crosbie & Viskanta [9], Shaw [10] e Tolubinskiy [13].

Dentre os vários problemas a valores de contorno relacionados à equação de Laplace, o problema de Neumann ocupa posição especial na transferência de calor, na mecânica de fluidos e na elastostática. Na transferência de calor o problema aparece, quando a derivada normal da temperatura (fluxo térmico) é especificada no contorno da região. Na elastostática, o problema da torção infinitesimal de uma barra prismática é traduzido por um problema de Neumann.

Para o caso da torção, especificamente, existem três técnicas integrais conhecidas que são, o método do potencial de simples ou dupla camada [1], o método da equação funcional de Kupradze [11] e o método da fórmula de Green de fronteira [3]. Contudo, a última técnica citada apresenta algumas dificuldades de uso quando o contorno da região coincidir com um  $\Lambda$ -contorno, isto é, um contorno para o qual

a equação integral não tem solução. Neste caso existe um procedimento que permite determinar a solução [1]. Outro inconveniente, é que a equação integral obtida através da solução fundamental do operador de Laplace, não tem solução única para o caso do problema de Neumann. No caso do problema de Neumann, existe uma solução fundamental mais apropriada para a construção da equação integral, e a equação integral resultante dessa solução fundamental deixa de apresentar os inconvenientes acima.

É propósito desse trabalho, apresentar uma fórmula de fronteira para o problema de Neumann, que como equação integral tem solução para todo contorno de regiões de Lyapunov ou mesmo de regiões regulares.

FÓRMULA DE GREEN DE FRONTEIRA

Seja D uma região bi-dimensional de Lyapunov, isto é, uma região do plano cujo contorno  $\partial D$ , possui vetor normal em cada ponto, mas não tem curvatura necessariamente em todos os pontos [1]. Dois tipos de problemas ocorrem frequentemente na engenharia;

$$(i) \quad -\nabla^2 u = f(z); \quad z \in D; \quad z = (x,y) \quad (1)$$

$$u|_{\partial D} = u_s(z); \quad z \in \partial D \quad (2)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador de Laplace; f é função seccionalmente contínua em D;  $u_s$  é função prescrita sobre  $\partial D$  que pode ser seccionalmente contínua. É sabido que a solução de (1) - (2) existe, é única e é contínua relativamente aos dados.

$$(ii) \quad -\nabla^2 u = f(z); \quad z \in D \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = u_n(z); \quad z \in \partial D \quad (4)$$

onde  $\partial/\partial n$  é a derivada normal e n é o vetor normal exterior a D e  $u_n$  é seccionalmente contínua sobre  $\partial D$ .

É também sabido que este problema tem solução única, exceto por uma constante real arbitrária.

Admite-se que  $\partial D$  possa ser parametrizada por partes no intervalo [a,b] por equações do

tipo  $x = x(\tau), y = y(\tau), \tau \in [a,b]$  tal que  $x(a) = x(b)$  e  $y(a) = y(b)$ .

Segue-se da definição de D que a função "velocidade" satisfaz

$$\dot{s}(\tau) = \frac{ds}{d\tau} = (\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2)^{1/2} > 0$$

em cada ponto de  $\partial D$ .

A solução fundamental<sup>1</sup> do operador de Laplace, indispensável na construção da fórmula de Green de fronteira é a seguinte:

$$g(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \log |z - z'|, \quad (5)$$

onde  $z' = (x', y')$

$$\text{e } |z - z'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2)^{1/2}$$

Seja B(z,r) um disco de raio r centrado no ponto  $z \in R^2$  com normal exterior. É sabido que a solução fundamental (5) satisfaz a equação:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\partial B(z,r)} \frac{\partial g}{\partial n'}(z, z') ds(z') = -1 \quad (6)$$

Se  $\partial B^+(z,r)$  for um semi-círculo de raio r, a seguinte equação é facilmente obtida [1]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\partial B^+(z,r)} \frac{\partial g}{\partial n'}(z, z') ds(z') = -1/2 \quad (7)$$

É conhecido da teoria do potencial [2], que para um ponto z interior a D, a solução do problema a valores de contorno (1)-(2) tem a seguinte fórmula explícita:

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \log |z-z'| f(z') dA(z') + \\ -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} [\log |z-z'| (\frac{\partial u}{\partial n})(z') + \\ - \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} u_s(z')] ds(z') \quad (8)$$

onde o ponto denota o produto interno canônico

(1) A teoria distribucional dessa solução é apresentada em [2].

co do  $R^2$ . De fato, esta equação é facilmente obtida da segunda fórmula de Green fazendo uso das equações (1)-(2) e da propriedade (6).

Solução idêntica é obtida para o problema (3)-(4), com a diferença de que a derivada  $\partial u / \partial n$  é especificada e de que a equação fica adicionada de uma constante real arbitrária.

Neste caso, a especificação de  $\partial u / \partial n$  não é arbitrária, uma vez que a condição de Neumann

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_D f(z) dA(z) \quad (9)$$

deve ser satisfeita.

Para um ponto  $z$  sobre o contorno  $\partial D$ , aplicando a segunda identidade de Green na região  $D - B^-(z, r)$  onde  $B^-(z, r)$  é um semi-círculo com normal interior  $n$  (vide figura 1), e utilizando o mesmo procedimento que conduziu à solução (8) resulta,

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} u_s(z') ds' - \pi u_s(z) + \\ & - \oint_{\partial D} \log |z-z'| \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds' + \\ & - \int_D \log |z-z'| f(z') dA(z') = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

com  $z$  e  $z'$  sobre  $\partial D$ .

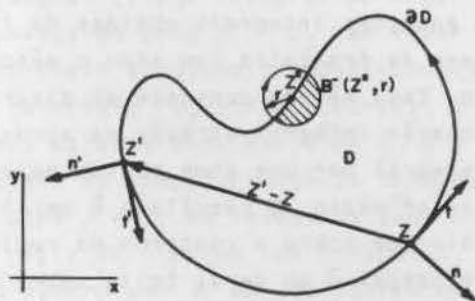


Figura 1

Esta equação é denominada de fórmula de Green de fronteira [1]. Especificando a função  $u_s$  (problema (1)-(2)), esta equação é uma equação integral de Fredholm não-homogênea de primeira espécie em  $\partial u / \partial n$ . Especificando a função  $\partial u / \partial n$  (problema (3)-(4)) a equação se caracteriza como uma equação integral de Fredholm não-homogênea de segunda espécie em  $u_s$ . As equações (8), (9) e (10) são suficientes para determinar a solução dos problemas a valores de contorno (1)-(2) e (3)-(4) para toda a região  $D$  para a qual a equação integral (10) tenha solução. Existem curvas  $\partial D$  porém, para as quais a equação integral não tem solução; esses contornos são denominados na literatura de  $\Lambda$ -contornos [1].

#### FÓRMULA DE GREEN MODIFICADA

A modificação da equação (10) é conseguida pela utilização da solução fundamental do seguinte problema:

$$-\nabla^2 \bar{g}(z, z') = \delta(z, z') - \frac{1}{A(D)} \quad (11)$$

onde  $\delta(z, z')$  é a distribuição singular de Dirac<sup>2</sup> do  $R^2$  e

$$A(D) = \int_D dA = \text{área da região } D.$$

É fácil de ver que a solução de (11) é a seguinte:

$$\bar{g}(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \log |z-z'| + \frac{1}{4A(D)} |z-z'|^2 \quad \dots (12)$$

Esta solução fundamental tem as seguintes propriedades:

$$(i) \oint_{\partial D} \frac{\partial \bar{g}}{\partial n'}(z, z') ds' = 0, \text{ para todo } z \in D; \quad \dots (13)$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\partial B^+(z, r)} \frac{\partial \bar{g}}{\partial n'}(z, z') ds' = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

Podemos denominar  $\bar{g}(z, z')$  de solução fundamental modificada para o problema de Neumann,

(z) Vide [2].

a exemplo da teoria de funções de Green [2].

Aplicando a segunda fórmula de Green à região  $D - B^-(z,r)$ , (vide figura 1), para as funções  $\bar{g}(z,z')$  e  $u$ , considerando as equações (1) ou (3) e a equação (11) e tomando o limite quando  $r$  tende a zero, resulta a seguinte equação integral:

$$\oint_{\partial D} \left( \frac{1}{|z-z'|^2} - \frac{\pi}{A(D)} \right) (z'-z) \cdot n' u_s(z') ds' +$$

$$- \pi u_s(z) - \oint_{\partial D} (\log |z-z'| +$$

$$- \frac{\pi}{2A(D)} |z-z'|^2) \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds' - \int_D (\log |z-z'| +$$

$$- \frac{\pi}{2A(D)} |z-z'|^2) f(z') dA(z') + 2\pi u_m(D) = 0$$

... (15)

onde

$$u_m(D) = \frac{1}{A(D)} \int_D u(z) dA(z) \quad (16)$$

Essa equação, a exemplo da equação (10) será denominada de fórmula de Green de fronteira modificada para o problema de Neumann.

É fácil de ver que essa equação tem solução única uma vez especificada  $\partial u / \partial n$  sobre  $\partial D$  e o valor da média  $u_m(D)$ .

Com efeito, sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções do problema (3)-(4). É sabido que  $u_1 - u_2 = C =$  constante.

Desta forma,

$$u_{s1} - u_{s2} = (u_1 - u_2)|_{\partial D} = C$$

onde  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$  satisfazem a equação integral (15). Substituindo as soluções  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$  em (15) e subtraindo os resultados, tem-se:

$$\oint_{\partial D} \left( \frac{1}{|z-z'|^2} - \frac{\pi}{A(D)} \right) (z'-z) \cdot n' C ds' - \pi C = 0$$

... (17)

Considerando que

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (z'-z) \cdot n' ds'$$

para todo  $z \in R^2$ , e que

$$\oint_{\partial D} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} ds' = \pi$$

para todo  $z \in \partial D$  onde a normal existir, segue-se que  $C = 0$ . Por conseguinte, uma vez especificado o valor da média da solução  $u_m(D)$ , a equação integral (15) terá solução única para todo contorno  $\partial D$  de regiões de Lyapunov inclusive para os  $\Lambda$ -contornos aludidos anteriormente.

Fórmula modificada com semelhante propriedade pode ser obtida, para contornar singularidades associadas ao problema (1)-(2). Para este caso, a seguinte equação integral é proposta:

$$\oint_{\partial D} \left( \frac{1}{2} + \log |z-z'| \right) \frac{\partial u}{\partial n}(z') ds' +$$

$$- \oint_{\partial D} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} u_s(z') - \pi u_s(z) +$$

$$+ \int_D \left( \frac{1}{2} + \log |z-z'| \right) f(z') dA(z') = 0 \quad (18)$$

Esta equação foi aplicada para resolver o problema da perda de carga para o escoamento em regime laminar em dutos de seção transversal de geometria arbitrária simples ou multiplemente conexa. Alguns resultados podem ser vistos em [6].

MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico mais popular e que tem dado bons resultados para a aproximação da solução de equações integrais obtidas da fórmula de Green de fronteira tem sido o método da colocação. Esse método consiste da discretização da equação integral através da aproximação da integral por uma soma obtida pelo teorema do valor médio. O resultado é um sistema linear colocado sobre o contorno da região. Essa discretização é em geral feita sobre o arco do contorno. Esse procedimento porém, além da dificuldade de discretização em intervalos iguais apresenta problemas de precisão em casos em que a curva tem velocidade variável. Para contornar esse problema, o seguinte pro-



cedimento  $\bar{e}$  adotado [6]:

Seja  $N$  o número de divisões do intervalo  $[a,b]$  (vide fig. 2) e seja  $\Delta\tau = (b-a)/N$  a amplitude dos subintervalos resultantes da divisão. Colocando cada ponto nodal no centro de cada subintervalo, aplicando o teorema do valor médio às integrais de contorno da eq. (15) e impondo a igualdade sobre cada ponto  $z_i$ ,  $i = 1,2,\dots,N$ , resulta o que segue:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_{sj} - \sum_{j=1}^N B_{ij} u_{nj} - H_i = 0, \quad (19)$$

$$i = 1,2,\dots,N$$

onde

$$A_{ij} = \int_{\tau_j - \Delta\tau/2}^{\tau_j + \Delta\tau/2} \left( \frac{1}{|z_i - z'|^2} - \frac{\pi}{A(D)} \right) (z' - z_i) \cdot N' d\tau' + \pi \delta_{ij}; \quad \delta_{ij} = \text{delta de Kronecker}; \quad (20)$$

$$B_{ij} = \int_{\tau_j - \Delta\tau/2}^{\tau_j + \Delta\tau/2} \left( \log |z' - z_i| - \frac{\pi}{2A(D)} |z' - z_i|^2 \right) d\tau' \quad \dots(21)$$

$$e \quad H_i = \int_D \left( \log |z_i - z'| - \frac{\pi}{2A(D)} |z_i - z'|^2 \right) f(z') dA(z') \quad (22)$$

onde  $z_i = z(\tau_i)$ ;  $z' = z(\tau')$ ;  $u_{sj} = u_s(\tau_j)$  e  $u_{nj} = \dot{s}(\tau_j) \partial u / \partial n(\tau_j)$ ;  $N(\tau) = n(\tau) \dot{s}(\tau)$ . Os integrandos de (20) e (21) apresentam singularidades para  $i = j$ . No caso da integral (20), o limite do integrando quando  $z'$  tende a  $z_i$  é proporcional à curvatura, enquanto que na integral (21), a integral do logaritmo na vizinhança do polo  $z' = z_i$  tem valor exato, em subintervalo adequado da subdiscretização de cada intervalo  $(\tau_j - \Delta\tau/2, \tau_j + \Delta\tau/2)$ ,  $j = 1,2,\dots,N$ . Para maiores detalhes vide [7] e [8].

Exceto na singularidade da integral de (21) para  $j = i$ , as integrais são calculadas pela regra de Simpson com parábolas, utilizando um número par  $M$  de subintervalos.

Esse método foi utilizado com sucesso, no cálculo da perda de carga e da transferência de calor em escoamento laminar, em dutos de seção arbitrária com condições de contorno arbitrárias. Os resultados aparecerão breve-

mente num relatório final [7].

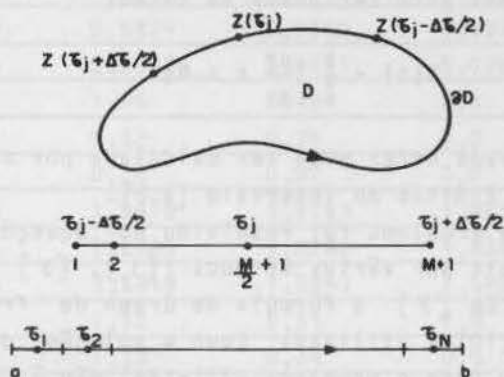


Figura 2

### APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA TORÇÃO INFINITESIMAL DE BARRAS PRISMÁTICAS

É conhecido que o problema da torção linear de barras prismáticas é posto em termos da função torção (warping function)  $\Psi(x,y)$  segundo o problema de Neumann abaixo [14],

$$\nabla^2 \Psi(z) = 0; \quad z \in D \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = z \cdot t; \quad z \in \partial D \quad (24)$$

onde  $t = (\dot{x}(\tau), \dot{y}(\tau)) / \dot{s}(\tau)$  é o vetor unitário tangente a  $\partial D$  e  $D =$  seção transversal da barra.

O conhecimento de  $\Psi_s = \Psi|_{\partial D}$  nos permite calcular a rigidez torcional  $G$  pela equação abaixo:

$$G(D) = \int_D |z|^2 dA - \oint_{\partial D} \Psi_s \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds \quad (25)$$

Esta equação pode ser facilmente reduzida à equação que segue [11]:

$$G(D) = \oint_{\partial D} \left( \frac{1}{4} |z|^2 z \cdot N - \Psi_s z \cdot T \right) d\tau \quad (26)$$

onde  $T = \dot{s} \cdot t$ .

A tensão cisalhante local sobre  $\partial D$  é calculada pela equação seguinte:

$$S(\tau) = \left| \left( \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) + z \cdot n \right| \quad (27)$$

que ainda pode ser posta na forma,

$$S(\tau) = \frac{1}{s} \left| \frac{d\Psi}{d\tau} + z \cdot N \right|$$

A derivada  $d\Psi/d\tau$  pode ser calculada por diferenças finitas no intervalo  $[a, b]$ .

Esse problema foi resolvido por equações integrais por vários métodos ([1], [3] e [11]). Em [3] a fórmula de Green de fronteira (10) é utilizada. Como a solução dessa equação para o problema (23)-(24) não é única, a solução é obtida fixando-se um valor arbitrário para  $\Psi$  em algum ponto de  $\partial D$ . Utilizando a fórmula de Green modificada para o problema de Neumann (15) para esse caso resulta o que segue:

$$\oint_{\partial D} \left( \frac{1}{|z-z'|} - \frac{\pi}{A(D)} \right) (z'-z) \cdot N' \Psi_S(\tau') d\tau' +$$

$$- \pi \Psi_S(\tau) - \oint_{\partial D} (\log |z-z'| +$$

$$- \frac{\pi}{2A(D)} |z-z'|^2) z' \cdot T' d\tau' + 2\pi \Psi_m(D) = 0 \quad (28)$$

onde

$$\Psi_m(D) = \frac{1}{A(D)} \int_D \Psi(z) dA(z) \quad (29)$$

Pondo  $\Psi_m(D) = 0$ , resulta que  $\Psi(x, y)$  será a deformação axial da secção transversal da barra prismática, relativamente à superfície não deformada que corresponde ao plano segundo o qual  $\Psi_m(D)$  se anula. Para todo contorno  $\partial D$ , a equação integral de Fredholm não-homogênea de segunda espécie (28) tem solução única, como foi visto anteriormente.

**EXEMPLOS NUMÉRICOS**

Para ilustrar a utilização da equação integral (28) foram analisados os problemas da torção de barras de secção transversal elíptica e retangular. No caso da secção elíptica foram testadas relações de eixos  $b/a = 0,2, 0,3$  e  $0,5$  enquanto que somente uma secção re-

tangular foi testada, que corresponde à relação de aspecto  $b/a = 0,5$ . No caso da secção retangular que não é região de Lyapunov, tomou-se o cuidado de não escolher pontos nodais coincidentes com os cantos do retângulo, de sorte que a solução foi estendida para regiões cujo contorno é "seccionalmente Lyapunov". Tal região pode ser classificada como uma região regular [1].

As simetrias de quadrante dessas regiões não foram exploradas, para não diminuir a generalidade do programa de computação para analisar tais problemas de torção.

Os resultados do presente trabalho foram comparados com soluções analíticas disponíveis ([14], [15]). Os dados calculados correspondentes aos casos analisados ilustram a comparação.

**Caso I - Secção elíptica** - No caso da secção elíptica considerou-se a seguinte parametrização:  $x(\tau) = a \cos \tau, y(\tau) = b \sin \tau; \tau \in [0, 2\pi]$ . Todos os casos foram computados com o número de subintervalos da subdiscretização  $M$  igual a 18. A tabela I apresenta os dados correspondentes a este caso.

**Caso II - Secção retangular** - No caso da secção retangular escolheu-se particularmente o caso de  $b/a = 0,5, N_1 = 5$  e  $N_2 = 20$  e  $M = 18$ , conforme a figura 3.

Neste caso  $N = 4 N_1 + 2 N_2$ , onde  $N_1$  é o número de subintervalos do intervalo  $[0, b/2]$  e

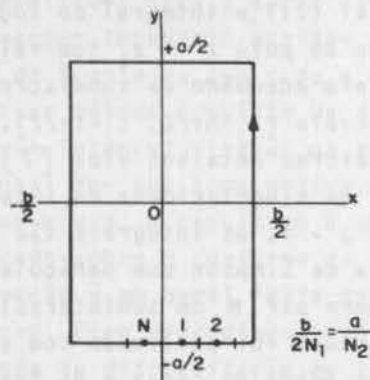


Figura 3

	b/a	N = 8	16	32	64	Valores exatos [15]
$G/b^4$ (valor calculado)	0,2	14,5647	15,5392	15,3401	15,1767	15,1038
	0,3	9,6842	9,8198	9,6874	9,6300	9,6073
	0,5	5,0959	5,0684	5,0398	5,0301	5,0265
Erro de $G/b^4$ (%)	0,2	3,57	2,88	1,56	0,48	0,0
	0,3	0,8	2,21	0,83	0,24	0,0
	0,5	1,38	0,83	0,26	0,07	0,0
$S_{m\bar{a}x}/b$ (valor calculado)	0,2	1,5497	1,8255	1,8970	1,9163	1,9231
	0,3	1,4955	1,7431	1,8105	1,8286	1,8349
	0,5	1,3530	1,5309	1,5819	1,5953	1,5999
Erro de $S_{m\bar{a}x}/b$ (%)	0,2	19,41	5,07	1,35	0,35	0,0
	0,3	18,50	5,00	1,33	0,34	0,0
	0,5	15,43	4,31	1,13	0,29	0,0
Erro máximo de $\Psi_s(\tau)$ (%)	0,2	-0,62	-0,51	-0,29	-0,18	0,0
	0,3	-0,35	-0,97	-0,38	-0,15	0,0
	0,5	-0,25	-1,49	-0,48	-0,15	0,0

Tabela I

$N_2$  é o número de subintervalos no intervalo  $[-a/2, a/2]$ .

Os resultados são os seguintes:

$G/b^4$ (Aproximado)	= 0,4573515
$G/b^4$ (Exato)	= 0,4573646
Erro de $G/b^4$ (%)	= 0,00286
$S_{m\bar{a}x}/b$ (Aproximado)	= 0,9288
$S_{m\bar{a}x}/b$ (Exato)	= 0,9300
Erro de $S_{m\bar{a}x}/b$ (%)	= 0,13
Erro máximo de $\Psi_s$ (%)	= 1,82*

#### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os dois casos aqui analisados diferem basicamente pela natureza das regiões em consideração. A secção elíptica é mais forte do que uma região de Lyapunov, pois tem curvatura de finida e contínua em cada ponto do contorno. A aproximação de soluções à solução exata neste caso, se faz uniformemente apesar da velocidade  $\dot{s}$  ser variável com o parâmetro. A secção retangular por sua vez, é uma região regular, mais fraca portanto, que uma região de Lyapunov, pelo fato de não ser diferenciável em todos os pontos do contorno. Por outro lado, a velocidade  $\dot{s}$  é constante e igual à unidade, em cada segmento diferenciável.

O erro da rigidez torcional  $G/b^4$  para  $N=60$  é contudo, extremamente pequeno. Os problemas

de convergência se localizam exatamente nos cantos da região, onde não existe o vetor tangente. O erro na vizinhança destes cantos como vemos, não ultrapassa a 1,82%. Os dados do presente trabalho concordam muito bem com os dados obtidos por Jaswon & Pointer [3], que fizeram uso da equação (10). Essa concordância é esperada, uma vez que as equações integrais (10) e (15) diferem por termos correspondentes à solução  $|z - z'|^2$  que tem comportamento bastante contínuo.

As discrepâncias observadas nas colunas correspondentes a  $N = 8$  e 16 da tabela I no que tange à tensão máxima, são decorrentes do fato de a derivada tangencial da função torção ter sido calculada por diferenças finitas. Para  $N = 32$  e 64, em consequência do refinamento da discretização, a precisão do cálculo da tensão tangencial aumenta, conforme é visto na tabela I.

#### CONCLUSÃO

Os exemplos aqui apresentados não são os mais adequados para ilustrar a aplicação da equação (15) em virtude do fato de existirem vários métodos integrais, alguns mais poderosos que o atual para resolver o problema da torção ([11], [12]). Além disso, como foi observado, a fórmula (10) já foi aplicada para

resolver esse tipo de problema. Os campos de maior aplicação da equação modificada (15) são, a mecânica dos fluidos e a transferência de calor em sólidos com radiação e condução combinadas e também com convecção laminar e condução combinadas. Tais aplicações foram recentemente feitas com sucesso fazendo uso da equação (10) e (18) em [7] e [8]. Uma vantagem notável do método integral é a redução do problema ao cálculo de funções desconhecidas sobre o contorno. As informações interiores a  $D$ , necessárias no cálculo dessas funções podem ser computadas por regras de integração numérica comuns. A segunda vantagem é relacionada à generalidade da região  $D$ . No método integral não existem diferenças notáveis entre uma região simplesmente conexa e multiplamente conexa.

No caso de regiões multiplamente conexas a equação integral se desdobra num sistema de equações integrais de tantas equações, quantos forem os contornos disjuntos.

No caso de transferência de calor, essa propriedade é muito importante na análise do desempenho de trocadores de calor multi-tubos. No caso da elastostática, o método se torna então adequado ao estudo da rigidez de estruturas multiplamente conexas de máquinas operatrizes. A terceira vantagem adicional do método, para o caso especial do operador de Laplace, é a necessidade de pouco conhecimento da teoria de equações diferenciais e da análise para o desenvolvimento do método. Basta o conhecimento da solução fundamental do operador, de suas propriedades e da identidade de Green para que todo o procedimento seja conhecido. Como outros métodos numéricos, a técnica de equações integrais permite a generalização para operadores bi-harmônicos e  $n$ -harmônicos desde que a solução seja conhecida e de que se disponha de uma identidade de Green generalizada. A extensão dessa técnica para o caso bi-harmônico é apresentada em [7] e [8], onde se fez uso da identidade de Rayleigh-Green para a obtenção da fórmula de fronteira. Em [7] é também apresentada a fórmula de Green de fronteira modificada para o caso bi-harmônico em que a derivada da solução é prescrita no contorno da região.

## BIBLIOGRAFIA

1. Jaswon, M.A. e Symm, G.T., Integral equation methods in potential theory and elastostatics, Academic Press, London, 1977.
2. Stakgold, I., Boundary value problems of mathematical physics, Macmillan, 1972.
3. Jaswon, M.A. e Pointer, A.R.S., An integral equation solution of the torsion problem, Proc. Roy. Soc. (A), 273: 237-246, 1963.
4. Sparrow, E.M.; Haji-Sheikh, A. e Lundgreen T.S., The inverse problem in transient heat conduction, J. Appl. Mechanics, 31: 369-75, 1964.
5. Chang, Y.P.; Kang, C.S. e Chen, D.J., The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media, Int.J.Heat & Mass Transfer, 16(10): 1905-18, 1973.
6. Colle, S., Perda de carga no escoamento laminar em dutos de secção transversal de geometria arbitrária, Anais do COBEM-79, Vol. A: 350-59, 1979.
7. Colle, S., Aplicação do método de equações integrais ao problema da transferência de calor em regime laminar em dutos de secção transversal de geometria arbitrária, (A ser publicado), 1980.
8. Prata, A.T., Aplicação do método de equações integrais à transferência de calor em regime laminar por condução e convecção combinadas, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico/UFSC, Junho, 1980.
9. Crosbie, A.L. e Viskanta, R., Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation, Int. J. Heat & Mass Transfer, 11: 305-17, 1968.
10. Shaw, R.P., An integral equation approach to diffusion, Int. J. Heat & Mass Transfer, 17: 693-99, 1974.

11. Kermanidis, T., Kupradze's functional equation for the torsion problem of prismatic bars - Part I, *Comp. Met. Appl. Mech. and Engineering*, 7: 39-46, 1976.
12. Kermanidis, T., Kupradze's functional equation for the torsion problem of prismatic bars - Part II, *Comp. Met. Appl. Mech. and Engineering*, 7: 249-259, 1976.
13. Tolubinskiy, E.V., An integral method of solution of the general heat and mass transfer problems, *Int. J. Heat & Mass Transfer*, 9: 1471-88, 1966.
14. Sneddon, I.N. e Berry, D.S., The classical theory of elasticity, *Handbuch der Physik*, 'Bd. VI: 1-126, 1959.
15. Sokolnikoff, I.S., *Mathematical theory of Elasticity*, MacGraw-Hill, N.Y., 1974.

## SUMMARY

*The present paper presents a modified integral equation formula to evaluate the approximate solution of Neumann's boundary value problems. These boundary value problems occur in various branches of Mechanical Engineering Science. The proposed method is applied to the special case of the torsion of prismatic bars. Numerical results were compared with numerical data from available analytical solutions and an integral equation solution.*

## REGIÃO DE EQUILÍBRIO NA CONVECÇÃO TÉRMICA TURBULENTE ENTRE SUPERFÍCIES PLANAS HORIZONTAIS

ROGERIO TADEU DA SILVA FERREIRA

PROFESSOR ADJUNTO

DEPTO. ENG. MEC., UFSC, FLORIANÓPOLIS, SC

### SUMÁRIO

*Um modelo é concebido para o estudo da convecção térmica turbulenta com elevado número de Reynolds a fim de simular em laboratório os efeitos e aspectos da camada limite da Terra. Nestas condições, observa-se a existência de uma região de equilíbrio na qual a escala de comprimento é a distância até a borda da camada de condução, onde as propriedades moleculares são dominantes. Medições das flutuações de temperatura, velocidade vertical e horizontal são efetuadas com o auxílio de um termopar de elevada resposta em frequência e de um anemômetro laser Doppler.*

### INTRODUÇÃO

A convecção térmica turbulenta desenvolvida numa camada de fluido entre placas planas paralelas e horizontais apresenta uma estrutura em forma de camadas caracterizadas por diferentes escalas de comprimento, velocidade e temperatura.

Na região próxima da placa inferior, o transporte molecular é importante e os gradientes de temperatura apresentam valores bastante elevados, da ordem de  $(-Q_0/\alpha)$ , onde  $Q_0$  é o fluxo de calor cinemático [ $^{\circ}\text{K m/s}$ ] dado por  $(H_0/\rho c_p)$  onde  $H_0$  é o fluxo de calor através da placa inferior [ $\text{W/m}^2$ ],  $\rho$  é a massa específica do fluido [ $\text{kg/m}^3$ ] e  $c_p$  o calor específico do fluido a pressão constante [ $\text{J/kg}^{\circ}\text{K}$ ] e  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]. Esta região é chamada de camada de condução.

Na região central, o transporte molecular não é importante e as forças de flutuação geram energia a uma taxa da ordem de  $(\beta g Q_z)$  onde  $\beta$  é o coeficiente volumétrico de expansão térmica [ $^{\circ}\text{K}^{-1}$ ],  $g$  é a aceleração da gravidade [ $\text{m/s}^2$ ] e  $Q_z$  é o fluxo de calor convectivo local [ $^{\circ}\text{K m/s}$ ]. Esta região é chamada de região

convectiva. As flutuações de velocidade alcançam o seu valor máximo, os gradientes de temperatura são desprezíveis e as flutuações de temperatura são pequenas. A geometria da fronteira determina as macroescalas do escoamento e, em particular, a profundidade da camada fluida  $z_*$  determina a escala dos turbilhões maiores.

Tendo em vista as escalas nestas duas camadas apresentarem valores bastante diferentes, é de se esperar a existência de uma região intermediária onde esta transição é feita de uma forma suave. Esta é a região de equilíbrio onde ambas as escalas são válidas. A existência de leis de potência nos vários momentos com relação à distância vertical até a placa inferior ou até a borda da camada de condução permite identificar a existência da camada de equilíbrio. Esta região foi também chamada de camada de convecção livre por Kaimal et al. (1976) ou de camada convectiva de transição por Panofsky (1978) quando analisaram a camada limite convectiva da Terra.

O estudo da convecção térmica turbulenta, onde uma camada de água é confinada entre uma

placa horizontal aquecida e uma placa superior isolada, serve para modelar em laboratório vários aspectos da camada limite planetária. Com esta configuração conseguem-se números de Reynolds ou de Peclet elevados, permitindo a identificação de camadas de equilíbrio detectáveis através da análise de leis de potência.

Medições dos valores instantâneos da velocidade vertical, velocidade horizontal e temperatura, na região próxima da placa aquecida inferior, até  $z/z_* = 0,35$ , foram efetuadas utilizando-se um anemômetro laser Doppler e um termopar de elevada resposta em frequência, móveis em planos horizontais.

#### DESCRIÇÃO DAS INSTALAÇÕES

a) Seção de teste. A seção de teste constitui-se num paralelepípedo cheio de água, aquecido pela placa inferior e com as paredes laterais e a placa superior isoladas, conforme apresentado na figura 1. Os principais pontos assegurados pela seção de teste são:

- Razão de aspecto elevada para assegurar efeitos desprezíveis das paredes laterais na geração de escoamentos de circulação;
- Temperatura uniforme da placa inferior, ou inexistência de pontos frios e quentes que poderiam gerar células de recirculação;
- Fluxo de calor médio constante através da placa inferior;
- Perdas de calor desprezíveis através da placa superior e paredes laterais;
- Placas inferior e superior paralelas e horizontais.

Estas características asseguram a validação da hipótese de homogeneidade dos valores médios do escoamento em planos horizontais.

As justificativas e testes de cada um dos pontos acima relacionados são apresentados e discutidos por Ferreira (1978).

A seção de teste consiste de uma placa inferior de alumínio com 162 cm x 152 cm x 2,5 cm, duas paredes de vidro de 10 mm de espessura nas paredes verticais de frente e de fundo e duas paredes laterais de plexiglass de 6 mm de espessura e 47 cm de altura. As dimensões internas horizontais da seção de teste são 150 cm x 145 cm - largura x profundidade. A

placa superior foi construída de madeira e compensado e preenchida com placas de styropor com 15 cm de espessura.

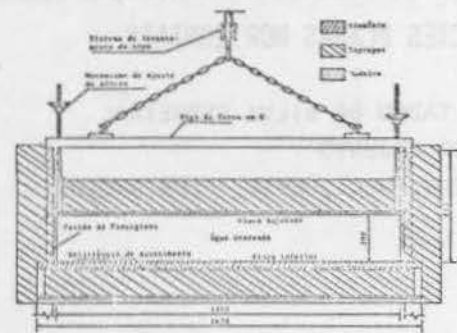


Fig. 1 Seção transversal da seção de testes. Dimensões em mm.

Todas as paredes laterais são isoladas externamente com painéis de styropor de 15 cm de espessura e as paredes de plexiglass são ainda isoladas internamente com placas de styropor de 2,5 cm de espessura para minimizar ainda mais a transferência lateral de calor. Uma janela fina de 10 cm x 120 cm - altura x largura, é cortada no painel de styropor externo da parede frontal de vidro para permitir a introdução dos feixes luminosos do laser bem como a coleção da luz espalhada pelas partículas introduzidas na seção de teste.

A energia térmica é fornecida por nove painéis de resistências de aquecimento Ohmweave com uma resistência nominal de 40  $\Omega$  cada uma, ligadas em paralelo e uma resistência equivalente medida de 4,0  $\Omega$  a 25°C, posicionados diretamente abaixo da placa de alumínio inferior e com isolamento adicional de 15 cm de styropor para aumentar a eficiência do processo de aquecimento. A fonte utilizada Thermac 5212 tem uma voltagem de saída controlável até 165 V o que corresponde a um fluxo máximo de calor de 2,6 kW/m<sup>2</sup>.

b) Temperatura instantânea. O sensor utilizado para a medição das flutuações de temperatura é construído de um fio duplo Chromel-Constantan com diâmetro dos fios de 0,0381 mm cada um.

A junta de referência foi estabelecida no ar ambiente porque somente a parte de flutuações rápidas do sinal de temperatura é de in-

teresse.

O amplificador usado é um Ectron 560 operando com um ganho de 1000 em modo AC e com uma frequência de corte de 100 Hz. A constante de tempo do termopar é de  $3,2 \pm 0,3$  ms, para uma velocidade de deslocamento de 0,5 cm/s, o que corresponde a uma frequência superior a 50 Hz nas condições de medição. A sensibilidade do conjunto sensor-amplificador é 16,15  $^{\circ}\text{C}/\text{V}$  na faixa de 25 a 45  $^{\circ}\text{C}$ .

c) Velocidade instantânea. As componentes u e w da velocidade instantânea são medidas com o auxílio de um anemômetro laser Doppler de duas componentes, operando no modo de franjas e retro-coleção da luz de espalhamento. A fonte luminosa é um laser Argônio-Ion (Coherent Radiation CR-2) com uma potência nominal de 2 W e 600 mW em frequência única a 514,5 nm. Detalhes do sistema ótico e o diagrama funcional do sistema de processamento do sinal são mostrados nas figuras 2 e 3 respectivamente. A descrição do funcionamento do anemômetro laser Doppler e do sistema de processamento do sinal é feita por Ferreira (1978).

As dimensões do diâmetro do elipsóide formado pela intersecção de 2 feixes luminosos da presente geometria correspondente ao contorno  $e^{-2}$  são 147,3  $\mu\text{m}$ , 147,7  $\mu\text{m}$  e 2050  $\mu\text{m}$  correspondentes ao diâmetro lateral horizontal, diâmetro lateral vertical e diâmetro longitudinal horizontal, o que equivale a um volume de  $23,4 \times 10^6 \mu\text{m}^3$ . O número de franjas vistas pelo fotodetector é de 53 franjas com uma distância entre franjas da ordem de 2,5  $\mu\text{m}$ .

As partículas usadas para seguir o escoamento e gerar bons sinais Doppler são microesferas Dow Saran com diâmetros médios de 5 a 8  $\mu\text{m}$  e uma densidade relativa de 1,33. Procurou-se manter uma concentração correspondente a existir sempre uma partícula dentro do volume de medição em média.

O filtro passa baixo do digitizador foi selecionado em 16 Hz de forma que o valor RMS do ruído de fase seria em torno de 50 Hz para uma velocidade de 2 cm/s o que corresponde a um ruído equivalente a 0,13 mm/s.

d) Digitizador e equipamento de armazenagem.

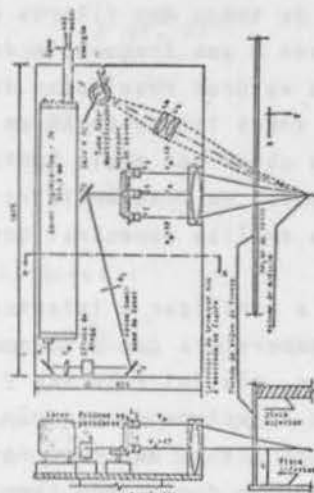


Fig. 2 Mesa móvel com os componentes óticos. Desenho sem escala. Dimensões em mm.

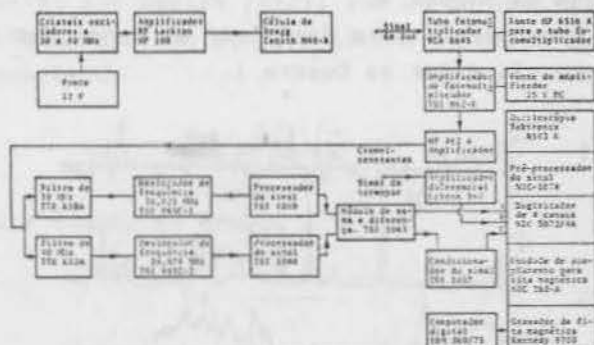


Fig. 3 Diagrama funcional do sistema de processamento dos sinais.

mento de dados. Os dados de velocidades e temperatura são digitizados por um Digitizador de sinais de 4 canais (Nicolet SD-72/4A) com uma resolução de 9 bits. A varredura horizontal é controlada por um sistema de controle SW-71B e a memória pelo Display Control Nicolet 1074. Os dados são armazenados numa memória com 4096 pontos e então transferidos para uma fita magnética de 9 pistas através do gravador Kennedy 9700 e de um Magnetic Tape Coupler modelo NIC-283A.

Os dados foram obtidos ao longo de linhas de 50 cm de comprimento e paralelas à parede de vidro frontal através da movimentação da mesa horizontalmente da direita para a esquerda a uma velocidade de 2,36 cm/s.

A faixa de digitização dos dados foi escolhida em 5 ms para o módulo de 4 canais, correspondendo a um intervalo entre pontos de 0,02 s e uma frequência de Nyquist de 25 Hz.



A constante de tempo dos filtros é de 10 ms correspondendo a uma frequência de corte de 16 Hz. Estes valores resultaram do compromisso de medir sobre linhas de 50 cm de comprimento para obter boa média horizontal e também uma resposta em frequência razoável que permitisse a análise espectral dos sinais obtidos.

De forma a minimizar a interferência do sensor de temperatura com o volume de medição do anemômetro, ele foi colocado 2 mm à direita do centro do volume de medição, na mesma horizontal, já que as medições foram efetuadas com a mesa se deslocando para a esquerda.

Uma medição típica dos sinais  $w-\theta-u$  a uma distância de 3,5 mm da placa inferior é mostrada na figura 4.

A convenção para denominar as condições de teste são dadas no Quadro I.

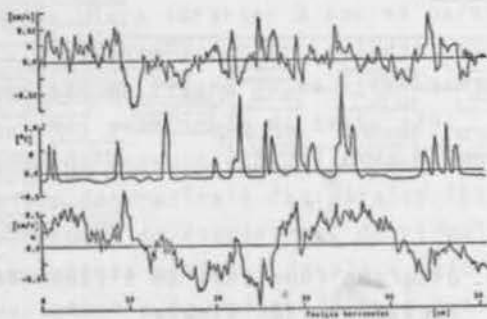


Fig. 4 Sinais típicos de  $w-\theta-u$  distante 3,5 mm da placa inferior. Condição III.

Quadro I - Convenção dos diferentes testes realizados.

Condição	$z^*$ (cm)	$Q_0$ ( $^{\circ}$ Kcm/s)	Símbolo
I	20	0,0153	○
II	20	0,0330	□
III	20	0,0568	△
IV	15	0,0450	◇
V	12	0,0141	▽

#### ANÁLISE DOS DADOS

Os dados obtidos a partir das medições deslocando os instrumentos em planos horizontais foram usados para calcular os seguintes momentos centrais:  $\langle w^2 \rangle$ ,  $\langle \theta^2 \rangle$ ,  $\langle w^3 \rangle$ ,  $\langle \theta^3 \rangle$ ,  $\langle \theta^2 w \rangle$  e  $\langle w^2 \theta \rangle$ , onde a barra indica média temporal sobre todo o comprimento de medição e as linhas

quebradas indicam uma média amostrada de todas as medições numa certa condição. Isto é, para cada tomada, a média temporal é calculada e então todas as médias temporais de um conjunto, representando uma certa altura acima da placa inferior, um certo fluxo de calor e uma certa profundidade da camada de água, são combinadas formando uma nova média amostrada que produz um ponto no perfil vertical do momento considerado.

Para transformar uma gravação finita de uma medição para calcular os momentos centrais, uma nova média do sinal deve ser definida. Como cada uma das médias para a mesma variável são diferentes de medição para medição, devem ser aplicadas correções no cálculo dos momentos como segue.

Definindo-se  $E_m$  como a média de uma medição,  $E$  a média amostrada do conjunto de medições,  $e'_m$  o sinal total de uma medição,  $e_m$  a flutuação em relação a  $E_m$  e  $e$  o sinal flutuante em relação à média amostrada dos  $E_m$ .

Desta forma

$$e = e'_m - E \quad (1)$$

$$e_m = e'_m - E_m \quad (2)$$

O cálculo da média quadrática é dada por

$$\langle e^2 \rangle = \langle (e'_m - E)^2 \rangle \quad (3)$$

Somando-se e subtraindo-se  $E_m$  tem-se

$$\langle e^2 \rangle = \langle e_m^2 \rangle + \langle (E_m - E)^2 \rangle \quad (4)$$

porque, por definição  $\langle e_m \rangle = 0$ .

Para os momentos de ordem superior, tem-se

$$\langle e^3 \rangle = \langle e_m^3 \rangle + 3\langle (E_m - E) \cdot \langle e_m^2 \rangle + \langle (E_m - E)^3 \rangle \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle e^2 a \rangle &= \langle e_m^2 a_m \rangle + 2\langle e_m a_m \rangle \cdot \langle (E_m - E) \rangle + \\ &+ \langle (E_m - E)^2 (A_m - A) \rangle \quad (6) \end{aligned}$$

onde  $a'_m = a_m + A_m$

Cada ponto no perfil vertical é o resultado de uma amostra composta tipicamente por 16

medições independentes.

### ESCALAS

Para a camada ou região convectiva, são usadas as escalas propostas por Deardorff (1970).

$$\text{comprimento } z^* \quad (7a)$$

$$\text{velocidade } w^* = (\beta g Q_0 z^*)^{1/3} \quad (7b)$$

$$\text{temperatura } \theta^* = Q_0/w^* \quad (7c)$$

Estas escalas foram obtidas através de análise dimensional considerando-se importantes os parâmetros profundidade da camada  $z^*$  e o fluxo de flutuabilidade ( $\beta g Q_0$ ). As difusividades moleculares  $\nu$  e  $\alpha$  são excluídas tendo em vista que os números de Reynolds e Peclet da camada convectiva são elevados. Há já bastante evidência experimental mostrando que as escalas convectivas de Deardorff realmente correlacionam os momentos turbulentos em camadas de convecção a elevados números de Reynolds após os estudos de Willis e Deardorff (1973), Adrian (1975), Fitzjarrald (1976), Boberg (1977), Ferreira (1978) e muitos outros.

Townsend (1959) propôs as seguintes escalas para a região próxima da placa inferior - camada de condução:

$$\text{velocidade } w_0 = (\beta g Q_0 \alpha)^{1/4} \quad (8a)$$

$$\text{comprimento } z_0 = \alpha/w_0 \quad (8b)$$

$$\text{temperatura } \theta_0 = Q_0/w_0 \quad (8c)$$

As hipóteses que basearam o desenvolvimento destas escalas são que a região próxima da parede é independente de  $z^*$  mas dependente de ( $\beta g Q_0$ ) e da difusividade térmica  $\alpha$ . Na realidade, as escalas de Townsend não são as únicas escalas possíveis para a região próxima da parede. Quando o número de Prandtl é diferente da unidade há um número infinito de escalas que podem ser definidas multiplicando-se o fator  $\alpha$  na equação (8) por várias potências de Pr. Para maiores detalhes, ver Kraichnan (1962), Chung (1978) e Ferreira (1978).

É costumeiro utilizar-se o número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\beta g z_*^3 \Delta T}{\alpha \nu} \quad (9)$$

o número de Prandtl

$$Pr = \nu/\alpha \quad (10)$$

e o número de Nusselt

$$Nu = \frac{Q_0 z^*}{\alpha \Delta T} \quad (11)$$

para descrever o estado de convecção sobre suas superfícies horizontais. Como o número de Rayleigh é um parâmetro mais pertinente ao problema de estabilidade do que a dinâmica da turbulência gerada pela flutuabilidade, foi sugerido por Adrian (1975) que um parâmetro mais apropriado seria o número de Reynolds turbulento

$$Re_* = \frac{w_* z_*}{\nu} \quad (12)$$

ou o número de Peclet

$$Pe = \frac{w_* z_*}{\alpha} \quad (13)$$

A relação entre as escalas convectivas e moleculares fornece:

$$\text{comprimento } z_*/z_0 = (Re_* Pr)^{3/4} \quad (14a)$$

$$\text{velocidade } w_*/w_0 = (Re_* Pr)^{1/4} \quad (14b)$$

$$\text{temperatura } \theta_*/\theta_0 = (Re_* Pr)^{-1/4} \quad (14c)$$

Utilizando-se a relação  $Nu \propto Ra^{1/3}$ , verifica-se facilmente que  $Re_* \propto Ra^{4/9} Pr^{-2/3}$ .

### REGIÃO DE EQUILÍBRIO

Foi feita a análise dos momentos até 3ª ordem para verificar a existência de leis de potência e a definição de uma possível região de equilíbrio no escoamento. Como salientado por Townsend (1976), a espessura da camada de equilíbrio é uma pequena fração da profundidade total do escoamento turbulento e consequentemente a variação do fluxo de calor cinemático através da camada é pequena quando comparada com o fluxo de calor na parede.

Na região de equilíbrio, as escalas  $z_*$  e  $z_0$  devem concordar de forma que o RMS das flutua-

ções de velocidade e temperatura podem ser expressos por

$$\sigma_\theta/\theta_* = c(z/z_*)^n \quad (15a)$$

$$\sigma_\theta/\theta_0 = c(z/z_0)^n \quad (15b)$$

$$\sigma_w/w_* = c_1(z/z_*)^m \quad (16a)$$

$$\sigma_w/w_0 = c_1(z/z_0)^m \quad (16b)$$

Multiplicando a equação (15) pela (16) tem se

$$\frac{\sigma_\theta \sigma_w}{\theta_* w_*} = \frac{\sigma_\theta \sigma_w}{\theta_0 w_0} = c c_1 (z/z_*)^{n+m} = c c_1 (z/z_0)^{n+m} \quad (17)$$

Desta forma

$$(z/z_*)^{n+m} = (z/z_0)^{n+m} \quad (18)$$

A equação (18) se mantém apenas quando  $m = -n$ . Da relação entre as escalas convectivas e condutivas

$$w_*/w_0 = (z_*/z_0)^{1/3} \quad (19)$$

Comparando-se a equação (19) com (16b) e (16a) obtêm-se  $m = 1/3$  e  $n = -1/3$ .

Desta forma

$$\sigma_w/w_* = c_1(z/z_*)^{1/3} \quad (20)$$

$$\sigma_\theta/\theta_* = c(z/z_*)^{-1/3} \quad (21)$$

Utilizando-se argumentos similares chega-se a

$$\overline{w^3}/w_*^3 = c_2(z/z_*)^1 \quad (22)$$

$$\overline{\theta^3}/\theta_*^3 = c_3(z/z_*)^{-1} \quad (23)$$

$$\overline{w^2 \theta}/Q_0 w_* = c_4(z/z_*)^{1/3} \quad (24)$$

$$\overline{w \theta^2}/Q_0 = c_5(z/z_*)^{-1/3} \quad (25)$$

Quando os valores RMS das flutuações da temperatura e velocidade escalonados pelas escalas convectivas foram plotados contra  $z/z_*$ , uma lei de potência de  $-1/2$  foi achada para

$\sigma_\theta/\theta_*$  e nenhuma lei de potência característica foi detetada para  $\sigma_w/w_*$  como mostrado por Ferreira (1978).

Utilizando-se a idéia de aplicar as escalas aos momentos e analisar as leis de potência em função da distância à borda da camada de condução ao invés da distância até a parede, podem-se identificar as leis de potência previstas nas equações (20) a (25) como mostram as figuras 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

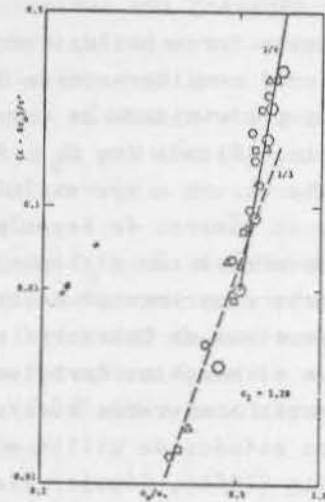


Fig. 5 Lei de potência do RMS das flutuações de velocidade vertical. Símbolos definidos no Quadro I.

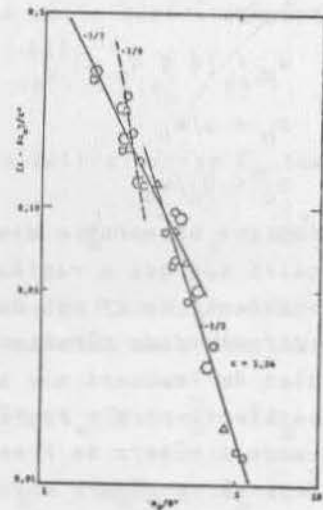


Fig. 6 Lei de potência do RMS das flutuações de temperatura. Símbolos definidos no Quadro I.

Segundo sugerido por Boberg (1977), um deslocamento de  $(8z_0/z_*)$  foi aplicado à dimensão

vertical. O fator numérico 8 foi determinado empiricamente através da análise dos dados de temperatura média. A restrição do escoamento na camada condutiva evita os turbilhões de te rem escalas na direção vertical maiores que a distância da borda da camada até o centro dos turbilhões.

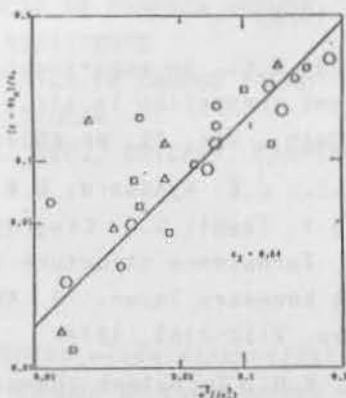


Fig. 7 Lei de potência do momento de 3<sup>a</sup> ordem da velocidade vertical. Símbolos definidos no Quadro I.

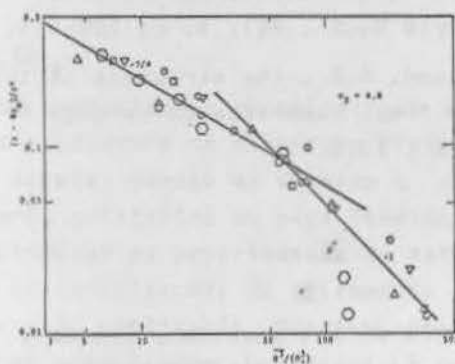


Fig. 8 Lei de potência do momento de 3<sup>a</sup> ordem das flutuações de temperatura. Símbolos definidos no Quadro I.

O espalhamento dos dados para os momentos de 3<sup>a</sup> ordem dificultam uma verificação precisa das leis de potência na região de equilíbrio no entanto qualquer mudança na dependência pode ser claramente detetada.

Dos gráficos, verifica-se que a camada de equilíbrio estende-se até  $(z-8z_0)/z_* = 0,1$  para cada momento.

Panofsky (1978) reporta valores das constantes  $c_1 = 1,33$  e  $c = 1,35$  em medições atmosféricas estando em boa concordância com os experimentos realizados onde  $c_1 = 1,28$  e  $c=1,26$ .

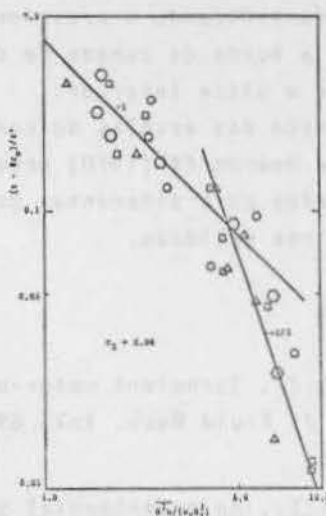


Fig. 9 Lei de potência do momento representativo do transporte vertical das flutuações de temperatura. Símbolos definidos no Quadro I.

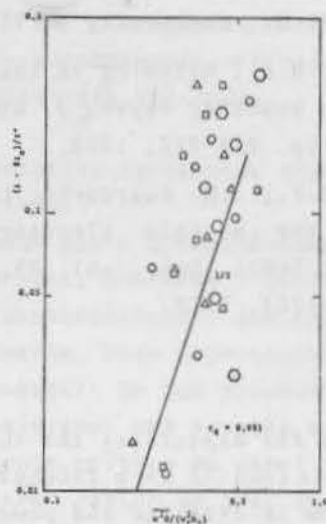


Fig. 10 Lei de potência do momento representativo do transporte vertical do fluxo de calor cinemático. Símbolos definidos no Quadro I.

## CONCLUSÕES

A configuração de laboratório testada apresentada na figura 1, produz um escoamento turbulento com o número de Reynolds ou Peclet bastante elevado permitindo a identificação de uma camada de equilíbrio no escoamento.

A camada de equilíbrio apresenta as leis de potência previstas na teoria quando um deslocamento de  $(8z_0)$  é produzido na dimensão

vertical, identificando o crescimento dos tur bilhões até a borda da camada de condução ao invés de até a placa inferior.

A utilização das escalas de convecção reco mendadas por Deardorff (1970) produz o agrupa mento dos dados para diferentes condições evi denciando a sua validade.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Adrian, R.J., Turbulent water-over-ice convection, J. Fluid Mech. Vol. 69, pp. 753-781, 1975.
2. Boberg, T.E., An experimental study of unsteady free convection from a heated horizontal plate. Tese de M.Sc., University of Illinois, 1977.
3. Chung, M.K., Study of second order turbulence models with variable coefficients. Tese de Ph.D., University of Illinois, 1978
4. Panofsky, H.A., Matching in the convective planetary boundary layer, J. Atmos. Sci., Vol. 35, pp. 272-276, 1978.
5. Willis, D.E.; J.W. Deardorff, Laboratory model of the unstable planetary boundary layer. J. Atmos. Sci., vol. 31, pp. 1297-1307, 1974.
6. Deardorff, J.W., Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and Rayleigh convection. J. Atmos. Sci., vol. 27, pp.1211-13, 1970.
7. Ferreira, R.T.S., Turbulent thermal convection. Tese de Ph.D., University of Illinois, 1978.
8. Fitzjarrald, D.E., An experimental study of turbulent convection in air. J. Fluid Mech., vol. 73, pp.693-719, 1976.
9. Kaimal, J.C.; J.C. Wyngaard; D.A. Haugen; O.R. Coté; Y. Izumi; S.J. Caughey; C.J. Readings, Turbulence structure in the convective boundary layer. J. Atmos. Sci. vol. 33, pp. 2152-2169, 1976.
10. Kraichnan, R.H., Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number, Phys. Fluids, vol. 5, pp. 1374-1389, 1962.
11. Townsend, A.A., Temperature fluctuations over a heated horizontal surface, J. Fluid Mech., vol. 5, pp.209-241, 1959.
12. Townsend, A.A., The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 2a. Ed., 1976.

#### SUMMARY

*Many of the aspects of the turbulent thermal convection in the planetary boundary layer are studied in a laboratory model. The existence of an equilibrium region in the flow is detected and power laws governing the higher order moments of vertical velocity and temperature with respect to the distance to the border of the conduction layer are identified. A Laser Doppler velocimeter and a high frequency thermocouple are used to measure the fluctuating horizontal and vertical velocities and temperature signals respectively.*

## REFINO DE GRÃO EM ALUMÍNIO E LIGAS ALUMÍNIO-COBRE OBTIDO PELA ALIMENTAÇÃO DE MOLDES ATRAVÉS DE CANAIS REFRIGERADOS A ÁGUA

ANTONIO CELSO DA FONSECA ARRUDA

PROFESSOR ASSISTENTE

MAURÍCIO PRATES DE CAMPOS FILHO

PROFESSOR TITULAR

DEPTO. ENG. MEC., UNICAMP, CAMPINAS, SP

### SUMÁRIO

*O trabalho visou desenvolver um processo de refino de grão em estruturas de Alumínio sem a adição de inoculantes ou agentes refinadores, isto é, através da utilização de substratos de nucleação potentes. A utilização de moldes alimentados por canais refrigerados a água, comprovaram a ação das altas condições de extração de calor, no sentido de propiciar o preenchimento de moldes com metais parcialmente solicificados, consequentemente facilitando a obtenção de estruturas equiaxiais refinadas.*

### INTRODUÇÃO

É fato conhecido na tecnologia da fundição [1], que o controle da estrutura bruta de fusão dos metais, quanto ao formato e disposição do grão cristalino na peça fundida, possibilita otimizar as propriedades do material em relação as solicitações de desempenho previstas para cada utilização. Particularmente com relação as propriedades mecânicas, é consenso geral que a obtenção de estruturas equiaxiais refinadas possibilita um melhor desempenho da peça fundida, quando em serviço, sobretudo em relação aos esforços dinâmicos [4].

Assim sendo, é objetivo do presente trabalho verificar o comportamento das zonas estruturais e de tamanho de grão, em relação a aplicação de uma nova técnica, aplicável na solidificação de metais que se evidencia como prática e econômica na obtenção de estruturas equiaxiais refinadas na fundição de Alumínio e ligas Alumínio-Cobre.

Trata-se de um processo de alimentação de moldes, através de canais refrigerados a água possibilitando ao metal vazado ao entrar em contato com o molde não apresentar superaque-

cimento e inclusive apresentar alguns cristais já nucleados.

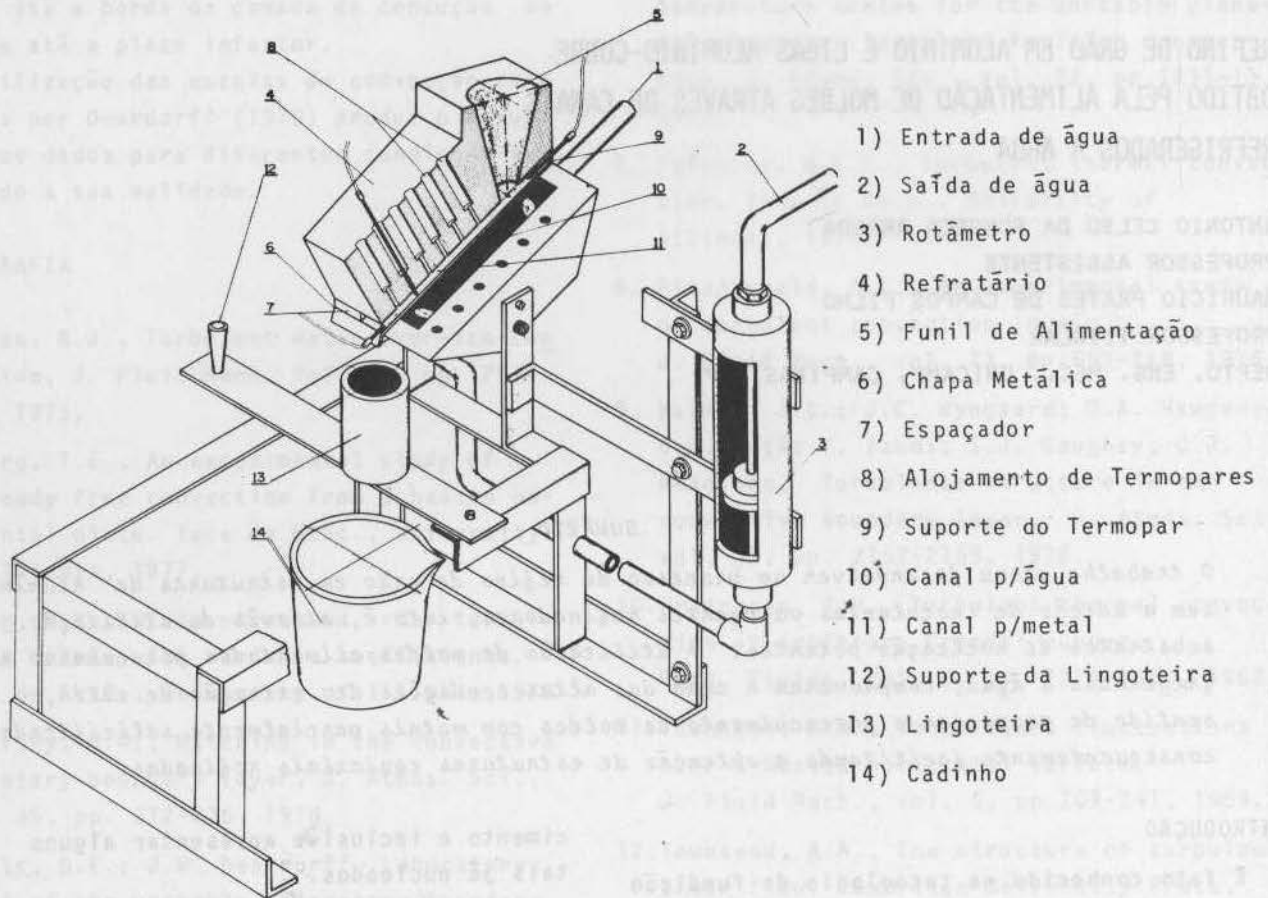
Considerando que o dimensionamento de canais refrigerados, conforme o processo proposto, difere substancialmente dos critérios adotados normalmente, onde a preocupação maior é somente conseguir um bom preenchimento do molde, estabelecemos uma equação que equaciona o comprimento crítico do canal de alimentação para ocorrer refino de grão em função das condições de vazamento.

### MATERIAIS E MÉTODOS

Foram utilizados o Alumínio comercialmente puro e sua liga com 4,75% de Cobre. A pureza dos metais utilizados foi superior a 99,7%.

O vazamento procedeu-se em moldes cilíndricos de aço ABNT 1020 de 60mm de diâmetro interno, 120mm de altura útil (+ 60mm de "cabeça quente") e com espessuras de parede de 5 e 15mm. Uma grande porcentagem dos ensaios foi realizado com moldes revestidos com o isolante Dycote 39 e as demais com moldes polidos.

Os canais de alimentação refrigerados a água, eram constituídos na parte inferior de



- 1) Entrada de água
- 2) Saída de água
- 3) Rotâmetro
- 4) Refratário
- 5) Funil de Alimentação
- 6) Chapa Metálica
- 7) Espaçador
- 8) Alojamento de Termopares
- 9) Suporte do Termopar
- 10) Canal p/água
- 11) Canal p/metal
- 12) Suporte da Lingoteira
- 13) Lingoteira
- 14) Cadinho

Fig. 1 - Desenho de conjunto do canal refrigerado a água.

uma chapa de aço ABNT 1030 de 1mm de espessura, revestida com Dycote 39 e parcialmente e totalmente polida. A parte superior do canal compunha-se de um tijolo refratário recoberto com Dycote 39 apoiado sobre bordos metálicos também revestidos com Dycote 39, conforme mostra a figura 1. A chapa foi refrigerada com água numa vazão constante de 1100 litros por hora. Os canais mediam 20mm de largura, com variações de espessura de 1 a 9mm e de comprimento de 50 a 150mm.

Termopares registravam a temperatura de entrada e de saída do metal. Sendo que em algumas experiências utilizou-se seis termopares a fim de se levantar o perfil de distribuição de temperatura ao longo do comprimento do canal. Foram utilizados termopares tipo K Chromel-Alumel da BICC de 1,5mm de diâmetro de isolamento mineral e capa protetora Inox

25/20. Os registros de entrada e saída, foram realizados com medição contínua, através de um registrador de 2 penas. Os registros ao longo do canal foram realizados intermittenemente, por pontos, em quatro canais, em intervalos de tempo de 1 segundo.

Os superaquecimentos variaram de 10 a 100°C. Sendo de 12000cm<sup>3</sup> a quantidade de metal líquido disponível para cada vazamento. O qual uma vez preenchido o molde continuava a ser vazado em um outro cadinho sobressalente, vide figura 1.

As macroestruturas foram realizadas segundo dois cortes, um longitudinal passando pelo centro de revolução da peça e outro transversal realizado a 60mm de altura. Foram realizadas algumas micrografias em locais estratégicos a fim de se obter um termo comparativo

entre os diferentes tamanhos de grão.

## RESULTADOS

As condições críticas de utilização dos canais refrigerados alimentadores refrigerados a água estão relacionadas com a quantidade de metal líquido que deve passar pelo canal e as suas temperaturas de entrada e saída. Objetivando não permitir o fechamento do canal devido a solidificação do metal dentro do mesmo, bem como obter estruturas equiaxiais refinadas, foi estabelecida uma formulação que apresenta o comprimento crítico do canal alimentador, dada por [3]:

$$L_c = \rho \frac{C v e}{\bar{h}_i} \log_e \left( \frac{T_v - T_0}{T_f - T_0} \right)$$

onde

- $L_c$  : comprimento crítico do canal (cm)
- $\rho$  : densidade do metal líquido ( $\text{g/cm}^3$ )
- $C$  : calor específico do metal líquido ( $\text{cal/g}^\circ\text{C}$ )
- $v$  : velocidade do metal líquido cm/seg.
- $e$  : espessura do canal (cm)
- $\bar{h}_i$  : coeficiente de transmissão de calor da interface metal/molde, corrigido ( $\text{cal/cm}^2 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{seg.}$ )
- $T_v$  : temperatura de vazamento do metal ( $^\circ\text{C}$ )
- $T_0$  : temperatura da água em regime ( $^\circ\text{C}$ )
- $T_f$  : temperatura de fusão do metal ( $^\circ\text{C}$ ).

As experiências realizadas com canais de comprimento maiores que o crítico (20 ou 30%) apresentaram excelente grau de refino, vide figura 2. E conseqüentemente os canais de comprimento inferior ao crítico apresentam refino não satisfatório.

A figura 3, apresenta o perfil de temperatura, ao longo de um canal, registro obtido através de termopares cuidadosamente instalados no tijolo refratário (figura 1), com o espessamento indicado no gráfico.

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A utilização de canais refrigerados a água, foi baseada no raciocínio de se utilizar um substrato de nucleação potente (dado pe-

la chapa refrigerada a água), que tivesse um contato obrigatório com todo o metal que fosse preencher o molde, associado a um fluxo que se incumbisse de remover o metal parcialmente solidificado (fornecido pela própria força de gravidade), possibilitando deste modo que o processo de solidificação do lingote, tivesse início no molde, com a presença de pequenos cristais, distribuídos ao longo da massa líquida e crescendo competitivamente dando origem a uma estrutura equiaxial refinada [8] [5].

O processo utilizado não somente atendeu as premissas acima citadas, como também possibilitou uma acomodação adequada do metal líquido nos espaços entre os cristais solidificados, garantindo uma estrutura final de solidificação sem a presença de bolha, trincas ou outros defeitos, como evidencia a figura 2.

A formulação proposta, demonstrou descrever o processo de troca de calor com bastante precisão o que pode ser confirmado através do gráfico da figura 3 que apresenta o perfil de temperaturas num canal refrigerado.

O valor de 1,3 para fator de correção do coeficiente de transmissão de calor entre o metal e o canal ( $\bar{h}_i$ ), adequou-se perfeitamente para todos os cálculos do comprimento crítico ( $L_c$ ). Os valores de calor específico e densidade do metal que foram adotados como constantes, na realidade alteram-se com a temperatura, porém dada a insignificância desta diferença quando considerada somente entre a temperatura de fusão e do vazamento, podemos desprezã-la sem acarretar um sensível desvio no cálculo do comprimento crítico do canal.

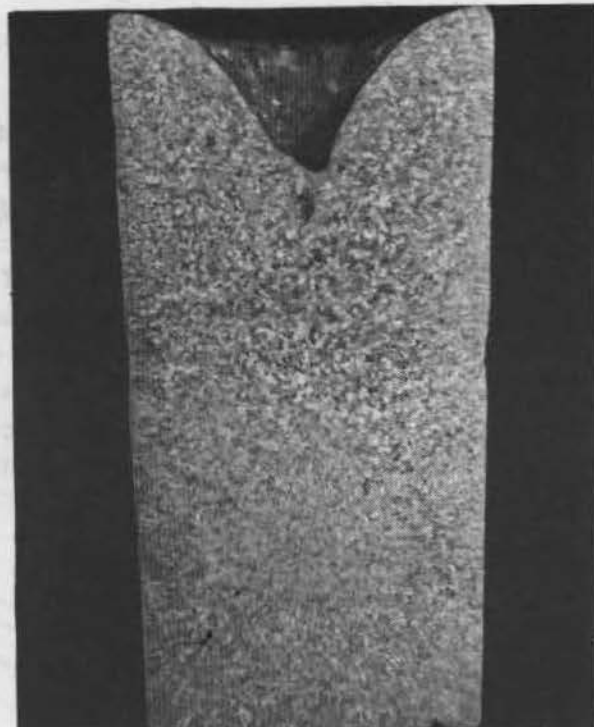
O único parâmetro que ficou pendente de experiências preliminares para sua determinação foi a velocidade de passagem do metal líquido, através do canal, devido a alteração da viscosidade que aumenta durante o processo, e relativamente ao pequeno comprimento do canal, que não permite a aplicação do equacionamento já existente para "perfis desenvolvidos" condicionando deste modo a obtenção do valor da velocidade à medição em experiências preliminares [6].

Porém tal limitação pode ser considerada





2a) Al 4,75% Cu - 100°C Superaquecimento



2b) Al - 60°C Superaquecimento-Inoculant 2 segundo as instruções do fabricante



2c) Al - Vazamento através de canal alimentador refrigerado a água.



2d) Al 4,75% Cu - Vazamento através de canal alimentador refrigerado a água.

Fig. 2 - Macroestruturas de lingotes obtidos em moldes cilíndricos de aço, de 5mm pa rede, revestidos com Dycote 39, nas seguintes condições:

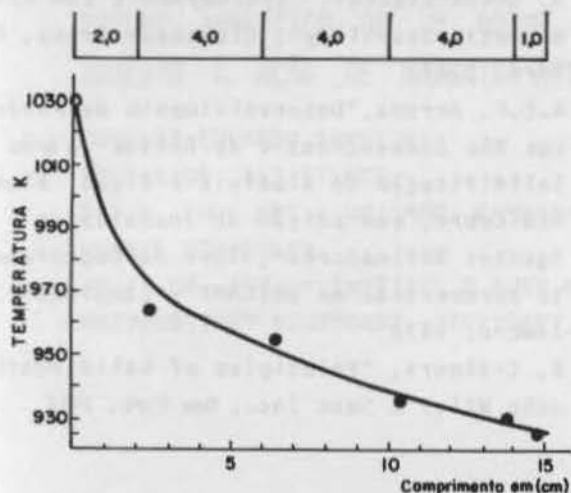


Fig. 3 - Perfil de temperaturas do metal líquido ao longo de um canal refrigerado a água, registro do processo em regime permanente. Os traços marcados na linha superior fornecem a posição dos termopares ao longo do comprimento do canal. Os termopares foram instalados no centro do canal, mantendo um espaçamento de 2 milímetros em relação a chapa metálica refrigerada. A espessura do canal nesta experiência foi de 4 milímetros.

desprezível quando a aplicação de tal processo tiver um caráter de produção industrial, pois com somente uma ou duas experiências, podemos dimensionar um canal para a aplicação na fundição de infinitas peças.

## CONCLUSÕES

A análise dos resultados obtidos (nas condições utilizadas) com alimentação de moldes por canais refrigerados a água, permite-nos concluir que as condições básicas para se obter estruturas equiaxiais refinadas em lingotes de Alumínio e ligas Alumínio-Cobre são:

- promover a nucleação de cristais junto as paredes do molde e do canal de alimentação.
- impedir a formação prematura da primeira camada sólida estável, quer junto as paredes dos moldes quer no canal de

alimentação.

- promover o destacamento dos cristais nucleados no canal de alimentação e junto as paredes do molde, permitindo uma distribuição dos mesmos no metal líquido, e impedir suas refusões totais.
- promover choques de cristais separados entre si e contra a interface sólido/líquido.

O item (a) é primeiramente atendido pelo próprio canal e secundariamente pelo molde. Os itens b, c e d são cumpridos pelo próprio fluxo alimentador, o qual tem sua intensidade vinculada a altura do dispositivo e a inclinação do mesmo.

Os resultados evidenciaram ainda a validade da formulação proposta, com relação ao comprimento do canal alimentador. Contudo, os valores de velocidade devem ser determinados experimentalmente, pois as relações de comprimento e espessura, associadas com a alteração da viscosidade do metal durante o seu percurso, não nos permite aplicar as formulações para "perfis desenvolvidos", existentes na literatura.

O grau de refino obtido foi excelente, comparável com os obtidos através de elementos refinadores muito potentes como o Titânio, Titânio-Boro ou vibrações mecânicas [7] [2].

As vantagens econômicas decorrentes da simplicidade do dispositivo utilizado, tanto em termos de construção, como de manutenção e apuração, garantem sua breve aplicação tecnológica.

## REFERÊNCIAS

### 1) Revistas:

- M. Prates, H. Biloni, "Zona "Chill" dos Lingotes: Parâmetros que controlam a Estrutura de Solidificação", *Metalurgia/ABM*, 27, p. 871, 1971.
- J.D.B. Mello, T.W. Cline, "Efeito da agitação mecânica na estrutura de Solidificação de Alumínio Comercialmente puro", *Metalurgia/ABM*, 35, p. 311, 1979.

### 2) Anais:

- A.C.F. Arruda, M. Prates, "Refino de Grão de Ligas de Alumínio por meio de multi -

plicadores Cristalinos. 30 Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais - RJ - Dezembro de 1978.

4. K. Löhberg, "Theory and practice of the grain refinement", Proceeding of the International Symposium - Quality control of engineering alloys and the role of metals science Delft University of Technology - 1977.

3) Livros:

5. A. Ohno, "The Solidification of Metals", Chijin - Shokan, Tokio, 1973.

- 6- S. Chândrasekhar, "Hydrodynamic and Hydro magnetic Stability", Clarendon Press, Oxford, 1961.

7. A.C.F. Arruda, "Desenvolvimento de Processos Não Convencionais de Refino de Grão na Solidificação do Alumínio e ligas Alumínio-Cobre, sem adição de Inoculantes ou Agentes Refinadores", Tese de Doutorado apresentada na UNICAMP - Campinas- Dezembro, 1978.

8. B. Chalmers, "Principles of Solidification" John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.

## ESTUDO ANALÍTICO DE UM ROTOR HORIZONTAL SUJEITO A AÇÃO DE MANCAIS ATIVOS

DOUGLAS EDUARDO ZAMPIERI

PROFESSOR ASSISTENTE

DEPTO. ENG. MEC., UNICAMP, CAMPINAS, SP

WERNER SCHIEHLEN

PROF. DR. ING. - INSTITUT B FUER MECHANIK

UNIVERSITAET STUTTGART, STUTTGART, ALEMANHA OCIDENTAL

### SUMÁRIO

*Partindo-se do princípio de que na concepção de uma máquina o engenheiro deve ter em mente que na rotação de trabalho da mesma, ou mais amplo ainda, nas imediações do campo de trabalho, o comportamento dinâmico deve ser ótimo, o presente estudo pretende apresentar algumas possibilidades de influenciar o comportamento dinâmico de um rotor, de modo que as perturbações externas, aqui caracterizadas pelo desbalanceamento, não influenciem o movimento do mesmo em uma pré-estabelecida rotação.*

### INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o interesse em ultra-rotadores alcançou um grande significado técnico sendo muitas as questões levantadas neste campo e analisadas por diferentes autores em um volume bastante grande de publicações. Cite-se neste ponto o trabalho de Schweitzer e outros /1/, no qual se procura determinar o comportamento ótimo de um sistema rotor-mancais.

Além disso novos resultados obtidos na teoria de controle, no que diz respeito a problemas envolvendo sistemas sujeitos a perturbações externas, foram publicados em uma série de artigos iniciada por Johnson em /2/. Como resultado da aplicação desta teoria, tem-se exemplos em diferentes campos, como os apresentados por Schiehlen em /3/ e Müller em /4/.

Mais ainda, dentro da dinâmica de rotores procura-se, atualmente, desenvolver projetos de rotores com a aplicação de mancais magnéticos ativos como proposto por Schweitzer em /5/. Tais mancais apresentam uma série de vantagens em relação aos sistemas atuais,

vantagens estas descritas por Habermann e Liard em /6/ e /7/.

Baseando-se na aplicação de mancais ativos em rotores, o presente trabalho propõe-se analisar um rotor horizontal em mancais magnéticos ideais, sujeito a uma perturbação representada por seu desbalanceamento. Sua resposta em frequência mostra claramente que, somente com a compensação da excitação, se obtém amplitudes nulas para as chamadas "grandezas de controle" em uma pré-determinada rotação denominada "rotação de trabalho".

### MODELO MATEMÁTICO

O modelo adotado, representado na Fig.1, consiste de um eixo elástico sem massa, carregando um disco rígido, o qual é colocado assimetricamente em relação ao comprimento total do eixo. Como dados pré-estabelecidos, tem-se:

- $l^L$  = distância do disco ao mancal esquerdo
- $l$  = comprimento total do eixo
- $d$  = diâmetro do eixo
- $D$  = diâmetro do disco

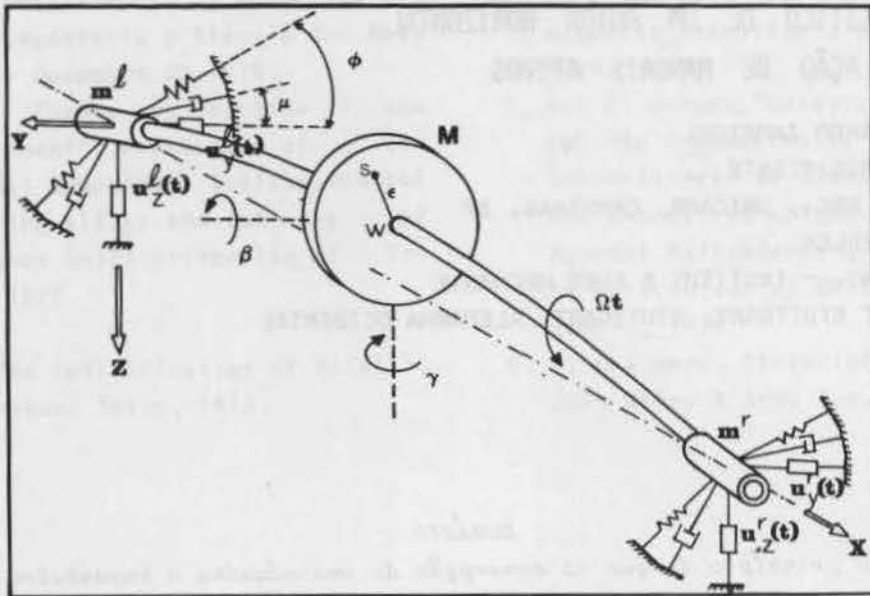


Fig. 1 - Modelo do Rotor com Mancais Ativos

- h = largura do disco
- $\alpha^L, \alpha^R$  = relação entre a massa do disco e dos mancais (esquerdo e direito, respectivamente)
- $c_y^L, c_x^L, c_y^R, c_x^R$  = valores médios das constantes de mola
- $d_y^L, d_x^L, d_y^R, d_x^R$  = valores médios dos amortecimentos
- $\phi^L, \phi^R$  = ângulo entre as constantes de mola e o sistema de referência inercial
- $\mu^L, \mu^R$  = ângulo entre os amortecimentos e o sistema de referência inercial
- $\epsilon$  = excentricidade
- $\psi$  = ângulo estático entre eixo e disco
- E = módulo de elasticidade
- $\rho$  = peso específico
- $\Omega$  = rotação do eixo

De posse destes dados obtém-se as massas ( $M, m^L, m^R$ ); os momentos de inércia ( $I, I_x, I_y$ ); os coeficientes de influência ( $c_{ijk}^i, i=L,R; j$  e  $k=1,2$ ); as assimetrias das elasticidades ( $\delta^L, \delta^R$ ) e amortecimentos ( $v^L, v^R$ ); as constantes de mola e amortecimento efetivas ( $c_{st}^i, d_{st}^i, i=L,R; s$  e  $t=y,z$ ).

**EQUAÇÃO DO MOVIMENTO**

Com os dados expostos no capítulo anterior, obtém-se a equação de estado descrita por:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + X w(t) \tag{1}$$

onde  $x(t)$  representa o vetor estado,  $u(t)$  o vetor controle e  $w(t)$  o vetor perturbação.

Explicitamente tem-se:

$$x(t) = [s^T(t) \mid \dot{s}^T(t)]^T, \tag{2}$$

$$u(t) = [u_y^L \ u_y^R \ u_x^L \ u_x^R]^T, \tag{3}$$

$$w(t) = [\cos \Omega t \mid \sin \Omega t]^T. \tag{4}$$

Aqui  $s(t)$  representa o vetor posição, constituído pelas seguintes coordenadas:

$$s(t) = [Y^L \ Y^R \mid Z^L \ Z^R \mid \beta \ \gamma]^T. \tag{5}$$

Isto significa ter o modelo 8 graus de liberdade, a saber:

- deslocamento do disco e mancais na direção Y
- deslocamento do disco e mancais na direção Z
- rotação do disco em torno de Y e Z.

Por sua vez, as matrizes apresentam a seguinte configuração:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & E_{6 \times 6} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{6a}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 4} \\ B_z \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ X_z \end{bmatrix} \quad (6b)$$

onde,

$$A_{z1} = \begin{bmatrix} \nabla_1^3 & \nabla_2^3 & 0 & | & \nabla_3^3 & 0 & 0 & | & 0 & \nabla_6^3 \\ \nabla_{10}^3 & \nabla_{10}^3 & \nabla_{10}^3 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \nabla_{10}^3 \\ 0 & \nabla_{11}^3 & \nabla_{11}^3 & | & 0 & 0 & \nabla_{11}^3 & | & 0 & \nabla_{11}^3 \\ \nabla_{12}^3 & 0 & 0 & | & \nabla_{12}^3 & \nabla_{12}^3 & 0 & | & \nabla_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \nabla_{13}^3 & \nabla_{13}^3 & \nabla_{13}^3 & | & \nabla_{13}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{14}^3 & | & 0 & \nabla_{14}^3 & \nabla_{14}^3 & | & \nabla_{14}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \nabla_{15}^3 & \nabla_{15}^3 & \nabla_{15}^3 & | & \nabla_{15}^3 & 0 \\ \nabla_{16}^3 & \nabla_{16}^3 & \nabla_{16}^3 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \nabla_{16}^3 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$A_{z2} = \begin{bmatrix} \nabla_1^2 & 0 & 0 & | & \nabla_2^2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{11}^2 & | & 0 & 0 & \nabla_{11}^2 & | & 0 & 0 \\ \nabla_{12}^2 & 0 & 0 & | & \nabla_{12}^2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{14}^2 & | & 0 & 0 & \nabla_{14}^2 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \nabla_{15}^2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & \nabla_{16}^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$B_z = \begin{bmatrix} \nabla_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{12}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_{14}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$X_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi_{10}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \chi_{13}^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \chi_{15}^1 \\ \chi_{16}^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7d)$$

Explicitamente, cada termo significa:

$$\nabla_1^3 = -(c_{11}^L + c_{yy}^L)/m^L$$

$$\nabla_2^3 = \nabla_{12}^3 = c_{11}^L/m^L$$

$$\nabla_3^3 = \nabla_{12}^3 = -c_{yz}^L/m^L$$

$$\nabla_4^3 = -\nabla_{12}^3 = -c_{12}^L/m^L$$

$$\nabla_5^3 = -d_{yy}^L/m^L$$

$$\nabla_6^3 = \nabla_{12}^3 = -d_{yz}^L/m^L$$

$$\nabla_{10}^3 = \nabla_{11}^3 = c_{11}^R/M$$

$$\nabla_{12}^3 = \nabla_{13}^3 = -(c_{11}^L + c_{11}^R)/M$$

$$\nabla_{14}^3 = \nabla_{15}^3 = c_{11}^R/M$$

$$\nabla_{16}^3 = -\nabla_{17}^3 = (c_{12}^L - c_{12}^R)/M$$

$$\nabla_{18}^3 = \nabla_{19}^3 = c_{11}^R/m^R$$

$$\nabla_{20}^3 = -(c_{11}^R + c_{yy}^R)/m^R$$

$$\nabla_{21}^3 = \nabla_{22}^3 = -c_{yz}^R/m^R$$

$$\nabla_{23}^3 = -\nabla_{24}^3 = c_{12}^R/m^R$$

$$\nabla_{25}^3 = -d_{yy}^R/m^R$$

$$\nabla_{26}^3 = \nabla_{27}^3 = -d_{yz}^R/m^R$$

$$\nabla_{28}^3 = -(c_{11}^L + c_{zz}^L)/m^L$$

$$\nabla_{29}^3 = -d_{zz}^L/m^L$$

$$\nabla_{30}^3 = -(c_{11}^R + c_{zz}^R)/m^R$$

$$\nabla_{31}^3 = -d_{zz}^R/m^R$$

$$\nabla_{32}^3 = -\nabla_{33}^3 = c_{21}^L/I_y$$

$$\nabla_{34}^3 = -\nabla_{35}^3 = -(c_{21}^L + c_{21}^R)/I_y$$

$$\nabla_{36}^3 = -\nabla_{37}^3 = -c_{21}^R/I_y$$

$$\nabla_{38}^3 = \nabla_{39}^3 = -(c_{22}^L + c_{22}^R)/I_y$$

$$\nabla_{40}^3 = -\nabla_{41}^3 = (-I_x/I_y)\Omega$$

$$\nabla_{42}^3 = \nabla_{43}^3 = 1/m^L$$

$$\nabla_{44}^3 = \nabla_{45}^3 = -1/m^R$$

$$\chi_{10}^1 = \chi_{13}^1 = e\Omega^2$$

$$\chi_{15}^1 = -\chi_{16}^1 = (1 - I_x/I_y)\psi\Omega^2$$

CONTROLE LINEAR

Considere-se para o sistema já descrito por sua equação de estado, a seguinte equação de medição:

$$\gamma(t) = C x(t), \tag{8}$$

onde  $\gamma(t)$  representa o vetor medida e a matrix  $C$  possui a seguinte configuração:

$$C = \begin{bmatrix} E_{s \times s} & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

A tarefa do controle é levar o vetor estado  $x(t)$  de um sistema controlável e observável a um dado valor (teórico) e fixá-lo neste valor. Já o controle ótimo procura uma função ótima, capaz de levar o vetor estado de uma condição inicial a um valor final, enquanto que um funcional de custo previamente adotado, assuma um valor extremo (de modo geral um mínimo).

No presente trabalho escolheu-se para critério de otimização o funcional quadrático de custo, representado por:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \tag{10}$$

onde  $Q=Q^T \geq 0$  e  $R=R^T > 0$  são as matrizes avaliadoras do controle.

O controle ótimo  $u^*(t)$  é alcançado quando  $J(u)$  assume um valor mínimo. Sua equação é representada por:

$$u(t) = -K_x x(t), K_x = R^{-1} B^T P. \tag{11}$$

onde  $P=P^T \geq 0$  é solução da equação matricial algébrica de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \tag{12}$$

A equação de estado terá, então, a seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \hat{A} x(t) + X w(t), \hat{A} = A - B K_x. \tag{13}$$

A resposta em frequência deste sistema para a direção  $y$  é mostrada na Fig. 2, enquanto que a Fig. 3 representa as rotações do disco em relação aos eixos  $y$  e  $z$ .

COMPENSAÇÃO DA EXCITAÇÃO

Para se obter a compensação da excitação em controle linear, parte-se da idéia em se modelar a perturbação através de um sistema de equações diferenciais. Neste caso adota-se o modelo proposto por Johnson em /2/:

$$w(t) = W v(t), \dot{v}(t) = V v(t), \tag{14}$$

onde  $v(t)$  descreve a dinâmica da perturbação. No presente exemplo adota-se um modelo que leva à solução dos termos senoidal e cosenoidal:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

onde  $\Omega_0$  é admitida como sendo a rotação de trabalho. Introdz-se, ainda, a seguinte equação:

$$z(t) = F x(t) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & 1 & 0 & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & 0 & 1 & | & \vdots & \vdots & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & 0_{s \times s} & \vdots & | \end{bmatrix}, \tag{16}$$

onde  $z(t)$  representa as grandezas para as quais se deseja a compensação da excitação na rotação  $\Omega_0$  pré-estabelecida.

A compensação da excitação é obtida através de uma lei de controle linear com as grandezas estimadas  $\hat{x}(t)$  e  $\hat{v}(t)$ :

$$u(t) = -K_x \hat{x}(t) - K_v \hat{v}(t), \tag{17}$$

onde  $K_x$  e  $K_v$  representam, respectivamente, as matrizes amplificadoras do controle de estado e da compensação da excitação.

Os valores estimados do estado  $\hat{x}(t)$  e da perturbação  $\hat{v}(t)$  são reconstruídos por um observador, representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & XW \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} L_x \\ L_v \end{bmatrix} (\gamma - C \hat{x}), \tag{18}$$

onde  $L_x$  e  $L_v$  representam, respectivamente, as matrizes amplificadoras do observador para o

estado e para a perturbação.

Somando-se (1), (17) e (18), obtém-se a equação matricial do sistema representada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}} \\ \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\hat{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK_X & -BK_X & -BK_V \\ 0 & A+L_X C & XW-BK_V \\ 0 & L_V C & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \\ \hat{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} W, \quad (19)$$

onde  $\tilde{X} = \hat{X} - X$  representa o chamado "erro vetor estado", ou seja, a diferença entre o valor teórico do vetor estado e o valor obtido através do observador.

Para a completa solução do sistema expresso em (19), cuja resposta em frequência se apresenta nas Figs. 4 e 5, necessita-se determinar as matrizes  $K_X$ ,  $K_V$ ,  $L_X$ ,  $L_V$ . Tal estudo foi detalhado por Müller em /8/.

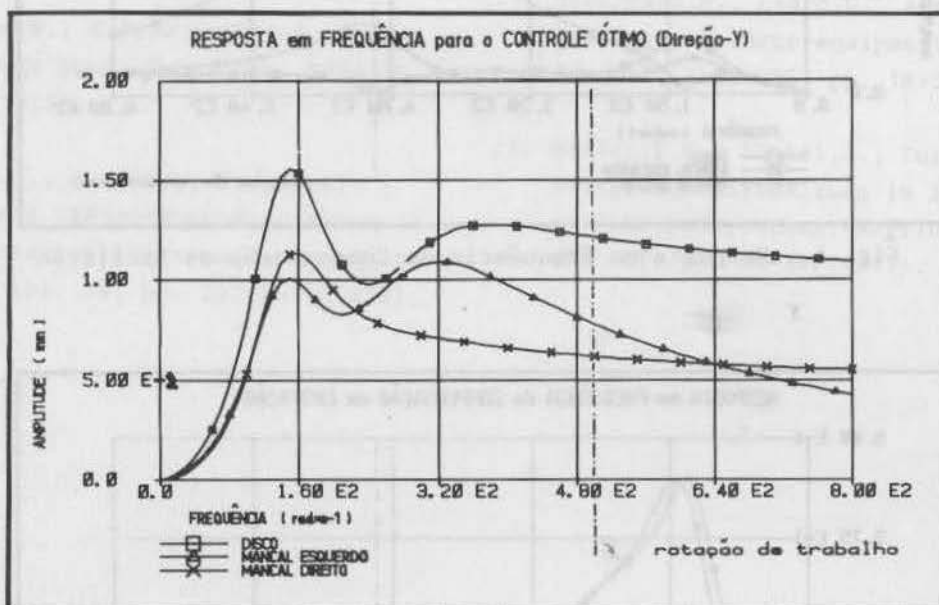


Fig. 2 - Resposta em Frequência para o Controle Ótimo

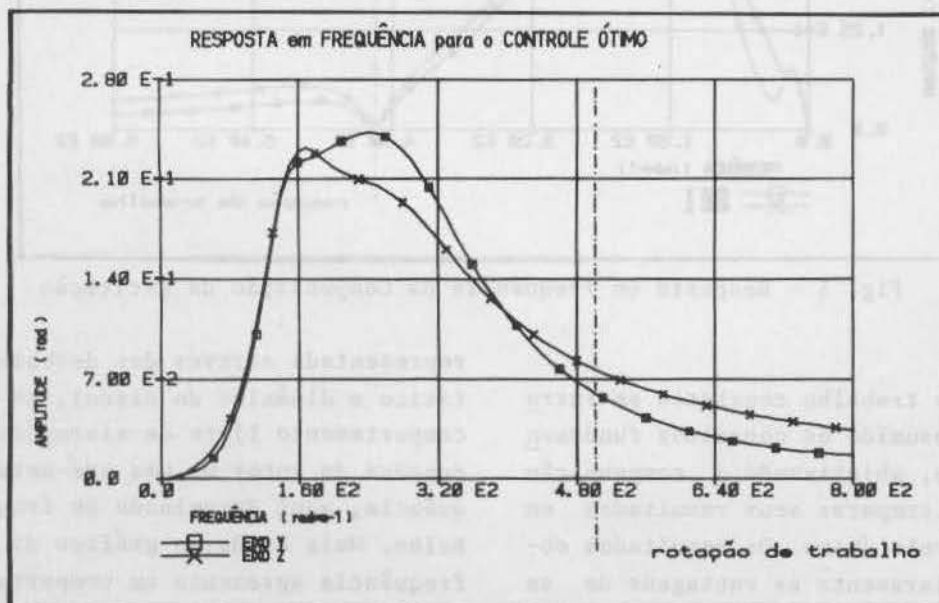


Fig. 3 - Resposta em Frequência para o Controle Ótimo



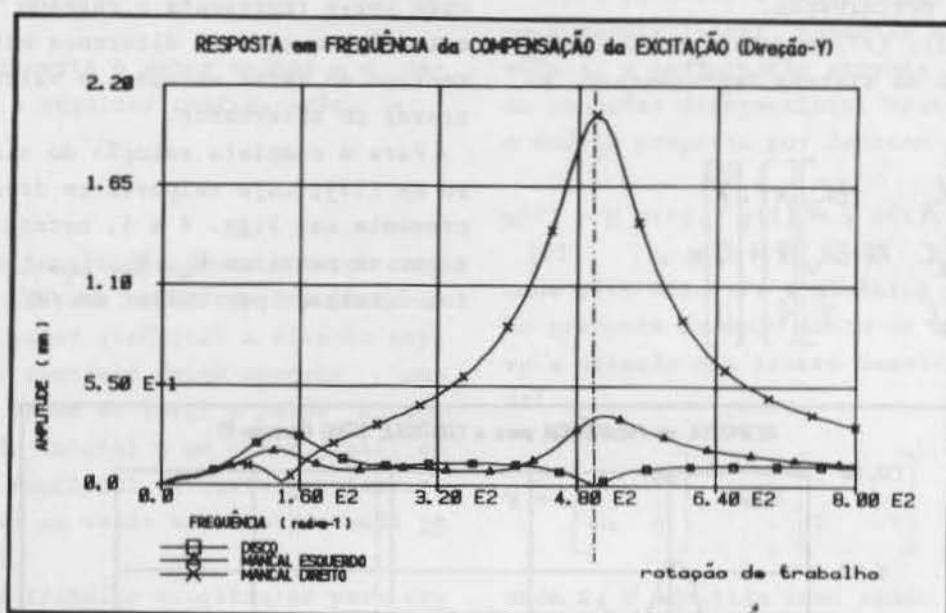


Fig. 4 - Resposta em Frequência da Compensação da Excitação

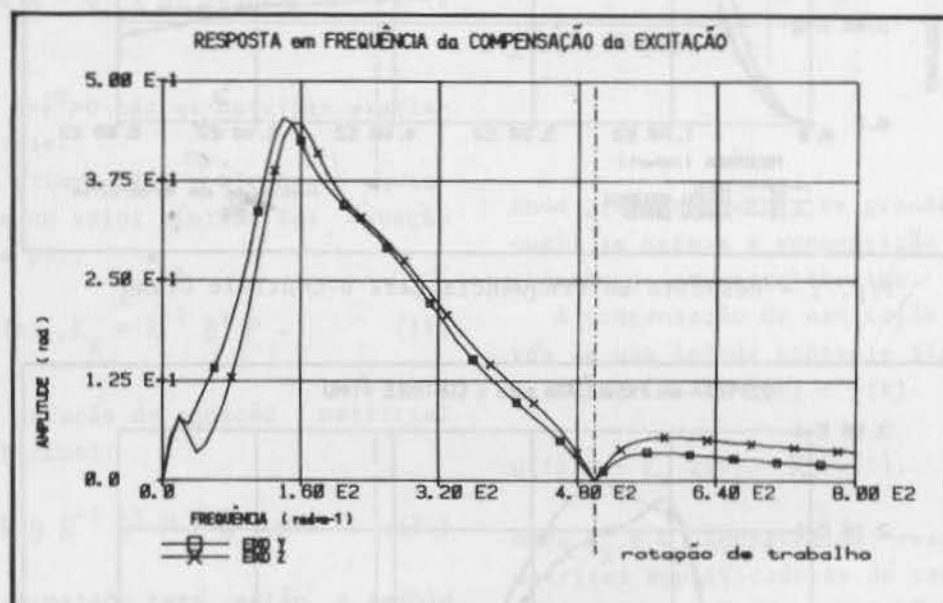


Fig. 5 - Resposta em Frequência da Compensação da Excitação

## CONCLUSÕES

O objetivo do trabalho consistiu em introduzir de modo resumido os conceitos fundamentais de controle, objetivando a compensação da excitação e, comparar seus resultados em relação ao controle ótimo. Os resultados obtidos mostram claramente as vantagens de se utilizar tal método, uma vez que somente com a total absorção da excitação (neste exemplo

representada através dos desbalanceamentos estático e dinâmico do disco), se conseguiu um comportamento livre de vibrações para as coordenadas do rotor em uma pré-determinada frequência, aqui denominada de frequência de trabalho. Mais ainda, o gráfico da resposta em frequência apresenta um comportamento acentuadamente melhor em todo domínio, quando da utilização da compensação da excitação.

## REFERÊNCIAS

- /1/ Schweitzer,G., e outros, Kreiserverhalten eines elastisch gelagerten Rotors. Ingenieur-Archiv 41, pp. 110-140 (1976).
- /2/ Jonhson,C.D., Accommodation of disturbances in optimal control problems. Int. J. of Control, Vol. 15, pp. 209-231 (1972).
- /3/ Schiehlen,W., A fine pointing system for a Large Space Telescope. NASA TN D-7500 (1973).
- /4/ Müller,P.C., e outros, Tragregelsysteme mit Störgrößenkompensation für Magnetschwebefahrzeuge. Regelungstechnik, Vol. 24, pp. 257-265 (1976).
- /5/ Schweitzer,G., Ein aktives magnetisches Rotorlager - Auslegung und Anwendung. Regelungstechnik, Vol. 26, pp. 10-15 (1978).
- /6/ Habermann,H., Liard,G., The active magnetic bearing - a revolutionary principle. Ball Bearing Journal, Vol. 192, pp. 1-7 (1977).
- /7/ Habermann,H., Liard,G., Active magnetic bearings in turbo-equipment. Ball Bearing Journal, Vol. 195, pp. 16-20 (1978).
- /8/ Müller,P.C., Lückel,J., Zur Theorie der Störgrößenaufschaltung in linearen Mehrgrößenregelsystemen. Regelungstechnik, Vol. 25, pp. 54-59 (1977).

## CONGRESSOS

## E

## ENCONTROS

1. ABCM - I SIBRAT - 1º Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão  
Data e local: 19 a 21 de Novembro de 1980  
Salvador - Bahia  
Correspondência:  
Prof. Cid Gesteira  
NST/EPUFBA  
Rua Aristides Novis, 2 - Federação  
40000 Salvador - Bahia
2. CBECIMAT - 4º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais  
Data e local: 15 a 17 de Dezembro de 1980  
Florianópolis - S. Catarina  
Correspondência:  
Prof. Berend Snoeijer  
UFSC - Caixa Postal 476  
88000 Florianópolis - S. Catarina
3. ASME - WAM - Winter Annual Meeting  
Data e local: 16 a 21 de Novembro de 1980  
Chicago - Illinois  
Correspondência:  
Secretaria da ASME  
345 East 47th. Street  
New York, N. Y. 10017 - USA
4. ANS/ASME - Nuclear Reactor Thermal-Hydraulic Topical Meeting  
Data e local: 06 a 10 de Outubro de 1980  
Saratoga - N. York  
Correspondência:  
ASME - Technical Affairs Dept.  
345 East 47th. Street  
New York, N. Y. 10017 - USA
5. CBE - 2º Congresso Brasileiro de Energia  
Data e local: 06 a 10 de Abril de 1981  
Rio de Janeiro - R. Janeiro  
Correspondência:  
COPPE/UFRJ  
Bloco C - Sala 213  
C. P. 1191 - ZC 00  
20000 Rio de Janeiro - Rio de Janeiro
6. ISIN - 1º Seminário de Instrumentação Nuclear  
Data e local: 09 a 12 de Dezembro de 1980  
Itaipava - R. de Janeiro  
Correspondência:  
Prof. Hilton Andrade de Mello  
IEN/DEIC  
C. P. 2186  
20000 Rio de Janeiro - R. de Janeiro
7. 1º Simpósio Nacional de Torotecologia  
Data e local: Abril de 1981  
São Paulo - São Paulo  
Correspondência:  
IBRAMHIS  
Rua Barão de Tatuí, 294 - 1º andar  
C. P. 54061  
01000 São Paulo - São Paulo
8. INTERNOISE 80 - 1980 International Conference on Noise Control Engineering  
Data e local: 04 a 06 de Dezembro de 1980  
Miami - Florida  
Correspondência:  
INTER-NOISE SEMINAR  
P. O. Box 3469  
Arlington Branch  
Poughkeepsie, NY 12603 - USA

9. NOISE-CON 81 - 1981 National Conference on  
Noise Control Engineering

Data e local: 08 a 10 de Junho de 1981  
Raleigh, North Carolina

Correspondencia:

Dr. Larry Roister  
Program Chairman  
Center for Acoustical Studies  
Dept. of Mech. and Aerosp. Engr.  
North Carolina State University  
Raleigh, N. C. 27650 - USA

10. ABCQ - 10 Seminário Sul-Americano de Con-  
trole de Qualidade

Data e local: 10 a 14 de novembro de 1980  
Guarujá - São Paulo

Correspondência:

Ass. Brasileira de Controle de Qualidade  
Rua Ernesta Pelosini, 22 - 2º andar  
Sala 22  
09700 São Bernardo do Campo - S. Paulo

11. ABCM - 6º Congresso Brasileiro de Engenha-  
ria Mecânica

Data e Local: Dezembro de 1981

PUC/RJ, Rio de Janeiro - RJ

Correspondencia:

Prof. Pedro Carajilescov  
PUC/RJ - Depto. Eng. Mecânica  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22453 Rio de Janeiro - RJ

