

VOL. III - Nº 1 - 1981

PATROCINADA PELA  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio  
Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea  
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

*Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.*

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1981, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

#### **Assinaturas**

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri 35 Rio Comprido  
Tel.: 284 8443  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

**REVISTA  
BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS**

**VOL. III, nº 1, 1981**



patrocinada pela

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**CONSELHO DIRETOR**

Arno Blass (Presidente); Hans Ingo Weber; Sérgio Colle;  
Guilherme Creus; Raul Guenther; Samir Nagi Youstri Gerges

**EDITOR RESPONSÁVEL**

**L. Bevilacqua**

**EDITOR EXECUTIVO**

**R. Sampaio**

**CONSELHO EDITORIAL**

**A. Blass**

**J.J. de Espíndola**

**R. A. Feijoo**

**G. A. Feldman**

**M. H. Hirata**

**L. Hsu**

**D. Mahrus**

**O. Maizza Neto**

**G. Massarini**

**F. E. M. Saboya**

**J. T. Sielawa**

**F. Venâncio Filho**

**Editorial**

**III**

**Mistura Simples de Fluido Não Viscoso e Sólido Rígido**

**Rubens Sampaio**

Prof. Associado PUC/RJ

**Gilberto Kremer**

UFPr

**1**

**Mancal de Folha**

**Sergio E. Gonçalves**

Pesquisador COPPE/UFRJ

**7**

**Estimação Linear Ótima Aplicada à Geração de Método Direto de Busca em Otimização de Parâmetros**

**Atair Rios Neto**

CNPq-INPE

**11**

**Aplicação das Funções de Coerência ao Problema da Identificação de Fontes de Vibração**

**José Roberto de F. Arruda**

Deptº de Tecnologia Mecânica, CT, UFPb

**15**

**Fenômenos Concorrentes com a Deformação Plástica Durante a Relaxação de Tensões (Parte I)**

**Paulo Emilio Valadão de Miranda**

**Sergio Neves Monteiro**

Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais COPPE/UFRJ

**23**

**Análise Constitutiva Através da Relaxação do Titânio A Fenomenologia de Hart (Parte II)**

**Paulo Emilio Valadão de Miranda**

**Sergio Neves Monteiro**

Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais COPPE/UFRJ

**31**

**O Vetor Velocidade Angular Via um Problema de Minimização**

**Luiz C. Martins**

Programa de Engenharia Mecânica COPPE/UFRJ

**Pius P. de Macedo Soares**

Nuclebrás/RJ

**41**

**EDITORA CAMPUS**

Agradecemos ao CNPq pela  
sua contribuição decisiva  
na publicação desta revista.

## EDITORIAL

Com este número a ABCM inicia uma nova fase da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas. Evoluímos muito, e hoje a quantidade e a qualidade dos artigos que nos são enviados justificam uma maior frequência da Revista, que será de quatro números por ano.

Voltamos a insistir na necessidade de tornar acessível, cada vez mais, à comunidade técnico-científica os resultados dos trabalhos de pesquisas realizadas no Brasil, seja básica, aplicada ou de desenvolvimento tecnológico. A evolução da crise econômica que já há algum tempo aflige o Brasil, mantida a situação vigente, acarretará decerto uma ainda maior dependência tecnológica. Sem dúvida, essa é uma situação insuportável. Muitas são as denúncias feitas, algumas tímidas, outras agressivas, mas que em geral são acusadas de não apresentarem propostas positivas para a solução dos graves problemas que enfrentamos. Apresentaremos uma proposta positiva.

Obviamente a solução terá que ser brasileira, é ingenuidade esperar que ela venha de fora. Na verdade, é impossível que ela venha de fora, pois conhecimento (tecnologia) não se adquire com dinheiro, mas sim com o emprego de muito esforço.

A solução é o aproveitamento do enorme potencial de recursos humanos altamente qualificado que existe no Brasil, embora sub-utilizado, na geração da tecnologia de que tanto necessitamos.

Isso exigiria um esforço conjunto. Dos empresários em procurar os Centros de Pesquisa e Universidades para apresentarem os seus problemas, e destes para resolverem esses problemas e de apresentarem, também, sugestões de como melhorar nossa indústria.

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas pretende catalizar esse processo de aproximação empresário-pesquisador mostrando onde se encontram os recursos humanos brasileiros, o que fazem, quais as áreas que trabalham.

Este veículo de comunicação precisa ser bem compreendido. O que pretendemos não é editar um album de promoção de pesquisadores mas um instrumento que seja verdadeiramente útil para construir o nosso desenvolvimento científico e tecnológico. Por outro lado, é preciso que a comunidade entenda que para se comer "filet de peixe" é preciso pescar muita "tainha". Talvez em 10 ou 20 trabalhos somente um seja de grande impacto. Mas este só aparece se os outros existirem. É assim mesmo que evolui o processo de desenvolvimento científico e tecnológico.

Estamos certos de que o progresso desta revista trará benefícios muito grandes para a geração de tecnologia. Não há mais dúvidas que uma tecnologia rentável só pode ter sucesso se apoiada em pesquisa intensiva. Esta afirmação traduz-se concretamente no quadro abaixo:

Balança Comercial dos EUA para Produtos Manufaturados  
com Pesquisa e Desenvolvimento Intensivos e Não Intensivos  
(em milhões de dólares)

ANO	INTENSIVO			NÃO INTENSIVO		
	Saldo	Export.	Import.	Saldo	Export.	Import.
1972.....	11.012	22.693	10.991	-15.039	11.737	26.776
1973.....	15.101	29.388	13.987	-15.370	15.643	31.013
1974.....	23.873	41.111	17.238	-15.573	22.412	37.985
1975.....	29.344	46.429	17.095	- 9.474	24.511	33.985
1976.....	28.964	50.830	21.866	-16.499	26.411	42.910
1977.....	27.627	53.169	25.542	-24.378	27.284	51.662

Fonte: Science Indicators - 1978 . NSF 1979

Fica claro que o caminho da solidez e rentabilidade está numa pesquisa intensiva que permite uma constante renovação e melhor utilização dos recursos. Não há outro caminho.

Convidamos portanto a todos aqueles que estão produzindo nas áreas de ciências mecânicas e engenharia mecânica a publicarem os seus trabalhos para que os frutos deste intercâmbio possam ser acelerados servindo de base para a construção da nossa própria tecnologia.

Queremos expressar a nossa gratidão ao CNPq, pelo apoio substancial que deu a esta iniciativa e que permitiu a intensificação da frequência de publicação da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas.

Devemos também ao Professor Rubens Sampaio Filho os nossos agradecimentos pela sua colaboração decisiva na reformulação do projeto editorial da Revista para este ano de 1981.

Luiz Bevilacqua

Editor

# MISTURA SIMPLES DE FLUIDO NÃO VISCOSO E SÓLIDO RÍGIDO

RUBENS SAMPAIO  
 PROF. ASSOCIADO PUC/RJ  
 GILBERTO KREMER  
 UFPr

## SUMÁRIO

*Desenvolve-se um modelo teórico para a condução de calor em misturas simples constituídas de um fluido não viscoso e de um sólido rígido isotrópico. O modelo baseia-se na hipótese de que a força resistiva e o fluxo de calor são, respectivamente, funções homogêneas do primeiro grau da velocidade do fluido e do gradiente de temperatura.*

## INTRODUÇÃO

Em [1] estudamos o tensor condutividade térmica em meios porosos rígidos. As hipóteses acerca do fluxo de calor foram: i) o fluxo de calor  $h$  depende das variáveis vetoriais: velocidade do fluido  $v$  e gradiente de temperatura  $g$ ; ii)  $h = \bar{h}(v, g)$  é isotrópica; iii)  $\bar{h}$  é uma função homogênea do primeiro grau do gradiente de temperatura, i.e.,  $\bar{h}(v, \lambda g) = \lambda \bar{h}(v, g)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .

O objetivo do presente trabalho é ampliar o modelo de modo a englobar todo o comportamento termomecânico de uma mistura de sólido rígido com um fluido não viscoso. Para tanto, supomos que os termos constitutivos dependem, além das variáveis vetoriais acima enunciadas, das variáveis escalares: densidade do fluido e temperatura da mistura.

Sob o ponto de vista da Teoria de Misturas, a mistura aqui estudada, denomina-se, segundo Müller [2], de mistura simples pois, não incluímos o gradiente de densidade do fluido como variável independente.

Supomos ainda que a força resistiva é uma função homogênea de primeiro grau da velocidade do fluido e, a exemplo do fluxo de calor,

provamos que fica completamente determinada por três funções materiais.

Exploramos também a desigualdade entrópica e obtemos algumas desigualdades para as funções materiais. Embora algumas desigualdades possam parecer óbvias sob o ponto de vista do experimentador, prová-las analiticamente não é uma tarefa simples e esse fato deve ser considerado com bastante atenção.

A notação usada neste trabalho segue [1], e definimos a derivada material de uma função  $f_\alpha$ , escalar ou vetorial por:

$$\dot{f}_\alpha = \partial_t f_\alpha + (\text{grad } f_\alpha) v_\alpha,$$

onde  $v_\alpha$  é a velocidade do componente  $\alpha$  da mistura.

## EQUAÇÕES DE BALANÇO

Com base em [3] adotamos, para cada constituinte, as seguintes equações de balanço, válidas para pontos regulares na mistura:

### Balanço de Massa

$$\dot{\bar{\rho}}_\alpha + \rho_\alpha \text{div } v_\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\rho_1(\partial_\theta \psi_1 + n_1) = -\rho_2(\partial_\theta \psi_2 + n_2) = \chi(\theta).$$

Obviamente  $\chi(\theta) = 0$ , o que finaliza a prova do teorema.

A equação (10)<sub>1</sub> é uma consequência direta, para misturas simples, da desigualdade entrópica (equação (5)) e pode ser verificada através da equação (7)<sub>4</sub>.

Nas condições do teorema, podemos escrever a desigualdade residual (equação (7)<sub>7</sub>) como:

$$(h.g)/\theta + m.v \leq 0 \quad (11)$$

Supomos adicionalmente que  $h$  e  $m$  são funções homogêneas de grau zero em  $v$  e  $g$ , respectivamente. Essa hipótese significa que os coeficientes  $\kappa_T$  são independentes de  $|v|$  e os  $\alpha_T$  independente de  $|g|$ . Se, na equação (11), substituirmos  $g$  por  $\lambda_1 g$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $v$  por  $\lambda_2 v$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  e levarmos em conta as equações (9)

$$\lambda_1^2(h.g)/\theta + \lambda_2^2 m.v \leq 0.$$

A desigualdade acima será válida se e só se:

$$h.g \leq 0 \quad \text{e} \quad m.v \leq 0, \quad (12)$$

pois  $\theta > 0$ .

Substituindo em (12)<sub>1</sub> as equações (9)<sub>1,2</sub> e em (12)<sub>2</sub> as equações (9)<sub>3,4</sub>, obtemos:

$$A X^2 + B X + C \geq 0 \quad (13)$$

onde:

$$X = \frac{g}{|g|} \cdot \frac{v}{|v|}, \quad X \in [-1, 1],$$

$$\tau_T = \kappa_T \quad \text{ou} \quad \alpha_T,$$

$$A = \frac{\tau_1 + \tau_{-1} - 2\tau_0}{2},$$

$$B = \frac{\tau_1 - \tau_{-1}}{2},$$

$$C = \tau_0.$$

Fazendo em (13), sucessivamente,  $X=0, 1, -1$ , obtemos, respectivamente, que:  $\tau_0 \geq 0$ ,  $\tau_1 \geq 0$  e  $\tau_{-1} \geq 0$ , isto é, as resistividades e as condutividades térmicas são todas positivas.

Para continuar a análise é conveniente dividir (13) por  $X^2$  e escrevê-la na forma:

$$C Y^2 + B Y + A \geq 0,$$

onde  $C \geq 0$  e  $Y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

Existem duas possibilidades para a desigualdade acima:

1ª)  $B^2 - 4AC \leq 0$ , o que implica em:

$$\frac{|\tau_1 - \tau_{-1}|}{2} \leq 2\tau_0 \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_{-1}}{2\tau_0} - 1},$$

e por sua vez em:

$$\frac{\tau_1 + \tau_{-1}}{2} \geq \tau_0. \quad (14)$$

2ª)  $B^2 - 4AC > 0$ , com raízes no intervalo  $[-1, 1]$ , isso é,

$$\left| \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \right| \leq 1.$$

A segunda possibilidade é inconclusiva, portanto o resultado da primeira deve ser tomado como sendo apenas uma conjectura e não um resultado. Para compreender que esse resultado nunca poderá ser provado basta tomar  $\tau_1 = \tau_{-1} = 1$  e  $\tau_0 = 5$  e verificar que a desigualdade (14) é violada, porém a equação tem duas raízes no intervalo  $[-1, 1]$ .

Frisamos, mais uma vez, que (14) não é um resultado como aparece em [5,6] mas uma conjectura, a qual julgamos, inclusive, ser falsa.

#### REFERÊNCIAS

1. Kremer, G.M. e Sampaio F9, R., "Sobre o Tensor Condutividade Térmica em Meios Porosos Rígidos", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, 1, 21-25, 1979.

2. Müller, I., "A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids", Arch. Rat. Mech. Anal, 28, 1-39, 1968.
3. Truesdell, C.A., "Rational Thermodynamics", Mc Graw-Hill, New York, 1969.
4. Müller, I., "Thermodynamik, die Grundlagen der Materialtheorie", Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, 1973.
5. Telles, A.S. e Massarani, G., "Condução de Calor em Meios Porosos III: Nova forma para a Condutividade", Anais do III Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Maringá, PR, 1975.
6. Freire, J.T., "Transferência de Calor em Meios Porosos", COPPE/UFRJ, PTS 08/79, Rio de Janeiro, RJ, 1979.

# MANCAL DE FOLHA

SERGIO E. GONÇALVES  
PESQUISADOR COPPE/UFRJ

## SUMÁRIO

Foi construído um banco de teste para mancais radiais de folha. Um eixo é suportado axialmente por um mancal de escora lubrificado a ar e radialmente por dois mancais de folha, constituído cada um por 3 segmentos que envolvem o eixo; nas superfícies de contato é injetado ar sob pressão de modo a se obter a separação. Mede-se a separação em função da pressão de ar injetado e da tensão nas folhas. Verifica-se a estabilidade do eixo girando a uma velocidade de até 16.200 rpm.

## INTRODUÇÃO

Mancais de folha têm sido estudados teórica e experimentalmente desde há cerca de 25 anos (1). Entretanto, o maior impulso veio como aplicação das máquinas de processamento de dados eletrônicos, onde surge o problema da movimentação de fitas magnéticas e da gravação sobre materiais flexíveis. Mais recentemente foram realizados estudos visando a utilização deste tipo de mancal como suporte de rotores de alta velocidade (2). Licht (3) estudou um tipo de mancal de folha em um rotor girando com velocidade de até cerca de 60.000 rpm.

O objetivo do presente trabalho foi testar a viabilidade da construção e o comportamento de um mancal de folha de três gomos semelhante ao testado por Licht (3), utilizando uma folha mais espessa (0,15mm) e de material facilmente encontrável no mercado, com injeção de ar através da folha, bem como testar a ocorrência ou não da auto-lubrificação.

## DESCRIÇÃO DO MANCAL E BANCO DE TESTE

A estrutura do banco de testes é formada por quatro colunas de cantoneiras de aço dispostas nos vértices de um quadrado de 200 mm de lado e apoiadas sobre uma mesa de aço. Nestas colunas estão fixadas duas plataformas quadradas, providas de um furo central por onde passa o rotor. O rotor é um cilindro em posição vertical com diâmetro de 60 mm e comprimento de 400 mm, feito em aço inoxidável austenítico e pesando aproximadamente 10 kgf. O rotor é sustentado na parte inferior por um mancal de escora lubrificado a ar, e por dois mancais radiais de folha.

Os mancais radiais são montados sobre as plataformas, na extremidade inferior outra na extremidade superior do eixo. Uma terceira plataforma, colocada no topo da estrutura, serve de suporte para o motor a ar comprimido usado para girar o rotor.

O mancal estudado é um mancal radial pressurizado lubrificado a ar. É constituído por 3 fo-

lhas de bronze fosforoso, com espessura de 0,15 mm e largura de 40 mm que envolvem o eixo, cada uma abrangendo uma região de 60° em torno do eixo e igualmente espaçadas. As 3 folhas têm as suas extremidades presas juntas duas a duas e tensionadas por três tirantes igualmente espaçados ao redor do eixo. O tensionamento de cada tirante é feito por uma mola helicoidal e uma porca que ao ser apertada contra a mola, permite uma regulagem da tensão (ver figura 2).

O ar é injetado no mancal através de tubos de cobre de 3,2 mm de diâmetro externo, de 1,7 mm de diâmetro interno, soldados na parte externa de cada folha, dois em cada região de contato (ver figura 3).

Em cada tubo são feitos 3 furos de 0,3 mm de diâmetro que atravessam também a folha na região soldada ao tubo. Assim, em cada região de contato, existem 6 furos de injeção de ar entre a folha e o eixo.

O ar comprimido é controlado por três válvulas reguladoras de pressão independentes: uma para o mancal de escora, uma para o motor e outra para os dois mancais radiais.

## FABRICAÇÃO

**Fabricação do rotor.** O rotor foi usinado em aço inoxidável austenítico, com acabamento inicial feito no torno.

O eixo foi lapidado nas regiões dos mancais de forma a reduzir a rugosidade de um valor de cerca de  $R_a = 10 \mu\text{m}$  para  $R_a = 0,4 \mu\text{m}$  ( $R_a$  desvio médio aritmético). Para isso a última lapidação foi feita com pó abrasivo nº 2.000.

**Fabricação do mancal de folha.** As três folhas de cada mancal, depois de cortadas com as dimensões finais e presas nos dispositivos de fixação das extremidades, foram montadas em torno de um cilindro de madeira, do mesmo diâmetro do eixo com a finalidade de soldar os tubos

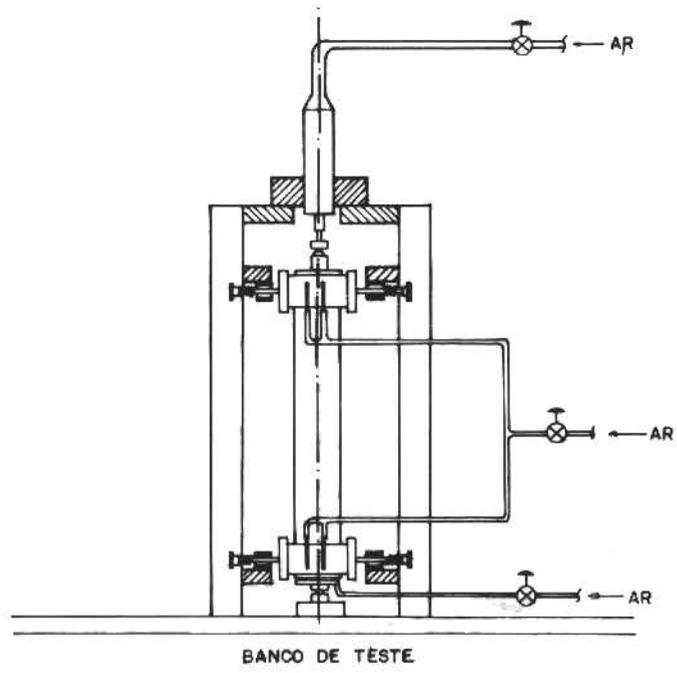


figura 1

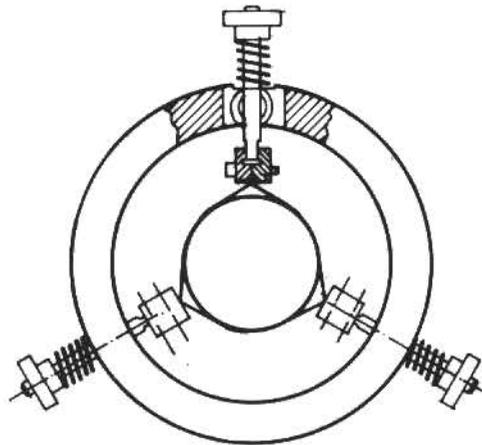


figura 2

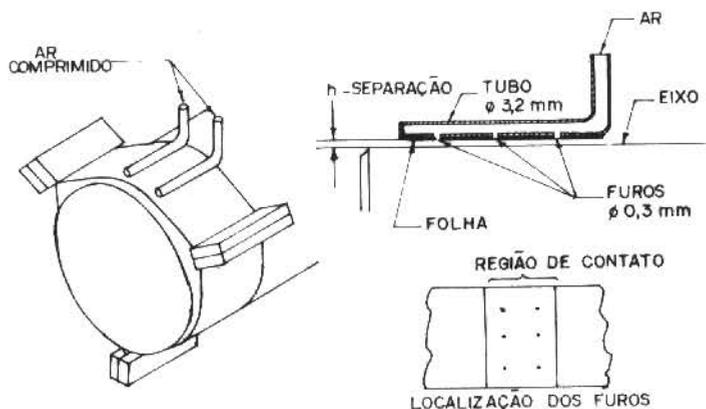


Figura 3

de injeção de ar. A solda é feita com estanho. Depois de soldados os tubos e feitos os furos, foi dado o último passo na lapidação do eixo utilizando o próprio mancal como lapidador.

#### TESTES

O rotor foi posto a girar com o objetivo de verificar a estabilidade do sistema e a ocorrência ou não da operação auto-lubrificada. A velocidade de rotação foi medida com a utilização de luz estroboscópica. Também foi medida a separação entre as folhas e o rotor em função da pressão de alimentação e da tensão nos tirantes, com o rotor parado.

**Estabilidade.** Entre 0 e 2.000 rpm, o sistema atravessa faixas de ressonância. Foi necessário acrescentar dispositivos que introduzissem atrito no movimento dos tirantes, para dissipar energia no movimento vibratório. Depois que a velocidade ultrapassa essa faixa, o sistema se apresenta estável.

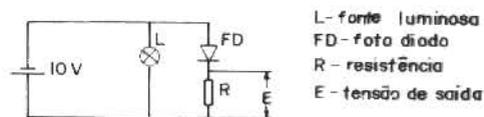
**Auto-lubrificação.** O rotor foi posto a girar a uma velocidade máxima de 16.200 rpm, nas seguintes condições: Pressão de alimentação do mancal de escora: 4 kgf/cm<sup>2</sup>; Pressão de alimentação dos mancais radiais: 3,5 a 4 kgf/cm<sup>2</sup>; Tensão nos tirantes: ≈ 2 kgf; Pressão de alimentação do motor: 4 kgf/cm<sup>2</sup>; Velocidade 16.200 rpm.

Até esta velocidade não foi constatada a ocorrência da auto-lubrificação. Qualquer diminuição na pressão de alimentação produz um aumento de atrito e consequente queda de velocidade.

**Separação entre a folha e o rotor.** A separação entre o rotor e uma das folhas do mancal, foi medida no centro da região de contato de uma das folhas do mancal inferior para diversos valores da pressão de alimentação e da tensão nos tirantes.

As medidas foram feitas utilizando um transdutor de deslocamento fotoelétrico. Uma lâmina presa ao centro da folha se desloca solidá-

ria com esta e se interpõe entre uma fonte luminosa e uma foto diodo, obtendo-se uma tensão de saída representativa do deslocamento que se deseja medir. Este dispositivo é previamente calibrado, permitindo medir deslocamentos na faixa de 100 μm (ver figura 4).



L- fonte luminosa  
FD- foto diodo  
R- resistência  
E- tensão de saída

Figura 4

O gráfico da figura 5 mostra a variação da separação em função da pressão de alimentação para diversos valores da tensão nos tirantes.

Pode-se observar que a partir de uma pressão de alimentação de aproximadamente 1 kgf/cm<sup>2</sup> as curvas se apresentam uniformes, isto é, se guem aproximadamente paralelas para os diversos valores da tensão. Observa-se também que para uma pressão intermediária de 3 kgf/cm<sup>2</sup> por exemplo, a separação se mantém entre 40 e 55 μm para a tensão variando entre 2 e 4,5 kgf.

#### CONCLUSÕES

O mancal funciona no regime pressurizado e tem um comportamento estável a partir de 2.000 rpm até 16.200 rpm. A introdução de amortecimento para dissipar energia do movimento vibratório dos tirantes possibilitou ultrapassar as faixas de instabilidade sem problemas. Não foi observada a ocorrência da auto-lubrificação até a velocidade de 16.200 rpm. Uma explicação para isso pode ser a existência de imperfeições nas folhas, impedindo a adequada acomodação em torno do eixo. Medidas com o rotor parado mostram que a partir de 0,75 kgf/cm<sup>2</sup> de pressão de alimentação é obtida a separação entre as folhas e o rotor para uma tensão nos tirantes de até 4,5 kgf, demonstrando a possibilidade de operação com pressões bai-

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1^T = -\alpha L_{\bar{X}} \quad (2.3)$$

$$M(\bar{X} + x_2) - M(\bar{X}) = -\beta M(\bar{X})$$

onde,  $L_{\bar{X}} \triangleq \frac{d}{d\bar{X}} L(\bar{X})$ , vetor gradiente;  $0 < \beta \leq 1$ ;  $\alpha > 0$ .

Assim, o problema que se coloca é o de se determinar o deslocamento  $x$ , de forma a se caminhar na direção da solução, isto é, de modo a se satisfazer ao critério de, simultaneamente, se aproximar do valor mínimo de  $L(X)$  e da satisfação dos vínculos,  $M(X)$ .

### 3. FUNDAMENTOS DO MÉTODO

Para valores de  $\|x\|$  e  $q$  suficientemente pequenos, resulta

$$M_{\bar{X}} x + o(2) = -q M(\bar{X}) \quad (3.1)$$

onde,  $M_{\bar{X}} = \frac{d}{d\bar{X}} M(\bar{X})$  e  $o(2)$  representa os termos de ordem superior.

Sob as hipóteses em que a equação acima foi obtida,  $o(2)$  é tal a estar dentro da faixa de erro desprezível nas computações numéricas envolvidas, isto é, confunde-se com o vetor zero numérico de ordem  $m$ . Por outro lado, é razoável modelar-se este vetor zero numérico como um vetor aleatório, de componentes não correlacionadas, de média nula, uniformemente distribuído na faixa de erro desprezível, isto é,

$$M_{\bar{X}} x + \epsilon_M = -q M(\bar{X}) \quad (3.2)$$

onde

$$E(\epsilon_M) = 0, E(\epsilon_M \epsilon_M^T) = \text{diag.}(\alpha_{m1}^2, \alpha_{m2}^2, \dots, \alpha_{mm}^2) = R$$

Dada a hipótese de distribuição uniforme para  $\epsilon_M$  e sendo  $e_m > 0$ , o máximo erro numérico desprezível, tem-se:

$$\alpha_{mi}^2 = \frac{1}{3} e_m^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

Para satisfação da exigência correspondente à equação (2.3) e para garantir que o deslocamento  $x$  seja suficientemente pequeno, é razoável considerar-se a condição a seguir, para  $\epsilon_L$ , uniformemente distribuído e de componentes não correlacionadas,

$$-p L_{\bar{X}}^T = x + \epsilon_L, \quad 0 < p \leq 1 \quad (3.4)$$

$$E(\epsilon_L) = -\frac{1}{2} p (L_{\bar{X}}^T)^T = \bar{\epsilon}_L$$

$$E((\epsilon_L - \bar{\epsilon}_L)(\epsilon_L - \bar{\epsilon}_L)^T) = \text{diag.}(\alpha_{L1}^2, \alpha_{L2}^2, \dots, \alpha_{Ln}^2) = \bar{P}$$

$$\alpha_{Li}^2 = \frac{1}{12} (p L_{\bar{X}_i})^2 + \frac{1}{3} e_L^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

onde  $e_L$  é o valor do erro numérico admissível nas componentes de  $x$ , compatível com o erro  $e_m$ , como explicado mais adiante (Eq.3.8). Por outro lado, subtraindo-se  $\bar{\epsilon}_L$ , membro a membro, na equação (3.4),

$$-\frac{1}{2} p L_{\bar{X}}^T = x + \epsilon_L \quad (3.6)$$

$$E(\epsilon_L) = 0, E(\epsilon_L \epsilon_L^T) = \bar{P} \quad (3.7)$$

O valor de  $e_L$  deve ser escolhido de modo a se garantir a prioridade de satisfação dos vínculos (Eq.(3.2). Para tanto, impõe-se que

$$E(M_{\bar{X}} \epsilon_L \epsilon_L^T M_{\bar{X}}^T) \gg E(\epsilon_M \epsilon_M^T) \quad (3.8)$$

$$E(\epsilon_L) = 0, E(\epsilon_L \epsilon_L^T) = \frac{1}{3} e_L^2 I_n$$

ou, para  $\beta \gg 1$ , tal que  $\beta e_m$  seja o erro admissível para os vínculos, é razoável considerar-se

$$e_L = \text{Max.}\{e_{Li} : (\sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial X_j} M_j(\bar{X}))^2) e_{Li}^2 = \beta^2 e_m^2, \quad i = 1, 2, \dots, m\} \quad (3.9)$$

O valor de  $q$  deve ser escolhido a partir do valor de  $p$ , de modo a se garantir a hipótese de perturbação linear. Assim, é razoável considerar-se:

$$q = \text{Min.} \{q_i : q_0 = 1, q_i^2 M^T(\bar{X}) \cdot M(\bar{X}) =$$

$$p^2 ((M_{\bar{X}} L_{\bar{X}}^T)^T (M_{\bar{X}} L_{\bar{X}}^T) + e^2 (M_{\bar{X}} l_n)^T (M_{\bar{X}} l_n))\}$$

$$K_i = P^i h_i^T R_i^{-1} \quad (4.9)$$

$$P^i = \bar{P}^i - \bar{P}^i h_i^T (h_i \bar{P}^i h_i^T + R_i)^{-1} h_i \bar{P}^i \quad (4.10)$$

$$\bar{P}^{i+1} = P^i$$

onde  $l_n$  é o vetor de ordem n, de componentes unitárias.

#### 4. MÉTODO PROPOSTO

Numa iteração típica, a consideração simul-tânea das Eqs. (3.2) e (3.6), para determinação de x, leva ao seguinte problema de estimação com informação a priori,

$$\bar{x} = x + \epsilon_L \quad (4.1)$$

$$z = Hx + \epsilon_M \quad (4.2)$$

onde  $\bar{x} \triangleq -\frac{1}{2} p L_{\bar{X}}^T$ ,  $z \triangleq -q M(\bar{X})$ ,  $H \triangleq M_{\bar{X}}$

A solução do problema anterior pode ser obtida por estimação linear [1-3], através da utilização do filtro de Kalman para se estimar o valor do incremento x.

$$\hat{x} = \bar{x} + K(z - H\bar{x}) \quad (4.3)$$

$$K = P H^T R^{-1} \quad (4.4)$$

$$P = \bar{P} - \bar{P} H^T (H \bar{P} H^T + R)^{-1} H \bar{P} \quad (4.5)$$

onde  $\hat{x}$  é o valor estimado para o incremento; R e  $\bar{P}$  são matrizes de covariâncias dos erros, como definidas nas Eqs. (3.2) e (3.4).

Por outro lado, o fato do vetor aleatório,  $\epsilon_L$ , ser independente do vetor aleatório,  $\epsilon_M$ , e deste último ter componentes não correlacionadas, permite tratar o problema de uma outra forma, pela estimação de x como o estado de um processo de múltiplos estágios, como indicado a seguir.

$$\bar{x}^{i+1} = \bar{x}^i, \bar{x}^1 = \bar{x}, \bar{P}^1 = \bar{P} \quad (4.6)$$

$$z_i = h_i x + \epsilon_{Mi} \quad (4.7)$$

$$\hat{x}^i = \bar{x}^i + K_i (z_i - h_i \bar{x}^i) \quad (4.8)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $H^T = (h_1^T : h_2^T : \dots : h_m^T)$ ;  $z^T = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ ;  $\epsilon_M^T = (\epsilon_{M1}, \epsilon_{M2}, \dots, \epsilon_{Mm})$ ;  $R_i = E(\epsilon_{Mi}^2)$ ; e, naturalmente,  $\hat{x}^m = \hat{x}$ ,  $P^m = P$ , resultados idênticos aos das Eqs. (4.3) e (4.5).

Vê-se, portanto, que a determinação do incremento x ficou reduzida a uma estimação sequencial em que as componentes de z são processadas uma a uma. Desta forma, a matriz a ser invertida, na Eq. (4.10), é de ordem um, evitando-se, assim, o problema de inversão existente para a solução na forma das Eqs. (4.3) a (4.5).

Antes de se proceder a uma nova iteração é preciso fazer as verificações a seguir, para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

i) Se  $|M_i(\bar{X})| \leq \beta e_m$  passa-se diretamente à verificação (iii); caso contrário, passa-se à verificação seguinte.

ii) Se  $|M_i(\bar{X} + \hat{x})| \leq |M_i(\bar{X})|$ , então  $x = \hat{x}$  e procede-se a uma nova iteração,  $\bar{X}$  novo sendo  $\bar{X} + \hat{x}$ ; caso contrário diminui-se p e recalcula-se  $\hat{x}$ .

iii) Se  $|M_i(\bar{X} + \hat{x})| \leq \beta e_m$  e  $L(\bar{X} + \hat{x}) < L(\bar{X})$  passa-se à verificação seguinte; caso contrário diminui-se p e recalcula-se  $\hat{x}$ .

iv) Se a verificação anterior for satisfeita e

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} M_i(\bar{X}) p L_{\bar{X}j} \right)^2 < \beta^2 e_m^2 / 3,$$

a solução convergiu; caso contrário procede-se a uma nova iteração, com  $\bar{X}$  novo.

#### 5. TESTE NUMÉRICO

O critério adotado na escolha do exemplo numérico de aplicação do método foi o de testar o seu funcionamento e, ao fazê-lo, utilizar um exemplo simples, de modo a facilitar ao leitor, interessado em se familiarizar com a mecânica de funcionamento do procedimento, a re-

produção dos resultados obtidos. O exemplo seccionado tem solução analítica e é encontrado, na literatura, resolvido por um método gradiente clássico, de primeira ordem [4]. Assim, além da facilidade de verificação dos resultados, tem-se a possibilidade de avaliar o desempenho do método proposto, por comparação a resultados obtidos de forma independente e relativos a outro método, considerado básico em procedimentos numéricos de busca direta, para problemas do tipo tratado.

O exemplo testado foi o apresentado a seguir.

$$\text{Minimizar : } L(X) = -X_1 X_2 \quad (5.1)$$

$$\text{Sujeito a: } M(X) = X_1^2 + X_2^2/4 - 1 = 0 \quad (5.2)$$

A solução numérica, apresentada na Tabela 1, foi obtida com a utilização de uma calculadora Sharp, tipo ELSI MATE EL-5805. Com os valores escolhidos para os parâmetros de ajuste do procedimento e para a precisão de cálculo adotada, a solução convergiu em 11 iterações. Para efeito de verificação dos resultados apresentados, observe-se que a solução analítica do problema das Eqs. (5.1) e (5.2) é dada por

$$X_1^* = (2)^{-1/2}, \quad X_2^* = (2)^{1/2}, \quad L(X^*) = -1$$

Tab. 1 Resultados numéricos:  $e_m = 0,01$ ,  $\beta = 10$

Iteração	p	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	M(X)	L(X)
0	-	1,0000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,5	1,0000	0,25000	0,01562	-0,25000
2	0,5	0,97657	0,49338	0,01454	-0,48182
3	0,5	0,94703	0,67004	0,00910	-0,63454
4	0,5	0,90389	0,88729	0,01384	-0,80201
5	0,5	0,87176	0,98762	0,00381	-0,86096
6	0,7	0,80898	1,2020	0,01565	-0,97239
7	0,7	0,73442	1,3999	0,02930	-1,0281
8	0,7	0,59282	1,4018	0,15730	-0,83101
9	0,35	0,69768	1,4356	0,00199	-1,0016
10	0,1	0,69068	1,4473	0,00071	-0,99962
11	0,05	0,69946	1,4375	0,00585	-1,0055

A análise dos resultados mostra que o método proposto tem boas características de con-

vergência e que, para as condições de teste adotadas, é sensivelmente mais rápido que a versão básica, de um método gradiente de primeira ordem, apresentada por Citron [4], que, para a mesma precisão de resultados, gastou 22 iterações.

## 6. CONCLUSÕES

O método proposto encontra-se, ainda, na fase de teste. A qualidade dos resultados já obtidos, nas aplicações efetuadas, justifica a divulgação para a extensão e aprofundamento de sua avaliação como ferramenta de cálculo numérico, na área de controle e otimização. Cumpre destacar a característica sequencial dos procedimentos de cálculo envolvidos, que evita a necessidade de inversão de matrizes. Isto qualifica o método para a solução de problemas pelo emprego de minicomputadores e das modernas minicalculadoras programáveis.

## REFERÊNCIAS

Livros:

1. A.E. Bryson, Y.C. Ho, Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Co., 1969, pp. 348-388.
2. A. Gelb et al., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, 1974, pp. 105-142.
3. A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970, pp. 194-262.
4. S.J. Citron, Introduction to Optimal Control, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969, pp. 171-175.

# APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES DE COERÊNCIA AO PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO DE FONTES DE VIBRAÇÃO

JOSÉ ROBERTO DE F. ARRUDA

DEPTº DE TECNOLOGIA MECÂNICA, CT, UFPb

## SUMÁRIO

*A manutenção preditiva de máquinas necessita de um conhecimento das fontes de vibração internas. Um novo método é proposto para determinar as contribuições de cada fonte de excitação nos pontos de medição, quando os sinais medidos são parcialmente coerentes devido às interferências. Este método é verificado numa simulação analógica e num sistema mecânico simples, para o caso de duas fontes de excitação.*

## INTRODUÇÃO

A manutenção de máquinas sempre preocupou utilizadores e construtores, mas somente há alguns anos começou-se a tentar realmente conhecer o futuro de uma máquina, de maneira a evitar panes intempestivas e a reduzir as imobilizações necessárias à manutenção. Este problema vem se tornando cada vez mais importante, na medida em que aumentam as exigências quanto ao desempenho das máquinas (velocidades de rotação mais elevadas, esforços dinâmicos mais importantes, etc.) e, ao mesmo tempo, almeja-se uma economia sempre maior de materiais de construção mecânica. A importância do problema levou a uma sofisticação das técnicas de manutenção, reforçando a necessidade de uma manutenção do tipo preditiva.

Uma máquina emite numerosos sinais, sintomáticos de seu funcionamento (calor emitido, potência absorvida, ruídos, vibrações, etc.) e o problema consiste em, a partir destes sinais, estabelecer um diagnóstico.

Entre as informações fornecidas por uma máquina, as vibrações são de grande interesse pois são diretamente ligadas aos movimentos da máquina, são localizáveis e se transmitem rapidamente [1].

Para poder estabelecer um diagnóstico, é importante poder identificar as principais fontes de excitação a partir das vibrações medidas por diversos transdutores. O método mais simples consiste em comparar, sobre os espectros medidos, as frequências nas quais se produzem os maiores níveis de vibração às frequências próprias dos elementos que compõem o sistema mecânico estudado (frequências de engrenamento, velocidades de rotação de eixos, etc.).

Este método, entretanto, não dá bons resultados quando existem várias fontes de excitação com mesma frequência ou quando as funções de resposta em frequência entre as fontes e os pontos de medição tornam os espectros muito confusos e de difícil interpretação.

Atualmente, as funções de coerência podem resolver em parte o problema. A coerência parcial, desenvolvida por BENDAT e PIERSOL [2], aperfeiçoada na sua apresentação por triangulização por DODDS e ROSSON [3], apresentação que foi utilizada depois por BENDAT [4], permite que se obtenha as funções de resposta entre os pontos de medição ("entradas") e um determinado ponto de interesse ("saída") apesar de haver uma coerência parcial entre as "entradas". A coerência de contribuição permite esti

mar, dentre as entradas parcialmente coerentes, aquela que mais contribui à saída.

Entretanto, o problema que consiste em obter as contribuições de cada fonte de excitação num ponto de medição e que interessa mais particularmente à manutenção preditiva, continua colocado.

Desenvolveremos aqui um método que permite separar os espectros de amplitude medidos em seus principais espectros componentes (supostos estatisticamente independentes) de modo a permitir uma identificação mais fácil das fontes de excitação. Este método já foi objeto de publicação anterior [5] e apresentaremos aqui novos resultados que vêm reforçar a validade deste método.

#### MEIOS ATUAIS DE MANUTENÇÃO PREDITIVA

Os diferentes meios e métodos utilizados atualmente na indústria podem ser classificados em três grandes grupos segundo a importância da máquina (em dimensões, em preço, em interesse estratégico na instalação, em segurança) e segundo o que se quer saber de seu comportamento.

Método dos níveis de alarme. Este procedimento de controle permanente de uma máquina consiste em acompanhar a evolução do nível global de um movimento vibratório (deslocamento de um eixo em um mancal, vibração da carcaça, etc.).

Quando um certo nível pré-estabelecido é atingido, um alarme é acionado, podendo avisar o operador ou desligar automaticamente a máquina. Este procedimento é um dos mais simples que se pode aplicar, mas as informações que ele fornece são muito sucintas e colocam frequentemente o utilizador numa situação embaraçosa. De fato, este não é um método de análise e, se ele traz a vantagem de prevenir o utilizador para um funcionamento anormal da máquina, ele não permite, por si só, que se estabeleça um diagnóstico que permitirá uma decisão.

Método por trajetografia Lissajous. Lembremos seu princípio :

Dois sinais de deslocamento fornecidos por transdutores sem contato, fixados no mancal a 90° um do outro, permitem que se reconstitua, no plano, o movimento relativo eixo/mancal. Os transdutores utilizados são geralmente do tipo a correntes de Foucault (Eddy Probes), e medem a distância relativa eixo/mancal. A recomposição em x-y dos sinais num osciloscópio em figuras de Lissajous é chamada órbita ou trajetória.

Se o princípio é simples, a obtenção e interpretação de uma trajetória Lissajous apresenta vários problemas ligados a fenômenos parasitas, agrupados sob o nome de "run-out", e também ao fato de que o movimento observado é um movimento relativo, que pode esconder um grande movimento em fase do conjunto eixo/mancal. Existem hoje equipamentos eletrônicos para a eliminação do "run-out" mas seus altos custos dificultam sua aplicação mais generalizada na indústria.

Método da análise espectral. A utilização da análise espectral defronta-se principalmente com o problema da complexidade dos espectros na presença de várias fontes de excitação e complexas funções de resposta. Os espectros obtidos se tornam confusos demais para serem interpretados. Isto nos conduziu a desenvolver um método destinado a aumentar as possibilidades da análise espectral na manutenção preditiva de máquinas.

#### SISTEMAS A MÚLTIPLAS ENTRADAS

Consideremos um sistema a duas fontes de excitação, figura 1, onde os pontos de medição 1 e 2 são as "entradas" parcialmente coerentes entre elas devido às interferências, e o ponto 3 é a "saída". Este problema é tratado em toda sua generalidade, para n "entradas", por BENDAT [4].

As duas fontes de excitação,  $S_1$  e  $S_2$ , são estatisticamente independentes;  $X_1(f)$  e  $X_2(f)$  são os espectros das "entradas" 1 e 2. As  $A_{ij}(f)$  são as funções de resposta em frequência entre as fontes de excitação  $i$  e os pontos de medição  $j$ ; As  $H_i(f)$  são as funções de resposta entre as "entradas"  $i$  e um ponto de

medição de interesse, "saída",  $Y(f)$  é o espectro da "saída".

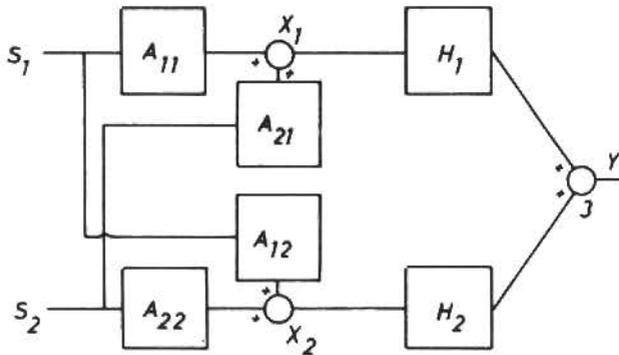


Fig. 1 Sistema a duas fontes de excitação, dois pontos de medição com interferência (entradas) e uma saída.

Funções de resposta em frequência. Sabemos que, para um sistema linear, as relações entre as entradas e a saída podem ser representadas por uma função da frequência que chamamos função de resposta em frequência.

Para sistemas não-lineares, a função de resposta que se pode obter por excitação do tipo aleatória é a melhor aproximação linear da verdadeira relação pelo critério dos mínimos quadrados [2].

Se as entradas são incoerentes entre elas, as funções de resposta podem ser definidas como a razão entre o interspectro entrada/saída ( $G_{iy}(f)$ ) e o autoespectro da entrada ( $G_{xx}(f)$ ).

$$H_{iy}(f) = \frac{G_{iy}(f)}{G_{xx}(f)} ; (\gamma_{ij}^2(f) = 0, i \neq j)$$

onde  $G_{iy}(f) = G_{x_i y}(f)$  e  $x_i$  = "entrada"  $i$ .

É importante obter sempre uma função de coerência para cada função de resposta, pois nas frequências em que a coerência entrada/saída é nula não faz sentido calcular uma função de resposta.

Se as entradas  $i$  são parcialmente coerentes entre elas, a teoria da coerência parcial permite ainda o cálculo das funções de resposta através do conceito de espectro residual [4,6]. Para o sistema da figura 1 podemos,

portanto, determinar  $H_1(f)$  e  $H_2(f)$  apesar de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  serem parcialmente coerentes devido às interferências.

Interspectros e autoespectros. Rigorosamente, é impossível obter-se experimentalmente um interspectro ou um autoespectro, pois, por definição, seria necessário um tempo de aquisição do sinal temporal infinito. Lembremos a definição de autoespectro ( $i=j$ ) e interspectro ( $i \neq j$ ) de dois sinais temporais  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$  :

$$G_{ij}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E\{X_i^*(f) X_j(f)\}$$

sendo  $X_i(f) = \int_0^T x_i(t) e^{-j2\pi ft} dt$ .

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $E$  é a esperança matemática e  $*$  de nota o conjugado de um complexo.

A estimação que se pode fazer de um espectro é  $|z|$  :

$$\bar{G}_{ij}(f) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^N X_{i_k}(f, T) X_{j_k}(f, T)$$

Onde  $N$  é o número de amostras de duração  $T$  do sinal analisado.

Funções de coerência. No caso de sistemas de 1 entrada/saída, ou quando as entradas são completamente incoerentes, é a função de coerência ordinária que estabelece a relação de causa/efeito linear, no critério dos mínimos quadrados.  $x(t)$  sendo a entrada e  $y(t)$  a saída, podemos escrever :

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) G_{yy}(f)}$$

Pode-se demonstrar que  $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$ .

Para o sistema da figura 1, se as entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  fossem completamente incoerentes ( $A_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ), as funções de coerência ordinária,  $\gamma_{1y}(f)$  e  $\gamma_{2y}(f)$ , traduziriam as frações da potência total medida na saída devido a  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  e passando por  $H_1(f)$  e  $H_2(f)$  respectivamente. No caso em que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são parcialmente coerentes isto não é mais verdade.

$$G_{11} = \frac{1}{T} E\{X_1^* X_1\} = \frac{1}{T} (|H_1|^2 |Y|^2 + |H_4|^2 |Z|^2)$$

$$G_{22} = \frac{1}{T} E\{X_2^* X_2\} = \frac{1}{T} (|H_2|^2 |Y|^2 + |H_5|^2 |Z|^2)$$

$$G_{12} = \frac{1}{T} E\{X_1^* X_2\} = \frac{1}{T} (H_1^* H_2 |Y|^2 + H_4^* H_5 |Z|^2)$$

pois, Y e Z sendo completamente incoerentes, temos:  $E\{Y^* Z\} = E\{Z^* Y\} = 0$ .

A coerência ordinária entre os pontos 1 e 2 tem por expressão:

$$\gamma_{12}^2 = \frac{|G_{12}|^2}{G_{11} G_{22}}$$

Substituindo os valores de  $G_{11}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{12}$  na expressão da coerência, e ainda com:

$$A = \frac{Z_1}{Y_1} = |A| e^{i\psi_A}; \quad B = \frac{Z_2}{Y_2} = |B| e^{i\psi_B}$$

podemos obter:

$$\gamma_{12}^2 = \frac{1 + |A|^2 |B|^2 + 2|A||B| \cos(\psi_A - \psi_B)}{1 + |A|^2 + |B|^2 + |A|^2 |B|^2} \quad (1)$$

Como os sinais analisados são aleatórios (e quando os valores dos ângulos de fase são tomados nos intervalos  $[0^\circ, 180^\circ]$ ,  $[-180^\circ, 0^\circ]$ ) seus espectros de fase tendem em média a zero para um número de aquisições suficientemente grande. Notando com um acento circunflexo os valores reais medidos, temos:

$$\bar{Y}_i = |Y_i|; \quad \bar{Z}_i = |Z_i|; \quad \bar{X}_i = |X_i|$$

Sendo, por hipótese, as contribuições de cada fonte em cada ponto de medida  $i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$ , completamente incoerentes, a defasagem entre estas contribuições,  $\psi_A$  e  $\psi_B$ , também são aleatórios (tomamos  $\psi_A - \psi_B$  aleatório, hipótese que se mostrou satisfatória na aplicação do método, como veremos a seguir. Uma discussão mais aprofundada sobre o valor de  $\psi_A - \psi_B$  deverá ser objeto de uma próxima publicação). Temos então que o termo  $2|A||B| \cos(\psi_A - \psi_B)$  pode ser visto como a projeção de um vetor de módulo  $2|A||B|$  sobre um eixo com o qual ele faz um ângulo de  $\psi_A - \psi_B$  aleatório. Para um número su-

ficientemente grande de aquisições este termo tende então a zero.

A equação (1) se torna, com  $\bar{A}=A$  e  $\bar{B}=B$ :

$$\bar{\gamma}_{12}^2 = \frac{1 + \bar{A}^2 \bar{B}^2}{1 + \bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{A}^2 \bar{B}^2} \quad (2)$$

Com  $\bar{C} = \bar{Z}_3 / \bar{Y}_3$  e procedendo análogamente para obter  $\bar{\gamma}_{13}^2$  e  $\bar{\gamma}_{23}^2$ , chegamos a um sistema a três equações e três incógnitas:

$$1 + \bar{A}^2 \bar{B}^2 - \bar{\gamma}_{12}^2 (1 + \bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{A}^2 \bar{B}^2) = 0 \quad (3)$$

$$1 + \bar{B}^2 \bar{C}^2 - \bar{\gamma}_{23}^2 (1 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 + \bar{B}^2 \bar{C}^2) = 0 \quad (4)$$

$$1 + \bar{A}^2 \bar{C}^2 - \bar{\gamma}_{13}^2 (1 + \bar{A}^2 + \bar{C}^2 + \bar{A}^2 \bar{C}^2) = 0 \quad (5)$$

De (4) e (5) podemos determinar  $\bar{A}$  em função de B e introduzir em (3) para obter:

$$a \bar{B}^2 + b \bar{B} + c = 0 \quad (6)$$

onde:

$$a = c = 1 + 2\bar{\gamma}_{12}^2 \bar{\gamma}_{23}^2 - (\bar{\gamma}_{12}^2 + \bar{\gamma}_{23}^2 + \bar{\gamma}_{13}^2)$$

$$b = 2(2\bar{\gamma}_{12}^2 \bar{\gamma}_{23}^2 - \bar{\gamma}_{12}^2 - \bar{\gamma}_{23}^2 + \bar{\gamma}_{13}^2)$$

Se  $(b/2a)^2 \geq 1$  temos duas soluções reais para a equação (6) e pode-se mostrar que B sendo uma solução,  $1/B$  será a outra.

Então, aplicando as equações (6), (3) e (4) para cada frequência  $f$  determinam-se as curvas de  $\bar{A}(f)$ ,  $\bar{B}(f)$  e  $\bar{C}(f)$ , a partir das quais pode-se calcular  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{Z}_i$  pois:

$$\frac{\bar{Z}_1(f)}{\bar{Y}_1(f)} = \bar{A}(f); \quad \frac{\bar{Z}_2(f)}{\bar{Y}_2(f)} = \bar{B}(f); \quad \frac{\bar{Z}_3(f)}{\bar{Y}_3(f)} = \bar{C}(f)$$

e:

$$|\bar{X}_i|^2 = |\bar{Y}_i|^2 + |\bar{Z}_i|^2 + 2|\bar{Y}_i||\bar{Z}_i| \cos \psi_i$$

onde  $\psi_i = \psi_A$  se  $i=1$ ;  $\psi_i = \psi_B$  se  $i=2$ ;  $\psi_i = \psi_C$  se  $i=3$

Os  $\psi$  sendo aleatórios, temos:

$$\bar{Y}_i^2(f) + \bar{Z}_i^2(f) = \bar{X}_i^2(f) \quad (7)$$

Este desenvolvimento para um sistema a duas fontes de excitação pode ser generalizado para um sistema a N fontes onde o número de incógnitas por ponto de medição é N-1 e

Podemos definir a função de coerência parcial para o sistema da figura 1, seja por exemplo  $\gamma_{1y.2}^2(f)$  como a coerência entre  $x_1(t)$  e  $y(t)$  quando a parte coerente com  $x_2(t)$  foi eliminada de  $x_1(t)$  e de  $y(t)$ :

$$\gamma_{1y.2}^2(f) = \frac{|G_{1y.2}(f)|^2}{G_{11.2}(f) G_{yy.2}(f)}$$

onde  $G_{1y.2}(f) = G_{1y}(f) - \frac{G_{2y}(f)}{G_{22}(f)} G_{12}(f)$  ;

$$G_{11.2}(f) = G_{11}(f) (1 - \gamma_{12}^2(f)) ;$$

$$G_{yy.2}(f) = G_{yy}(f) (1 - \gamma_{2y}^2(f))$$

conforme a referência [4].

A coerência parcial assim definida não traz a contribuição de cada entrada à saída. Ela serve para validar a função de resposta  $H_1(f)$  que se pode obter, podendo indicar a contribuição de cada entrada apenas no caso em que existe um ruído substancial na medida da saída.

A partir da definição da coerência parcial podemos construir o que chamaremos coerência de contribuição, que notaremos  $\tau_{ij}^2(f)$ . Ela é calculada a partir da coerência parcial de tal maneira que, para o sistema da figura 1, teremos:

$$\tau_{1y}^2(f) + \tau_{2y}^2(f) = 1$$

$$\tau_{1y}^2(f) = \gamma_{1y}^2(f) \cdot$$

$$\tau_{2y}^2(f) = \gamma_{2y.1}^2(f) (1 - \gamma_{1y}^2(f))$$

$\tau_{1y}^2(f)$  traduz a parte da potência na saída devida a  $x_1(t)$  mais a parte de  $x_2(t)$  coerente com  $x_1(t)$ .

$\tau_{2y}^2(f)$  traduz a parte da saída devida a  $x_2(t)$  de onde foi retirado tudo o que era coerente com  $x_1(t)$ . A coerência de contribuição permite, em alguns casos, uma estimação da entrada que mais contribui à saída.

Continua colocado o problema que consiste em determinar quais as contribuições de  $S_1$  e  $S_2$  da figura 1 na saída.

Para resolver este problema, nós o formularemos de maneira mais adequada, onde o ponto 3 não é mais visto como saída, mas como um ter-

ceiro ponto de medição,  $x_3(t)$  (figura 2).

#### DETERMINAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DE CADA FONTE

Quando se fazem medições de sinais vibratórios em vários pontos de um sistema mecânico complexo com várias fontes de vibração internas, estes sinais serão parcialmente coerentes entre eles devido às interferências. Cada transdutor medirá um sinal que é a soma das contribuições de cada fonte no ponto onde é montado.

Vejamos o caso mais simples, onde o sistema estudado possui apenas duas fontes de excitação estatisticamente independentes, ou seja, completamente incoerentes. A figura 2 esquematiza um tal sistema.  $Y(f)$  e  $Z(f)$  são os espectros das duas fontes;  $X_1(f)$ ,  $X_2(f)$  e  $X_3(f)$  são os espectros dos três pontos de medição e as  $H_i(f)$  as funções de resposta em frequência que ligam as fontes aos pontos de medição.

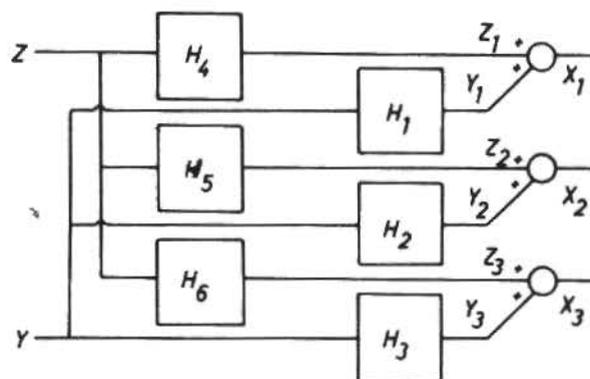


Fig. 2 Sistema com duas fontes de excitação e três pontos de medição com interferência.

O método desenvolvido aqui se inspira no método utilizado por CHUNG, CROCKER e HAMILTON [7] para eliminar o ruído na medição e que consiste em estabelecer uma relação entre os quocientes das contribuições de cada fonte nos pontos de medição e a coerência ordinária entre estes pontos.

No desenvolvimento matemático que segue, simplificaremos a notação utilizada, omitindo a dependência em relação à frequência de modo a simplificar as expressões.

Para o sistema da figura 2 temos que:

são necessários  $2N-1$  pontos de medição para se chegar a um sistema com igual número de equações e incógnitas:  $2N^2-3N+1$ .

#### VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

Para verificar o método que acabamos de expor, necessitávamos de uma experiência simples e na qual pudéssemos controlar todos os parâmetros. Uma simulação analógica de um sistema como aquele esquematizado na figura 2 permitiu que testássemos a validade do método, com os mesmos equipamentos eletrônicos de análise usados em experiências com sistemas mecânicos reais (gerador de ruído, analisador de frequências, etc.).

Um esquema do circuito utilizado é mostrado na figura 3. As fontes de excitação são dois geradores de ruído, por construção completamente incoerentes, e as funções de resposta em frequência são construídas com circuitos lineares ressonantes de segunda ordem, que têm por expressão:

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1/j2\pi f}{1 - (f/f_n)^2 + 2j\zeta(f/f_n)}$$

onde  $S(f)$  é o espectro da saída,  $E(f)$  o da entrada,  $f_n$  a frequência natural não-amortecida e  $f$  a frequência de excitação.

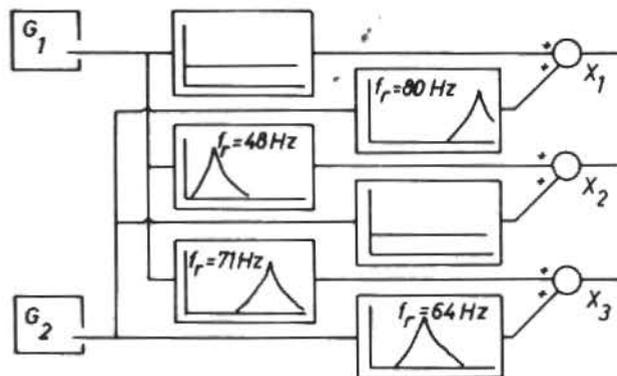


Fig. 3 Simulação analógica de um sistema a duas fontes de excitação e tres pontos de medição com interferência.

Foram registrados os sinais  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$  dos tres pontos de medição em fita magnética com um gravador de vários canais em modulação de frequência. Em seguida, estes sinais

gravados foram analisados com um sistema de análise constituído de um analisador de frequências (digital usando o algoritmo da Transformada de Fourier Rápida) de dois canais ligado a um mini-computador e a um plotter numérico.

A análise foi feita com média geométrica das aquisições (RMS), sem uso de "trigger" (FREE RUN) com janela de ponderação de HANNING e com um "ZOOM" [8] na gama de frequências de interesse para aumentar a resolução em frequência. As curvas são obtidas, com o analisador utilizado, com 128 pontos em frequência.

Um programa simples calcula os  $\hat{Y}_i$  e  $\hat{Z}_i$  pelas equações (6), (3), (4) e (7) a partir dos espectros e funções de coerência cujas leituras são feitas diretamente por uma interface que liga o mini-computador ao analisador. Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.

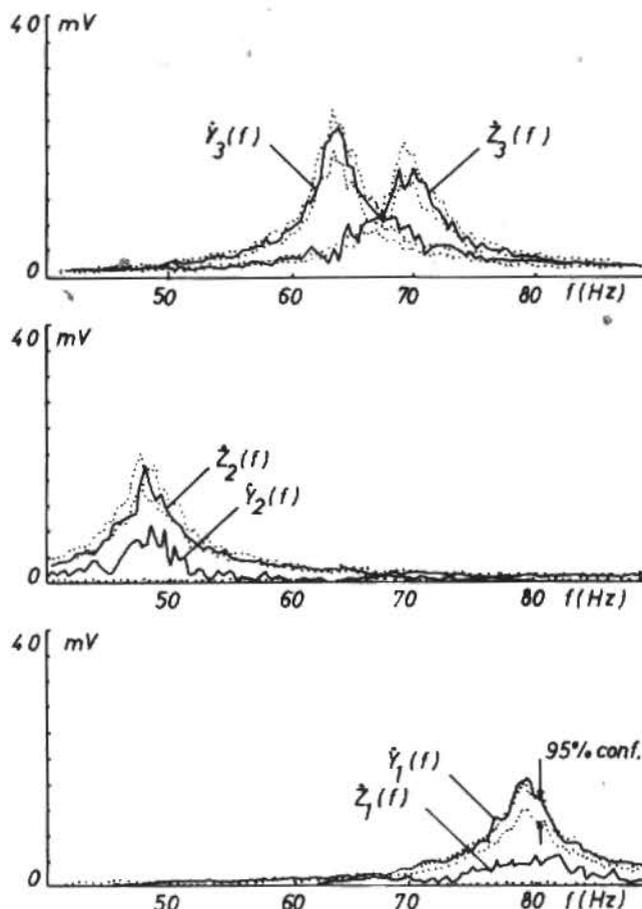


Fig. 4 Separação dos espectros dos sinais em cada ponto de medição do sistema da figura 3 em contribuições de cada fonte de excitação.

As curvas em pontilhado são os limites de confiança a 95% dos valores de  $Y_i(f)$  e  $Z_i(f)$  aos quais tínhamos acesso nesta experiência, fazendo-se a hipótese de uma distribuição normal dos sinais aleatórios e tomando o valor do erro normalizado  $\epsilon=1/\sqrt{q}$ , sendo  $q$  o número de aquisições [9]. A curva em traço cheio dá o resultado da aplicação do método.

Verificamos ainda o método num sistema mecânico simples, mostrado na figura 5. Os dois excitadores eletrodinâmicos  $E_1$  e  $E_2$ , excitados por dois geradores de ruído  $G_1$  e  $G_2$ , são as duas fontes de excitação. As funções de resposta que ligam as fontes aos pontos de medição são as funções de resposta em frequência de uma viga de aço encastrada em uma massa  $M$ , por sua vez montada em suporte flexível de maneira a permitir a passagem de energia de um lado ao outro da viga. Nas extremidades das duas vigas em balanço assim formadas foi adicionado amortecimento de modo a construir funções de resposta menos "pontagudas".

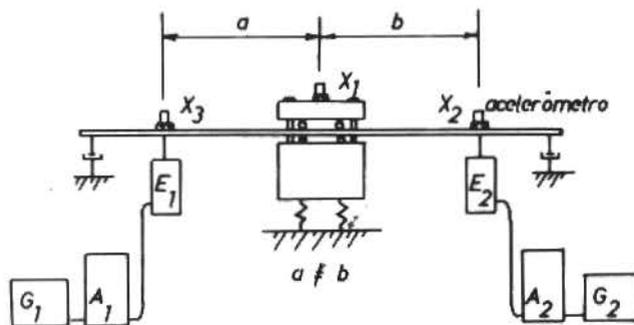


Fig. 5 Esquema do sistema mecânico com duas fontes de excitação utilizado.

Os  $\hat{Y}_i(f)$  e  $\hat{Z}_i(f)$  obtidos pela aplicação do método são comparados aos  $Y_i$  e  $Z_i$  medidos fazendo funcionar cada excitador eletrodinâmico separadamente (figura 6). Em pontilhado traçamos os  $Y_i$  e  $Z_i$  medidos com intervalo de confiança de 95% e em traço cheio os  $\hat{Y}_i$  e  $\hat{Z}_i$  obtidos pela aplicação do método.

Pode-se observar, nos dois exemplos tratados, uma boa coincidência entre os valores das contribuições medidos e obtidos através da aplicação do método aqui exposto.

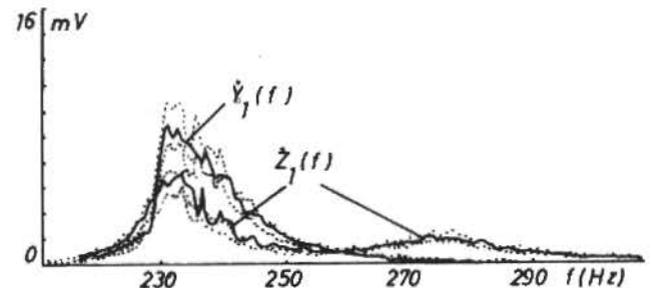
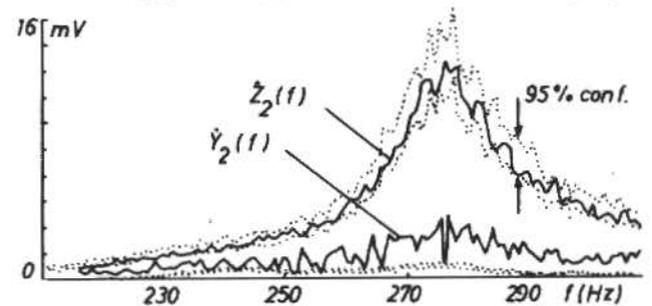
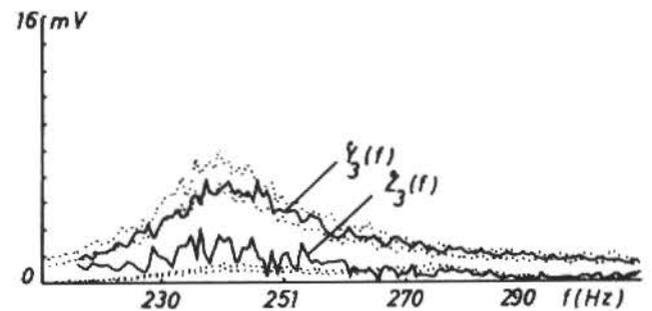


Fig. 6 Separação dos espectros dos sinais em cada ponto de medição do sistema da figura 5 em contribuições de cada fonte de excitação.

Chamamos a atenção para o fato de que este método permite a obtenção das contribuições de fontes de vibração estatisticamente independentes para cada frequência  $f$ . Para ligar os pontos obtidos, e, assim, construir os espectros das contribuições é necessário um certo conhecimento sobre o sistema estudado. Por exemplo, sabendo-se que em um dos pontos de medição a contribuição de uma das fontes é sempre superior à da outra, toma-se este ponto de medição como ponto 2 e calcula-se sempre a solução da equação (6) que dá  $B > 1$ . Maiores explicações sobre este problema são dadas na ref. [10].

#### CONCLUSÕES

Para uma manutenção do tipo preditivo de uma máquina é necessário que se possa estabe-

lecer um diagnóstico de seu comportamento, sendo a análise vibratória uma das ferramentas mais poderosas para este fim. Num diagnóstico por análise de vibrações é importante poder identificar as fontes de excitação da máquina estudada.

O método aqui esposto permite que se simplifique os espectros de vibração medidos separando-os em espectros de contribuição de cada fonte de excitação. Os espectros mais simples assim obtidos devem permitir uma identificação mais fácil e rápida das fontes num problema complexo onde é impossível fazer funcionar cada fonte separadamente.

Porém, como todo método de análise vibratória, este método deve ser aplicado com precaução e necessita um certo conhecimento sobre o sistema analisado e uma sólida formação em tratamento do sinal da pessoa encarregada da sua implantação na manutenção de um determinado equipamento. Trata-se de uma ferramenta a ser utilizada quando já existe um sistema de manutenção preditiva por análise espectral implantado e se dispõe de meios de análise modernos, sendo necessários à sua implantação um mini-computador, um analisador de espectros de dois canais e um plotter numérico.

Este método foi desenvolvido dentro do quadro da manutenção preditiva de máquinas, mas sua aplicação é possível em qualquer outro campo da ciência que envolva problemas de identificação de sistemas com sinais aleatórios.

#### REFERÊNCIAS

1. J.L. Têbec, J.M. Senicourt, J.R. de França Arruda, "Les techniques vibratoires dans l'entretien des grosses machines tournantes", Mécanique, matériaux, électricité nº 341-342, Mai-Juin 1978, pp.270-275.
2. J.S. Bendat, A.G. Piersol, Random Data : Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971, pp. 153-163.
3. C.J. Dodds, J.D. Robson, "Partial coherence in multivariate random processes", J. of Sound and Vibration, nº 42(2), 1975, pp. 243-249.
4. J.S. Bendat, "Solutions for multiple input/output problems", J. of Sound and Vibration, nº 44(3), 1976, pp. 311-325.
5. J.R. de França Arruda, P. Saavedra Gonzales, J.L. Têbec, "Aplicação des fonctions de cohérence au problème de L'identification des sources de vibrations dans le cadre de l'entretien prédictif des machines tournantes", Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, Vol.C, Campinas, S.P., 1979, pp. 186-199.
6. J.S. Bendat, "System identification from multiple input/output data", J. of Sound and Vibration, nº 49(3), 1976, pp.293-309.
7. J.Y. Chung, M.J. Crocker, J.F. Hamilton, "Measurement of frequency responses and the multiple coherence function on the noise-generator system of a diesel engine" J. Acoust. Soc. Am., Vol.58, nº 3, Sept. 1975, pp. 635-642.
8. V. Thiebaud, "Importance de l'analyse de Fourier en bande étroite dans l'étude des structures faiblement amorties", Publicação Hewlett-Packard France.
9. J.S. Bendat, "Statistical errors in measurement of coherence function and input/output quantities", J. of Sound and Vibration, nº 59(3), 1978, pp. 405-421.
10. J.R. de França Arruda, "Etude du comportement dynamique des systèmes mécaniques par l'analyse des signaux vibratoires - Application à la surveillance vibratoire des machines tournantes", Thèse de Docteur-Ingénieur, Univ. de Paris VI et ENSAM, Paris, Oct. 1979.

# FENÔMENOS CONCORRENTES COM A DEFORMAÇÃO PLÁSTICA DURANTE A RELAXAÇÃO DE TENSÕES (PARTE I)

PAULO EMILIO VALADÃO DE MIRANDA

SERGIO NEVES MONTEIRO

PROGRAMA DE ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS COPPE/UF RJ

## SUMÁRIO

*Analisou-se o comportamento do titânio - a comercialmente puro, submetido à relaxação de tensões a diferentes temperaturas. Observou-se que existem outros fenômenos concorrentes com a deformação plástica que se manifestam durante a relaxação. De ambiente a 400°C ocorre envelhecimento e entre 500 e 600°C ocorre recuperação. Em ambos os casos a cinética esperada de relaxação de tensões é significativamente alterada. Estudou-se também o efeito do equipamento de teste nos resultados da amostra, tendo sido verificado que a rigidez e a relaxação da máquina exercem forte influência sobre o comportamento do conjunto amostra-máquina.*

## INTRODUÇÃO

Na maioria dos testes que visam o estudo das características do escoamento do material, a amostra é solicitada de forma a apresentar grandes níveis de deformação plástica, o que em muitos casos é desejável, como para prever o comportamento de materiais a serem conformados. Entretanto, as variações estruturais que ocorrem durante o escoamento plástico em larga escala tornam as análises dos mecanismos controladores muito dificultadas, devido ao seu elevado grau de complexidade, especialmente em presença de fenômenos concorrentes. Surgiu, então, a necessidade de um ensaio mecânico que, com um nível reduzido de deformação plástica na amostra, possibilitasse a avaliação do comportamento do escoamento plástico, registrando em um único experimento uma ampla variação da taxa de deformação e da tensão aplicada.

Em 1904 Trouton e Rankine [1] realizaram um teste em que a deformação total da amostra era mantida constante, após esta ter sido pré-solicitada mecanicamente até um certo nível de tensão. A partir deste ponto registraram continuamente o decréscimo espontâneo que a carga aplicada apresentava ao longo do tempo. Este ensaio foi posteriormente denominado relaxação de tensões. Nos sólidos cristalinos, tais como os metais e suas ligas, a relaxação de tensões (RT) se manifesta devido a possibilidade que estes materiais apresentam de escoarem plasticamente. Assim, a conversão contínua de energia de deformação elástica armazenada na rede cristalina em energia de deformação plástica permite que a força aplicada decresça com o tempo, embora a deformação total (elástica mais plástica) seja sempre mantida constante. Estes aspectos podem ser melhor compreendidos através da representação esquemática mostrada na figura 1. Esta figura apresenta um gráfico de tensão versus deformação até o ponto 0 marcado no

eixo das abscissas e, daí em diante, tensão versus tempo. Ao atingir o ponto 0, a amostra será submetida a uma tensão  $\sigma_0$ , a qual corresponderá uma deformação total  $\epsilon_T$ . Esta, por sua vez, é composta por uma componente plástica,  $\epsilon_{p0}$ , e outra elástica,  $\epsilon_{e0}$ , desprezando-se um possível componenteanelástica. No tempo  $t_1$ , a amostra estará submetida a uma tensão  $\sigma_1$  (menor que  $\sigma_0$ ) e sua deformação plástica terá sido acrescida de uma quantidade  $\epsilon_p$  (desprezando-se outras perdas). Isto, às expensas de uma redução equivalente na deformação elástica inicialmente introduzida ( $\epsilon_{e0}$ ). Após, um tempo infinito o material poderá tender a um nível irreversível de tensão denominada tensão interna,  $\sigma_i$ . Existe, entretanto, muita controvérsia quanto a caracterização desta tensão remanescente [2]. A influência de variáveis externas na cinética da RT está bem estabelecida. Em geral, para materiais puros, um aumento na temperatura de teste, na pré-deformação plástica ou na taxa de deformação utilizada na solicitação mecânica que antecede a RT acarreta um acréscimo na taxa de relaxação [3].

Recentemente, um grande número de trabalhos tem surgido na literatura científica sobre a relaxação de tensões. Estes trabalhos tem se caracterizado por concentrarem seus estudos em materiais específicos e condições restritas de ensaio. Como exemplo, o titânio tem sido um dos materiais mais amplamente utilizados para tal fim [3-17]. Porém, geralmente, os ensaios são realizados à temperatura ambiente [4-8, 10-12, 14-17]. Isto se deve, possivelmente, a extrema sensibilidade do registro de cargas neste tipo de teste a variações na temperatura [2].

Tecnologicamente, o fenômeno de RT se manifesta em diversas situações práticas. Entre estas, citam-se as montagens sob pressão e estruturas complexas, especialmente a temperaturas elevadas, como em acoplamentos elétricos e pa-



gitudinalmente à direção de laminação, após forjamento e laminação a quente. Os ensaios de RT foram realizados em máquina INSTRON Modelo 1125, com taxa de deformação nominal em tração de  $3,8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , às temperaturas ambiente, 100, 200, 300, 400, 500 e 600°C. Ao todo, foram conduzidos mais de 200 testes de RT. O que se apresenta neste trabalho é uma pequena amostragem representativa dos resultados obtidos. Os ensaios foram conduzidos à vácuo (sob pressão de aproximadamente  $10^{-4} \text{ Pa}$ ) e com variação de temperatura inferior a  $1,5^\circ\text{C}$  em cada relaxação.

Tabela I - Composição Química do Material Utilizado

MATERIAL	ELEMENTO	C	H	O	N	T <sub>i</sub>
	ppm					
Composição Nominal		200	54/92	1360	100	restante
Material Utilizado		1610	152	1539	320	restante

Em muitos casos esta variação não ultrapassou  $\pm 0,5^\circ\text{C}$ . Este controle, porém, é muito crítico, requerendo especial atenção na operação do controlador do forno tubular da máquina Instron. Além da utilização do termopar posicionado próximo ao corpo de prova, as variações na temperatura podem ser imediatamente identificadas por pequenas oscilações no registro da carga, obtido com supressão de zero, com precisão de 5 N. Em alguns casos achou-se mais conveniente analisar os resultados da RT através da definição de uma grandeza adimensional expressa em percentagens, a fração relaxada (FR), dada por:

$$FR = \frac{P_0 - P}{P_0} \times 100 \quad (1)$$

onde  $P_0$  é a carga de início de relaxação e  $P$  a carga em qualquer tempo. A forma de obtenção da taxa de deformação plástica está descrita na Parte II deste trabalho.

Realizaram-se ensaios repetitivos de RT a todas as temperaturas, a partir da mesma carga inicial, com o intuito de identificar mudanças de comportamento de um ciclo para outro. A figura 3 mostra esquematicamente a forma pela qual estes testes cíclicos foram conduzidos. Para avaliar a influência da relaxação do sistema deformante (denominada doravante "relaxação da máquina, RM"), utilizou-se o método descrito em publicações anteriores [15, 20, 21]. Este método consiste, basicamente em substituir o corpo de prova por um elemento de elevada rigidez, submetendo-o a testes de RT em condições idênticas aos da amostra. Embora não tenha sido o intuito deste trabalho apresentar comentários aprofundados sobre as influências da elasticidade do sistema deformante e da anelasticidade sobre os resultados de relaxação vale à pena ressaltar a sua importância. Isto é particularmente relevante quando se desejam calcular propriedades intrínsecas dos materiais.

## RESULTADOS

A RT é um fenômeno passível de ocorrer também no regime elástico da solicitação mecânica de um material, embora a uma taxa inferior daquela no regime plástico [22]. O corpo de prova

va é conectado em série com garras de ligação ao equipamento de teste. Embora estas garras e a estrutura de sustentação do equipamento sejam construídos de materiais rígidos, estes também se deformam elasticamente durante o teste.

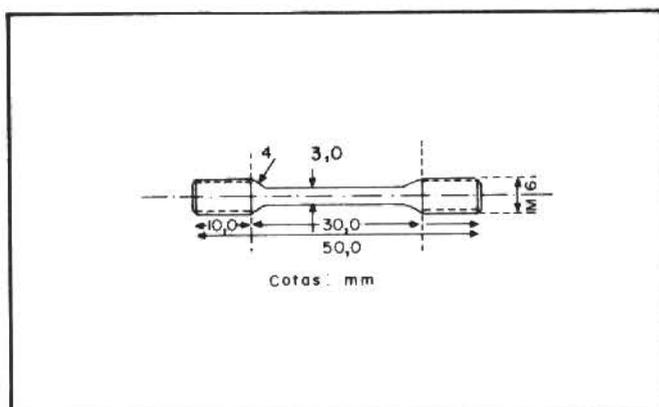


FIG. 2 - Dimensões dos corpos de prova de titânio utilizados nos testes de relaxação de tensões

Isto faz com que a máquina possa alterar os resultados da amostra por dois motivos: 1 - devido à influência da sua elasticidade (como função da sua rigidez) e 2 - devido à sua relaxação. Somente numa máquina de rigidez infinita é que se pode garantir a realização de um ensaio de RT em que a deformação total (elástica mais plástica) seja mantida sempre constante. Este, no entanto, não é o caso quando se utilizam máquinas a parafuso. A condição de rigidez infinita é apenas aproximadamente simulada nas máquinas servo-hidráulicas, capazes de compensar o movimento do seu travessão móvel durante a RT, imposto por sua constricção elástica [23, 24]. Trouton e Rankine [1] e Boyd [22] utilizaram em seus testes de RT máquinas especialmente construídas para este fim. Estes equipamentos mantinham a deformação total variando em um intervalo pequeno, reduzindo a carga periodicamente para compensar o acréscimo na deformação. A figura 4 mostra, esquematicamente, em um gráfico de tensão versus de formação total, o esquema da realização destes testes. Pode-se, ali, comparar a relaxação ideal com uma aproximação através de um processo de fluência oscilante. Nesta figura  $\epsilon_t$  representa a variação total de deformação durante a RT.

A figura 5 mostra que a temperatura ambiente os efeitos da relaxação da máquina tornam-se desprezíveis após o 2º ciclo de RT. Isto, porém, não ocorre a uma temperatura mais elevada. Apenas após o 4º ciclo de RT a 500°C a RM reduziu-se a níveis que podem ser considerados desprezíveis (figura 6). Uma visão global sobre o efeito da temperatura de teste (entre ambiente e 600°C) na relaxação cíclica do titânio pode ser obtida pela análise dos gráficos da figura 7. Nota-se a tendência esperada do aumen-

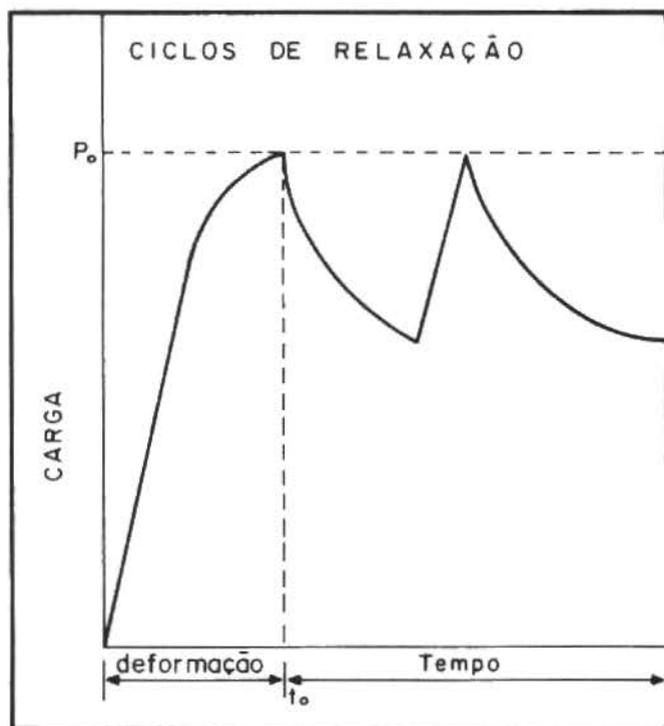


FIG. 3 - Representação esquemática de ensaios repetitivos de relaxação a partir da mesma carga inicial

to na taxa de relaxação com o acréscimo na temperatura, exceto a 300 e 400°C. Isto sugere que outros fenômenos podem estar alterando o comportamento do material durante a RT naquele intervalo de temperaturas. A figura 8 mostra a sequência de ensaios realizados com cada amostra às temperaturas ambiente, 400°C e 600°C. Os traços em linhas contínuas referem-se a gráficos de tensão verdadeira versus deformação verdadeira, os pontilhados indicam os ciclos de relaxação (tensão verdadeira versus tempo) e uma linha interrompida significa descarregamento total. Em algumas das curvas de tração a temperatura ambiente foram inseridas ampliações, com o intuito de indicar a existência ou não de escoamentos descontínuos. Estes escoamentos descontínuos após uma sequência de relaxação tornam-se bastante efetivos a 400°C. A esta temperatura observa-se também um aumento na taxa de encruamento e no nível de resistência da curva tensão-deformação após os ciclos de RT. A 600°C, porém, há apenas escoamentos suaves, e as curvas de tração de ciclos de RT subsequentes se mantêm a níveis de tensão igual ou inferior às anteriores. Isto, a despeito do grande acréscimo em deformação plástica, causa do não só pela RT como pelos tracionamentos em tre ciclos de RT, como pode ser observado.

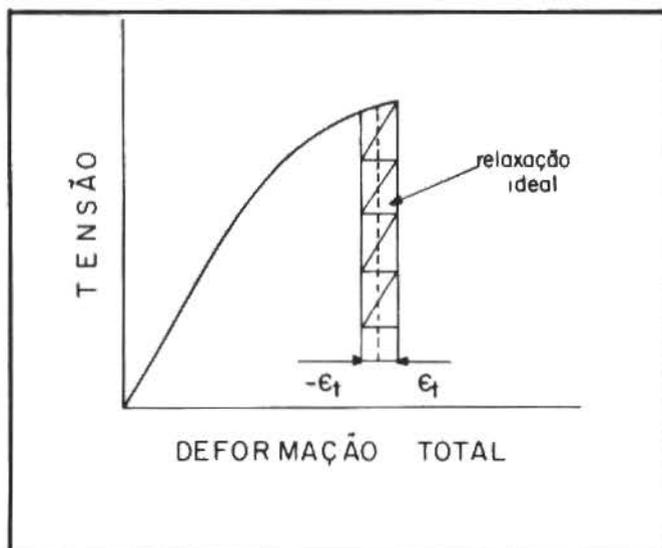


FIG. 4 - Representação esquemática em tensão versus deformação total, mostrando a relaxação ideal comparada a uma aproximação através de um processo de fluência oscilante (49)

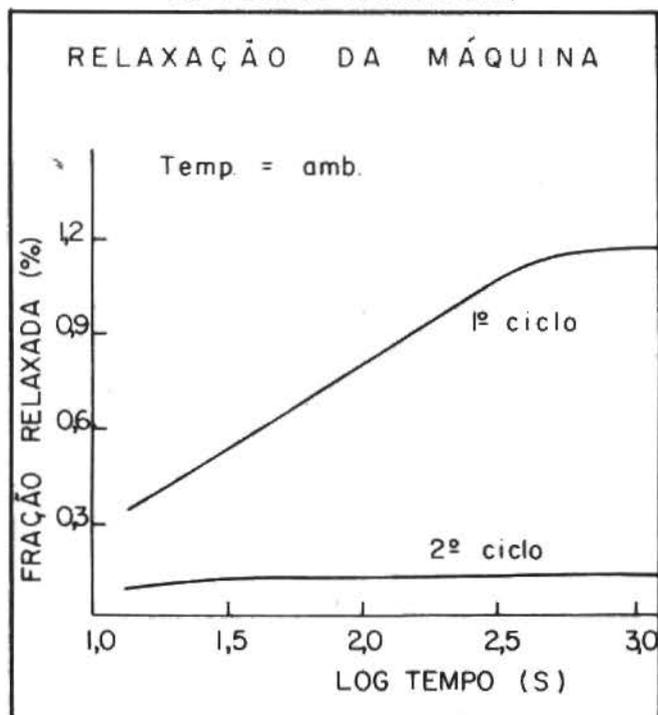


FIG. 5 - Fração relaxada versus logaritmo do tempo para dois ciclos de relaxação da máquina à temperatura ambiente a partir da mesma carga inicial

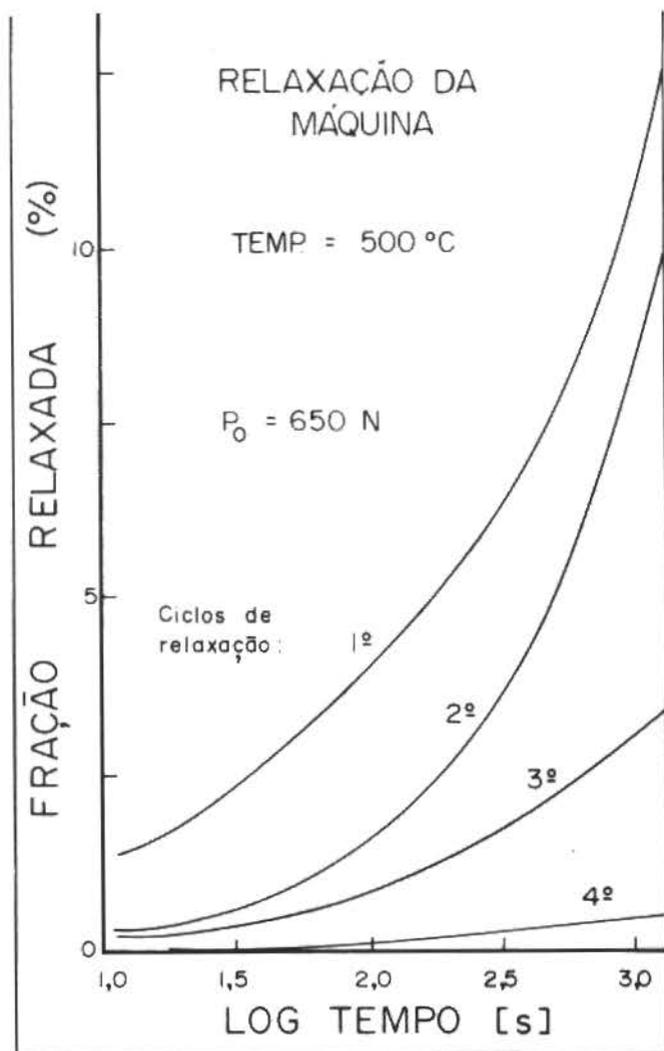


FIG. 6 - Fração relaxada versus logaritmo do tempo para quatro ciclos de relaxação da máquina à 500°C, a partir da mesma carga inicial.

#### DISCUSSÃO

Torna-se importante ressaltar novamente que dois efeitos distintos, embora relacionados, devem ser considerados na análise da influência da máquina. Estes são: a elasticidade e a relaxação do sistema de aplicação de cargas. Para esta análise, deve-se estudar também o comportamento de dois tipos de máquinas muito utilizadas para a realização de testes mecânicos. Uma delas é uma máquina acionada mecanicamente, movida a parafuso, e que possui uma rigidez da ordem de  $10^6$  N/m [23,24], variando de acordo com a amostra e seu sistema de fixação ao equipamento. A outra, uma máquina que trabalha com acionamento servo-hidráulico, ao invés de mecânico, e possui um sistema de compensação do movimento do seu travessão móvel, que simula uma rigidez aproximadamente infinita [23, 24, 26]. Assim, a elasticidade de uma máquina, que é função da sua rigidez, influenciará dire-

tamente na obtenção ou não de um teste de relaxação ideal conforme definido na figura 4. Isto implica que quanto mais rígido o equipamento, mais pode-se aproximar das condições ideais, isto é, deformação total mantida constante durante a RT. Esta afirmação está de acordo com o que foi obtido por Rohde e Nordstrom [23]. Estes autores, trabalhando com diferentes materiais, observaram que, para uma dada variação em tensão, a máquina a parafuso impõem cerca de dez vezes mais deformação ao corpo de prova do que a hidráulica. Isto significa que a quantidade de que uma amostra relaxa em uma máquina mecânica é inferior àquela que seria observada caso o teste fosse conduzido em uma máquina hidráulica, onde a influência da elasticidade é minimizada.

A relaxação da máquina também é afetada pela sua rigidez. Deve-se, entretanto, lembrar que se fosse levada em conta a influência da elasticidade nos resultados obtidos para a RM, obter-se-ia uma maior quantidade relaxada. Assim, o comportamento observado para a relaxação da máquina mecânica é significativa, embora contenha embutido, de forma sistemática, os efeitos da elasticidade do sistema deformante. À temperatura ambiente a máquina mecânica relaxa pouco. Aproximadamente 35 vezes menos que o conjunto corpo de prova-máquina. Já a uma temperatura mais elevada, ela poderá apresentar cerca de metade da relaxação do conjunto, como ocorre a 500 e 600°C. Estes resultados mostram que não é rigorosamente correto assumir que a relaxação da máquina é desprezível, de posse apenas de dados obtidos de testes à temperatura ambiente, como tem sido comum observar na literatura [21, 26]. Uma forma de eliminar (ou reduzir) a contribuição da RM é através de testes cíclicos, a partir da mesma carga inicial [26, 27]. A figura 5 mostra que dois ciclos à temperatura ambiente são suficientes para eliminar a RM. Entretanto, a 500°C são necessários mais de quatro ciclos para se atingir esta condição (figura 6).

Os resultados obtidos para o titânio mostram que podem existir fenômenos concorrentes com a deformação plástica durante a RT. A possibilidade de ocorrência de envelhecimento durante a relaxação do titânio tem sido mostrada na literatura [9, 26]. Há evidências marcantes da manifestação de envelhecimento até 400°C. Isto é, o material tem a sua resistência mecânica aumentada ao ser mantido sob carga, durante a RT. As figuras 7 e 8 mostram tais evidências, como por exemplo:

- i ) a fração relaxada (FR) diminui muito a cada ciclo. Em muitos casos não foi possível realizar os seis ciclos a cada sequência de relaxação, como foi feito às outras temperaturas, pois a queda de tensão era muito pequena em cada ciclo individual;
- ii ) há uma grande diferença em FR entre o 1º e o 2º ciclos à 300 e 400°C. Isto ocorre devido à forte influência da RM no 1º ciclo. A partir do 2º ciclo, a RM é consideravelmente reduzida e, estando a amostra progressivamente mais envelhecida, a FR resultante é muito pequena;
- iii) os pontos de escoamento descontínuo são

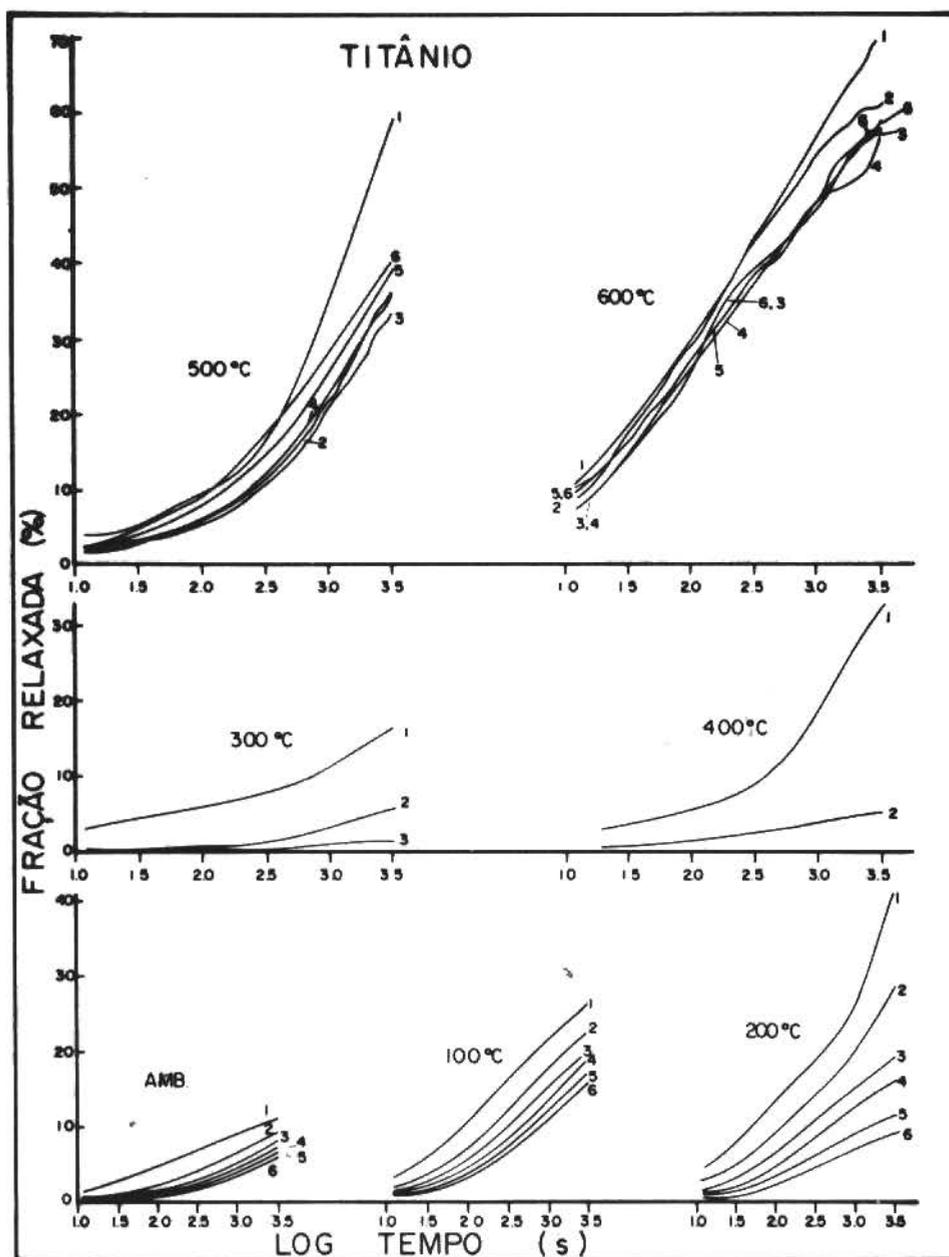


FIG 7 - Gráficos de fração relaxada versus logaritmo do tempo para a relaxação cíclica do titânio a diferentes temperaturas

bastante evidentes e às vezes observam-se oscilações na curva de tração;

iv) o formato da curva de relaxação é completamente alterado de ciclo para ciclo. Em alguns casos foram obtidas curvas tensão-tempo perfeitamente retilíneas, não apresentando aquela caída de tensão acentuada nos primeiros segundos de teste, característica de todo processo de relaxação.

A 500 e 600°C o fenômeno mais efetivo na alteração do comportamento do titânio submetido à RT é a recuperação. Isto é, o material tem a sua resistência mecânica diminuída (sofre amo-

lecimento) durante a RT. As evidências para tal, que também podem ser obtidas das figuras 7 e 8, são:

- i) as curvas de relaxação (tensão versus tempo) não alteram significativamente o seu formato nos diferentes ciclos;
- ii) as frações relaxadas para um mesmo tempo podem em alguns casos se manter constante ou aumentar para ciclos subsequentes de relaxação;
- iii) o tracionamento após uma sequência de ciclos de relaxação apresenta sempre escoamentos suaves e pequena taxa de encruamento;
- iv) a tensão limite de escoamento após uma se-

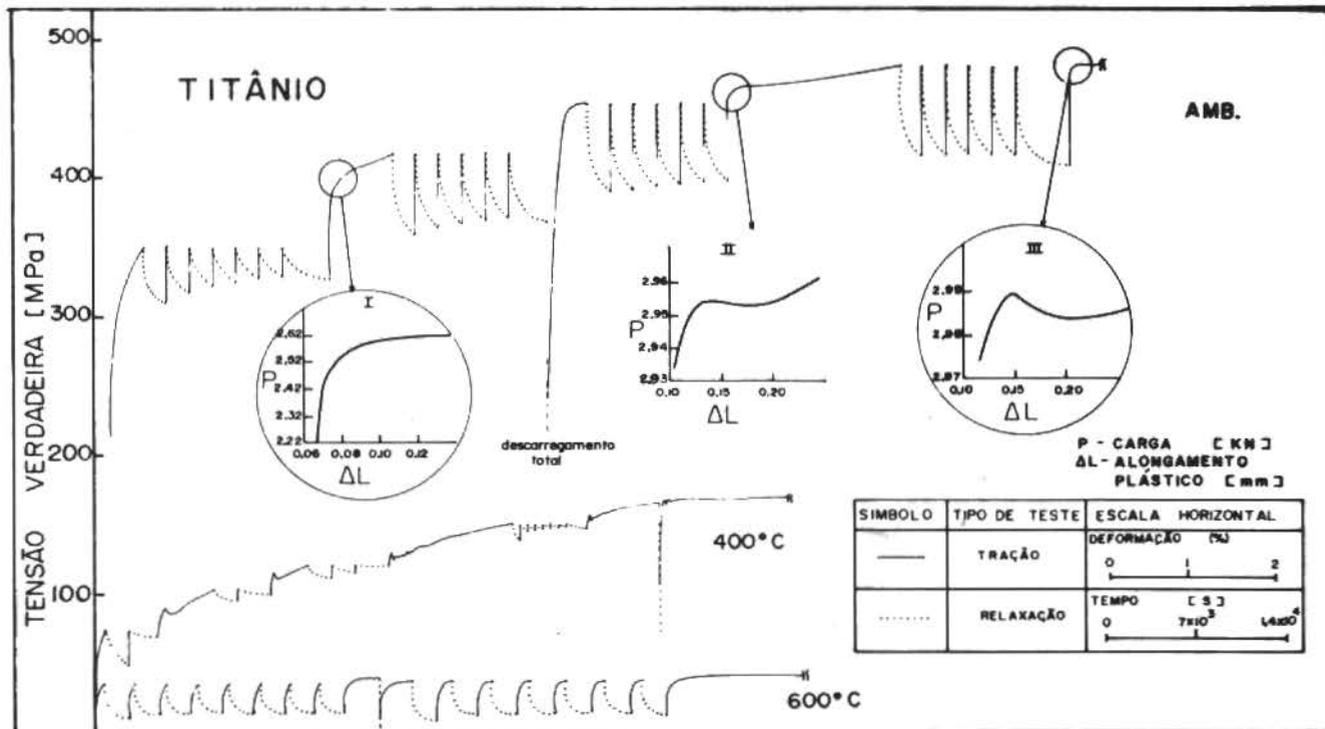


FIG 8 - Gráficos de tensão verdadeira - deformação verdadeira e tensão verdadeira - tempo, mostrando todas as sequências dos testes cíclicos de relaxação a temperatura ambiente, 400°C e 600°C

- quência de ciclos de RT é inferior à respectiva tensão de início de relaxação;
- v) o material escoia plasticamente (de forma suave e com um valor cerca de 10% menor) ao ser retracionado até a tensão de início de relaxação em cada ciclo individual de uma mesma sequência de relaxação.

Embora Yamada e Li [28] não tenham observado características que garantissem a ocorrência de recuperação durante a RT do ferro e do nióbio com diferentes níveis de pureza, Swearengen e Rohde [29] e Rohde e Swearengen [30] mostraram claramente a manifestação deste fenômeno durante a RT de ferro puro e de uma liga Sn - In. Nos trabalhos realizados em alumínio, enquanto Alden [31] obteve um amolecimento parcial, Bradley, Renfroe e Matlock [32] observaram amolecimento permanente, identificado por alteração total na tensão limite de escoamento e na posição da curva tensão-deformação após a RT. Já Heró [33], que trabalhou com fios de alumínio a diferentes temperaturas, desenvolveu raciocínio semelhante ao de Rohde e Swearengen [29,30], identificando que nos testes de longa duração o processo de recuperação possui influência progressivamente maior na taxa de tensão, comparado com a influência do encruamento.

#### CONCLUSÕES

Pela análise realizada sobre o efeito do equipamento de teste nos resultados da amostra, observou-se que a rigidez da máquina exerce forte influência sobre o comportamento do conjunto amostra-máquina. Quanto menor a rigidez do sistema deformante, mais este altera os resultados da amostra. A relaxação da máquina à temperatura ambiente é pequena, mas contribui com uma parcela considerável da relaxação do conjunto a temperaturas elevadas. Entretanto, a realização de testes cíclicos de RT reduz a níveis desprezíveis a RM. A medida que se aumenta a temperatura necessita-se de um maior número de ciclos para atingir esta situação.

A RT do titânio comercialmente puro a diferentes temperaturas mostrou que existem outros fenômenos concorrentes com a deformação plástica que se manifesta durante a relaxação. Verificou-se que de ambiente à 400°C o material tem sua taxa de relaxação atenuada devido a ocorrência de envelhecimento, que lhe confere maior resistência à deformação plástica. À 500 e 600°C ocorre o oposto. Mecanismos de recuperação tornam-se operativos, amolecem o material, possibilitando acréscimos na sua taxa de relaxação, isto é, oferecendo menor resistência à deformação plástica. Em ambos os casos a ciné

tica esperada de relaxação de tensões é significativamente alterada, ora por envelhecimento, ora por recuperação.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro por parte do CEPG/UFRJ e FINEPE, assim como a colaboração prestada por M.F. Pereira em etapas experimentais deste trabalho e ao IPR/CTA por fornecer o material estudado. Este trabalho foi realizado no Lab. de Propr. Mecânicas - PROPMEC.

#### REFERÊNCIAS

1. P. Trouton, A.O. Rankine, "On the Stretching and Torsion of Lead Wire Beyond the Elastic Limit", Phil. Mag., vol. 8, nº 46, 1904, pp. 538-556.
2. P.E.V. de Miranda, M.F. Pereira, S.N. Monteiro, "Avaliação Crítica da Relaxação Mecânica do Titânio", apresentado no XXXII Congresso Anual da ABM, São Paulo, SP, 1977.
3. P.E.V. de Miranda, "Sobre o Efeito do Sistema Deformante e das Alterações Subestruturais na Relaxação de Tensões do Titânio", Tese de M.Sc. COPPE/UFRJ, 1979.
4. G. Sargent, G. Jones, H. Conrad, "Work Hardening During Stress Relaxation in Titanium at 300°K", Scripta Met., vol. 3, 1969, pp. 481-484.
5. G.A. Sargent, H. Conrad, "Stress Relaxation and Thermally Activated Deformation in a Titanium - 4 WT% Aluminium Alloy", Scripta Met., vol. 4, 1970, pp. 129-133.
6. H. Conrad, "The Althermal Component of Flow Stress in Crystalline Solids", Mater. Sci. Eng., vol. 6, 1970, pp. 265-273.
7. H. Conrad, K. Okazaki, "Effect of Interstitial Solutes on the Althermal Component of the Flow Stress in  $\alpha$ -Ti", Scripta Met., vol. 4, 1970, pp. 111-116.
8. H. Conrad, K. Okazaki, "A Comparison of the Althermal Component of the Flow Stress in Alpha Titanium Determined by Several Methods", Scripta Met., vol. 4, 1970, pp. 259-266.
9. P.P. Tung, A.W. Sommer, "Dislocation Energetics in Alpha Titanium", Met. Trans., vol. 1, 1970, pp. 947-953.
10. C.C. Law, D.N. Beshers, "Stress Relaxation in FCC and HCP Metals", Scripta Met., vol. 6, 1972, pp. 635-640.
11. R.E. Medrano, "On Stress Relaxation of Titanium", Scripta Met., vol. 6, 1972, pp. 771-776.
12. P. Rodrigues, P. Dasgupta, S.L. Mannan, S. S. Vagarali, K.G. Samuel, "Stress Relaxation in Zirconium, Titanium and their Alloys", Scripta Met., vol. 7, 1973, pp. 671-680.
13. S.P. Agrawal, G.A. Sargent, H. Conrad, "Deformation Kinetics of  $\alpha$ -Titanium at Low Temperatures Using Stress Relaxation", Met. Trans., Vol. 4, 1973, pp. 2613-2620.
14. F.V. Ellis, Che-Yu Li, "Stress Relaxation in Titanium", Scripta Met., vol. 8, 1974, pp. 739-742.
15. R.E. Reed-Hill, J.R. Donoso, "Concerning the Effect of Machine Relaxation on the Measurement of the Internal Stress in Commercial Purity Titanium at 300 K by Stress Relaxation Methods", Scripta Met., vol. 9, 1975, pp. 1305-1308.
16. J.R.C. Guimarães, M.A. Meyers, "Concerning Stress Relaxation Experiments in Commercial Purity Titanium", Scripta Met., vol. 11, 1977, pp. 193-195.
17. G. Baur, P. Lehr, "Relaxation de la Contrainte D'Ecoulement dans le Titane de Haute Pureté", Scripta Met., vol. 11, 1977, pp. 587-591.
18. F. Povolo, "The Determination of Creep Constants from Stress-Relaxation Measurements in Bending and Torsion", Journ. Nuclear Materials, vol. 68, 1977, pp. 308-314.
19. P.E.V. de Miranda, M.F. Pereira, S.N. Monteiro, "Resultados de Ensaio de Relaxação de Tensões e Fluência em um Aço Inox 316 a 800°C", Metalurgia ABM, vol. 35, nº 260, 1979, pp. 459-462.
20. F. Guiu, P.L. Pratt, "Stress Relaxation and Plastic Deformation of Solids", Phys., Stat. Sol., vol. 6, 1964, pp. 111-120.
21. T.J. Koppenaal, "Stress Relaxation in Neutron Irradiated Copper Single Crystals", Acta Met., vol. 15, 1967, pp. 681-690.
22. J. Boyd, "The Relaxation of Copper at Normal and at Elevated Temperatures", Proceedings ASTM, vol. 37, 1937, pp. 218-234.
23. R.W. Rohde, T.V. Nordstrom, "On Stress Relaxation Experiments", Scripta Met., vol. 7, 1973, pp. 317-322.
24. R.W. Rohde, T.V. Nordstrom, "Reply to Comments, 'On Stress Relaxation Experiments'", Scripta Met., vol. 7, 1973, pp. 1227-1228.
25. A.S. Krausz, M. Eyring, Deformation Kinetics, John Wiley & Sons, Inc., 1975, pp. 97.
26. M.A. Meyers, J.R.C. Guimarães, R.R. Avillez, "On Stress Relaxation Experiments and their Significance under Strain-Aging Conditions", Met. Trans., vol. 10A, 1979, pp. 33-40.
27. P.E.V. de Miranda, M.F. Pereira, J.O. Ramos, M.C.A. Vasconcellos, S.N. Monteiro, "Envelhecimento, Exaustão e Recuperação da Estrutura Relaxada do Titânio", Apresentado no XXXIV Congresso Anual da ABM, Porto Alegre, RS, 1979.
28. H. Yamada, Che-Yu Li, "Stress Relaxation and Mechanical Equation of State in B.C.C. Metals in Monotonic Loading" Acta Met., vol. 22, 1974, pp. 249-253.
29. J.C. Swearingen, R.W. Rohde, "Application of Mechanical State Relations at Low and High Homologous Temperatures", Met. Trans., vol. 8A, 1977, pp. 577-582.
30. R.W. Rohde, J.C. Swearingen, "Mechanical Equation of State for Inelastic Solids", Proceedings of the Second International Conference on Mechanical Behaviour of Metals, Boston, 1976, pp. 23-27.
31. T.H. Alden, "Load Relaxation in Aluminium; I. Theory of Plastic Deformation; II. Plastic Equation of State", Met. Trans., vol. 8A, 1977, pp. 1675-1679.
32. W.L. Bradley, W. Renfroe, D.K. Matlock, "Recovery During Stress Relaxation Testing of Aluminium at 298 K", Scripta Met., vol. 10, 1976, pp. 905-908.
33. H. Herö, "Stress Relaxation in Aluminium Wire of Commercial Purity", Scripta Met., vol. 9, 1975, pp. 1121-1126.

# ANÁLISE CONSTITUTIVA ATRAVÉS DA RELAXAÇÃO DO TITÂNIO A FENOMENOLOGIA DE HART (PARTE II)

PAULO EMILIO VALADÃO DE MIRANDA

SERGIO NEVES MONTEIRO

PROGRAMA DE ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS COPPE/UFRJ

## SUMÁRIO

Analisou-se a aplicabilidade da fenomenologia proposta por E.W. Hart através da relaxação de tensões do titânio. Verificou-se que no intervalo de temperaturas de ambiente a 600°C fenômenos concorrentes com a deformação plástica do material durante a relaxação de tensões, como o envelhecimento e a recuperação, não permitiram satisfazer as condições necessárias para a validade da equação plástica de estado proposta por Hart. Sugere-se, adicionalmente, que uma equação constitutiva, para ser capaz de descrever o comportamento mecânico dos metais e ligas metálicas, deve considerar como variáveis de estado a tensão, a taxa de deformação e uma variável estrutural, que leve em conta alterações mecânico-metalúrgicas.

## INTRODUÇÃO

Existe até o momento muita controvérsia relativa a fenomenologia da relaxação de tensões (RT). Inicialmente, várias equações analíticas foram propostas, com as mais variadas formas, com o intuito de representar o comportamento de diversos materiais submetidos a este fenômeno. Como decorrência deste estudo surgiram leis constitutivas, originando uma possível equação plástica de estado para os metais e suas ligas [1]. Algumas destas equações estão apresentadas na Tabela I, juntamente com indicações sobre os materiais, aos quais foram originalmente aplicadas e o tipo de sollicitação mecânica em que os testes foram realizados. Os símbolos utilizados nesta tabela referem-se a:

P	: carga
$\sigma$	: tensão normal
$\tau$	: tensão cisalhante
$\tau^*$	: componente termicamente ativada da tensão cisalhante
$\sigma_0$	: tensão para o tempo zero de relaxação
$\sigma_i$	: tensão interna
E	: módulo de elasticidade
$\epsilon$	: deformação plástica normal
$\dot{\epsilon}, \dot{\tau}$	: taxas temporais das tensões normal e cisalhante
$\dot{\epsilon}, \dot{\gamma}$	: taxas temporais das deformações plásticas normal e cisalhante
t	: tempo
T	: temperatura
f(t)	: uma função do tempo [16]

Os demais símbolos representam parâmetros que podem ser constantes para determinadas condições. A repetição destes símbolos em diferentes fórmulas não necessariamente significa que sejam os mesmos.

Esta abordagem fenomenológica, e consequen-

te utilização de equações, apresenta certas restrições. Por esta razão, alguns trabalhos criticam o uso indiscriminado de equações que, além de se basearem em hipóteses não comprovadas, [17] não levam em conta a presença de fenômenos concorrentes com a deformação plástica durante a RT, como o envelhecimento [17,18] e a recuperação [17,19]. Além disto, as influências exercidas sobre os resultados da amostra pela relaxação do sistema deformante [20,21] e pela anelasticidade [22,23] do conjunto também são motivos de restrições. Este trabalho tem como objetivo analisar a fenomenologia proposta por Hart [1], aplicada aos resultados obtidos através da relaxação de tensões do titânio -  $\alpha$  comercialmente puro a diferentes temperaturas.

## ABORDAGEM DE HART

Uma teoria fenomenológica é desenvolvida a partir de conceitos teóricos, relacionados com a análise dos fenômenos observados, enfocando o tipo de relações físicas e matemáticas envolvidas e evidências experimentais que se desejam compreender. Como resultado desta análise, obtêm-se, naturalmente, leis constitutivas para os materiais para um vasto intervalo de histórias de deformação. As equações constitutivas clássicas de Ludwick (1909) e de Zener e Holloman (1946)

$$\epsilon = \epsilon(\sigma, \dot{\epsilon}) \quad (1)$$

e

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad (2)$$

utilizam a deformação ( $\epsilon$ ) como uma variável de estado. O desenvolvimento de Hart assume que apenas a tensão ( $\sigma$ ) e a taxa de deformação ( $\dot{\epsilon}$ ) (além da temperatura) indicam de maneira

única o estado mecânico do material. Isto se deve ao fato de que mesmo quando um estado arbitrário de referência é escolhido, o estado mecânico de um metal após alguma deformação plástica adicional dependerá do caminho da deformação, isto é, da maneira pela qual se atingiu o estado final ao invés de depender apenas do estado final de deformação com relação ao estado de referência. Assim, três amostras de um mesmo material deformadas 30% em tração uniaxial, laminação ou extrusão possuirão configurações estruturais diferentes, estando, portanto, em diferentes estados mecânicos. Existem evidências na literatura (Hart e Solomon [24]) de que a deformação plástica não pode ser considerada uma variável de estado. A descrição fenomenológica geral de um metal seria então, segundo Hart, fornecida por uma relação do tipo (equação 12 da Tabela 1):

$$d \ln \sigma = \gamma d\epsilon + \nu d \ln \dot{\epsilon} \quad (3)$$

onde  $\gamma$  e  $\nu$ , em geral, representam parâmetros cujos valores dependem, a qualquer instante, da história de deformação prévia até aquele ponto. Para um determinado caminho de deformação  $\gamma$  e  $\nu$  são expressos por

$$\gamma = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{\dot{\epsilon}} \quad (4)$$

que é um coeficiente de encruamento, cujo valor é 1 na carga máxima em um teste realizado com taxa de deformação verdadeira constante, e

$$\nu = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right)_{\epsilon} \quad (5)$$

que é um tipo de sensibilidade à taxa de deformação. Uma condição necessária para a existência da equação plástica de estado é que, a uma dada temperatura,  $\gamma$  e  $\nu$  sejam função apenas de  $\sigma$  e  $\dot{\epsilon}$  e independentes da história de deformação. Um elemento essencial da análise desenvolvida por Hart foi o conceito do estado de dureza. Foi mostrado que se uma equação plástica de estado realmente existir, será necessário que em qualquer ponto na história de deformação o material esteja em um único estado de dureza plástica, que só poderá ser alterado por deformação plástica subsequente ou por recuperação estática induzida termicamente [24]. A curva de dureza é obtida em um gráfico de  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$ . O termo dureza aqui utilizado não se refere a medidas de dureza obtidas por risco ou penetração na superfície de amostras metálicas. Refere-se, contudo ao estado de resistência de um material, caracterizado por pares de pontos  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$ , em um amplo intervalo de taxas de deformação. A equação (3) pode ser escrita sob a forma

$$d\epsilon = \frac{1}{\gamma} d \ln \sigma - \frac{\nu}{\gamma} d \ln \dot{\epsilon} \quad (6)$$

Caso  $\gamma$  e  $\nu$  sejam função apenas de  $\sigma$  e  $\dot{\epsilon}$ , a uma dada temperatura, a equação (6) é uma forma de Pfaff, que pode ser convertida em uma equação diferencial parcial exata ao ser multiplicada por um fator de integração,  $F$ , conveniente. Tomando  $F$  como sendo

$$F = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \right)_{\sigma} \quad (7)$$

obtem-se:

$$d \ln \sigma^* = F d\epsilon = \frac{F}{\gamma} d \ln \sigma - \frac{F\nu}{\gamma} d \ln \dot{\epsilon} \quad (8)$$

que define uma família de curvas integrais

$$\sigma^* = \sigma^*(\sigma, \dot{\epsilon}) \quad (9)$$

onde  $\sigma^*$  é identificado como sendo o parâmetro que representa o estado de dureza ("hardness state parameter") do material.

Esta fenomenologia tem sido aplicada, em diversas condições, a uma variedade de materiais, tais como, aço ao Cr, Mo, V resistente à fluência [25], aços inoxidáveis austeníticos tipo AISI 304 [26] e 316 [26-29], ferro- $\alpha$  [30], alumínio [24,31] e nióbio [30] puros, titânio comercialmente puro [32], tungstênio [33], incoel 738 [34], zircaloy 2 [26], zirconio [35], além das ligas Sn - 5% Bi [36], 50 Sn - 50 In [37] e eutético Mg - Al [35]. O que é particularmente importante considerar sobre os gráficos  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$  é que se uma equação plástica de estado existir, então as curvas de dureza de um determinado material podem dar origem a uma curva mestra, que conterá todas as outras. Como mostra a figura 1, a curva mestra é obtida a partir de uma translação das curvas de dureza em uma determinada direção, sem rotação. Os pontos das curvas de dureza que interceptam a reta que possui esta direção (pontos 1, 2 e 3 na figura 1) são os mesmos pontos na curva mestra. Assim, todos eles correspondem a pontos com o mesmo valor de  $\nu$ .

O coeficiente angular da reta que caracteriza a direção de translação é  $\mu$ ,

$$\mu = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right)_{\sigma} \quad (10)$$

O cálculo de  $\mu$  define uma nova maneira de se determinar o expoente de sensibilidade à taxa de deformação [24,38]. A curva mestra fica, assim, caracterizada a partir de diversas curvas de dureza para um material. Estas últimas são obtidas variando-se o estado de dureza da amostra através de testes a diferentes níveis de deformação plástica a uma dada temperatura [15, 24, 27-29,31] ou a diferentes temperaturas a uma certa deformação [34], ou mesmo para diferentes tamanhos de grão cristalino [36], mantendo-se fixas as outras variáveis.

#### TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

As características químicas, geométricas e metalúrgicas das amostras de titânio, assim como a técnica utilizada na condução dos testes já foram descritas na Parte I deste trabalho. A vantagem da utilização da RT ao invés de outros tipos de testes para uma análise semelhante a de Hart, é que a RT é capaz de estabelecer relações tensão-taxa de deformação em um amplo intervalo de taxas de deformação com relativamente pouca quantidade de deformação plástica. Acrescenta-se, ainda, o fato disto ser obtido em um único experimento, portanto, de forma mais rápida. A forma de obtenção da taxa de deformação plástica ( $\dot{\epsilon}$ ) que ocorre durante a RT é descrita a seguir. Durante a tração que antecede a RT, o deslocamento total do traço móvel da máquina pode ser expresso por:

$$D = \Delta l_{pa} + \Delta l_{ea} + \Delta l_{eM} \quad (11)$$

onde  $\Delta l_{pa}$  é o alongamento plástico da amostra

TABELA I - EQUAÇÕES DE RELAXAÇÃO PROPOSTAS NA LITERATURA

Nº	EQUAÇÃO	MATERIAL(IS) ORIGINALMENTE UTILIZADO(S)	TIPO DE SOLICITAÇÃO MECÂNICA	REFERÊNCIA
1	$P = C_1 + C_2 \log (C_3 + t)$	fio de chumbo	tração e torção	Trouton e Rankine, 1904   2
2	$\sigma = \sigma_0  1 - C_1 \log (1 + C_2 t) $	cobre puro	tração	Boyd, 1937   3
3	$\sigma = C_1 \exp (\beta_1 t) - C_2 \exp (\beta_2 t)$			Freudenthal, 1960   4
4	$\sigma =  (n-1) E/A^n  t + \sigma_0^{1-n} ^{1/1-n}$	inconel	tração	Kennedy, Douglas, 1960   5
5	$\ln \sigma = (1/1-m) \ln (1 + C t) + \ln \sigma_0$	Fe-3,25% Si, Fe-0,004% C e tantaló	tração	Noble, Hull, 1964   6
6	$\sigma - \sigma_0 = C_1  C_2 - \log (t + C) $	Molibdênio (monocristal)	tração	Guiu, Pratt, 1964   7
7	$\sigma = \sum_{j=1}^2 \frac{2\sigma_{0j}}{\alpha_j} \tanh^{-1}  (\tanh \frac{\alpha_j}{2}) \exp (-2k_j \alpha_j t) $	Fe, Cu, Al e Pb de elevada pureza e Al 1100	compressão	Wilson, Garofalo, 1966   8
8	$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp - \frac{H_0}{KT}  1 - (\frac{\tau^*}{\tau_0})^{1/2} ^2$	cobre irradiado por neutrons (monocristal)	tração	Koppelaar, 1967   9
9	$\sigma - \sigma_i = C_1 (t + C_2)^{-1/m-1}$	LiF, NaCl (monocristal) Fe elevada pureza	tração	Li, 1967   10
10	$\dot{\epsilon} = C_1 \exp (C_2 \tau) - C_3 \exp (-C_2 \tau)$	Gelo (monocristal)		Krauz, 1968   11
11	$\sigma = \sigma_0  1 - C_1 t C_2 \sigma_0 (n-2)/C_2 ^{1/1-n}$	Zircaloy 2		Gittus, 1969   12
12	$d \ln \sigma = \gamma de + \nu d \ln \dot{\epsilon}$			Hart, 1970   1
13	$\dot{\sigma} = C_1 \exp [-C_2 (\sigma - \sigma_i)]$	Titânio com/puro	tração	Medrano, 1972   13
14	$\dot{\gamma} = C_1 \exp (-\frac{\Delta H - V^* \tau^*}{KT})$	Urânio - $\alpha$	tração	Carvalhinhos, Loureiro, 1972   14
15	$\sigma = \sigma_0  1 + bt^\alpha ^{-1/n-1}$	Cobre com/puro	tração	Addleman, Webster, 1973   15
16	$\sigma = \sigma_i + (\sigma_0 - \sigma_i) (1 + f(t))^{1/n-1}$	(outras expressões foram obtidas para torção e dobramento)	tração	Povolo, 1977   16

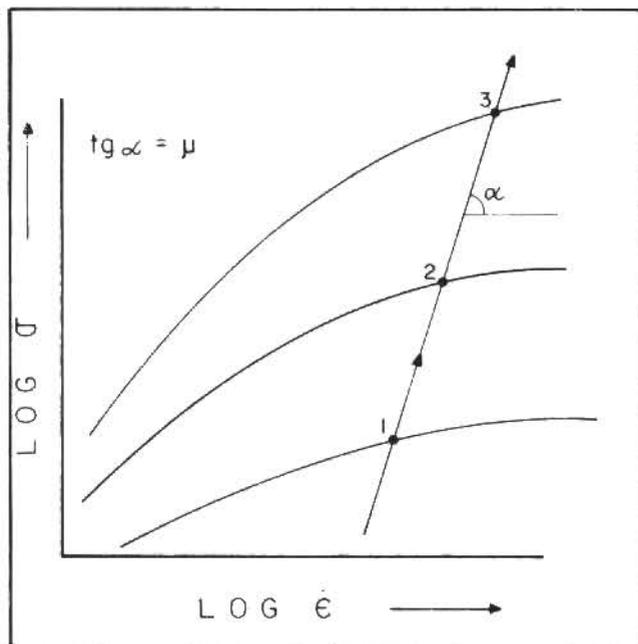


Fig. 1 - Representação esquemática de curvas de dureza. Os pontos 1, 2 e 3 possuem a mesma derivada  $v = (\partial \log \sigma / \partial \log \dot{\epsilon})_{\epsilon}$ . A reta que une estes pontos, define a direção de translação para obtenção de uma curva mestra (33)

e  $\Delta \bar{\epsilon}_{ea}$  e  $\Delta \bar{\epsilon}_{eM}$  representam os alongamentos elásticos sofridos pela amostra e pela máquina, respectivamente. Considera-se "máquina" neste trabalho a todo o conjunto constituído pela sua estrutura, célula de carga e garras de conexão, bem como partes da amostra fora da seção útil de menor área. Derivando-se a eq. (11) em relação ao tempo, obtêm-se a velocidade de movimentação do travessão da máquina ( $\dot{D}$ ), que durante a RT é nula. Assim, a derivada da eq. (11) pode ser escrita sob a forma:

$$\Delta \bar{\epsilon}_{pa} = - (\Delta \bar{\epsilon}_{ea} + \Delta \bar{\epsilon}_{eM}) \quad (12)$$

onde um ponto sobre o símbolo significa derivada temporal. A taxa de deformação plástica durante a RT ( $\dot{\epsilon}$ ) pode ser obtida dividindo-se a eq. (12) pelo comprimento ( $l$ ) da amostra

$$\dot{\epsilon} = - \frac{1}{l} (\Delta \bar{\epsilon}_{ea} + \Delta \bar{\epsilon}_{eM}) \quad (13)$$

A rigidez ( $K$ ) de um sistema mecânico em série é dada por:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_M} \quad (14)$$

onde  $K_M$  é a rigidez da máquina e  $K_a$  aquela da amostra. O alongamento elástico total (da amostra mais da máquina)

$$\Delta \bar{\epsilon}_{eT} = \Delta \bar{\epsilon}_{ea} + \Delta \bar{\epsilon}_{eM} \quad (15)$$

pode ser expresso por:

$$\Delta \bar{\epsilon}_{eT} = \frac{P}{K} = \frac{P}{K_a} + \frac{P}{K_M} \quad (16)$$

Derivando-se a eq. (16) em relação ao tempo e substituindo-se na eq. (13) obtêm-se:

$$\dot{\epsilon} = - \frac{\dot{P}}{lK} \quad (17)$$

Conhecidos  $K$  e  $l$  a equação (17) mostra uma forma simples para o cálculo de  $\dot{\epsilon}$ , bastando para isto que se disponha de um registro contínuo de carga ao longo do tempo de relaxação.

## RESULTADOS

Os resultados da relaxação do titânio às diferentes temperaturas e níveis de pré-deformação, apresentados na Parte I foram tratados segundo a fenomenologia de Hart. Para tal, foram traçados gráficos de logaritmo de tensão versus logaritmo da taxa de deformação para verificar a possível aplicabilidade de uma equação plástica de estado do tipo da equação (3). Os valores da taxa de deformação plástica ( $\dot{\epsilon}$ ) durante a RT foram obtidos a partir de uma derivada numérica das curvas de relaxação e da relação mostrada na equação (17).

A figura 2 mostra os gráficos de  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$  para todo o espectro de temperaturas em que foram realizados os testes. As coleções de curvas a cada temperatura representam os diferentes ciclos de relaxação conduzidos a partir da mesma carga inicial. Todos estes resultados se referem a ensaios de RT com pré-deformação igual à deformação do limite de escoamento convencional. Pode-se observar que as curvas referentes aos diferentes ciclos de relaxação a uma mesma temperatura não se superpõem. Como era esperado, as "curvas de dureza" do titânio à temperatura ambiente deslocam-se para valores superiores ao longo do eixo das ordenadas à medida que se aumenta a pré-deformação. Isto é o que mostra a figura 3, cujas curvas representam os segundos ciclos da relaxação a cada nível de deformação. A equação:

$$\log \sigma = A \exp(B \log \dot{\epsilon}) \quad (18)$$

aproximou-se muito bem aos resultados do titânio e foi utilizada para identificar os pontos de mesma derivada  $v$  a cada nível de deformação. Para a temperatura ambiente obteve-se  $v = 0,0316$ . Estes pontos estão marcados com um X em cada uma das curvas da figura 3. Os valores dos parâmetros A e B da equação (18) utilizados para construir esta figura estão listados na Tabela II.

TABELA II - Valores dos Parâmetros da Equação 18 Utilizados na Construção da Figura 3

$\epsilon$ (%)	A	B
0,65	1,705	0,0190
1,76	1,7819	0,0205
2,48	1,8123	0,0198
5,10	1,8177	0,0179

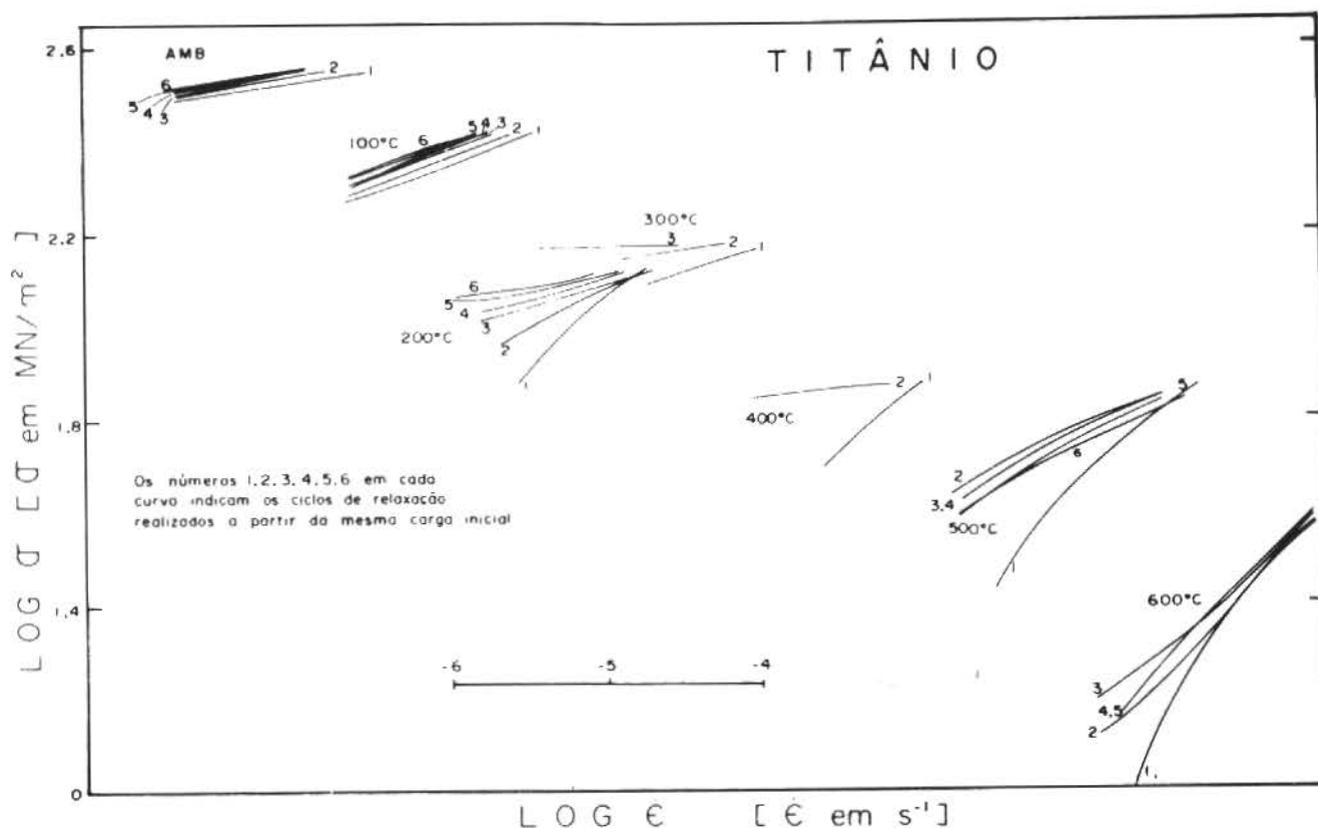


FIG 2 - Gráficos de logaritmo da tensão versus logaritmo da taxa de deformação para a relaxação cíclica do titânio a diversas temperaturas

Os gráficos da figura 4 mostram para o intervalo de temperaturas de 100°C a 400°C resultados idênticos aqueles obtidos para a temperatura ambiente. Por conveniência, os resultados referentes à temperatura mais elevada (600°C), tratados pela fenomenologia de Hart, serão apresentados a seguir. Isto porque, desta forma, acredita-se melhorar a compreensão dos fenômenos observados e enriquecer a discussão.

#### DISCUSSÃO

O modelo proposto por Hart [1] assume, como principal condição para que seja válido, que o estado de dureza do material permaneça inalterado durante o teste. Isto significa que, em princípio, esta abordagem não se aplica em situações em que fenômenos concorrentes com a de formação plástica do material se manifestem de forma efetiva durante o teste. Recentemente, Rohde e Swearingen [37, 39] mostraram que uma equação mecânica de estado não pode existir se for expressa apenas em termos de tensão, deformação, taxa de deformação e temperatura. Pelo menos uma variável evolucionária ou propriedade dependente da história prévia do material deve existir. Eles propuseram quatro critérios básicos para uma equação plástica de estado:

- i) ela deve conter ao menos uma variável evolucionária;

- ii) deve ser capaz de prever o comportamento do material em determinada condição, independente do caminho seguido para atingir aquele ponto;
- iii) regiões do comportamento da deformação não devem ser excluídas da análise a priori;
- iv) deve ser pragmática, de fácil utilização.

Os resultados obtidos para o titânio -  $\alpha$  a diferentes temperaturas mostram, como será visto a seguir, que alguns destes critérios não são obedecidos quando se utiliza o modelo de Hart. A figura 2, que apresenta os conjuntos de ciclos de RT a partir da mesma carga inicial às diferentes temperaturas em gráficos de  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$ , indica que: os diferentes ciclos de RT a uma mesma temperatura não se superpõem, como prevê a teoria de Hart e que a 300°C as curvas se localizam a níveis de tensão igual ou superior àsquelas de 200°C. O fato das curvas a uma mesma temperatura não se superporem representa uma alteração do "estado de dureza" (de resistência mecânica) do material a cada ciclo de relaxação (vale observar que nos primeiros ciclos ainda estão embutidas as influências da máquina). Até 400°C as curvas dos ciclos subsequentes ocupam níveis de tensão cada vez maiores, porque neste intervalo de temperaturas o material aumenta a sua resistência mecânica de ciclo para ciclo. A medida que a temperatura

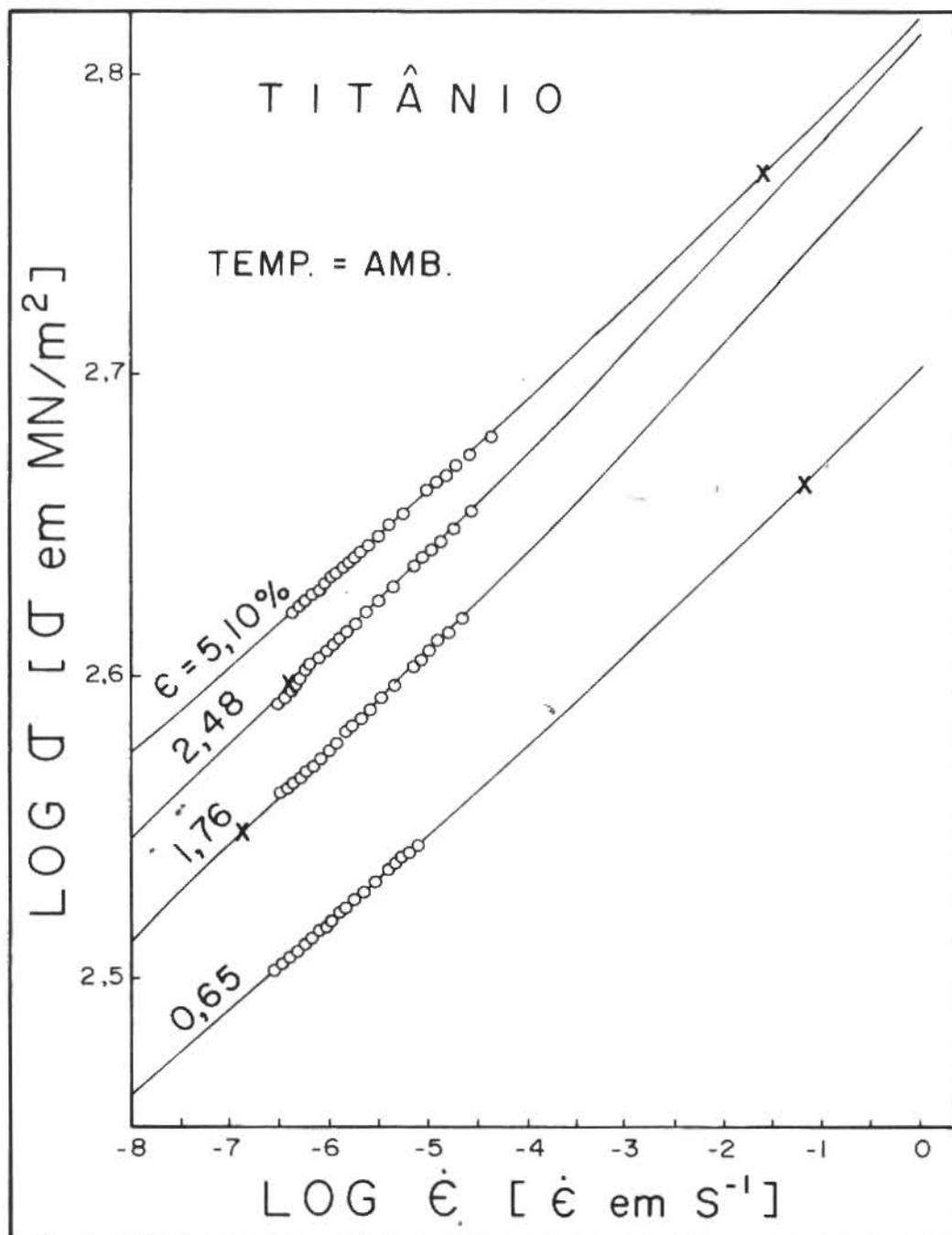


FIG. 3 - Gráficos do logaritmo da tensão versus logaritmo da taxa de deformação para o titânio a temperatura ambiente. Nas curvas traçadas com o auxílio da equação 14 estão marcados com um x os pontos de mesma derivada,  $\nu$

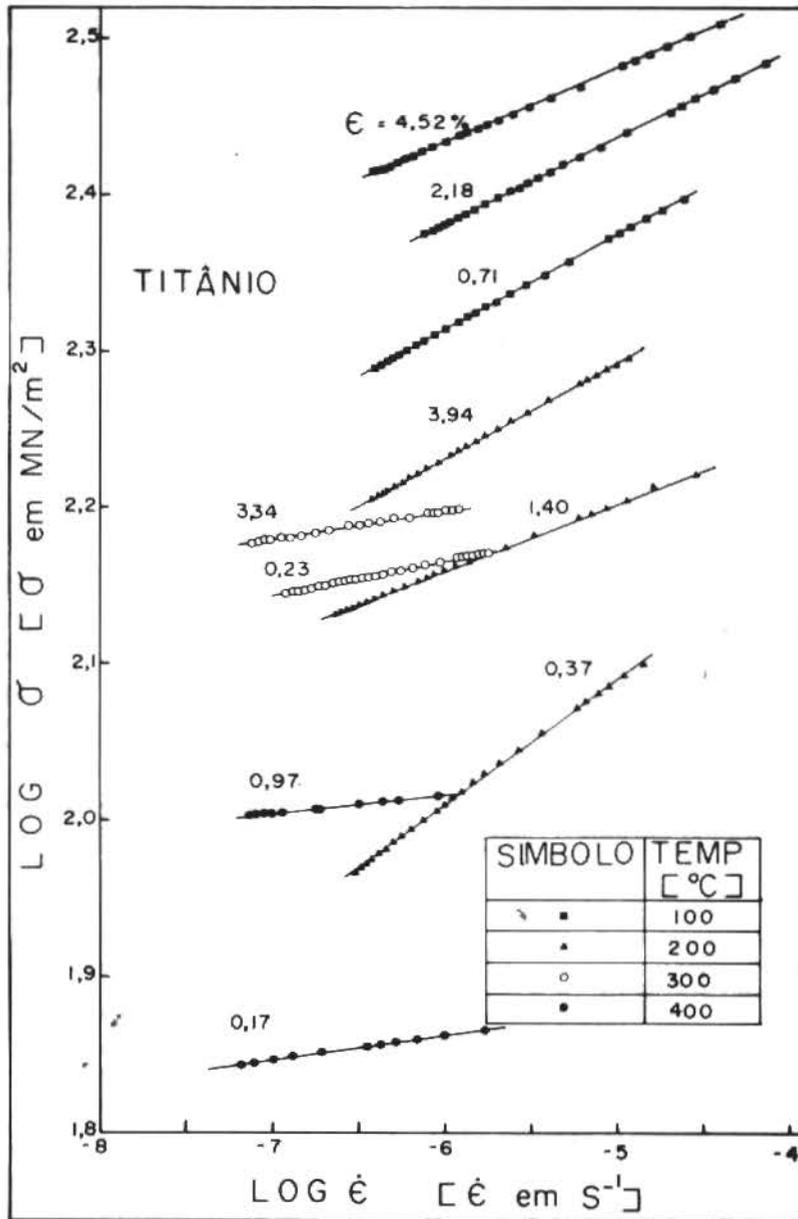


FIG 4 - Gráficos do logaritmo da tensão versus logaritmo da taxa de deformação para o titânio as temperaturas de 100, 200, 300 e 400°C. O aumento de resistência devido ao envelhecimento é marcante à 300 e 400°C.

crece (de ambiente até 400°C) este efeito é mais marcante. A 500 e 600°C, entretanto, os últimos ciclos ocupam níveis de tensão inferiores aos intermediários. Isto indica uma diminuição na resistência mecânica ou no "estado de dureza" do material. Estes resultados são uma consequência do que foi mostrado na Parte I, no sentido de que de ambiente a 400°C o titânio -  $\alpha$  sofre envelhecimento durante a RT e, entre 500 e 600°C, observam-se evidências de recuperação. É o fato do envelhecimento ser muito efetivo a 300°C que permite às curvas obtidas a esta temperatura localizarem-se a níveis

de tensão compatíveis com os de uma temperatura 100°C menor. Estas observações mostram que a equação de Hart não segue o critério iii acima descrito. Na realidade, também o critério ii não é satisfeito como será visto a seguir. A tentativa de composição de uma curva mestra a partir dos resultados obtidos neste trabalho não teve sucesso. Embora Ellis e Li [32], que trabalharam com titânio -  $\alpha$  comercialmente puro, afirmem que seus resultados obtidos a temperatura ambiente "não são inconsistentes" com a fenomenologia proposta por Hart, não se pode dizer também que estejam em pleno acordo com es

ta teoria. Isto é o que mostram os gráficos da figura 3 para a temperatura ambiente. Os pon-

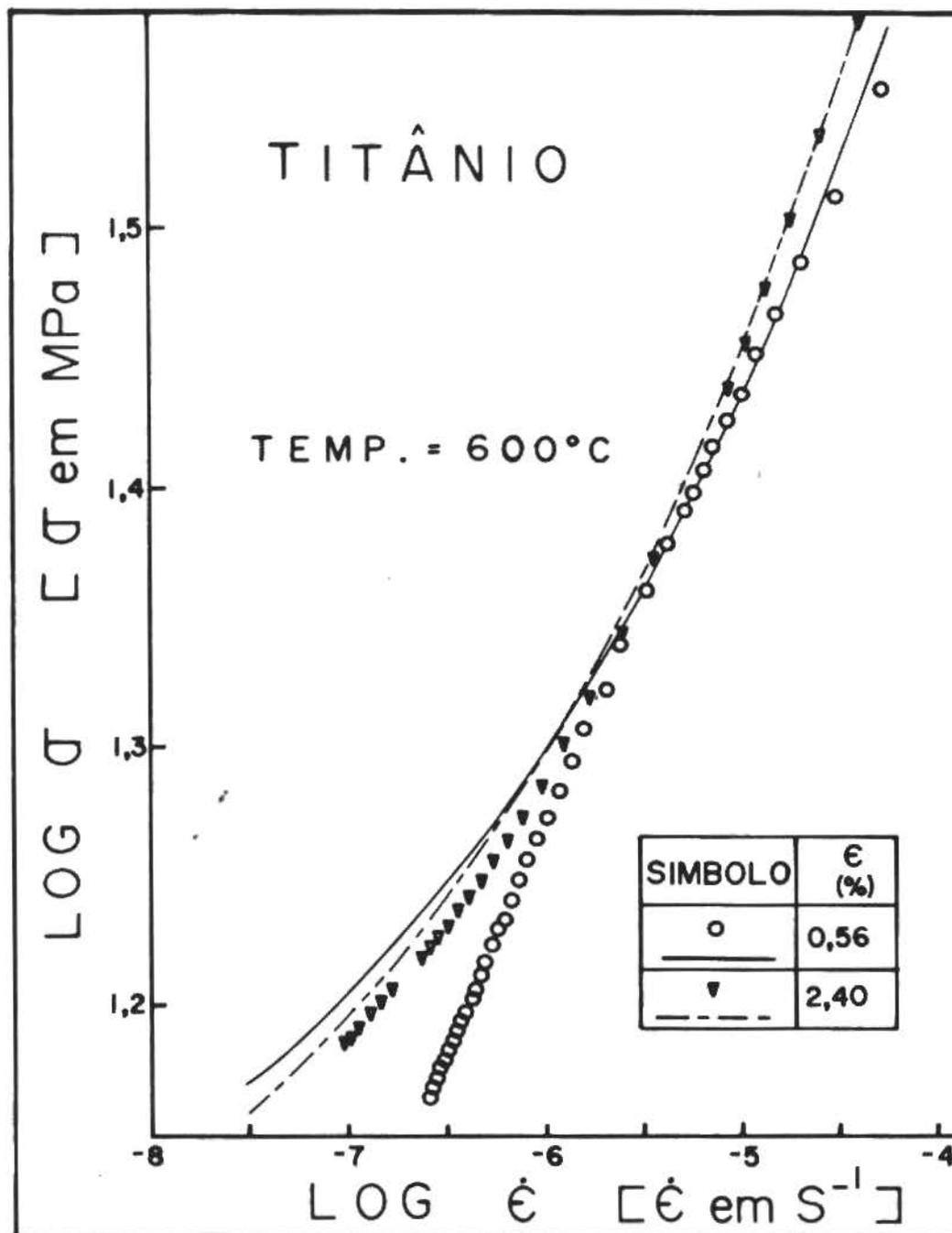


FIG. 5 - Gráficos do logaritmo da tensão versus logaritmo da taxa de deformação para o titânio a 600°C. As curvas são traçadas utilizando-se a equação 14. Estes dados se referem aos últimos ciclos de relaxação

tos de mesma derivada  $v$ , que deveriam dar origem a uma linha reta, a qual definiria a direção de translação para a obtenção da curva mestra (conforme descrito na figura 1), estão marcados com um X em cada curva. Os dados da figura 3 mostram, semelhante ao que realmente indicam os resultados de Ellis e Li [32], que não se pode compor uma curva mestra a partir das "curvas de dureza" obtidas para o titânio a temperatura ambiente. Este mesmo comportamento foi observado às demais temperaturas de teste. A figura 5, que contém gráficos de  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$  a 600°C, mostra alguns efeitos de alteração do "estado de dureza" do titânio durante a RT, devido a recuperação. As curvas desta figura foram traçadas com base na equação (18) aproximada aos primeiros minutos de relaxação a 600°C, assumindo que nos primeiros instantes do teste a recuperação não se manifesta ainda de forma muito efetiva. A figura 5 só foi apresentada neste ponto, quando a possibilidade de ocorrência de recuperação após algum tempo de RT já foi evidenciada com suporte experimental de forma suficiente. Os parâmetros da equação (18) utilizados nos gráficos da figura 5 foram:

$\dot{\epsilon}$ (%)	A	B
0,56	2,8486	0,3751
2,40	3,6346	0,4162

A indicação mostrada na figura 5 de que o material amolece durante o teste refere-se ao fato dos pontos experimentais localizarem-se a níveis de tensão inferiores aos das curvas traçadas com o auxílio da equação (18), para os tempos maiores de RT. Pode-se dizer, em resumo, que o fato do titânio -  $\alpha$  ser capaz de ter o seu estado de resistência mecânica alterado durante a RT, ora por envelhecimento, ora por recuperação, dependendo da temperatura de teste, significa que o material passa por uma sucessão de estados de dureza diferentes ao longo de uma mesma curva  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$ . Isto não permite que os resultados obtidos nestas condições se apliquem à fenomenologia proposta por Hart.

#### CONCLUSÕES

Foi evidenciado que fenômenos concorrentes com a deformação plástica do titânio se manifestam de forma efetiva durante a sua RT. De ambiente a 400°C há um aumento em resistência mecânica devido ao envelhecimento, enquanto a 500 e 600°C o material amolece por recuperação.

A formulação fenomenológica apresentada por Hart não se aplicou ao titânio nas condições analisadas, uma vez que não foi possível construir uma curva mestra a partir de diversas "curvas de dureza". Este comportamento se deve às alterações observadas no estado de resistência do material ao longo de uma mesma curva  $\log \sigma$  versus  $\log \dot{\epsilon}$ . Tais alterações foram provocadas ora por envelhecimento, ora por recuperação, efetivos durante a RT. Desta forma, a equação de Hart não pode ser considerada uma equação plástica de estado capaz de descrever e prever o comportamento mecânico-estrutural dos metais e suas ligas de forma geral. Isto porque ela não possui variáveis evolucionárias que levam em conta as modificações metalúrgico-estruturais passíveis de ocorrer concomitantemente com a deformação plástica dos metais e ligas metálicas.

Uma equação constitutiva deve, então, considerar como variáveis de estado, para ser capaz de descrever o comportamento mecânico dos materiais, a tensão, a taxa de deformação, a temperatura e uma variável estrutural.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o auxílio financeiro prestado pelo CEPG/UF RJ e FINEP.

#### REFERÊNCIAS

1. E.W. Hart, "A Phenomenological Theory for Plastic Deformation of Polycrystalline Metals", *Acta Met.*, vol. 18, 1970, pp. 599-610.
2. P. Truon, A.O. Rankine, "On Stretching and Torsion of Lead Wire Beyond the Elastic Limit", *Phil. Mag.*, vol. 8, nº 46, 1904, pp. 538-556.
3. J. Boyd, "The Relaxation of Copper at Normal and at Elevated Temperatures" *Proceedings ASTM*, vol. 37, 1937, pp. 218-234.
4. A.M. Freudenthal, "The Phenomenon of Stress Relaxation", *Proceedings ASTM*, vol. 60, 1960, pp. 986-1000.
5. C.R. Kennedy, D.A. Douglas, "Relaxation Characteristics of Inconel at Elevated Temperatures", *Proceedings ASTM*, vol. 60, 1960, pp. 869-884.
6. F.W. Noble, D. Hull, "Stress Dependence of Dislocation Velocity from Stress Relaxation Experiments", *Acta Met.*, vol. 12, 1964, pp. 1089-1092.
7. F. Guin, P.L. Pratt, "Stress Relaxation and Plastic Deformation of Solids", *Phys. Stat. Sol.*, vol. 6, 1964, pp. 111-120.
8. J.F. Wilson, F. Garofalo, "Stress Relaxation in Metals Plastically Prestrained in Compression", *Materials Research Standards*, vol. 6, nº 2, 1969, pp. 85-92.
9. T.J. Koppelaar, "Stress Relaxation in Neutron Irradiated Copper Single Crystals", *Acta Met.*, vol. 15, 1967, pp. 681-690.
10. J.C.M. Li, "Dislocation Dynamics in Deformation and Recovery", *Can. Journ. Phys.*, vol. 45, 1967, pp. 493-508.
11. A.S. Krausz, "A Rate Theory of Dislocation Mobility", *Acta Met.*, vol. 16, 1968, pp. 897-902.
12. J.H. Gittus, "Theoretical Scatter of Creep Relaxation Measurements versus the Scatter in Constant-Load Creep Data", *Phil. Mag.*, vol. 20, nº 168, 1969, pp. 1189-1193.
13. R.E. Medrano, "On Stress Relaxation of Titanium", *Scripta Met.*, vol. 6, 1972, pp. 771-776.
14. H. Carvalhinhos, A.P. Loureiro, "Experimental Determination of the Apparent Activation Enthalpy for Stress Relaxation of  $\alpha$ -Uranium", *Phys. Stat. Sol.*, vol. 9a, 1972, pp. 477-482.
15. R.L. Addleman, G.A. Webster, "A Simple Model of Uniaxial Creep Recovery and Stress Relaxation Based on Residual-Stress Redistribution" *Journal of Strain Analysis*, vol. 8, nº 2, 1973, pp. 99-107.
16. F. Povo, "The Determination of Constants from Stress-Relaxation Measurements in Bending and Torsion", *Journal of Nuclear Materials*, vol. 68, 1977, pp. 308-314.
17. P.E.V. de Miranda, "Sobre o efeito do Sistema Deformante e das Alterações Substru-

- turais na Relaxação de Tensões do Titânio", tese de M.Sc., CÔPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1979.
18. M.A. Meyer, J.R.C. Guimarães, R.R. Avillez, "On Stress Relaxation Experiments and their Significance under Strain-Aging Conditions", Met. Trans., vol. 10A, 1979, pp. 33.
  19. J.C. Swearingen, R.W. Rohde, "Application of Mechanical State Relations at Low and High Homologous Temperatures", Met. Trans., vol. 8A, 1977, pp. 577-582.
  20. R.E. Reed-Hill, J.R. Donoso, "Concerning the Effect of Machine Relaxation on the Measurement of the Internal Stress in Commercial Purity Titanium at 300 K by Stress Relaxation Methods", Scripta Met., vol. 9, 1975, pp. 1305-1308.
  21. P.E.V. de Miranda, S.N. Monteiro, M.F. Pereira, "Influência do Sistema Deformante na Relaxação de Tensões de Metais", Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, trabalho C-3, 1977, pp. 929-937.
  22. J.H. Schneibel, P.M. Hazzledine, "The Influence of Anelasticity on the Stress Relaxation Behavior of Superplastic Pb-Sn Eutectic", Scripta Met., vol. 11, 1977, pp. 953-956.
  23. T.D. Hadnagy, D.J. Krenisky, D.G. Ast, Che Yu Li, "Load Relaxation Studies of a Metallic Glass", Scripta Met., Vol. 12, 1978, pp. 45-48.
  24. E.W. Hart, H.A. Solomon, "Load Relaxation Studies of Polycrystalline High Purity Aluminium", Acta Met., vol. 21, 1973, pp. 295-307.
  25. D.A. Woodford, "Measurement of the Mechanical State of a Low Alloy Steel at Elevated Temperature", Met. Trans., vol. 6A, 1975, p. 1693-1697.
  26. D. Lee, F. Zaverl, Jr., "A Generalized Strain Rate Dependent Constitutive Equation for Anisotropic Metals", Acta Met., vol. 26, 1978, pp. 1771-1780.
  27. J.F. Thomas, Jr., F.L. Yaggee, "Stress Relaxation in Solution-Annealed and 20 Pct cold-worked Type 316 Stainless Steel", Met. Trans., vol. 6A, 1975, pp. 1835-1837.
  28. J.H. Cook, L.C. Walters, C.H. Pitt, "Searching for an Equation of State for the Plastic Deformation of Stainless Steel", Scripta Met., vol. 10, 1976, pp. 335-340.
  29. F.H. Huang, F.V. Ellis, Che-Yu Li, "Comparison of Load Relaxation Data of Type 316 Austenitic Stainless Steels with Hart's Deformation Model", Met. Trans., vol. 8A, 1977, pp. 699-704.
  30. H. Yamada, Che-yu Li, "Stress Relaxation and Mechanical Equation of State in B.C.C. Metals in Monotonic Loading", Acta Met., vol. 22, 1974, pp. 249-253.
  31. E.W. Hart, Che-Yu Li, H. Yamada, G.L. Wire, "Phenomenological Theory: A Guide to Constitutive Relations and Fundamental Deformation Properties", Constitutive Equations in Plasticity, A.S. Argon, ed., MIT Press, Cambridge, Mass, 1975, pp. 149-197.
  32. F.V. Ellis, Che-Yu Li, "Stress Relaxation in Titanium", Scripta Met., vol. 8, 1974, pp. 739-742.
  33. A.T. Nagy, "Stress Relaxation and Deviation from the Mechanical Equation of State in Cold Drawn Tungsten Wires", Scripta Met., vol. 9, 1975, pp. 27-30.
  34. D.A. Woodford, "Load Relaxation Testing of a Superplastic Superalloy", Met. Trans., vol. 7A, 1976, pp. 1244-1246.
  35. D. Lee, E.W. Hart, "Stress Relaxation and Mechanical Behaviour of Metals", Met. Trans., vol. 2, 1971, pp. 1245-1248.
  36. A. Tonejc, J.P. Poirier, "Mechanical Equation of State and Superplastic Materials", Scripta Met., vol. 9, 1975, pp. 555-558.
  37. J.C. Swearingen, R.W. Rohde, "Application of Mechanical State Relations at Low and High Homologous Temperatures", Met. Trans., vol. 8A, 1977, pp. 577-582.
  38. E.W. Hart, "Constitutive Relations for the Nonelastic Deformation of Metals", Journ. Eng. Mat. Tech., July 1976, pp. 193-202.
  39. R.W. Rohde, J.C. Swearingen, "Mechanical Equation of State for Inelastic Solids", Proceedings of the Second International Conference on Mechanical Behavior of Metals, Boston, 1976, pp. 23-27.

# O VETOR VELOCIDADE ANGULAR VIA UM PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

LUIZ C. MARTINS

PROGRAMA DE ENGENHARIA MECÂNICA COPPE/UFRJ

PIUS P. DE MACEDO SOARES

NUCLEBRÁS/RJ

## SUMÁRIO

*O vetor velocidade angular de um corpo rígido é introduzido na maioria dos textos de Mecânica Racional para engenharia de um modo descuidado se comparado com o nível de rigor do resto do texto. Aqui apresentamos um novo enfoque para a prova da existência do vetor velocidade angular, prova esta que utiliza apenas conceitos elementares do Cálculo e que se harmoniza com o nível de cuidado que se deve esperar num primeiro encontro com a Mecânica Racional.*

## INTRODUÇÃO

Considere um corpo rígido  $B$  que se move com um ponto fixo  $O \in E$ , onde  $E$  é o espaço euclidiano tridimensional. A demonstração de que o campo de velocidades dos pontos de  $B$  é dado pela expressão  $\dot{p} = \omega \times r_p$ , onde  $r_p$  é o vetor posição de  $p$  em relação ao ponto  $O$  e  $\omega$  é o vetor velocidade angular, não é satisfatória na maioria dos textos elementares de Mecânica.

Kane [1], com cuidado, analisa o problema tomando um triedro direto  $I, J, K$  fixo no corpo e define a velocidade angular por:

$$\omega = (\dot{J} \cdot K)I + (\dot{K} \cdot I)J + (\dot{I} \cdot J)K.$$

Da hipótese de rigidez,  $\dot{I} \cdot I = 1$  e  $\dot{I} \cdot K = 0$ , concluímos que  $\dot{I} \cdot I = 0$  e  $\dot{I} \cdot K = -\dot{I} \cdot K$  e um simples cálculo mostra que  $\omega \times I = \dot{I}$ ,  $\omega \times J = \dot{J}$  e  $\omega \times K = \dot{K}$ .

Desta forma,  $\omega$  é determinado por  $\dot{I}$ ,  $\dot{J}$  e  $\dot{K}$  e é claro que  $\dot{p} = \omega \times r_p$  para todo  $p \in B$ . Note que a expressão de  $\omega$  requer o conhecimento das velocidades dos pontos de vetor posição  $I, J$  e  $K$ .

O vetor velocidade angular também é dado pela seguinte expressão, que envolve as velocidades  $\dot{r}_a$  e  $\dot{r}_b$  de apenas dois pontos  $a$  e  $b$  de  $B$ ,

de vetores posição  $r_a$  e  $r_b$ :

$$\omega = \frac{\dot{r}_a \times \dot{r}_b}{\dot{r}_a \cdot r_b}.$$

Observe que esta expressão não faz sentido se  $\dot{r}_a \cdot r_b = 0$ , o que pode ocorrer mesmo quando  $r_a$  e  $r_b$  não são linearmente dependentes.

Se  $r_c$  é o vetor posição de um ponto  $c$  qualquer do corpo, temos que, se a expressão acima faz sentido,  $r_c = c_1 r_a + c_2 r_b + c_3 (r_a \times r_b)$ ; que derivada em relação ao tempo nos fornece  $\dot{r}_c$  em função das velocidades de  $a$  e  $b$ .

Mostraremos nesta nota que basta o conhecimento das velocidades de dois pontos  $p$  e  $q$  do corpo, com a única restrição de que  $r_p$  e  $r_q$  sejam linearmente independentes, para se calcular a velocidade angular  $\omega$  (e assim o campo de velocidades do corpo) via uma expressão que é válida sem qualquer outra hipótese adicional.

## A EXISTÊNCIA DE $\omega$

Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos de  $B$ , com seus vetores posição  $r_p$  e  $r_q$  linearmente independentes, e suponha que exista um vetor  $\omega$  tal que se te-

na  $\dot{r}_p = \omega \times r_p$  e  $\dot{r}_q = \omega \times r_q$ . Assim o vetor posição de qualquer ponto  $u$  do corpo pode ser escrito como:

$$r_u = u_1 r_p + u_2 r_q + u_3 (r_p \times r_q),$$

com  $u_1, u_2,$  e  $u_3$  constantes pela hipótese de rigidez.

A velocidade  $\dot{r}_u$  de  $u$  será então dada por:

$$\dot{r}_u = u_1 \dot{r}_p + u_2 \dot{r}_q + u_3 (\dot{r}_p \times r_q + r_p \times \dot{r}_q).$$

Como  $\omega \times (r_p \times r_q) = (\omega \cdot r_q) r_p - (\omega \cdot r_p) r_q$  também se escreve

$$(\omega \cdot r_q) r_p - (\omega \cdot r_p) r_q + (r_p \cdot r_q) \omega - (\omega \cdot r_p) r_q,$$

que é o mesmo que  $r_q \times (r_p \times \omega) + r_p \times (\omega \times r_q)$ , concluímos que:

$$\omega \times (r_p \times r_q) = \dot{r}_p \times r_q + r_p \times \dot{r}_q. \quad (1)$$

E de (1) segue imediatamente que  $\dot{r}_u = \omega \times r_u$ .

Desta forma, o problema da existência da velocidade angular se reduz a demonstrar que sempre é possível determinar  $\omega$  tal que a fórmula  $\dot{r} = \omega \times r$  seja correta para dois pontos do corpo com vetores posição linearmente independentes. Para tal, vamos demonstrar que se um corpo rígido se move com um ponto fixo então haverá outros pontos dele instantaneamente parados.

Assuma que uma esfera  $S$  centrada em  $O$ , o ponto fixo do corpo  $B$ , esteja nele contida. Então pontos de  $S$  diametralmente opostos tem velocidades simétricas: se  $r_a = aI$ , o ponto diametralmente oposto tem vetor posição  $-aI$ , e  $\dot{r}_a = a\dot{I}$ . São não trivial o caso em que  $\dot{r}_a$  não é zero. Considere a circunferência interseção da esfera  $S$  com o plano  $P$  ortogonal a  $\dot{r}_a$  e contendo  $O$ . Escolha  $J$  em  $P$ , um vetor não nulo ortogonal a  $I$ . Então  $I$  e  $J$  são uma base para  $P$  e considere a evolução dos pontos do corpo de vetores posição  $I$  e  $J$  naquele instante. Como  $\dot{J} \cdot J = 0$  e  $\dot{J} \cdot I + J \cdot \dot{I} = 0 = \dot{J} \cdot I$  neste instante pois  $\dot{I}$  é ortogonal a  $P$ , concluímos que a velocidade de um ponto qualquer de  $P \cap S$  é ortogonal a  $P$ .

Desta forma, se  $K$  é um vetor não nulo e perpendicular a  $P$ , a velocidade de qualquer ponto

$s \in S \cap P$  é dada por  $\dot{r}_s = v_s K$ . E como em pontos diametralmente opostos as velocidades são simétricas,  $v_s$  se anula em pelo menos dois pontos da circunferência  $S \cap P$ , dado que  $v_s$  varia continuamente.

Agora demonstramos a existência de  $\omega$ . Escolha um vetor segundo a reta definida por  $O$  e o ponto de  $S$  que tem velocidade nula. Como tal vetor está em  $P$  podemos ajustar sua magnitude de modo que o produto vetorial dele por  $r_a$  seja igual a  $\dot{r}_a$ . Tal vetor satisfará a relação  $\dot{r} = \omega \times r$  para dois pontos de vetores posição linearmente independentes.

#### UMA FÓRMULA PARA $\omega$

Demonstraremos agora construtivamente como determinar o vetor velocidade angular em função das velocidades de dois pontos  $p$  e  $q$  de  $B$ , cujos vetores posição são linearmente independentes.

Escolha um vetor  $k$  tal que  $k \times r_p = \dot{r}_p$ . Para todo  $\beta$  real teremos  $(k + \beta r_p) \times r_p = \dot{r}_p$ . Nosso objetivo é determinar  $\beta$  tal que

$$(k + \beta r_p) \times r_q = \dot{r}_q. \quad (2)$$

Como não é evidente que tal  $\beta$  exista, vamos nos contentar em escolher um  $\beta$  ótimo no sentido de que o quadrado do módulo do vetor

$$v(\beta) = ((k + \beta r_p) \times r_q - \dot{r}_q) \quad (3)$$

seja estacionário. Derivando-se  $v^2(\beta)$  em relação a  $\beta$  e igualando-se o resultado a zero, tem-se que o valor estacionário de (3) é:

$$(k \times r_q - \dot{r}_q) - ((k \times r_q - \dot{r}_q) \cdot r_p \times r_q) \frac{r_p \times r_q}{(r_p \times r_q)^2}$$

Mas esta é a componente de  $k \times r_q - \dot{r}_q$  no plano de  $r_p$  e  $r_q$ . É claro que  $k \times r_q - \dot{r}_q$  é ortogonal a  $r_q$ , e como

$$(k \times r_q - \dot{r}_q) \cdot r_p = -k \times r_p \cdot r_q - r_p \cdot \dot{r}_q = -\dot{r}_p \cdot r_q - r_p \cdot \dot{r}_q = 0$$

pela hipótese de rigidez, vemos que o valor estacionário de  $v^2(\beta)$  é zero. Mas então (2) é satisfeita para aquele valor de  $\beta$ .

Desta forma temos a fórmula para o vetor velocidade angular:

$$\omega = k - \frac{(kx\dot{r}_q - \dot{r}_q) \cdot (r_p \times r_q)}{(r_p \times r_q)^2} r_p .$$

Há de se observar que para sua aplicação de vemos escolher  $k$  tal que  $kx\dot{r}_p = \dot{r}_p$ . Um candidato natural para este vetor é obviamente:

$$k = \frac{r_p \times \dot{r}_p}{(r_p)^2} .$$

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Prof. Roberto Aizik Tenenbaum por seus comentários quando da elaboração deste trabalho.

#### REFERÊNCIAS

1. T.R. Kane, Dynamics, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1968.
2. P.P. Macedo Soares, "Uma Formalização da Mecânica Analítica dos Sistemas de Corpos Rígidos", Tese de MSc., COPPE/UFRJ, 1980.

Impresso em Off-Set nas oficinas da Gráfica Editora Fon-Fon e Seleta - R. Pedro Alves, 60 - Stº Cristo - Rio de Janeiro - RJ

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio  
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ  
Departamento de Engenharia Mecânica, 2º andar, sala 149  
Rua Marquês de São Vicente, 209  
22451 – RIO DE JANEIRO – RJ – (Brasil)

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US\$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280mm – with a letter containing title of the papers, name (s) of the institution (s) and author (s)' address (es).

Together with the letter, the author (s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

*Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.*

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author (s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1981 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means – electronic, mechanical, photographic, recording or any else – is allowed without written permission.

#### Subscriptions

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido  
20261 Rio de Janeiro RJ (Brasil)

