

VOL. III - Nº 2 - 1981

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1981, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

Assinaturas

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

EDITOR RESPONSÁVEL

L. Bevilacqua

EDITOR EXECUTIVO

R. Sampaio

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J.J. de Espíndola

R. A. Feijóo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizze Neto

G. Massarini

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Análise Dinâmica de "Risers" de Perfuração de Poços de Petróleo em Águas Profundas

Liu Hsu

F. Mourão Farias

CENPES PETROBRÁS

M. Hiroo Hirata

Programa de Engenharia Mecânica COPPE/UFRJ

3

Influência dos Parâmetros da Lei de Norton na Determinação de Tensões e Deformações em Materiais que Experimentam Fenômenos da Fluência

Comitê da ABCM-RJ sobre: "Comportamento Inelástico de Materiais"

L. Bevilacqua

Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

R. Feijóo

Deptº de Pesquisa de Desenvolvimento, LCC/CNPq

J. L. Freire

Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

P. E. V. Miranda

Programa de Engenharia Metalúrgica, COPPE/UFRJ

E. Monteiro

Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

T. L. Silveira

Faculdade de Engenharia Souza Marques

L. Taroco

Deptº de Pesquisa de Desenvolvimento, LCC/CNPq

13

Revisão dos Modelos de Fratura em Aços para Vasos de Pressão para Fins Nucleares

Fathi A. I. Darwish

Deptº de Ciência dos Materiais e Metalurgia, PUC/RJ

25

Efeito do Raio de Curvatura da Raiz do Entalhe na Tenacidade Dinâmica do Aço SAE 1060 a Baixa Temperatura

Augusto C. R. de Abreu

Fathi A. I. Darwish

Cesar R. Ouro

Deptº de Ciência dos Materiais e Metalurgia, PUC/RJ

35

An Uncoupling Strategy for Numerically Solving the Dynamic Thermoelasticity Equations

Carlos A. de Moura

Raúl A. Feijóo

Laboratório de Computação Científica, CNPq

41

Plane Buoyant Plumes

Chia-Shun Uih

The University of Michigan

A. S. Gupta

Indian Institute of Technology

49

ANÁLISE DINÂMICA DE "RISERS" DE PERFURAÇÃO DE POÇOS DE PETRÓLEO EM ÁGUAS PROFUNDAS

LIU HSU

F. MOURÃO FARIAS

CENPES PETROBRÁS

M. HIROO HIRATA

PROGRAMA DE ENGENHARIA MECÂNICA COPPE/UFRJ

SUMÁRIO

Em áreas de forte correnteza os "risers" podem sofrer fortes vibrações provocadas por vórtices. Estas vibrações levam a atrasos consideráveis na perfuração de poços, como ocorre, por exemplo, na costa do Amapá ⁸. Neste trabalho adota-se o modelo matemático proposto por Skop e Griffin para o cálculo da amplitude das vibrações induzidas por vórtices. A discretização do modelo contínuo leva a um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares. O cálculo da amplitude de vibração é então realizado através do método da Forma Normal que permite de maneira cômoda a inclusão de vários modos do modelo discretizado.

1. INTRODUÇÃO

A importância crescente do petróleo da plataforma continental incentivou o estudo mais detalhado do comportamento dos equipamentos e estruturas no oceano.

Neste trabalho a estrutura considerada é um "riser" de perfuração. Em águas profundas a perfuração de poços de petróleo é normalmente feita por embarcações especiais chamadas plataformas semi-submersíveis ancoradas verticalmente sobre o ponto onde se deseja perfurar. Dela parte uma tubulação que é ligada a um dispositivo previamente instalado no fundo do mar. Esta tubulação é chamada "riser" e por dentro do "riser" passam a broca e a coluna de perfuração e retornam a lama e os cascalhos do fundo do poço.

Os apoios superior e inferior de um "riser" são constituídos respectivamente de uma junta telescópica e uma junta esférica. A seu lado correm duas tubulações de diâmetro bem menor usadas para o controle da pressão na cabeça do poço caso haja uma ameaça de erupção.

Na extremidade superior, um "riser" é ainda ligado por cabos a um sistema hidráulico que o traciona com força aproximadamente constante. A tração tem como finalidades básicas diminuir as deflexões do "riser" e evitar que ele flambe devido a ação do peso próprio.

Os principais esforços a que um "riser" se acha submetido são a tração aplicada a seu topo, o peso próprio, o peso da lama de perfuração, o empuxo hidrostático, os esforços causados pelos movimentos da semi-submersível, ondas e correntes marinhas.

O estudo do dimensionamento do "riser", embora trabalhoso, não acarreta maiores dificuldades, já que se baseia no equilíbrio de uma viga tracionada ^[1]. Entretanto, o estudo das vibrações induzidas por vórtices criados por interação da estrutura com a corrente marinha já apresenta um caráter pouco convencional e se depara com duas dificuldades principais: a construção de um modelo matemático aplicável e a sua análise.

A rigor, a solução do problema dinâmico de

veria partir do cálculo da força de sustentação ("lift") através da integração da pressão na superfície do "riser", envolvendo assim a solução das equações de Navier-Stokes, o que é praticamente impossível. Por isso, Hartlen e Curie [2] postularam uma equação empírica para a força de sustentação em cilindros rígidos, a partir de experiências em laboratório. Esta equação é do tipo que descreve o oscilador de Van der Pol.

Vibrações induzidas por vórtices foram estudadas por vários autores e as referências mais significativas podem ser encontradas nos artigos de Skop e Griffin [3] [4]. Estes autores estudaram inicialmente cilindros rígidos excitados por vórtices [3], adotando formas modificadas da equação de Hartlen e Curie em seus modelos. Posteriormente, estenderam este estudo ao caso de cilindros flexíveis [4]. Esta extensão foi baseada na observação experimental [5] de que em cabos flexíveis o processo de formação de vórtices em uma determinada seção do cabo é fortemente dependente da amplitude local de vibração, sendo praticamente independente do comportamento de seções vizinhas. Os mesmos autores advogam uma boa concordância entre resultados teóricos e dados experimentais.

Neste trabalho as vibrações do "riser" submetido a vórtices são analisadas adotando-se o modelo proposto por Skop e Griffin em [4]. Chega-se assim a um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas a um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, sendo a dimensão destes sistemas, como de costume, dependente do número de modos de vibrações que se deseja incluir. A solução analítica proposta em [4] é obtida através do balanço harmônico mediante a simplificação de que as equações não-lineares que descrevem a força de sustentação ao longo do cilindro são praticamente desacopladas. A solução torna-se assim bem mais simples, porém, a validade da simplificação é discutível. Além do mais, e talvez seja essa a razão principal para se optar por outra solução, para perfis de corrente marinha não uniformes ao longo do "riser" a hipótese de desacoplamento torna-se ainda menos sustentável. Sem esta hipótese, en-

tretanto, o método do balanço harmônico (ou outro método clássico da teoria de oscilações não lineares) torna-se extremamente laborioso se aplicado tal como costuma ser apresentado.

Além do mais, como o comportamento do "riser" se torna mais importante em condições de ressonância, o sistema a ser resolvido nestas condições está próximo de uma ressonância interna complexa [6], complicando ainda mais a sua resolução.

Por estas razões o método alternativo é o da Forma Normal [7], que permite incluir de maneira relativamente simples, vários modos de vibração sem a hipótese de desacoplamento, em situações próximas da ressonância, e para perfis genéricos da corrente marinha, geralmente não uniforme, devido a profundidade do mar considerada.

2. O MODELO MATEMÁTICO [4]

Para melhor compreensão da derivação das equações dinâmicas no caso de cilindros flexíveis expomos inicialmente o modelo matemático adotado por Skop e Griffin no caso de cilindros rígidos.

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = \mu\omega_s^2 C_L \quad (2.1)$$

$$C_L + \omega_s^2 C_L - [C_{L0}^2 - C_L^2 - (\dot{C}_L/\omega_s)^2] (\omega_s G C_L - \omega_s^2 H C_L) = \omega_s F \dot{y} \quad (2.2)$$

onde y é o deslocamento do cilindro, normal ao fluxo; os parâmetros C_{L0} , F , G e H , são parâmetros experimentais e positivos; ω_0 e ξ , são respectivamente a frequência natural e o coeficiente de amortecimento do sistema mola-massa em um fluido estacionário com as mesmas propriedades do fluido móvel; ω_s é a frequência de Strouhal ($\omega_s = 2\pi SV/D$, S é o número de Strouhal, V a velocidade do fluxo e D o diâmetro do cilindro); $\mu = \rho D^2 \ell / 8\pi^2 S^2 M$, ρ é a densidade do fluido, ℓ , o comprimento do cilindro e M , a massa mais a massa adicional (massa virtual). A equação (2.2) é a equação postulada por Skop e Griffin para descrever a força de sustentação C_L . Notamos que se $y \equiv 0$ (cilindro estacionário) a equação (2.2) leva a uma autooscilação dada exatamente por $C_L = C_{L0} \sin \omega_s t$ [4].

Nesta mesma referência, são dadas as seguintes equações que descrevem a dependência de F , G e H com a grandeza adimensional $S_G = \xi/\mu$ (amortecimento reduzido), no caso de cilindros circulares,

$$\log G = 0.25 - 0.21 S_G \quad (2.a)$$

$$H = \xi h \quad (2.b)$$

$$\log_{10} h S_G^{2.1} = -0.24 + 0.66 S_G \quad (2.c)$$

$$F = 4GS_G/h, \quad (2.d)$$

que são válidas para um número de Reynolds compreendido entre 400 e 10^5 , para o qual S e C_{L0} são considerados constantes; $S \approx 0.21$ e $C_{L0} \approx 0.30$.

A extensão do modelo acima para o caso de cilindros flexíveis é baseada na hipótese de que o processo de formação de vórtices em cabos é fortemente dependente da amplitude local mas apenas fracamente dependente dos elementos vizinhos [4] [5]. Desta forma, a equação (2.2) pode ser aplicada diretamente na descrição da força de sustentação ao longo de um cilindro elástico, sem a introdução de derivadas espaciais, isto é, a força de sustentação em cada elemento do cilindro flexível dependerá apenas do mesmo elemento.

Toma-se então a deflexão do cilindro flexível como,

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t), \quad (2.3)$$

onde $\phi_i(x)$ são as autofunções normalizadas referentes ao cilindro imerso em água parada. Temos então ($m(x)$ = massa/unidade de comprimento):

$$\int_0^L m(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Expandindo C_L em termos das mesmas autofunções, i.e.,

$$C_L = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) Q_i(t), \quad (2.5)$$

e substituindo (2.3) e (2.5) em (2.1) obtêm-se da maneira usual (multiplicação por autofunção

e integração ao longo do cilindro onde $\omega_s \neq 0$):

$$\frac{\dot{q}_i}{D} + 2\xi_i \omega_i \frac{\dot{q}_i}{D} + \omega_i^2 \frac{q_i}{D} = \sum_j \mu_{ij} \dot{Q}_j \quad (2.6)$$

onde μ_{ij} é dado por

$$\mu_{ij} = (\rho D^2 / 8\pi^2 S^2) \int_0^L \omega_s^2(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx. \quad (2.7)$$

Nota: Salvo menção especial todos os somatórios se estenderão de 1 a n .

Analogamente, substituindo-se (2.5) e (2.3) em (2.2) obtêm-se

$$\begin{aligned} & \sum_j \ddot{Q}_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx - C_{L0} G_i \sum_j \dot{Q}_j \int_0^L \omega_s \phi_i \phi_j dx + \\ & + (1 + H_i C_{L0}) \sum_j Q_j \int_0^L \omega_s^2 \phi_i \phi_j dx + \\ & + \sum_j \sum_k \sum_\ell [G_i \dot{Q}_j Q_k Q_\ell \int_0^L \omega_s \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx + \\ & + G_i \dot{Q}_j \dot{Q}_k \dot{Q}_\ell \int_0^L \frac{1}{\omega_s} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx - \\ & - H_i Q_j \dot{Q}_k \dot{Q}_\ell \int_0^L \frac{1}{\omega_s} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx - \\ & - H_i Q_j Q_k \dot{Q}_\ell \int_0^L \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx \\ & - H_i Q_j Q_k Q_\ell \int_0^L \omega_s^2 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx] = \\ & = F_i \sum_j \frac{\dot{q}_j}{D} \int_0^L \omega_s \phi_i \phi_j dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os parâmetros F_i , G_i e H_i são definidos por Skop e Griffin de maneira análoga ao caso do cilindro rígido (por exemplo, $\log_{10} G_i = 0.25 - 0.215 q_i$. Cabe aqui notar-se que, se a hipótese de independência elemento a elemento apresentada anteriormente fosse adotada de maneira estrita, estes parâmetros não variariam como o índice i .

Quando o fluxo é uniforme, as equações se simplificam bastante devido à ortogonalidade das autofunções. Neste caso ($\omega_s(x) = \text{cte}$) o sistema (2.6) (2.8) torna-se

$$\frac{\ddot{q}_i}{D} + 2\xi_i \mu_i \frac{\dot{q}_i}{D} + \omega_i^2 \frac{q_i}{D} = \omega_s^2 \mu_{ii} Q_i,$$

com $\nu_{ij} = \rho D^2 / 8\pi^2 S^2$, e

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i - \omega_s^2 C_{LO}^2 G_i \dot{Q}_i + (1 + H_i C_{LO}^2) \omega_s^2 Q_i + \\ + m \sum_j \sum_k \sum_\ell (\omega_s^2 G_i \dot{Q}_j Q_k Q_\ell + \frac{1}{\omega_s} G_i \dot{Q}_j \dot{Q}_k \dot{Q}_\ell - \\ - \omega_s^2 H_i Q_j Q_k Q_\ell - H_i Q_j \dot{Q}_k \dot{Q}_\ell) \int_0^\ell \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell dx = \\ = \omega_s F_i \frac{\dot{Q}_i}{D} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tanto o sistema (2.6) (2.8) como o sistema (2.9) (2.10) são constituídos de dois subsistemas acoplados sendo um linear e outro não linear; os termos de acoplamento são dados pelos segundos membros das respectivas equações diferenciais.

O sistema (2.9) e (2.10) foi resolvido por Skop e Griffin através do método do balanço harmônico de uma maneira análoga ao caso do cilindro rígido. Entretanto, para isso, os autores desprezaram o acoplamento entre os modos da expansão de $C_L(Q_1, Q_2, \text{etc...})$ considerando no somatório de (2.10), apenas os termos correspondentes a $j = k = \ell = i$. Deste modo, observa-se que para cada modo de vibração do tubo (i.e., para cada valor de i) teríamos um sistema de 2 equações de 2ª ordem inteiramente análogo ao sistema (2.1) (2.2) do problema do cilindro rígido.

Infelizmente, não se pode a priori desprezar os termos cúbicos cruzados de (2.10) só pelo fato de que o acoplamento entre os diversos modos Q_i se faz por intermédio de termos não lineares; não é difícil de se construir um contra-exemplo.

Se todos os termos de (2.10) são considerados, a aplicação manual do método do balanço harmônico torna-se bem mais trabalhosa quando se deseja incluir mais de um modo Q_i . Esta dificuldade é ainda mais notável no caso geral (fluxo não uniforme) das equações (2.6) (2.8).

É conveniente pois recorrer-se a um método que permita de maneira cômoda contornar a complexidade dos cálculos formais envolvidos no problema. Adotaremos aqui o método da Forma Normal proposto por Hsu [7] na análise de vibrações não-lineares de sistemas de n graus de liberdade próximas de uma condição de bi-

furcação (no caso, de ressonância interna).

3. MÉTODO DA FORMA NORMAL

Seria impossível dar aqui um resumo do método na sua formulação mais geral. Considera-se pois apenas o caso específico do problema deste artigo.

Seja um sistema de $2n$ equações de 1ª ordem

$$\dot{\underline{x}} = A(\alpha)\underline{x} + \underline{F}(\underline{x}, \alpha) \quad (3.1)$$

onde $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, $A: 2n \times 2n$, $F: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo $\underline{F}$ analítica em seus argumentos em torno de $\underline{x} = \underline{0}$ e $\alpha = \alpha_0$. Suponha-se também que $\underline{F}(\underline{0}, \alpha) = \underline{0}$, que $\underline{F}(\underline{x}, \alpha)$ só contenha termos de ordem superior a 1 em $\underline{x}$ e que α_0 corresponda a um valor de bifurcação da solução $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$.

1º Passo: diagonalização da parte linear.

Suponha-se que para $\alpha = \alpha_0$ todos os $2n$ autovalores λ_i de A sejam imaginários puros e de multiplicidade 1 (os $2n$ autovetores correspondentes formam um conjunto linearmente independente).

Então, existe uma transformação linear (complexa) $\underline{X} = S^0 \underline{x}$ tal que o novo sistema fica na forma $(\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{2n})^T)$:

$$\dot{X}_i = \lambda_i^0 X_i + F_i(\underline{X}, \alpha_0); \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.2)$$

onde F_i é da forma

$$F_i(\underline{X}, \alpha_0) = \sum_{|\underline{v}|=2}^{\infty} \phi_{i,\underline{v}}(\alpha_0) \underline{X}^{\underline{v}} \quad (3.3)$$

sendo $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{2n})$, $|\underline{v}| = v_1 + v_2 + \dots + v_{2n}$, v_j inteiros ≥ 0 , $\phi_{i,\underline{v}}$ constantes complexas e $\underline{X}^{\underline{v}} = X_1^{v_1} X_2^{v_2} \dots X_{2n}^{v_{2n}}$

A escolha de S^0 pode ser feita de modo que $X_i^* = X_{i+n}$ ($i = 1, \dots, n$).

2º Passo: Eliminação dos termos não-lineares não-ressonantes (Forma Normal).

Entende-se por termo ressonante em (3.2) os termos da expansão (3.3) que satisfazem a relação

$$\lambda_{\underline{v}}^0 \triangleq \underline{v} \cdot \Lambda^0 - \lambda_i^0 = 0 \quad (3.4)$$

onde $\Lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{2n}^0)$; isto é

$v_1 \lambda_1^0 + v_2 \lambda_2^0 + \dots + v_{2n} \lambda_{2n}^0 - \lambda_i^0 = 0$. Pode-se mostrar [7] que através de uma transfor-

mação não linear (formal) da forma ($\underline{X} + \bar{\underline{X}}$):

$$\underline{X}_i = \bar{\underline{X}}_i + \sum_{|\underline{v}|=2}^{\infty} B_{i,\underline{v}}^0 \bar{\underline{X}}^{\underline{v}} (B_{i,\underline{v}}^0, \text{constantes complexas}), \quad (3.5)$$

o sistema (3.2) fica reduzido à forma

$$\dot{\bar{\underline{X}}}_i = \lambda_i^0 \bar{\underline{X}}_i + \sum_{\substack{|\underline{v}|=0 \\ |\underline{v}| \geq 2}} \phi_{i,\underline{v}}^0 \bar{\underline{X}}^{\underline{v}}, \quad (3.6)$$

que só contém termos ressonantes e que é dito estar então na Forma Normal. A análise do sistema na Forma Normal é geralmente bem mais simples que na forma original.

Nota: A transformação $\underline{X} + \bar{\underline{X}}$ pode ser escolhida de modo que $\bar{\underline{X}}_i^* = \bar{\underline{X}}_{i+n}$ ($i = 1, \dots, n$).

Para valores de $\alpha \neq \alpha_0$, mas próximos do valor de bifurcação, adota-se um esquema de perturbação com a introdução de um pequeno parâmetro ϵ através da expressão $|\epsilon|$:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_2 \epsilon^2 \quad (3.7)$$

Neste caso, se nos contentarmos com a precisão que se pode obter com a Forma Normal de (3.1) truncada a partir dos termos de ordem superior a 3, é suficiente usar uma Forma Normal aproximada para as situações quase críticas ($\epsilon \neq 0$) dada explicitamente por $|\epsilon|$:

$$\dot{\bar{\underline{X}}}_i = (\lambda_i^0 + \epsilon^2 \lambda_i^2) \bar{\underline{X}}_i + \sum_{\substack{|\underline{v}|=0 \\ |\underline{v}| \leq 3}} \bar{\phi}_{i,\underline{v}}^0 \bar{\underline{X}}^{\underline{v}} \quad (3.8)$$

$$\text{onde } \lambda_i^2 = \underline{v}^T \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon^2} \right) \underline{u}^i; \quad i=1,2,\dots,2n$$

e $\underline{v}^i$ e $\underline{u}^i$ são respectivamente os autovetores a esquerda e a direita de A relativamente a λ_i . Note-se que em (3.8) os coeficientes $\bar{\phi}$ dos termos ressonantes são os mesmos que no caso crítico $\alpha = \alpha_0$ (ou $\epsilon^2 = 0$), o que facilita a determinação da Forma Normal.

Quando se tem mais de um grau de liberdade, a computação dos coeficientes $\bar{\phi}$ da Forma Normal (3.8) ou (3.6) pode ser facilmente programada numericamente a partir dos coeficientes dos termos lineares e não lineares de

(3.1) $|\epsilon|$. Em geral, só é necessário obter-se a Forma Normal até os termos cúbicos e consequentemente só se precisa conhecer o desenvolvimento do segundo membro de (3.1) até os termos cúbicos.

4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FORMA NORMAL: VIBRAÇÕES RESSONANTES DO "RISER"

Uma característica notável da interação fluido estrutura é a sincronização ("lock-in") entre as frequências de vórtice e de vibração. Isto significa que o cilindro e a esteira ("wake") tem a mesma frequência característica e que a frequência de Strouhal natural, característica da formação de vórtices através de um cilindro estacionário, é suprimida. A sincronização ocorre quando a amplitude de vibração do cilindro ultrapassa um valor crítico e é acompanhado por grandes correlações na fase da formação de vórtices ao longo do eixo do cilindro $|\epsilon|$. A frequência resultante da sincronização é próxima da frequência de Strouhal (ω_s) e da frequência de vibração natural (ω_0) do cilindro no caso rígido (considerando-se a massa adicional devida ao fluido). No caso flexível, o "lock-in" se passa a frequências próximas de ω_s e de ω_n , que é a frequência correspondente ao modo de vibração considerado.

Neste trabalho, considera-se a condição de sincronização por ser a condição que leva a maiores amplitudes de vibração do cilindro.

Procura-se então para o sistema (2.9)(2.10) uma solução periódica quase-harmônica pois, como de hábito em métodos de perturbação, o sistema é suposto fracamente não-linear.

Considere-se o "lock-in" em torno do 1º modo de vibração do cilindro, isto é, $\omega_s \approx \omega_1$. Neste caso podemos desprezar a amplitude de vibração dos demais modos ou seja $q_i \approx 0$ ($i = 2, 3, \dots$) e bastará considerarmos (2.9) com $i = 1$ sendo que em (2.10) $\dot{q}_i = 0$ para $i = 2, 3, \dots$.

No presente problema ξ_1 , μ_1 e C_{L0}^2 são considerados como pequenos parâmetros, podendo, sem perda de generalidade, supô-los proporcionais a um único pequeno parâmetro ϵ^2 . A bifurcação ocorre para $\epsilon^2 = 0$ pois o sistema (2.9) (2.10) tem todos os seus autovalores (da parte linear) sobre o eixo imaginário. Além do mais, sendo $\omega_1 \approx \omega_s$ podemos fazer $\omega_1 = \omega_s + \epsilon^2(\dots)$;

neste caso para $\epsilon^2 = 0$, tem-se uma ressonância interna pois todas as frequências características do sistema (2.9) (2.10), linearizado, são idênticas.

4.1 Vibrações Ressonantes do "laser" sob fluxo uniforme

O modelo matemático neste caso é dado pelo sistema (2.9) (2.10).

Como resultado de uma avaliação prévia^[1], os modos naturais de vibração do laser são aproximados por

$$\phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sin \frac{i\pi x}{\ell} \quad (4.1)$$

que são os modos de uma viga biapoada com tração uniforme.

No estudo abaixo consideraremos apenas os 2 primeiros modos ímpares ($i=1,3$) para analisar as vibrações de frequência próxima da frequência natural ω_1 do cilindro correspondente ao seu 1º modo, em condição de "lock-in".

Como já foi observado na seção anterior podemos considerar $q_2, q_3, \dots$ praticamente nulos, i.e. que o cilindro vibra em seu 1º modo. Devido a razões de simetria e em condição de regime permanente os Q_i s para i par, são considerados nulos.

Assim, o sistema (2.9) (2.10) reduz-se a

$$\frac{\ddot{q}_1}{D} + 2\xi_1\mu_1 \frac{\dot{q}_1}{D} + \omega_1^2 \frac{q_1}{D} = \omega_s^2 \mu_{11} Q_1 \quad (4.2)$$

$$(\mu_{11} = \rho D^2 / 8\pi^2 S^2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 - \omega_s^2 C_{L0}^2 G_1 \dot{Q}_1 + (1 + H_1 C_{L0}^2) \omega_s^2 Q_1 + \\ + \frac{1}{2m\ell} [\omega_s G_1 (3Q_1^2 \dot{Q}_1 - 2Q_1 Q_3 \dot{Q}_1 + 2Q_3^2 Q_1 - Q_1^2 Q_3 + \\ + 4Q_1 Q_3 \dot{Q}_3) + \frac{G_1}{\omega_s} (3\dot{Q}_1^3 - 3\dot{Q}_1 \dot{Q}_3^2 + 6\dot{Q}_1 \dot{Q}_3^2) - \omega_s^2 H_1 (3Q_1^3 - \\ - 3Q_1^2 Q_3 + 6Q_1 Q_3^2) - H_1 (3Q_1 \dot{Q}_1^2 - 2Q_1 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 + 2Q_1 \dot{Q}_3^2 - Q_1 \dot{Q}_3^2 + \\ + 4Q_3 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3)] = \omega_s F_1 \frac{\dot{q}_1}{D} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_3 = \omega_s^2 C_{L0}^2 G_3 \dot{Q}_3 + (1 + H_3 C_{L0}^2) \omega_s^2 Q_3 + \frac{1}{2m\ell} [\omega_s G_3 (-Q_1^2 \dot{Q}_1 + \\ + 4Q_1 Q_3 \dot{Q}_1 + 2Q_1^2 Q_3 + 3Q_3^2 \dot{Q}_3) + \frac{G_3}{\omega_s} (-\dot{Q}_1^3 + 6\dot{Q}_1 \dot{Q}_3^2 + 3\dot{Q}_3^3) - \\ - \omega_s^2 H_3 (-Q_1^3 + 6Q_1^2 Q_3 + 3Q_3^3) - H_3 (-Q_1 \dot{Q}_1^2 + 4Q_1 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 + \end{aligned}$$

$$+ 2Q_3 \dot{Q}_1^2 + 3Q_3 \dot{Q}_3^2)] = 0 \quad (4.4)$$

Para o valor de bifurcação $\epsilon^2 = 0$ (vide seção 3), i.e., $\xi_1 = 0$, $\mu_{11} = 0$ e $C_{L0}^2 = 0$ as três frequências características da parte linear de (4.2) (4.3) (4.4) são idênticas porém o 1º passo do método da Forma Normal não pode ser realizado diretamente pois vemos facilmente que os autovalores correspondentes tem multiplicidade 2.

Para contornar esta dificuldade procedemos da seguinte maneira:

Supondo-se o sistema (4.2) a (4.4) como sendo fracamente não-linear podemos considerar que $q_1, \dot{q}_1, Q_1$ e $\dot{Q}_1$ são dados aproximadamente por

$$\begin{aligned} q_1(t) = A_1 \sin \omega t; \dot{q}_1 = A_1 \omega \cos \omega t; Q_1(t) = \\ = B_1 \sin(\omega t + \psi); \dot{Q}_1(t) = B_1 \omega \cos(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde ω é a frequência de sincronização do conjunto fluido-estrutura. Usando Q_1 da aproximação (4.5) verifica-se que (4.2) representa um oscilador linear sujeito a uma excitação harmônica e facilmente podemos escrever para a solução de regime de q_1 a seguinte expressão:

$$\frac{\dot{q}_1}{D} = \left[\frac{2\mu_{11}\xi_1\omega^2\omega_1\omega_s^2}{\Delta(\omega)} \right] Q_1 - \left[\frac{\mu_{11}\omega_s^2(\omega_1^2 - \omega^2)}{\Delta(\omega)} \right] \dot{Q}_1 \quad (4.6)$$

sendo $\Delta(\omega) = (2\xi_1\omega\omega_1)^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)^2$, ou aproximadamente

$$\frac{\dot{q}_1}{D} = \frac{2\omega_s \mu_{11}}{\xi_1(\gamma_1^2 + 4)} Q_1 - \frac{\gamma_1 \mu_{11}}{\xi_1(\gamma_1^2 + 4)} \dot{Q}_1 \quad (4.7)$$

Em (4.5) tem-se pois,

$$\tan \psi = -2/\gamma_1; \gamma_1 = \frac{2}{\xi_1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right). \quad (4.8)$$

Substituindo-se (4.7) em (4.3) ficamos com novo sistema

$$\ddot{Q}_1 + a_1 \omega_s \dot{Q}_1 + a_2 \omega_s^2 Q_1 + [\dots] = 0 \quad (4.9)$$

$$\ddot{Q}_3 - \omega_s^2 C_{L0}^2 G_3 \dot{Q}_3 + (1 + H_3 C_{L0}^2) \omega_s^2 Q_3 + [\dots] = 0 \quad (4.10)$$

onde os colchetes de (4.9) e (4.10) representam respectivamente os termos não lineares de

(4.3) e (4.4) e

$$a_1 = [\gamma_1 \mu_{11} F_1 / \epsilon_1 (\gamma_1^2 + 4)] - G_1 C_{L0}^2$$

$$a_2^2 = 1 + H_1 C_{L0}^2 - 2\mu_{11} F_1 / \epsilon_1 (\gamma_1^2 + 4) \quad (4.11)$$

Supondo-se pequenos (da ordem de ϵ^2) os parâmetros C_{L0}^2 , a_1 e a diferença $a_2^2 - 1$ chega-se a forma normal (3.8) que no presente problema é dada por

$$\dot{X}_1 = \left(-\frac{a_1}{2} - ia_2\right) \omega_s X_1 - \frac{\omega_s}{16m\ell} (-G_1 + iH_1) [-12X_1^2 Y_1 + 4X_1^2 Y_3 - 8X_3^2 Y_1 + 8X_1 X_3 Y_1 - 16X_1 X_3 Y_3];$$

$$\dot{X}_3 = \left[\frac{1}{2} G_3 C_{L0}^2 - i\left(1 + \frac{H_3 C_{L0}^2}{2}\right)\right] \omega_s X_3 - \frac{\omega_s}{16m\ell} (-G_3 + iH_3) \cdot [-4X_1^2 Y_1 - 8X_1^2 Y_3 - 16X_1 X_3 Y_1 - 12X_3^2 Y_3];$$

$$Y_1 = X_1^*; Y_3 = X_3^*. \quad (4.12)$$

A transformação linear que diagonaliza a parte linear do sistema (4.9) (4.10) é dada por

$$X_1 = Q_1 + \frac{i}{\omega_s} \dot{Q}_1 + O(\epsilon^2); Y_1 = X_1^*;$$

$$X_3 = Q_3 + \frac{i}{\omega_s} \dot{Q}_3 + O(\epsilon^2); Y_3 = X_3^*, \quad (4.13)$$

onde os termos em ϵ^2 podem ser desprezados no grau de aproximação considerado.

Introduzindo por conveniência as coordenadas polares ρ_1 , ρ_3 , θ_1 e θ_3 através de

$$X_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \text{ e } X_3 = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad (4.14)$$

procura-se então uma solução periódica caracterizada por $\dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_3 = 0$ e $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = -\omega$, onde o segundo grupo de igualdades representa a condição de sincronismo. Deste modo chegamos (a partir de (4.12)) às seguintes equações ($\Delta\theta = \theta_3 - \theta_1$):

$$-2m\ell a_1 - 3G_1 \rho_1^2 - 4G_1 \rho_3^2 + \rho_1 \rho_3 (3G_1 \cos \Delta\theta + H_1 \sin \Delta\theta) + 2\rho_3^2 (-G_1 \cos 2\Delta\theta - H_1 \sin 2\Delta\theta) = 0;$$

$$-\omega = -\omega_s a_2 + \frac{\omega_s}{4m\ell} [3H_1 \rho_1^2 + 4H_1 \rho_3^2 + \rho_1 \rho_3 (G_1 \sin \Delta\theta - 3H_1 \cos \Delta\theta) + 2\rho_3^2 (-G_1 \sin 2\Delta\theta + H_1 \cos 2\Delta\theta)]; \quad (4.15)$$

$$2m\ell G_3 C_{L0}^2 \rho_3 - 4G_3 \rho_1^2 \rho_3 - 3G_3 \rho_3^3 + \rho_1^3 (G_3 \cos \Delta\theta - H_3 \sin \Delta\theta) + 2\rho_1^2 \rho_3 (-G_3 \cos 2\Delta\theta + H_3 \sin 2\Delta\theta) = 0; \quad (4.17)$$

$$-\rho_3 \omega = -\omega_s (1 + H_3 C_{L0}^2) \rho_3 + \frac{\omega_s}{4m\ell} [4H_3 \rho_1^2 \rho_3 + 3H_3 \rho_3^3 - \rho_1^3 (G_3 \sin \Delta\theta + H_3 \cos \Delta\theta) + 2\rho_1^2 \rho_3 (G_3 \sin 2\Delta\theta + H_3 \cos 2\Delta\theta)]; \quad (4.18)$$

Nota: a_1 e a_2 dependem de ω .

As equações (4.15) a (4.18) formam um sistema algébrico não linear de 4 equações a 4 incógnitas ω , ρ_1 , ρ_3 e $\Delta\theta$. Entretanto se considerarmos ω_s como incógnita em lugar de ω a solução do sistema se torna bem mais simples pois introduzindo-se a incógnita Z por

$$Z = \rho_3 / \rho_1, \quad (4.19)$$

podemos calcular Z e $\Delta\theta$ a partir de 2 equações obtidas de (4.15) a (4.18):

$$a_1 (G_3, -H_3)_1 + Z [-3C_{L0}^2 G_1 G_3 - 4a_1 G_3 + 2a_1 (-G_3, H_3)_2] + Z^2 [G_3 C_{L0}^2 (3G_1, H_1)_1] + Z^3 [4C_{L0}^2 G_1 G_3 + 2C_{L0}^2 G_3 (-G_1, H_1)_2 - 3a_1 G_3]; \quad (4.20)$$

$$2\left(1 - \frac{H_3 C_{L0}^2}{2} - a_2\right) (G_3, -H_3)_1 + G_3 C_{L0}^2 (-H_3, -G_3)_1 + Z\left\{\left(1 + \frac{H_3 C_{L0}^2}{2} - a_2\right) [-8G_3 + 4(-G_3, H_3)_2] + G_3 C_{L0}^2 [4H_3 - 3H_1 + (2H_3, G_3)]\right\} + Z G_3 C_{L0}^2 (-3H_1, -G_1)_1 + Z^3 \{-6G_3 (1 + \frac{1}{2} H_3 C_{L0}^2 - a_2) + G_3 C_{L0}^2 [3H_3 - 4H_1 + (-2H_1, 2G_1)_2]\} \quad (4.21)$$

onde usamos a notação $(a, b)_n = a \cos n\Delta\theta + b \sin n\Delta\theta$ ($n = 1, 2$).

As incógnitas Z e $\Delta\theta$ podem ser obtidas usando-se um método numérico como por exemplo o método de Newton.

Uma vez encontrados os valores de Z e $\Delta\theta$ é fácil obter ρ_1 por (4.15), ρ_3 por (4.19) e ω_s por (4.16). Para voltarmos as variáveis Q_1 e Q_3 usamos as relações (4.13) obtendo

$$Q_1 = \rho_1 \sin(\omega t + \psi_0), \quad Q_3 = \rho_3 \sin(\omega t + \psi_0 - \Delta\theta) \quad (4.22)$$

onde a fase ψ_0 é arbitrária.

Comparando com (4.5) obtêm-se ainda

$$B_1 = \rho_1$$

e finalmente a solução de regime de (4.2) com Q_1 dado por (4.22) tem amplitude

$$\left(\frac{q_i}{D}\right)_{\max} = A_1 = \frac{\omega_s^2 \mu_{11} B_1}{[(\omega_1 - \omega^2)^2 + (2\xi_1 \omega_1 \omega)^2]^{1/2}} \quad (4.23)$$

Observa-se que se impusermos $\rho_3 = 0$ em (4.15) e (4.16) chegamos a solução obtida por Skop e Griffin usando o balanço harmônico, porém as equações (4.17) e (4.16) não seriam satisfeitas para $\rho_1 \neq 0$.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS E COMPARAÇÕES

Um exemplo numérico com dimensões típicas de um "riser" real foi escolhido para comparação com resultados anteriores e com integração numérica.

Diâmetro interno: 0.4763 m $S=0.21$
 Diâmetro externo: 0.508 m $\mu=0.130308$
 $EI = 1.52695 \times 10^8$ Newtons $\times$ m² $S_1=S_3=0.130308$
 $L = 79$ m $F_1=F_3=9.51071 \times 10^{-2}$
 $P = 3.616 \times 10^4$ Newtons (tração média) $G_1=G_3=1.59094$
 $m = 5.80133 \times 10^2$ kg/m $H_1=H_3=0.462137$
 $\xi_1 = \xi_3 = 3 \times 10^{-2}$
 $C_{L0} = 0.3$

No gráfico da Fig. 5.1, apresentamos a resposta em frequência do "riser", próxima da ressonância e obtida por três métodos: (I) integração direta (Runge-Kutta). (BH) método do balanço harmônico [4] usando só o primeiro modo de C_L , isto é, Q_1 e (FN) método da Forma Normal usando Q_1 e Q_3 .

O gráfico (FN) foi traçado usando-se ω (a frequência de "lock-in") como variável independente. Assim, para cada ω , através de (4.20) (4.21) obteve-se pelo método de Newton os valores de Z e de $\Delta\theta$. Inicialmente usou-se as expressões aproximadas de a_1 e a_2 (4.11) e posteriormente usou-se as suas expressões exatas obtidas a partir de (4.6) e (4.3). Esta última alternativa foi realizada através de um processo iterativo para cada valor de ω o que resultou em pouca modificação na resolução de (4.20) (4.21) em relação a primeira alternativa. Com-

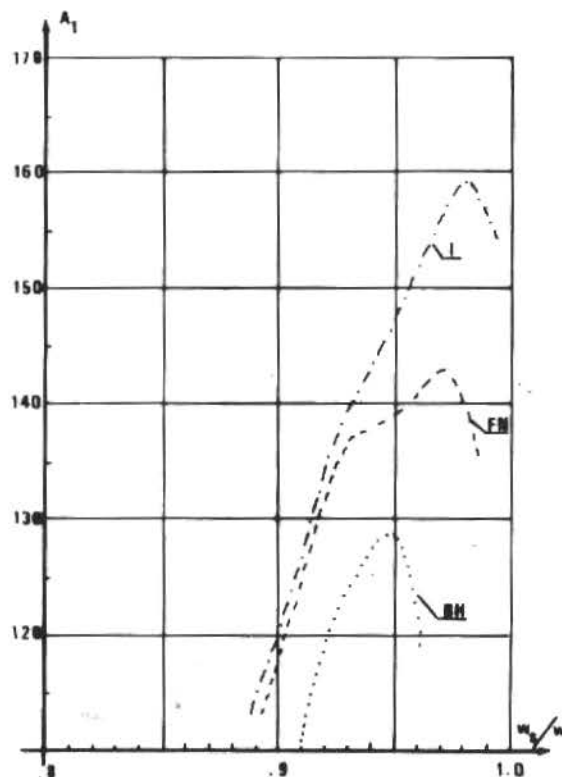


Figura 5.1 - Resposta em frequência do "riser" (I) integração numérica (Runge-Kutta), (FN) método da Forma Normal com 2 modos, (BH) método do balanço harmônico com 1 modo.

parados com os resultados da integração direta, as expressões exatas de a_1 e a_2 fornecem resultados sensivelmente melhores do que os obtidos com as expressões aproximadas.

Uma vez obtidos Z e $\Delta\theta$, obtêm-se de (4.15) e (4.16), ρ_1 , ρ_3 e ω_s .

Com $B_1 = \rho_1$ calcula-se A_1 por (4.23) e a flecha máxima do cilindro é dada por

$$(Y/D)_{\max} = A_1 / \sqrt{0.5 m L}$$

6. CONCLUSÕES

O exemplo numérico selecionado na seção precedente leva a algumas conclusões que classificamos como preliminares, por falta de maior número de exemplos.

Verifica-se que o método da Forma Normal com 2 modos dá bons resultados em comparação com a integração direta. Os maiores erros (~10%)

ocorrem bem próximo do pico de ressonância, porém esta observação particular não é definitiva devido à sensibilidade numérica da integração direta que se notou nesta vizinhança. Devido a boa concordância verificada em frequências um pouco mais afastadas da frequência de pico, era de se esperar que mesmo no pico a concordância fosse melhor, muito embora um erro de 10% seja bastante razoável no grau de aproximação considerado (erro relativo da ordem de ϵ^2 ou C_{L0}^2 , isto é, $\approx 10\%$).

Comparamos também os valores previstos de ω , ρ_3 e $\Delta\theta$ com aqueles obtidos pela integração verificando-se boa concordância (erro máximo de cerca de 10% para ρ_3 e $\Delta\theta$ e 1% para ω). Nota-se porém que nem sempre ρ_3 é desprezível em relação a ρ_1 podendo ρ_3 chegar quase a metade de ρ_1 .

Surpreendentemente, mesmo assim, o efeito de ρ_3 é relativamente pequeno como mostra a curva (BH) da Fig. 5.1 obtida supondo-se $\rho_3 = 0$ (no pico, o erro seria de 20%). Isto, em parte justificaria, no caso de fluxo uniforme, a hipótese simplificadora de não acoplamento dos modos Q_1 , usada por Skop e Griffin [4].

O uso do método da Forma Normal se justifica pelas seguintes razões:

- permite com comodidade a inclusão de mais modos de vibração e em consequência estimar o número de modos necessários para se obter uma previsão suficientemente precisa (a hipótese de não acoplamento de Skop e Griffin corresponde a se usar um único modo), assim se com $n+1$ modos se obtém um resultado próximo (dentro da precisão desejada) ao obtido com n modos, pode-se com maior segurança usar apenas n modos;
- permite considerar o caso de fluxo não uniforme evitando cálculos formais extremamente complexos presentes normalmente na solução analítica das vibrações de sistemas com vários graus de liberdade.

Deve-se ressaltar que o modelo de Skop e Griffin não é definitivo e só comparação com a experiência prática, incluindo também casos de fluxo não uniforme, poderá indicar o seu grau de validade.

Finalmente deve-se notar que a solução analítica de modelos análogos ao usado, envol-

ve duas fontes distintas de imprecisão: (i) a consideração de um número limitado de modos e (ii) o fato da solução analítica do sistema discreto (obtido com número limitado de modos) ser aproximada.

No exemplo tratado verificou-se que a grandeza do erro gerado por ambas as maneiras era da mesma ordem. Em geral, porém, isto nem sempre ocorre, se de um lado podemos prever (grosseiramente) a grandeza do erro intrínseco, a aproximação do método analítico (da ordem de ϵ^2 ou C_{L0}^2) do outro é difícil de se estimar "a priori" o erro gerado pelo truncamento modal.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. M. FARIAS - "Equilíbrio e Vibrações Induzidas por Vórtices de "Risers" de Perfuração", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dez. 1980.
- [2] R. HARTLEN and CURRIE, I. - "A Lift-Oscillator Model for Vortex Induced Vibrations", Proc. of the American Society of Civil Engineering Journal of Engineering Mechanics, Vol. 96, 1970, pp. 577-591.
- [3] M. O. GRIFFIN; R. A. SKOP and G. H. KOOPMAN - "The Vortex-Excited Resonant Vibrations of Circular Cylinders", Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, nº 2, 1973, 235-249.
- [4] R. A. SKOP and O. M. GRIFFIN - "On a Theory for the Vortex-Excited Oscillations of Flexible Cylindrical Structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, nº 3, (1975), pp. 263-274.
- [5] S. E. RAMBERG and O. M. GRIFFIN - "Vortex Formation in the Wake of a Vibrating Flexible Cable", Trans. of the ASME, Journal of Fluid Engineering, Vol. 96 (1974), pp. 317-322.
- [6] G. G. KHAZINA - "Certain Stability Questions in the Presence of Resonances", PMM, Vol. 38, (1974) nº 1.
- [7] L. HSU e G. A. TAVARES - "A Direct Method for the Analysis of Critical and Post-Critical Behaviour of Nonlinear Mechanical Systems", IV COBEM (1977).
- [8] M. L. da SILVA - "Riser" sob Ação da Correnteza - Algumas Considerações Sobre "Vortex-Shedding", Seminário sobre Tecnologia de Engenharia de perfuração e produção no mar, PETROBRÁS, Rio de Janeiro (1976).

INFORME EDITORIAL

CINCO IMPORTANTES LIVROS DE ENGENHARIA



*** CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO**
de H. Rüsch

Um clássico da engenharia civil, fundamental para atualização e desenvolvimento dos profissionais na prática do dimensionamento de estruturas de Concreto Armado e Protendido.

*** TEORIA DOS SISTEMAS DE CONTROLE**
ENFOQUE POR VARIÁVEIS DE ESTADO
em co-edição com a EFEI/ELETROBRÁS
de J. Feinstein

Uma excelente condensação do ensino daquela parcela da teoria de controle que se apóia fundamentalmente na idéia de "estado" ou descrição "interna" de um sistema.

*** OBRAS PORTUÁRIAS**
em co-edição com a PORTOBRÁS
de J. Mason

Livro auxiliar e profissional na área de portos e vias navegáveis que vem preencher uma lacuna na bibliografia sobre o assunto.

*** ENFOQUE CLÁSSICO DA TEORIA DE CONTROLE (2 VOLS.)**
em co-edição com a EFEI/ELETROBRÁS
de A. E. Fregosi
Vol. 1 — Fundamentos do Enfoque e Método da Resposta em Frequência
Vol. 2 — Método do Lugar das Raízes

Um texto especialmente planejado para todos os profissionais que empregam as técnicas de Controle Automático.

*** ELEMENTOS DE MÁQUINAS TÉRMICAS**
em co-edição com a EFEI
de Z. de Souza

Explicação dos princípios de funcionamento das Máquinas Térmicas, suas equações gerais, seus limites de emprego, seus elementos periféricos e seu trabalho isolado e em conjunto.

À VENDA NAS BOAS LIVRARIAS E PELO REEMBOLSO

EDITORA CAMPUS LTDA.

CAIXA POSTAL 13007 — RIO DE JANEIRO — RJ

A EDITORA SE RESERVA O DIREITO DE ALTERAR
OS PREÇOS SEM PRÉVIO AVISO.

INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DA LEI DE NORTON NA DETERMINAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM MATERIAIS QUE EXPERIMENTAM FENÔMENOS DA FLUÊNCIA

L. BEVILACQUA

DEPTº DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

R. FEIJÓO

DEPTº DE PESQUISA DE DESENVOLVIMENTO, LCC/
CNPq

J. L. FREIRE

DEPTº DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

P. E. V. MIRANDA

PROGRAMA DE ENGENHARIA METALÚRGICA, COPPE/
UFRJ

E. MONTEIRO

DEPTº DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

T. L. SILVEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA SOUZA MARQUES

L. TAROCO

DEPTº DE PESQUISA DE DESENVOLVIMENTO, LCC/
CNPq

SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se os resultados experimentais obtidos em ensaios de fluência para aços do tipo AISI 316 a diferentes temperaturas. Tais resultados são aproximados pela lei de Norton cujos parâmetros A e n são determinados. Posteriormente, estuda-se como as variações dos parâmetros da lei de Norton afetam o estado de tensões e deformações em tubos finos e espessos submetidos a pressão interna e temperatura constante. Conclui-se neste trabalho que para os casos estudados as tensões são pouco influenciadas pelas variações do parâmetro n e que resulta difícil prever níveis de deformação acumulada, uma vez que as incertezas ou variações em A e n introduzem sérios erros na velocidade de deformação.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que frequentemente se apresenta no emprego de materiais que experimentam deformações de tipo viscoso é a determinação do estado de tensões e deformações correspondentes à atuação de carregamento e temperatura constantes ao longo de intervalos de tempo prolongados. Tal fenômeno, conhecido como fluência, é significativo em múltiplas aplicações tecnológicas dentro das áreas de Engenharia Mecânica, Metalúrgica, Nuclear, Civil, etc.

Admite-se que, geralmente, a teoria fenomenológica da fluência começou no início deste século com os trabalhos do físico Andrade[1]. Nestes trabalhos foi introduzida a terminologia empregada até o presente para distinguir diferentes zonas de fluência, assim como a diferença de comportamento entre deformações de fluência de barras metálicas a tensão e carga constantes.

Posteriormente, o fenômeno despertou grande interesse, tanto do ponto de vista teórico como fenomenológico, motivando o surgimento de inúmeras equações constitutivas, formulações variacionais e métodos numéricos capazes de resolver problemas onde a fluência deve ser levada em consideração.

Na primeira parte deste trabalho apresentam-se os fundamentos mais importantes da teoria de fluência, assim como as inúmeras funções empíricas que relacionam deformação com tensão, temperatura e tempo. No caso particular da lei de Norton mostram-se seus fundamentos físicos, suas vantagens e limitações e a partir de ensaios experimentais coloca-se o problema da incerteza na determinação de suas constantes. Posteriormente, analisa-se o problema de determinar o estado de tensões e deformações de um corpo cuja lei constitutiva de fluência é uma generalização da lei de Norton.

Finalmente, para o problema do tubo infinito com pressão interna, mostra-se como as tensões e deformações obtidas são influenciadas pela incerteza da variação das constantes A e n da lei de Norton.

DESCRIÇÃO FENOMENOLÓGICA

A fluência pode ser definida como um processo de deformação cuja lei de acumulação depende do tempo em que atua uma solicitação mecânica [2]. Ela é, geralmente, identificada a partir do acréscimo da deformação em um componente submetido a uma carga ou tensão constante ao longo do tempo. Entretanto, o sentido amplo da definição inicialmente utilizada inclui o efeito de relaxação de tensões como um dos seus casos particulares. Esta é a situação que ocorre em corpos tensionados, cuja deformação total é mantida constante e uma fração da deformação elástica de natureza recuperável se transforma, com o tempo, em deformação permanente acarretando uma correspondente redução na tensão aplicada.

A maioria das aplicações industriais requer certo compromisso entre três propriedades básicas e que, resumidamente, podem ser enumeradas como: resistência à deformação por fluência, resistência à fratura e ductilidade [3]. O diagrama da Figura 1 ilustra o caráter independente dessas propriedades através das curvas de fluência sob carga constante de três

materiais hipotéticos ensaiados nas mesmas condições de temperatura e tensão inicial. O material A apresenta baixa velocidade de acumulação de deformação, sendo escolhido para aplicações que apenas exijam estabilidade dimensional. O material B é o que melhor resiste a ruptura por fluência e o C aquele que alcança a maior ductilidade.

A fluência se faz sentir em materiais metálicos e não metálicos e a intensidade dos seus efeitos depende primordialmente do estado de tensões, do tempo e da temperatura. Para os metais acredita-se que a fluência deva ser considerada em aplicações mecânicas envolvendo temperaturas no entorno e além da metade da sua temperatura absoluta de fusão.

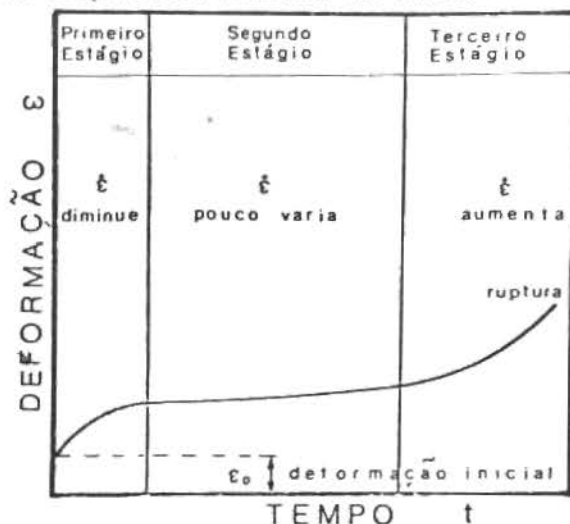


Figura 2. Curva de fluência sob carga constante onde são indicados seus diferentes estágios

A Figura 2 é a representação esquemática de uma curva de fluência onde se nota já no tempo zero a existência de uma deformação (ϵ_0) imposta pelo carregamento inicial. A partir de ϵ_0 a deformação se acumula como uma função do tempo sob a ação de uma carga (ou tensão, σ) constante.

O primeiro estágio de fluência é caracterizado por uma taxa de deformação ($\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$) decrescente com o tempo, onde prevalecem mecanismos de encruamento. Isto é, o material se torna cada vez mais resistente à deformação à medida em que esta prossegue. A curva de fluência mostra, logo após, um mínimo na taxa de deformação e define uma região onde é va-

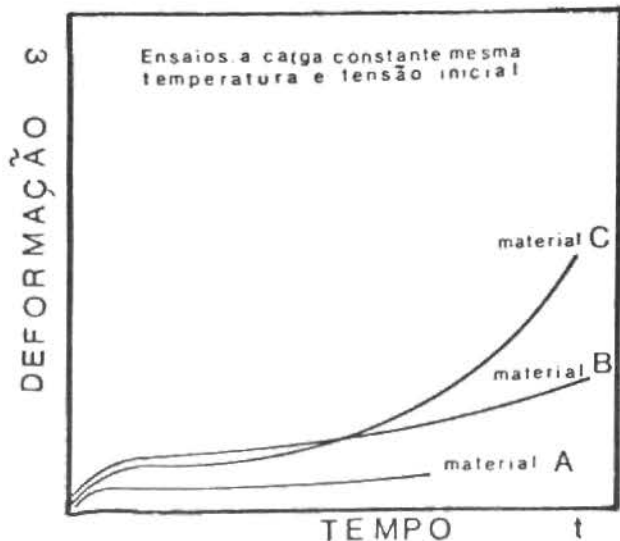


Figura 1. Resultados típicos de ensaio de fluência a carga constante em ligas metálicas (Ref. 3)

ria muito pouco, sendo mesmo considerada constante para certas aplicações. Isto define o segundo estágio de fluência, onde a ação de mecanismos de recuperação (i.e., de amolecimento) equilibra-se aproximadamente a de mecanismos de encruamento (i.e., de endurecimento). No terceiro estágio de fluência a taxa de deformação aumenta progressivamente de forma acelerada até a ruptura final, sob a ação de mecanismos de fratura. Nas aplicações industriais a extinção da vida útil de um componente é ditada por dois critérios alternativos: i) a limitação da deformação imposta por exigências operacionais (geralmente no segundo estágio) e ii) a ruptura por fluência (no terceiro estágio). A descrição apresentada para a curva de fluência admite, porém, algumas exceções para certas ligas e condições de teste específicas [4,5].

Geralmente se admite que a deformação de fluência pode ser expressa como o produto de funções dependentes do tempo, da temperatura e da tensão, ou seja:

$$\epsilon = f_1(t) f_2(T) f_3(\sigma) \quad (1)$$

A partir de tal formulação uniaxial simplificada onde ϵ é a deformação acumulada ao fim de certo tempo, t , por ação da temperatura em graus absolutos, T , e da tensão, σ , Penny e Marriott [6] discutem diferentes tratamentos para relacionar a deformação por fluência com as variáveis t , T e σ .

Inúmeras funções de natureza empírica têm sido propostas para cada um dos termos da relação (1), algumas das quais serão relacionadas a seguir.

Para a função f_1 :

- i) $f_1(t) = A(1+Bt^{1/3}) \exp(pt)$ Andrade, 1914
- ii) $f_1(t) = A+Bt+C \exp(-qt)$ McVetty, 1934
- iii) $f_1(t) = A + Bt^m$ Bailey, 1935
- iv) $f_1(t) = At^m + Bt^p + Ct^q + \dots$ Graham, 1953
- v) $f_1(t) = A \log t + Bt^p + Ct$ Wyatt, 1953
- vi) $f_1(t) = \epsilon_0 + \epsilon_p [1 - \exp(-mt)] + \epsilon_2 t$ Garofalo, 1965

onde A , B , C , m , p e q são constantes, ϵ_0 a deformação inicial e ϵ_p o limite da deformação transiente no primeiro estágio de fluência.

Para a função f_2 , Le May [7] propõe:

- i) se $T < 0.3T_f$ $f_2(T) = 1$
- ii) se $T > 0.3T_f$ $f_2(T) = A[\exp(-Q/RT)]^m$

onde A e m são constantes, T_f é a temperatura absoluta de fusão do material, Q é a energia de ativação aparente em fluência e R a constante universal dos gases.

Para a função f_3 :

- i) $f_3(\sigma) = A\sigma^n$ Norton, 1929
- ii) $f_3(\sigma) = A[\exp(\sigma/\sigma_0) - 1]$ Soderberg, 1936
- iii) $f_3(\sigma) = A \sinh(\sigma/\sigma_0)$ McVetty, 1943
- iv) $f_3(\sigma) = A \exp(\sigma/\sigma_0)$ Dorm, 1955
- v) $f_3(\sigma) = A\sigma^p + B\sigma^q$ Johnson, 1963
- vi) $f_3(\sigma) = A[\sinh(\sigma/\sigma_0)]$ Garofalo, 1968

onde σ_0 é uma tensão de referência para adimensionalizar o quociente.

A combinação das funções f_1 , f_2 e f_3 oferece um grande número de alternativas para a equação descrita em (1). Entretanto, a maioria das equações constitutivas, assim resultantes, são de natureza empírica e não se dispõe de base experimental suficiente que estabeleça seus campos de validade para os diferentes materiais de uso estrutural.

Uma alternativa relativamente simples e que tem sido bastante empregada é dada por:

$$\epsilon = A\sigma^n [t \exp(-Q/RT)]^m$$

À temperatura constante a equação anterior se reduz a:

$$\epsilon = A\sigma^n t^m$$

Alguns autores [8,9], porém, consideram $m = 1$, o que permite reduzir a equação constitutiva à simples relação de Norton:

$$\dot{\epsilon} = A\sigma^n$$

Esta equação tem como vantagem um considerável respaldo em modelos físicos que descrevem o comportamento de certos mecanismos de deformação por fluência. Além disto, é simples de ser tratada por via analítica e seus coeficientes são relativamente fáceis de serem determinados empiricamente. Porém, a lei de Norton

representa somente o comportamento do segundo estágio de fluência, onde a taxa de deformação é aproximadamente constante com o tempo e possui um valor pequeno se comparado aos atingidos durante o primeiro e o terceiro estágios.

O comportamento mecânico de uma estrutura previsto pela equação de Norton poderá se afastar da realidade se a deformação ao fim do primeiro estágio de fluência for grande se comparada a que se acumula ao longo do segundo estágio ou ainda se o material entrar no terceiro estágio de fluência.

Por outro lado, a expressão de Norton só é adequada para descrever a relação entre deformação e tensão sob temperatura constante. Esta limitação é importante em aplicações industriais, uma vez que raramente se encontra uma estrutura que trabalhe permanentemente em condições isotérmicas.

Uma outra limitação diz respeito aos modelos físicos que sustentam esta equação. Ela pode ser considerada como uma forma simplificada da equação semiempírica de Mukherjee et alii [10] para temperatura constante:

$$\frac{\epsilon KT}{DGb} = A \left(\frac{\sigma}{G} \right)^n$$

onde D é o coeficiente de autodifusão, G é o módulo de rigidez, b é o vetor de Burgers, A e n são constantes e os demais símbolos tem o significado usual. Essa equação tem a sua validade comprovada sob certas condições de tensão e temperatura para um grande número de materiais [10]. Ela caracteriza a atuação do mecanismo de fluência por discordâncias [11], onde a deformação é controlada pelo movimento não conservativo de discordâncias e depende da difusão de lacunas no material. Este modelo de mecanismo controlador de deformação por fluência não é, entretanto, único. Diversos mecanismos podem atuar competitivamente num mesmo material. A Figura 3 apresenta um diagrama tridimensional que define os campos de predomínio no espaço tensão, temperatura, tamanho de grão dos diversos mecanismos que controlam a deformação inelástica dependente do tempo no alumínio [12]. Assim, a validade de aplicação da relação de Norton para o alumínio limita-

-se no espaço de predomínio de fluência por discordâncias, que na Figura 3 corresponde aos campos F e G. Fora desses limites deve-se eleger outra equação constitutiva que não seja a relação de Norton.

A Figura 4 apresenta um mapa de mecanismos de deformação de Ashby [13] para o aço inoxidável AISI 316 com tamanho de grão de 120 μm , destacando o intervalo (temperatura, tensão) de mais interesse para as aplicações industriais. Os mecanismos controladores da deformação por fluência na região representada no mapa são:

- i) deslizamento de discordâncias;
- ii) fluência por discordâncias;
- iii) fluência por difusão - Coble;
- iv) fluência por difusão - Nabarro-Herring.

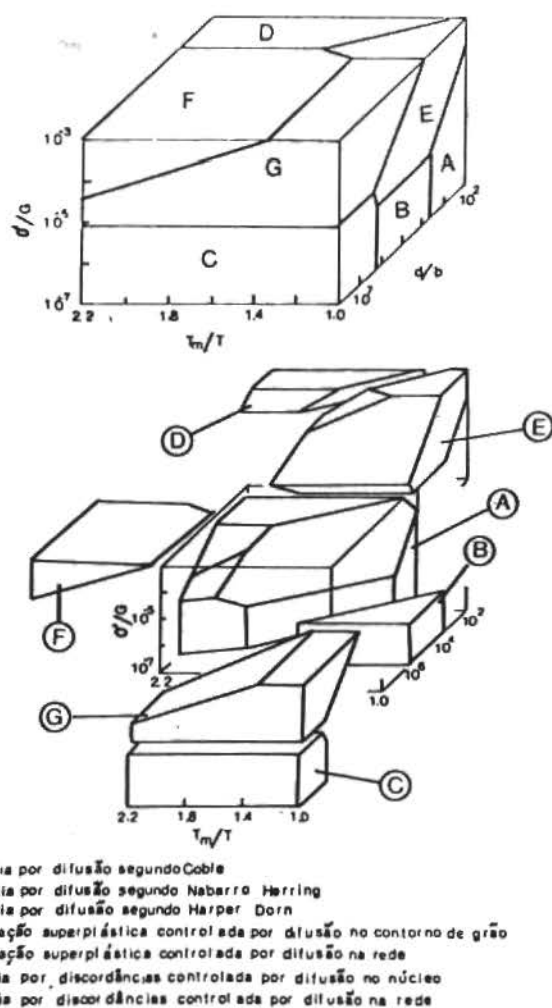


Figura 3. Sólido de deformação para o alumínio segundo Oikawa (Ref. 12)

As equações constitutivas próprias para esses mecanismos estão indicadas na Tabela 1. Na Figura 4 observa-se que as condições de tensão e temperatura exploradas por ensaios de fluência com tempo de ruptura de até 50.000 horas recaem no campo, onde a deformação é controlada por fluência de discordâncias. A relação de Norton é aplicável aos resultados desses ensaios.

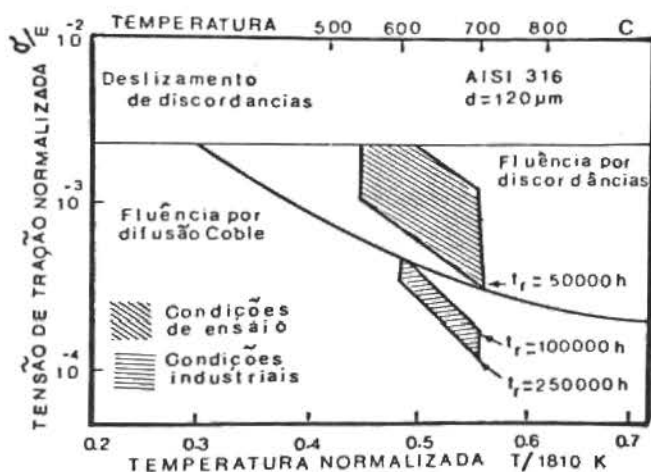


Figura 4. Mapa de deformação para o aço AISI 316 com $d = 120\mu\text{m}$ que mostra as regiões dos ensaios de caracterização e das aplicações industriais para 100000 e 250000h de vida (Referência 13)

Entretanto, as aplicações industriais para as quais se espera de 100.000 hs. a 250.000 hs. de tempo de ruptura [14] recaem no campo sob controle de fluência por difusão segundo Coble. Esta última região é pouco estudada por ensaios diretos de fluência devido ao longo tempo de teste envolvido. As equações constitutivas de Nabarro-Herring e Coble, na Tabela 1, sugerem que o material adota um comportamento viscoso Newtoniano bastante diverso daquele previsto pela relação de Norton.

Tabela 1. Equações Constitutivas para Mapas de Deformação de Ashby

DESLIZAMENTO DE DISCORDÂNCIAS	
$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_0 \exp -[ba (Gb/c-\sigma)/kT]$	se $\frac{\sigma}{G} > \frac{\sigma_0}{G}$
$\dot{\epsilon}_2 = 0$	se $\frac{\sigma}{G} < \frac{\sigma_0}{G}$
FLUÊNCIA POR DISCORDÂNCIA	
$\dot{\epsilon}_2 = A \frac{D_v Gb}{kT} (\sigma/G)^n$	
FLUÊNCIA POR DIFUSÃO	
Nabarro-Herring:	
$\dot{\epsilon}_2 = A \frac{D_v Gb}{kT} (b/d)^2 (\sigma/G)$	
Coble:	
$\dot{\epsilon}_2 = B \frac{D_{cg} Gb}{kT} (b/d)^3 (\sigma/G)$	
onde: a é a área de ativação; c distância média entre obstáculos ao deslizamento; k constante de Boltzmann; G módulo de rigidez; σ_0 tensão de libertação; D_v coeficiente de autodifusão; D_{cg} coeficiente de difusão nos contornos de grão.	

VARIAÇÕES DAS CONSTANTES DA LEI DE NORTON

Nesta seção comentam-se algumas restrições ao emprego da relação de Norton como equação constitutiva para o dimensionamento de estruturas em condições de fluência.

Seus parâmetros A e n são muito sensíveis a aspectos macro e micro estruturais do material. Em diferentes amostras, caracterizadas de acordo com determinada norma técnica como sendo de um mesmo tipo de material, é possível encontrar valores díspares para A e n . Como exemplo apresenta-se a seguir as diferenças determinadas em duas partidas de aço AISI 316, identificadas por A e B, ensaiadas em fluência sob carga constante em regime de iso temperatura no intervalo entre 600 e 800°C [3]. O equipamento de fluência utilizado foi uma máquina de fabricação WPM, modelo ZST2/3. As amostras, cujas composições químicas estão indicadas na Tabela 2, foram tratadas termica-

Tabela 2. Composição Química (% em peso)

Elemento Amostra	C	Mn	Si	Cr	Ni	Mo	P	S	Cu	Nb
A	0.07	1.72	0.50	18.3	12.5	2.55	0.026	0.014	0.13	0.02
B	0.05	0.73	0.40	17.7	12.2	2.07	0.035	0.018	0.16	—
Composição Nominal	0.08 max	2.00 max	1.00 max	16 a 18	10 a 14	2 a 3	0.045 max	0.030 max	—	—

mente a 1100°C por 40 minutos em banho de sal e resfriadas em água. Este tratamento produziu na amostra A um tamanho de grão médio de 30µm na porção central da seção reta correspondendo a 30% de sua área e 250µm na fração restante. A amostra B apresentou um tamanho de grão médio de 80µm. Os corpos de prova cilíndricos para o ensaio de fluência foram confeccionados com 38mm de comprimento útil e 27 mm² de área da seção reta.

Os valores dos parâmetros A e n podem ser obtidos da Figura 5 por regressão linear e estão mostrados na Tabela 3 juntamente com os coeficientes de correlação, r², encontrados.

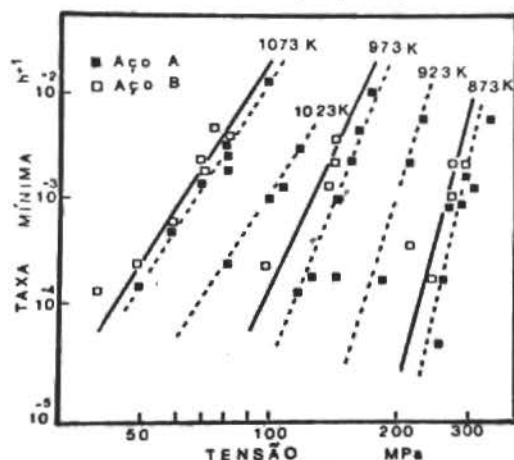


Figura 5. Relação entre taxa mínima de fluência e tensão aplicada para os materiais A e B

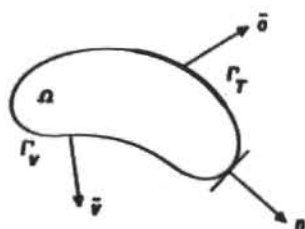


Figura 6

Na seção a seguir verifica-se a extensão em que as dispersões obtidas nestes parâmetros influem na determinação do estado de tensões e deformações em tubos do tipo utilizável na indústria petroquímica.

Tabela 3. Coeficientes em $\dot{\epsilon} = A\sigma^n$

Material	Temperatura (°C)	A	n	r²
A	600	1.5×10^{-27}	9.3	0.96
	650	4.4×10^{-28}	10.4	0.94
	700	3.9×10^{-20}	7.6	0.94
	750	4.5×10^{-16}	6.2	0.99
	800	2.3×10^{-15}	6.4	0.96
B	600	2.2×10^{-25}	8.8	0.88
	700	1.4×10^{-17}	6.6	0.99
	800	5.7×10^{-14}	5.8	0.99

INFLUÊNCIA DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LEI DE NORTON NA DETERMINAÇÃO DO ESTADO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Nas seções anteriores a lei de Norton foi estabelecida a partir de ensaios uniaxiais. Este fato exige a sua extensão a estados de tensão mais complexos.

A partir das comprovações experimentais realizadas por Bailey, de que as deformações por fluência nos metais produziam-se a volume constante surgiram uma série de equações constitutivas para estados complexos de tensões. Entre elas podem-se citar:

- 1) Lei associativa de von Mises-Odqvist (1936) [15]:

$$D_{ij} = \frac{3}{2} A \epsilon^{n-1} S_{ij}$$

ii) Lei associativa de Tresca:

$$D_1 = -A(T_3 - T_1)^n$$

$$D_2 = 0$$

$$D_3 = A(T_3 - T_1)^n$$

para $T_3 > T_2 > T_1$.

A equação de Tresca foi empregada por Wahl [16] na análise de tensões em discos que giram a velocidade constante.

iii) Lei não-associativa de von Mises-Tresca:

$$D_{ij} = \frac{3}{2} A(T_3 - T_1)^{n-1} S_{ij},$$

para $T_3 > T_2 > T_1$.

A equação acima foi introduzida por Coffin [17] na análise de fluência em vasos de pressão.

Nas equações constitutivas apresentadas, A e n são as constantes da lei de Norton, D_{ij} e S_{ij} são as componentes do tensor velocidade de deformação e do tensor desviador de tensões, T_i e D_i são as tensões e velocidades de deformação principais e T_e é a tensão efetiva ou tensão uniaxial equivalente.

Como pode-se observar nas equações anteriores a deformação de fluência se processa à volume constante, tendo em vista que $D_{ii} = 0$. Além disso, todas estas leis se reduzem a lei de Norton quando o estado de tensões é uniaxial.

Definidas as equações constitutivas, pode-se apresentar o problema de valor de contorno correspondente ao segundo estágio do fenômeno de fluência (também conhecido na literatura como "steady state creep"). Neste problema admitem-se conhecidas (Figura 6):

- i) A região Ω de contorno Γ que ocupa o corpo;
- ii) O sistema de forças que atuam sobre o corpo: b , $\bar{a}$.
 $b = b(x)$ densidade das forças de volume
 $\bar{a} = \bar{a}(x)$ densidade das forças de superfície prescritas em Γ_T
- iii) a velocidade $\bar{v} = \bar{v}(x)$, prescrita em Γ_v
- iv) a lei constitutiva do material.

O problema de valor de contorno consiste em determinar v , D , T (v , vetor velocidade; D , tensor velocidade de deformação; T , tensor de tensões) tais que sejam satisfeitas as seguin-

tes equações:

Equação de equilíbrio em Ω :

$$\text{div } T + b = 0 \quad (T_{ij,j} + b_i = 0)$$

Equação constitutiva em Ω :

$$D = D(T) \quad (D_{ij} = D_{ij}(T_{mn}))$$

Equação cinemática em Ω :

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) \quad (D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}))$$

com as condições de contorno:

$$Tn = \bar{a} \quad \text{em } \Gamma_T;$$

n , vetor unitário normal a Γ_T (Figura 6)

$$v = \bar{v} \quad \text{em } \Gamma_v$$

A seguir será resolvido o problema de valor de contorno correspondente a um tubo infinito sob pressão interna, p , constituído por um material tipo von Mises-Odqvist. A resolução deste problema permitirá determinar a influência das constantes A e n na distribuição de tensões e deformações.

Em coordenadas cilíndricas r , θ , z , as componentes de v , D e T referidas ao triedro ortogonal e_r , e_θ , e_z estão dadas por:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix},$$

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e as componentes da $\text{div } T$ e do tensor desviador S são:

$$[(\text{div } T)_i] = \begin{bmatrix} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \\ 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} \end{bmatrix}$$

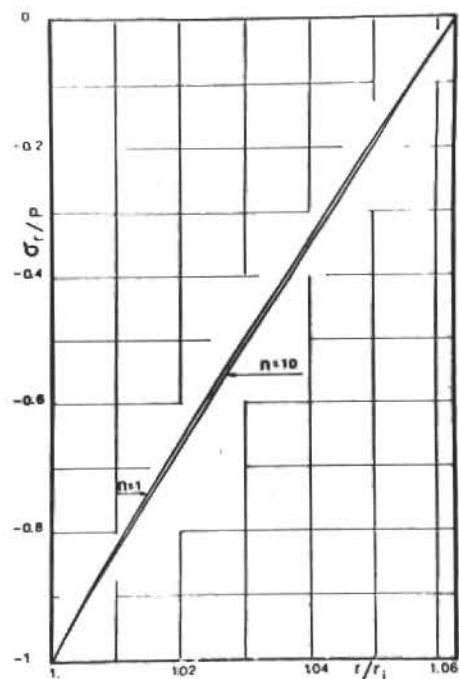


Figura 7. Distribuição da tensão radial em tubo de parede fina, $r_e/r_i = 1.0630$, com pressão interna, p , para diferentes valores de n

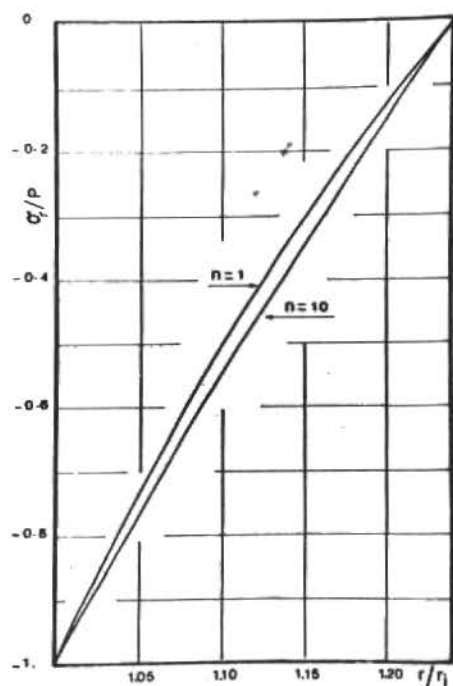


Figura 8. Distribuição da tensão radial em tubo de parede grossa, $r_e/r_i = 1.2402$, com pressão interna, p , para diferentes valores de n

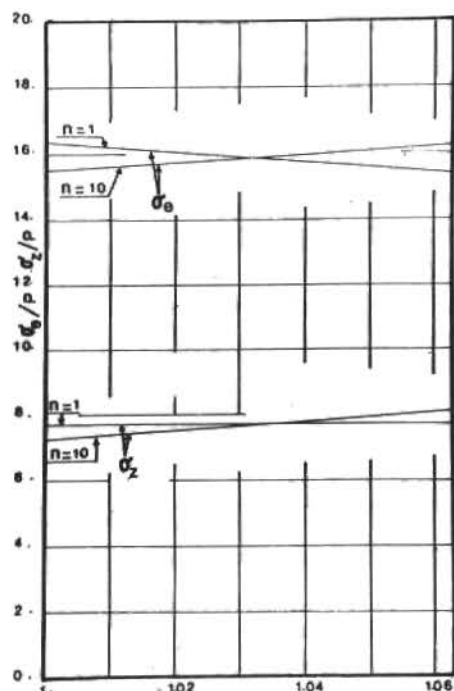


Figura 9. Distribuição da tensão circunferencial σ_θ , e da tensão longitudinal, σ_z , em tubo de parede fina, $r_e/r_i = 1.0630$, com pressão interna, p , para diferentes valores de n

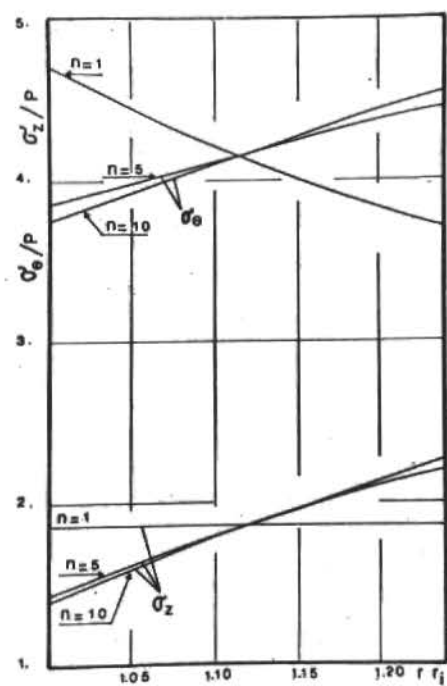


Figura 10. Distribuição da tensão circunferencial, σ_θ , e da tensão longitudinal, σ_z , em tubo de parede grossa, $r_e/r_i = 1.2402$, com pressão interna, p , para diferentes valores de n

$$[S_{ij}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{bmatrix}$$

Sendo que a tensão efetiva está dada por:

$$T_e = \frac{3}{2} S.S = \frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]$$

O problema de valor de contorno no cilindro infinito que experimenta deformações de fluência no segundo estágio, corresponde a determinar v , $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\theta$, σ_r , σ_θ e σ_z tais que:

$$\text{div } T = 0 \quad \left\{ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_z}{dz} = 0 \right\}$$

$$D = \frac{3}{2} A T_e^{n-1} S \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= A T_e^{n-1} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \right], \\ \dot{\epsilon}_\theta &= A T_e^{n-1} \left[\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right], \\ \dot{\epsilon}_z &= A T_e^{n-1} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right] = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) \quad \left\{ \dot{\epsilon}_r = \frac{dv}{dr}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r} \right\}$$

Sejam satisfeitas para todo $r \in [r_i, r_e]$ com a condição de contorno:

$$T_n = \bar{a} \quad \left\{ \sigma_r|_{r=r_i} = -p, \quad \sigma_r|_{r=r_e} = 0 \right\}$$

onde r_i e r_e são, respectivamente, os raios internos e externos do tubo e p a pressão.

Para a resolução do problema anterior, tem-se:

$$\text{tr } D = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} = 0$$

integrando a equação diferencial anterior obtém-se a expressão da velocidade:

$$v = \frac{C_1}{r}$$

onde C_1 é uma constante definida através das condições de contorno.

Tendo em vista que $\dot{\epsilon}_z = 0$, resulta:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

substituindo σ_z na expressão de T_e , tem-se:

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r)$$

que por sua vez substituída na equação constitutiva conduz a:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{3}{4} A T_e^{n-1} (\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{3}{4} A T_e^{n-1} (\sigma_r - \sigma_\theta)$$

Lembrando que $v = C_1/r$ e que $\dot{\epsilon}_r = dv/dr$, obtém-se:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_1}{A r^2} \right)^{1/n}$$

Substituindo a expressão anterior na equação de equilíbrio e integrando, tem-se:

$$\sigma_r = \frac{n}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_1}{A} \right)^{1/n} r^{-2/n} + C_2$$

Das condições de contorno:

$$\sigma_r(r_i) = -p, \quad \sigma_r(r_e) = 0$$

as constantes de integração resultam:

$$C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A r_e^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{n} \frac{p}{\alpha} \right]^n, \quad C_2 = \frac{p}{\alpha}$$

$$\alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{2/n} - 1.$$

Com os valores de C_1 e C_2 , tem-se as expressões finais de v , $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\theta$, σ_r , σ_θ e σ_z :

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{n} \frac{p}{\alpha} \right)^n \frac{r_e^2}{r}$$

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{n} \frac{p}{\alpha} \right)^n \left(\frac{r_e}{r} \right)^2$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\dot{\epsilon}_r$$

$$\sigma_r = -\frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{2/n} - 1 \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{2}{n} - 1 \right) \left(\frac{r_e}{r} \right)^{2/n} + 1 \right]$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = \frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{r_e}{r} \right)^{2/n} + 1 \right]$$

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Pode-se observar que as expressões acima dependem das constantes A e n da lei de Norton, sendo que as tensões dependem apenas de n . Nas Figuras 7, 8, 9 e 10 apresentam-se gráficos das variações das tensões σ_r , σ_θ , σ_z com n para duas geometrias padrões de tubos, identificadas pelas razões entre seus raios externos e internos, r_e/r_i , iguais a 1.06 e 1.24. Es-

tas duas relações foram utilizadas nesta análise por serem representativas de geometrias usualmente empregadas em projetos de tubulações. Correspondem, respectivamente, a tubos sch 40 e 160, ambos com diâmetro nominal de 20 polegadas conforme a norma ASTM A120-75. Pela teoria clássica, tubos com $r_e/r_i = 1.06$ podem ser encarados como finos para a maior parte das aplicações práticas, enquanto tubos com $r_e/r_i = 1.24$ devem ser considerados como espessos.

É interessante notar-se que embora as tensões radiais, σ_r , dependam do parâmetro n e este tenha sido variado dentro de limites amplos, as variações destas tensões com n são bastante pequenas porque dependem dos termos r_e/r_i e r_e/r , que para os casos estudados assumiram valores próximos de 1. Assim, na Figura 8 nota-se uma variação máxima de σ_r igual a 8.4% quando n assume valores de 1 e 10, para a geometria $r_e/r_i = 1.24$. Variações maiores podem ser encontradas para as tensões σ_θ e σ_z nas Figuras 9 e 10, principalmente para o caso de tubo espesso. Na Figura 10 ($r_e/r_i = 1.24$) ocorrem variações de 26% para σ_θ e de 35% para σ_z quando n varia entre 1 e 10, para pontos da superfície interna. Convém ressaltar que, dependendo do valor assumido para n , os valores máximos das distribuições de σ_θ e σ_z poderão ocorrer nas superfícies internas ou externas dos tubos. Da Tabela 3 pode-se notar que os valores obtidos experimentalmente para n variaram entre um mínimo de 5.8 e um máximo de 10.4, embora as variações dentro de cada faixa específica de temperatura tenham sido menores; a máxima ocorrendo a 700°C quando os valores de n obtidos para os aços A e B foram 7.6 e 6.6 respectivamente. Assim, σ_θ e σ_z variam apenas de 3% para os tubos espessos quando n assume valores de 5 e 10.

Pode-se então concluir que, o estado de tensões é pouco influenciado pela variação de n e independente de A .

Por outro lado, as deformações são bastante influenciadas pelas variações de ambos os parâmetros da lei de Norton. A partir das expressões obtidas na Seção 4 observa-se uma dependência linear de v , $\dot{\epsilon}_r$ e $\dot{\epsilon}_\theta$ com A . A Tabela 3 já mostrara que este parâmetro assume va-

lores bastante pequenos e variações da ordem de 10^{-3} entre duas determinações.

Valores das velocidades v , para as duas geometrias de tubos analisados neste trabalho são apresentadas nas Tabelas 4 e 5 como uma função da posição radial r/r_i e do valor do parâmetro n . Constata-se na Tabela 4, que quando n varia de 1 a 10, ocorre uma variação de ordem de 10^{10} nos valores adimensionalizados de v . Em particular, para variações de n iguais à unidade, as velocidades modificam-se de 4 ou 14 vezes, conforme o tubo.

TABELA 4. Valores de $v/(A \times p^n \times r_e)$ para Diferentes Exponentes n da Lei de Norton. Tubo Infinito. $r_e/r_i = 1.063$

n	r/r_i	1.0000	1.0189	1.0315	1.0441	1.063
1		0.12268 E+02	0.12041 E+02	0.11894 E+02	0.11750 E+02	0.11541 E+02
2		0.17396 E+03	0.17073 E+03	0.16864 E+03	0.16661 E+03	0.16365 E+03
3		0.24661 E+04	0.24204 E+04	0.23908 E+04	0.23619 E+04	0.23200 E+04
4		0.34959 E+05	0.34311 E+05	0.33891 E+05	0.33482 E+05	0.32887 E+05
5		0.49556 E+06	0.48637 E+06	0.48042 E+06	0.47463 E+06	0.46619 E+06
6		0.70247 E+07	0.68944 E+07	0.68102 E+07	0.67280 E+07	0.66084 E+07
7		0.99578 E+08	0.97730 E+08	0.96537 E+08	0.95372 E+08	0.93676 E+08
8		0.14115 E+10	0.13853 E+10	0.13684 E+10	0.13519 E+10	0.13279 E+10
9		0.20009 E+11	0.19638 E+11	0.19398 E+11	0.19163 E+11	0.18823 E+11
10		0.28363 E+12	0.27836 E+12	0.27496 E+12	0.27165 E+12	0.26682 E+12

TABELA 5. Valores de $v/(A \times p^n \times r_e)$ para Diferentes Exponentes n da Lei de Norton. Tubo Infinito $r_e/r_i = 1.2402$

n	r/r_i	1.0000	1.0721	1.1201	1.1681	1.2402
1		0.34572 E+01	0.32248 E+01	0.30865 E+01	0.29596 E+01	0.27876 E+01
2		0.13962 E+02	0.13023 E+02	0.12465 E+02	0.11952 E+02	0.11258 E+02
3		0.56239 E+02	0.52459 E+02	0.50209 E+02	0.48144 E+02	0.45347 E+02
4		0.22639 E+03	0.21117 E+03	0.20212 E+03	0.19380 E+03	0.18254 E+03
5		0.91110 E+03	0.84986 E+03	0.81341 E+03	0.77996 E+03	0.73464 E+03
6		0.36662 E+04	0.34198 E+04	0.32731 E+04	0.31385 E+04	0.29561 E+04
7		0.14751 E+05	0.13760 E+05	0.13170 E+05	0.12628 E+05	0.11895 E+05
8		0.59353 E+05	0.55364 E+05	0.56989 E+05	0.50810 E+05	0.47858 E+05
9		0.23880 E+06	0.22275 E+06	0.21319 E+06	0.20442 E+06	0.19255 E+06
10		0.96075 E+06	0.89618 E+06	0.85774 E+06	0.82246 E+06	0.77468 E+06

Pode-se concluir então, ser difícil prever níveis de deformação acumulada uma vez que as incertezas ou variações em A e n introduzem sérios erros na velocidade de deformação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às suas respectivas instituições de origem pelas facilidades oferecidas para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] E.N. Andrade, "On the Viscous Flow in Metals and Allied Phenomena", Proc. Roy. Soc., A84, 1, 1910; "The Flow in Metals Under Large Constant Stresses", Proc. Roy. Soc. A90, 329, 1914.
- [2] J. Gittus, "Creep, Viscoelasticity and Creep Fracture in Solids", Applied Science Pub., 1975.
- [3] T.L. Silveira, "Acumulação de Dano e Previsão da Vida Remanescente em Ligas Metálicas sob Fluência", Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1980.
- [4] I. Le May, W.E. White, "Creep of Stainless Steel Weldments", Proceedings of the 3rd. Int. Conference on Pressure Vessel Tech., Part II, Materials and Fabrications, ASME, pp. 861-870, 1977.
- [5] J.D. Parker, B. Wilshire, "Anomalous Primary Creep Behavior of Dilute Aluminum-Silicon Alloys", Scripta Metallurgica, Vol. 13, pp. 669-671, 1979.
- [6] R.K. Penny, D.L. Marriot, "Design for Creep", McGraw Hill, 1971.
- [7] I. Le May, "Principles of Mechanical Metallurgy", Elsevier North-Holland, N.Y. 1980.
- [8] A.S. Perez, "Design for Creep in Pressure Vessels", Tese submetida ao Graduate Committee of Lehigh University.
- [9] E. Taroco, R.A. Feijão, "Problema de Creep en Discos que Giran a Velocidad Constante", Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 200-212, Campinas, Dezembro, 1979.
- [10] A.K. Mukherjee, J.E. Dorn, "Experimental Correlations for High Temperature Creep", Trans. ASME, Vol. 62, p. 155, 1969.
- [11] M.F. Ashby, "A First Report on Deformation Mechanism Maps", Acta Metallurgica, Vol. 20, pp. 887-898, Julho, 1972.
- [12] H. Oikawa, "Three-Dimensional Presentation of Deformation Mechanism Diagrams", Scripta Metallurgica, Vol. 13, pp. 701-705, 1979.
- [13] H.J. Frost, M.F. Ashby, "Deformation Mechanism Maps for Pure Iron, two Austenitic Stainless Steels and Low-Alloy Ferritic Steel", Univ. Eng. Dept., University of Cambridge, Julho, 1975.
- [14] BRITISH STEEL MAKER CREEP COMMITTEE, BSCC High Temperature Data. The Iron and Steel Institute, 1973.
- [15] F.K.G. Odqvist, "From Standford 1960 to Gothenburg 1970", IUTAM Symposium on Creep in Structures, Gothenburg 1970, Proceedings, Ed.: J. Hult, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, N.Y., 1972.
- [16] A.M. Wahl, "Analysis of Creep in Rotating Disks Based on the Trésca Criterion and Associated Flow Rule", J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 78, 231, 1956.
- [17] L.F. Coffin, Jr., P.R. Shepler, G.S. Cherniak, "Primary Creep in Design of Internal Pressure Vessels", J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 71, 229, 1949.

REVISÃO DOS MODELOS DE FRATURA EM AÇOS PARA VASOS DE PRESSÃO PARA FINS NUCLEARES

FATHI A. I. DARWISH

DEPTº DE CIÊNCIA DOS MATERIAIS E METALURGIA, PUC/RJ

SUMÁRIO

A variação da tenacidade com a temperatura de aços utilizados na fabricação de vasos de pressão de aplicações nucleares está apresentada e discutida através de modelos que se baseiam em atingir um valor crítico de tensão ou deformação no momento da fratura. Os modelos considerados são compatíveis com os micromecanismos de fratura atuantes e são capazes de prever as variações na tenacidade a partir das propriedades mecânicas avaliadas no ensaio de tração. A influência da irradiação por neutrons na tenacidade bem como na variação da mesma com a temperatura de serviço está também descrita na presente revisão.

INTRODUÇÃO

A energia nuclear representa para o mundo de hoje uma parcela cada vez maior no quadro do consumo energético. Atualmente cerca de 8% da energia elétrica consumida, ou seja, 120 mil megawatts, é gerada em reatores nucleares e a previsão para 1985 é de que esta porcentagem deve dobrar, representando 290 mil a 350 mil megawatts [1].

Durante a operação dos reatores nucleares modernos, restrições são impostas sobre a pressão e a temperatura para aquecimento e resfriamento do sistema de refrigeração do reator, a fim de garantir uma margem adequada de segurança contra a possibilidade de falhas dos materiais ferríticos dos vasos de pressão [2]. Em virtude desta preocupação com a possibilidade de fratura crítica ou subcrítica no vaso do reator, um grande esforço de pesquisa nos últimos anos vem sendo dirigido no sentido de caracterizar a tenacidade dos aços utilizados na fabricação de vasos para fins nucleares. Tal

caracterização é feita em função da composição do aço, quantidade de elementos residuais, temperatura de operação do reator e taxa de deformação para o material não irradiado e irradiado por neutrons.

O propósito desta revisão é abordar os modelos de fratura em aços ferríticos de baixa resistência mecânica do tipo utilizado na fabricação dos vasos de pressão de reatores nucleares. A viabilidade de aplicar esses modelos a fim de prever a variação da tenacidade com a temperatura e a taxa de formação em tais aços, não irradiados e irradiados por neutrons, será também apresentada e discutida.

MODOS DE FRATURA EM AÇOS FERRÍTICOS

A composição química de dois aços ferríticos (SA533B e SA302B) do tipo utilizado para vasos de pressão de reatores nucleares está mostrada na tabela 1. Estes aços de baixa resistência mecânica sofrem uma transição clássica

Análise em % de peso

Material	C	Mn	P	S	Si	Ni	Cr	Mo	V	Cu
SA533B	,23	1,55	,009	,014	,20	,67	,04	,53	,003	,16
SA302B	,23	1,47	,013	,024	,26	,17	,05	,52	,004	,20

Tabela 1. Composição química dos aços SA533B e SA302 B

no modo da fratura com a variação da temperatura. Em baixas temperaturas (patamar inferior) a fratura é frágil (de baixa energia) enquanto em temperaturas mais altas (patamar superior), a fratura é dútil acarretando maior absorção de energia, conforme mostrado na Fig.1. Esta figu

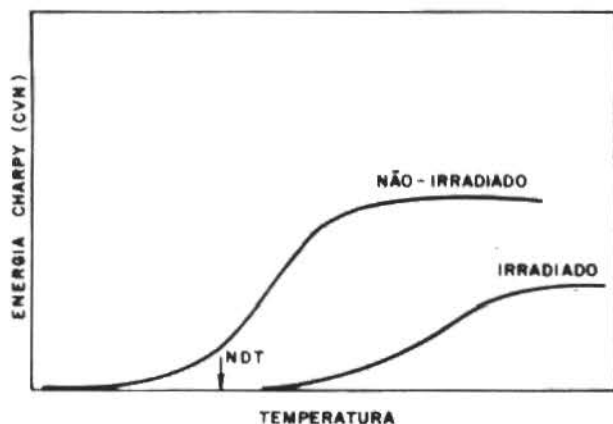


Fig.1. Variação da energia Charpy com a temperatura para aços ferríticos

ra indica, também uma degradação significativa na tenacidade do material irradiado por neutrons, manifestada pelo deslocamento da curva de impacto para temperaturas mais altas [2]

Observações fractográficas [3] mostram que nesses aços de baixa resistência mecânica, fratura nas baixas temperaturas (patamar inferior) ocorre por um mecanismo de clivagem transgranular enquanto nas altas temperaturas (patamar superior) fratura ocorre por um mecanismo de iniciação, crescimento e coalescência de pequenas cavidades formadas a inclusões e partículas de segunda fase. Recentemente inúmeras tentativas vem sendo realizadas a fim de relacionar estes modos microscópicos aos critérios mecânicos locais para a fratura, com o objetivo de prever a tenacidade na fratura a partir do conhecimento das propriedades mecânicas avaliadas em um ensaio simples de tração.

Fratura abaixo da temperatura de transição vem sendo modelada utilizando o critério de tensão crítica proposto por vários pesquisadores [4-8]. De acordo com este critério, fratura ocorre quando uma tensão crítica σ_f^* (característica do material) é superada localmente na frente da ponta da trinca. Do mesmo modo, fratura a temperaturas elevadas, i.e., acima da temperatura de transição, é modelada como ruptura completamente dútil (coalescência de microcavidades), utilizando um critério de deformação crítica originalmente proposto por McClintock [9] e posteriormente adaptado por MacKenzie, Hancock e Brown [10]. Aqui é suposto que fratura ocorra quando uma deformação crítica (dutilidade), ϵ_f^* , for localmente superada na frente da ponta, com a restrição de que tal deformação crítica seja uma função forte do estado de tensão que, por sua vez, varia com a distância na frente da ponta. O sucesso desses modelos evidentemente depende da determinação dos valores críticos envolvidos (σ_f^* e ϵ_f^*) a partir de ensaios de tração e de flexão realizados em amostras entalhadas, além do conhecimento das distribuições de tensão e deformação na frente de trincas pontiagudas.

MODELOS DE TENSÃO CRÍTICA PARA A TENACIDADE NO PATAMAR INFERIOR

Estudos de fratura por clivagem (iniciada por cisalhamento) a baixas temperaturas, para modo I de carregamento, em aços de baixa resistência, como aço doce, indicaram que trincas de clivagem se propagam numa maneira instável quando a tensão principal máxima σ_{yy} , (Fig.2) na frente de um entalhe ou uma trinca excede um valor crítico, σ_f^* , que é relativamente independente da temperatura e a taxa de deformação [6,8].

Partindo da solução de Hill [11] para a distribuição da tensão σ_{yy} na frente de um entalhe de raio de curvatura ρ na ponta, Malkin e

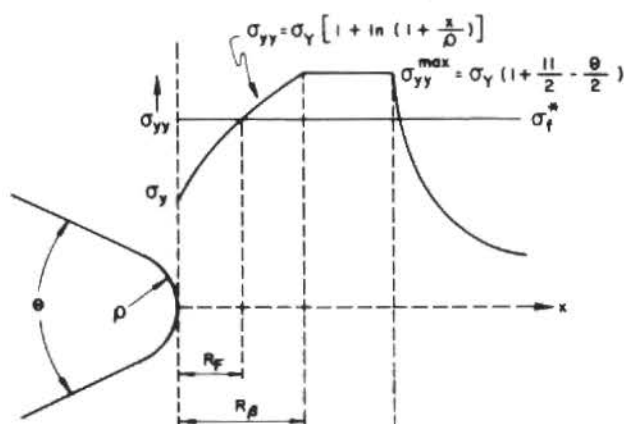


Fig. 2. Distribuição esquemática da tensão longitudinal, σ_{yy} , na frente de um entalhe

Tetelman [6] expressaram a tenacidade na fratura, K_{IC} , como:

$$K_{IC} = 2,9 \sigma_Y \left[\exp(\sigma_f^*/\sigma_Y - 1) - 1 \right]^{1/2} \rho_0^{1/2} \quad (1)$$

onde σ_Y é o limite de escoamento e ρ_0 representa a agudeza limite efetiva do material. Desse modo, ρ_0 é equivalente ao raio da curvatura, ρ , na ponta do entalhe abaixo do qual a tenacidade passa a ser independente de ρ e assim determinada por ρ_0 conforme equação (1). Malkin e Tetelman associam ρ_0 com algum parâmetro microestrutural tal como o diâmetro de grão, espaçamento entre inclusões, ou separação entre bandas de cisalhamento. É óbvio que para $\rho > \rho_0$, a tenacidade $K_{IC}(\rho)$ pode ser calculada a partir de equação (1) substituindo ρ_0 por ρ . A existência desta agudeza limite efetiva implica numa grande importância prática, desde que ela impõe um limite inferior sobre $K_{IC}(\rho)$ e assim previne a tenacidade de cair para valores desprezíveis em estruturas contendo trincas pontiagudas.

O fator de intensidade de tensões K_I para um corpo de prova carregado em flexão (Fig. 3) é expresso como [4,6,12]

$$K_I = \frac{2M}{BW^{3/2}} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2)$$

onde M é o momento no plano de entalhe e f uma função de a/W que pode ser encontrada nas

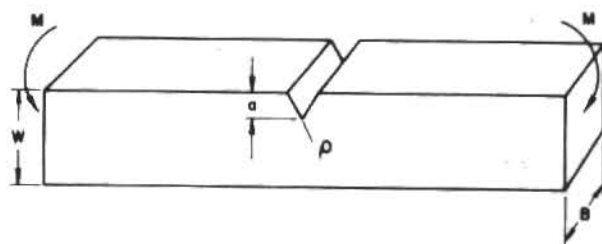


Fig. 3. Diagrama esquemático do corpo de prova para a determinação de $K_I(\rho)$

referências 4,6 e 12. No momento da fratura K_I é substituída por $K_{IC}(\rho)$ e M por M_F e caso o entalhe termine por uma trinca de fadiga ($\rho=0$), $K_{IC}(\rho)$ é substituído por K_{IC} . Por outro lado a extensão da zona plástica, R , é dada em função de K_I como [13]

$$R = 0,12 \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (3)$$

Na fratura R é substituída por R_F e K_I por $K_{IC}(\rho)$ e na presença de trincas pontiagudas este último é substituído por K_{IC} .

Para um dado raio de curvatura, ρ , a extensão da zona plástica no momento da fratura, conforme a solução de Hill [11], é dada por (Fig. 2)

$$R_F/\rho = \exp \left[\sigma_f^*/\sigma_Y - 1 \right] - 1 \quad (4)$$

As relações acima citadas foram utilizadas para a determinação de σ_f^* [5,6]. Medindo o momento na fratura, M_F , numa dada temperatura, $K_{IC}(\rho)$ é calculado a partir de equação (2) e em seguida R_F é estimada utilizando equação (3). Determinando σ_Y na mesma temperatura a uma taxa de deformação correspondente àquela que existe na zona plástica na frente do entalhe, σ_f^* pode ser determinada através de equação (4).

Partindo do valor de K_{IC} determinado experimentalmente (equação (2)), de σ_Y medida à mesma temperatura e taxa de deformação e de σ_f^* , pode-se estimar a agudeza limite efetiva ρ_0 , utilizando equação (1). Importante apontar que uma estimativa direta de ρ_0 pode ser realizada experimentalmente através do levantamento da curva $K_{IC}(\rho) - \rho^{1/2}$, onde ρ_0 é representada pelo raio ρ abaixo do qual $K_{IC}(\rho)$ não varia com ρ . Tal determinação foi adotada por

Wilshaw, Rau e Tetelman [4] para um aço doce e por de Abreu, Darwish e Ouro [14] para o aço SAE 1060.

Equação (1) indica que K_{IC} decresce à medida que σ_Y cresce. Então, para um nível exigido de σ_Y , que pode ser alcançado através de vários tratamentos térmicos, a microestrutura compatível com o valor mais alto de σ_f^* deve ser escolhida. Por exemplo em aços carbono - manganês, uma grande faixa de σ_f^* pode ser obtida a um dado nível de σ_Y através da variação do tamanho e espaçamento entre as partículas do carbonato.

O modelo acima apresentado foi aplicado [6] aos aços A302B e A533, temperados e revenidos, utilizados em reatores nucleares. Para fratura por clivagem em tais aços, é possível determinar a tenacidade bem como a sua dependência da temperatura (equação (1)) a partir do conhecimento de σ_Y na faixa de temperatura em questão. Para um dado mecanismo de fratura (neste caso clivagem), σ_f^* e ρ_0^* não devem variar com a temperatura.

Deve-se anotar que a razão máxima de σ_f^* / σ_Y para a concordância entre os valores de K_{IC} previstos pelo modelo (equação (1)) e os experimentalmente determinados (equação (2)) é de 2,6, de acordo com a teoria de plasticidade para materiais rígidos e perfeitamente plásticos. Entretanto o encruamento do material na zona plástica pode aumentar σ_f^* / σ_Y para valores acima de 3 [6], o que estende a faixa de temperatura na qual o modelo seja válido.

Ritchie, Knott e Rice (RKR) [8], utilizando análises mais precisas [15-18] para a distribuição de tensão plástico-elástica na frente de trincas pontiagudas, concluíram que o critério para fratura na presença desse tipo de descontinuidade não pode ser baseado apenas no alcance de σ_f^* a um ponto na frente da ponta da trinca. O critério para fratura e consequentemente K_{IC} são determinados pela exigência de que a tensão principal máxima deve alcançar ou ultrapassar σ_f^* sobre uma distância característica microestruturalmente significativa, ℓ_0^* .

Devido à intensificação rápida da tensão na frente de uma trinca pontiaguda, a tensão longitudinal máxima $\sigma_{yy}^{\max}$ é atingida bem próximo da ponta e daí σ_{yy} começa a cair. Um diagrama

esquemático do acontecimento crítico que leva à fratura está apresentado na Fig.4. A distri-

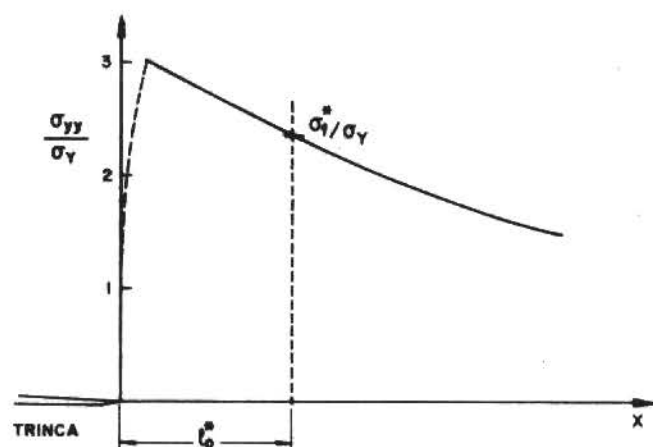


Fig.4. Representação esquemática do acontecimento crítico para a fratura

buição da tensão σ_{yy} diretamente na frente da ponta de uma trinca pontiaguda sob condições de deformação planar é obtida para um material não encruável da solução de Ostergren [15] (Fig. 5) enquanto para um material encruável as so-

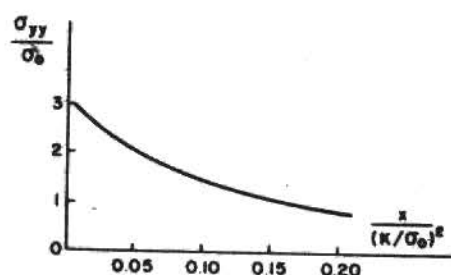


Fig.5. Distribuição de σ_{yy} para um material não encruável [15]

luções de Rice e Rosengren [16] e Hutchinson [17] (Fig.6) são utilizadas. Bem perto da ponta a distribuição é dada por Rice e Johnson [18]. Em todas essas soluções a intensificação de tensão σ_{yy} / σ_0 é dada em função do parâmetro adimensional $x / (K_I / \sigma_0)^2$ onde σ_0 é a tensão de escoamento representada por σ_Y .

Conhecendo a razão σ_f^* / σ_Y , pode-se calcular o parâmetro adimensional $\ell_0^* / (K_{IC} \sigma_Y)^2$. Portanto K_{IC} pode ser determinada se ℓ_0^* for conhecida.

A variação de K_{IC} com a temperatura foi prevista pelo modelo para um aço doce e está

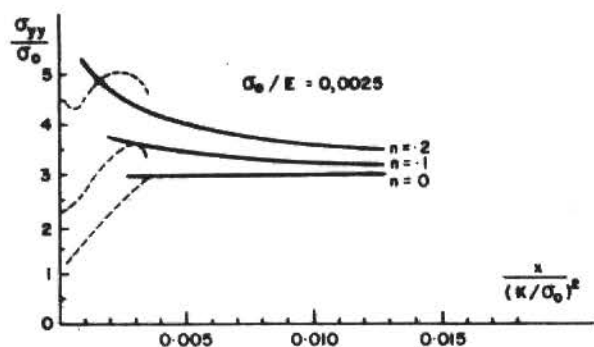


Fig. 6. Distribuição de σ_{yy} para um material encruável (n = expoente de encruamento) [16-18]

apresentada na Fig. 7. Tal previsão é baseada na dependência de σ_Y sobre a temperatura.

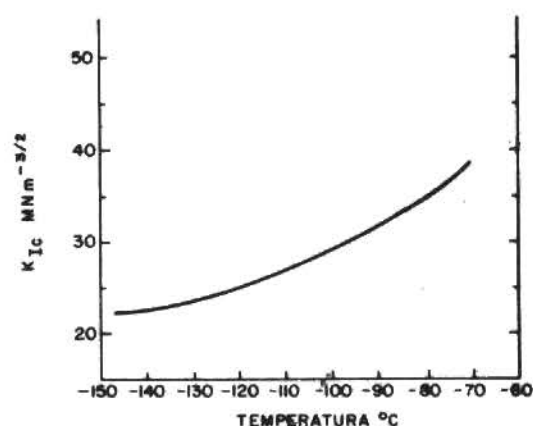


Fig. 7. Variação de K_{IC} com a temperatura [8]

Distância característica. Na aplicação do modelo de RKR a um aço doce, uma boa concordância com os dados experimentais foi obtida [8] para uma distância característica ℓ_0^* de dois diâmetros de grão ($\ell_0^* = 2d$). No entanto acredita-se que não haja um significado físico fundamental para a conclusão de RKR. Na verdade Parks [19] aponta que ℓ_0^* deve ser encarada como, essencialmente, uma quantidade empírica embora seja de relevância aos aspectos microestruturais da iniciação da fratura. Em resumo, é razoável supor que o acontecimento crítico de iniciação da fratura deva ocorrer nos poucos primeiros grãos preasustenítico na frente da ponta da trinca. Assim sendo, Ritchie, Server

e Wullaert [2] no seu trabalho sobre os aços SA533B e SA302B, consideraram que ℓ_0^* pode variar entre $2d$ e $4d$.

Formulação analítica do modelo de RKR. O modelo de RKR, baseado nas soluções numéricas para a distribuição de tensão na frente de trincas pontiagudas, pode ser formulado analiticamente [20]. Utilizando a lei constitutiva de Ramberg - Osgood, na qual a deformação plástica ($\bar{\epsilon}_p$) é expressa em função da tensão equivalente ($\bar{\sigma}$) como:

$$\bar{\epsilon}_p = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^N,$$

a tensão de tração de abertura σ_{yy} a uma distância x diretamente na frente da ponta da trinca foi obtida como:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0} = f(N) \left[\frac{J_I}{\epsilon_0 I x} \right]^{\frac{1}{N+1}} \quad (5)$$

onde σ_0 é a tensão de escoamento levada como σ_Y , J_I a integral - J, ϵ_0 a deformação de escoamento, N o expoente de encruamento de Ramberg - Osgood, I uma constante numérica dependente de N , e $f(N)$ o valor, diretamente na frente da trinca, da função normalizada da distribuição angular de σ_{yy} . J_I é relacionada com K_I pela relação [21]

$$K_I = \frac{J_I \cdot E}{1 - \nu^2}$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é a razão de Poisson. Deste modo equação (5) pode ser expressa como:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_Y} = f(N) \left[\frac{1 - \nu^2}{\epsilon_0 I} \right]^{\frac{1}{N+1}} \cdot \left[\frac{x}{(K_I / \sigma_Y)^2} \right]^{-\frac{1}{N+1}}$$

Importante observar que a tensão equivalente é definida por

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais, e que o expoente de encruamento $N = \frac{1}{n}$, onde n representa o expoente na lei constitutiva usual

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \left(\frac{\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_0} \right)^n$$

De acordo com o critério de RKR, $K_I = K_{Ic}$, quando σ_{yy} excede σ_f^* sobre $x = \ell_0^*$ diretamente na frente da ponta da trinca. A tenacidade de K_{Ic} , é, então obtida como

$$K_{Ic} = \beta \ell_0^{* \frac{1}{2}} \frac{\sigma_f^* \left[\frac{N+1}{2} \right]}{\sigma_Y \left[\frac{N-1}{2} \right]}$$

$$\text{onde } \beta = f(N) \left[\frac{1-\nu^2}{\epsilon_0 I} \right]^{\frac{1}{N+1}}$$

As constantes I , $f(N)$ e β obtidas a partir da solução numérica da distribuição de tensão de Hutchinson [17,22], são listadas na tabela 2 para vários valores do expoente N .

N	I	$f(N)$	β
3	5,51	1,94	5,50
5	5,02	2,22	4,52
9	4,60	2,46	3,80
13	4,40	2,58	3,53
25	4,14	2,73	3,24
49	3,96	2,83	3,10
99	3,84	2,90	3,03

Tabela 2. Valores numéricos de I , $f(N)$ e β [2,17,22] ($\nu = 0,33$ e $\epsilon_0 = 0,0025$)

MODELOS DE DEFORMAÇÃO CRÍTICA PARA A TENACIDADE NO PATAMAR SUPERIOR

Estudos metalográficos [3] dos mecanismos de fratura de aços para vasos de pressão de reatores nucleares, como SA533B, a temperaturas correspondentes ao patamar superior, revelaram que a rutura se inicia por nucleação e crescimento de cavidades formadas a inclusões de sulfetos de manganês e óxido de alumínio (de tamanho de $5 \rightarrow 10\mu$) na frente da ponta de um entalhe ou trinca. A coalescência destas cavidades, através da localização de deformação entre as mesmas, resulta então na formação e crescimento de macrotrincas. De uma forma simplista, pode-se realisticamente modelar este tipo de fratura

como se fosse induzido por deformação, i.e., coalescência das cavidades ocorre quando um valor crítico de deformação é ultrapassado na frente da ponta.

Entretanto McClintock [9] apontou que a ductilidade de uma região do material em deformação é reduzida pela presença de altas tensões biaxiais ou triaxiais. Este fato foi constatado em materiais conjugados fibrosos [23].

Em analogia com a fratura por clivagem, MacKenzie, Hancock e Brown [10] propuseram um critério para fratura dútil onde um valor crítico de deformação, ϵ_f^* , é localmente excedido sobre uma distância característica microestruturalmente significativa (ℓ_0^*) na frente da ponta. Entretanto o critério reconhece que tal valor crítico é uma função forte do estado de tensão e que por sua vez varia com a distância na frente da ponta. Assim sendo, a aplicação desse modelo necessita ou envolve a determinação experimental da deformação na fratura (a ductilidade ϵ_f) em função do estado de tensão, além do conhecimento da distribuição da deformação na frente da trinca pontiaguda.

Determinação de ϵ_f . Valores de ϵ_f podem ser obtidos em função do estado de tensão [10] através do carregamento uniaxial de tração de barras cilíndricas circunferencialmente entalhadas (Fig.8). Em tais corpos de prova, fratura

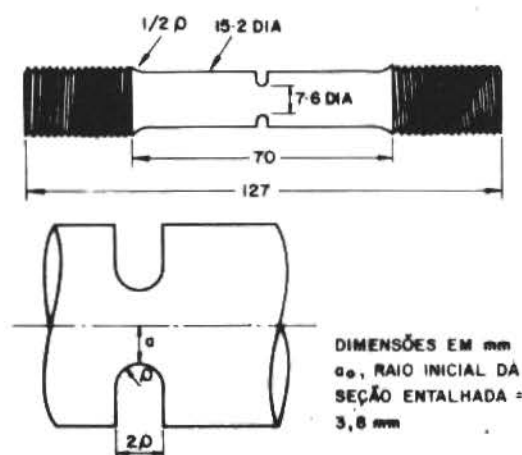


Fig.8. Amostra de tração circunferencialmente entalhada [2,10]

se inicia na região central do entalhe onde o estado de tensão hidrostático é mais severo. Diferentes estados de tensão podem ser obtidos

variando a agudeza do entalhe.

De acordo com a análise de Bridgman [24], a deformação plástica efetiva, $\bar{\epsilon}_p$, na seção do entalhe é dada por [2,10,24]

$$\bar{\epsilon}_p = 2 \ln \frac{a_0}{a_{\min}} \quad (6)$$

onde a_0 e $a_{\min}$ são o raio original e o raio mínimo da seção entalhada, respectivamente. Por outro lado, o estado de tensão no centro do corpo de prova é dado por [2,10,24]

$$\sigma_m / \bar{\sigma} = \frac{1}{3} + \ln \left(1 + \frac{a_{\min}}{2\rho} \right) \quad (7)$$

onde ρ é o raio de curvatura do entalhe (Fig. 8) e σ_m é a tensão média, ou hidrostática, da

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

Ensaando uma série de amostras (Fig. 8) de vários ρ 's, as equações (6) e (7) podem ser utilizadas para obter os valores de $\bar{\epsilon}_p$ no momento da iniciação da fratura, $\bar{\epsilon}_f$, em função de $\sigma_m / \bar{\sigma}$. Curvas típicas desta relação obtidas por Ritchie, Server e Wullaert [2] para os aços SA533B e SA302B à temperatura ambiente estão mostradas na Fig. 9. Essas curvas indicam uma redução acentuada na ductilidade dos aços para um estado severo de tensão hidrostática.

Expressão para K_{Ic} . Fig. 10 representa a distribuição de $\bar{\epsilon}_p$ e $\sigma_m / \bar{\sigma}$ na frente de uma trinca, em modo I sob condições de deformação planar, para pequena escala de deformação [2,10,18]. Esta distribuição é válida para materiais não-encruáveis até um nível de tensão aplicada de cerca de 3/4 de σ_Y e tem a vantagem de levar em conta a abertura da ponta da trinca, δ , acarretada pela deformação plástica. Conforme Fig. 10, $\sigma_m / \bar{\sigma}$ e $\bar{\epsilon}_p$ são plotadas em função de x/δ . Deste modo K_{Ic} pode ser prevista através da determinação do valor de δ para o qual $\bar{\epsilon}_p$ excede, sobre a distância característica ℓ_0^* , a deformação crítica para fratura, ϵ_f^* , representativa do estado de tensão naquela posição. A curva de $\bar{\epsilon}_p$ da Fig. 10 pode ser expressa pela seguinte relação [18].

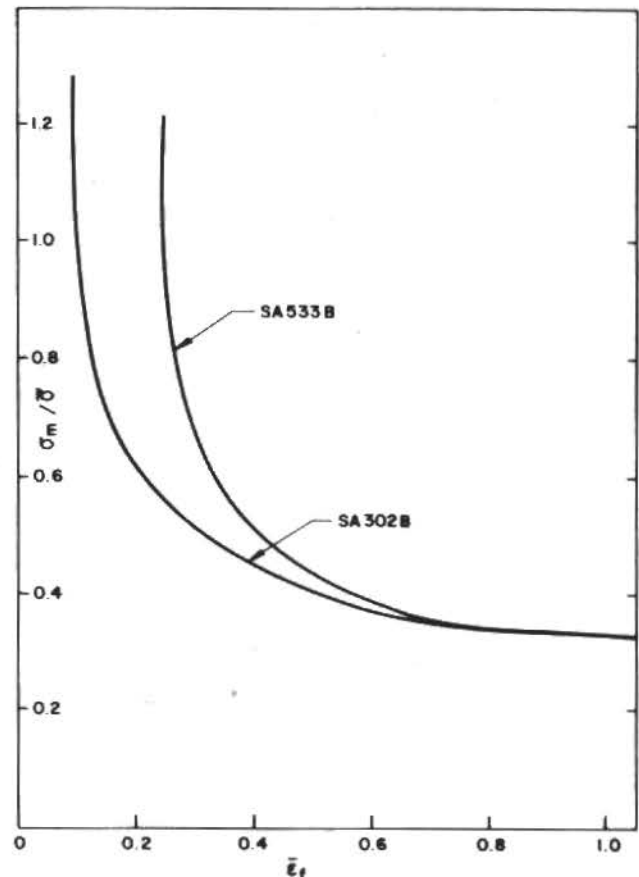


Fig. 9. Curvas de iniciação da fratura para vários estados de tensão [2]

$$\bar{\epsilon}_p = c_1 \frac{\delta}{x}, \quad (8)$$

onde c_1 é uma constante a ser determinada a partir da própria curva. No momento de iniciação da fratura dútil, tem-se

$$\epsilon_p = \epsilon_f^*, \quad x = \ell_0^* \quad \text{e} \quad \delta = \delta_c$$

K_{Ic} é relacionada a δ_c pela expressão [25]

$$\delta_c = 0,6 \frac{K_{Ic}^2}{E \sigma_Y} \quad (9)$$

Combinando equações (8) e (9), o modelo de deformação crítica é expresso como [2]

$$K_{Ic} = \text{constante} \sqrt{\epsilon_f^* \cdot \ell_0^* \cdot \sigma_Y \cdot E},$$

onde a constante é igual a $1/\sqrt{0,6 c_1}$

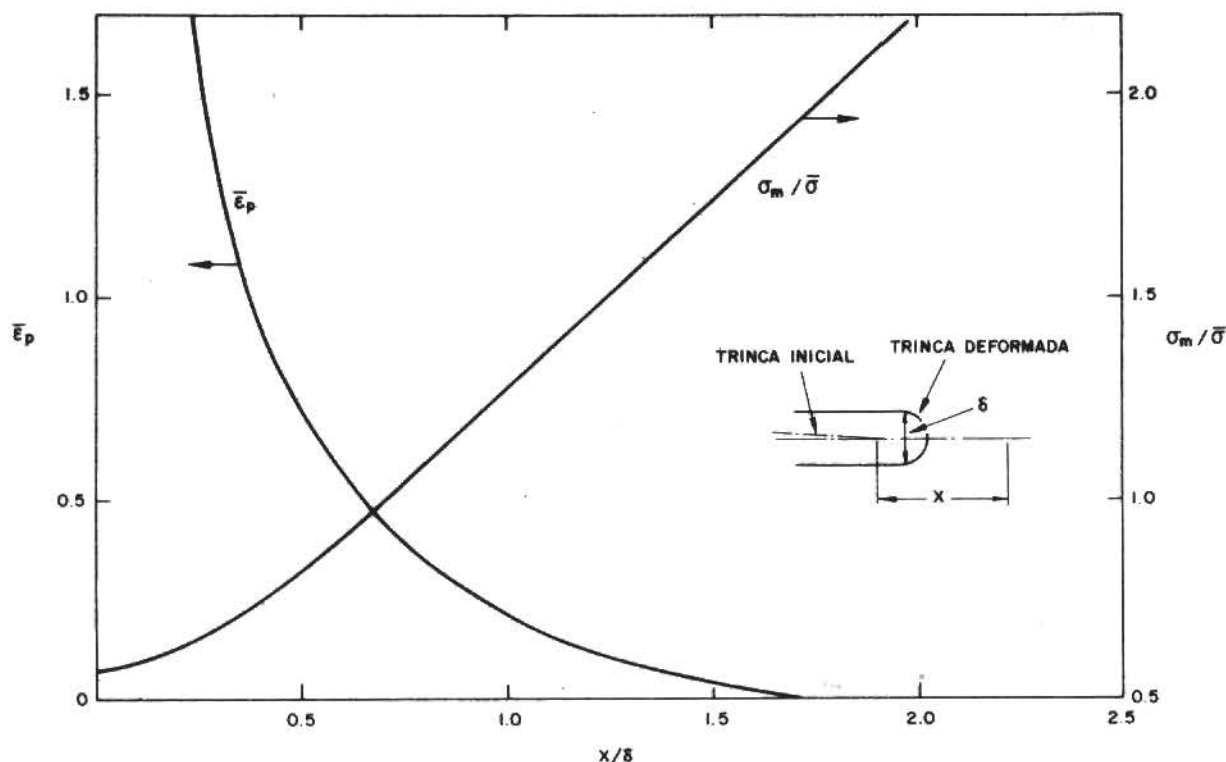


Fig.10. Distribuição de $\bar{\epsilon}_p$ e $\sigma_m / \bar{\sigma}$ na proximidade de uma trinca [2]

O valor de ϵ_f^* utilizado para prever a tenacidade na fratura é representado por $\bar{\epsilon}_f$ correspondente ao estado particular de tensão que existe a uma distância ℓ_0^* da ponta da trinca. Desde que na proximidade da ponta as tensões são altamente triaxiais, ϵ_f^* pode ser estimada por $\bar{\epsilon}_f$ correspondente ao estado de tensão $\sigma_m / \bar{\sigma} > 1,2$ (Fig.9), representativo de estado de tensão na região da ponta [2,10].

De acordo com [2], os valores de ϵ_f^* assim estimados para os aços SA533B e SA302B decrescem levemente com a temperatura. Para estes aços, σ_Y mostra ser pouco dependente da temperatura na faixa acima de NDT [2] e o modelo de deformação crítica prevê uma tenacidade quase independente da temperatura na região do patamar superior.

Distância característica. Valores de ℓ_0^* para fratura dútil são geralmente equivalentes a múltiplos do espaçamento entre partículas de segunda fase ou inclusões. Estimativas para ℓ_0^* variam entre 1 e 10 vezes o referido espaçamento.

Em alguns aços, por exemplo SA302B, o acontecimento crítico para iniciação da fratura dútil é a coalescência de cavidades grandes, formadas a inclusões, com a ponta da trinca. Desse modo a coalescência de uma única cavidade com a ponta será a etapa crítica para fratura. Em outros casos, por exemplo o aço SA533B, a coalescência de algumas cavidades relativamente pequenas formadas na zona plástica, representa a etapa crítica. Aqui o mecanismo para avanço da trinca não será pela nucleação de uma cavidade que em seguida coalescerá com a ponta da trinca principal, mas sim pela nucleação e coalescência de várias cavidades isoladas na zona plástica. Este mecanismo está perfeitamente consistente com as observações metalográficas de Van Stone [3]. Portanto, para fratura dútil a distância característica, ℓ_0^* , deve ser encarada não só como mera reflexão do espaçamento entre partículas que nucleam cavidades, mas também como número crítico de cavidades a coalescer com a trinca principal no momento da iniciação.

EFEITO DE IRRADIAÇÃO POR NEUTRONS

Fragilização de aços ferríticos causada por irradiação por neutrons é geralmente caracterizada por um acréscimo na temperatura de transição bem como na temperatura de mínima ductilidade, NDT, conforme mostrado na Fig.1. Ao mesmo tempo a energia correspondente ao patamar superior sofre uma queda. Em termos de mecânica de fratura, estas variações correspondem a uma redução na tenacidade K_{IC} .

Na faixa do patamar inferior, irradiação por neutrons aumenta σ_y e diminui n [26] enquanto σ_f^* e ℓ_o^* permanecem não alteradas. Partindo-se, então, da influência de irradiação sobre os parâmetros de escoamento, pode-se prever a dependência de K_{IC} sobre a temperatura em função da dose de neutrons à qual o material foi sujeito. A variação de K_{IC} com T prevista pelo modelo de RKR está mostrada na Fig.11 [2]. Esta previsão está de acordo com

os modelos de deformação crítica, são em teoria plausíveis. Para que tal previsão seja realizada, precisa-se dos dados para a variação da ductilidade na fratura com o estado de tensão para o material irradiado.

Desde que a distância característica para fratura dútil parece ser uma função da microestrutura (espaçamento entre inclusões) bem como do número médio de cavidades que coalesçam com a ponta da trinca no momento da iniciação da fratura, é difícil imaginar que esta distância não seja dependente da dose de irradiação.

REFERÊNCIAS

- [1] Relatório Anual da Agência Internacional de Energia Atômica (1980).
- [2] Ritchie, R.O., Server, W.L. e Wullaet, R.A., Metallurgical Transactions, Vol. 10A, out.(1979).
- [3] Van Stone, R.H., Relatório de General Electric No. SRD - 78 - 116. julho 1978, citada na referência [2]

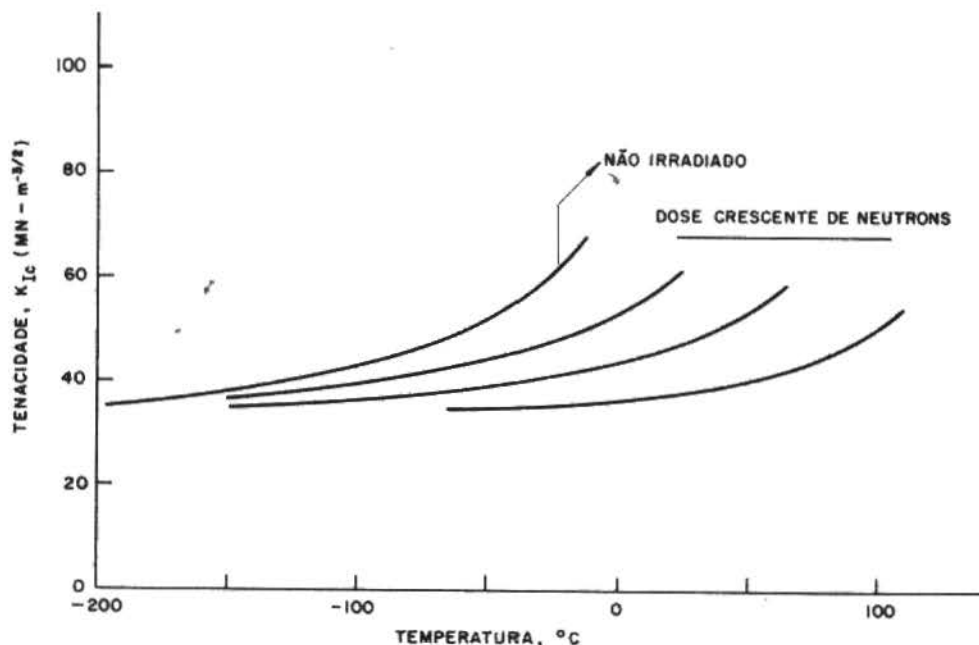


Fig.11. Efeito de radiação sobre K_{IC} no patamar inferior de SA533B [2]

os dados experimentais obtidos para o aço SA533B não irradiado e irradiado.

Prosseguimentos semelhantes para prever a influência de irradiação por neutrons sobre K_{IC} na região do patamar superior, utilizando

- [4] Wilshaw, T.R., Rau, C.A. e Tetelman, A.S., Eng. Frac. Mech., 1, p. 191. (1968).
- [5] Tetelman, A.S., Wilshaw, T.R. e Rau, C.A., Int. J. Frac. Mech. 4, p. 147, (1968).
- [6] Malkin, J. e Tetelman, A.S., Eng. Frac., Mech. 3, p. 151, (1971).
- [7] Server, W.L. e Tetelman, A.S., Eng. Frac., Mech.,

- [8] Ritchie, R.O., Knott, J.F. e Rice, J.R., J. Mech. Phys. Solids, 21, p. 395, (1973).
- [9] McClintock, F.A., Fracture, An Advanced Treatise, 3, p. 47, (1971), citada na referência [2].
- [10] MacKenzie, A.C., Hancock, J.W. e Brown, D. K., Eng. Frac. Mech., 9, p. 167, (1977).
- [11] Hill, R., Mathematical Theory of Plasticity Oxford University Press, Oxford, (1950).
- [12] Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, Butterworths, London, (1973).
- [13] McClintock, F.A. e Irwin, G.R., ASTM STP 381, p. 84, (1965).
- [14] de Abreu, A.C., Darwish, F.A., e Ouro, C.R. Anais do IV CBECIMAT, Florianópolis, dezembro, (1980).
- [15] Ostergren, W.J., citada na referência [8].
- [16] Rice, J.R. e Rosengren, G.F., J. Mech. Phys. Solids, 16, p. 1 (1968).
- [17] Hutchinson, J.W., *ibid*, p. 13.
- [18] Rice, J.R., e Johnson, M. A., Inelastic Behavior of Solids, McGraw-Hill, New York, (1970), citada na referência [8]
- [19] Parks, D.M., J. Eng. Matls. and., Trans. ASME Series H, 98, p. 30, (1976), citada na referência [2].
- [20] Curry., D. A., Central Electricity Research Laboratory, Relatório No. RD/L/N 64/78, (1978), Inglaterra, citada na referência [2].
- [21] Rice, J.R., J. Applied Mech., Trans ASME Series E, 35, p. 379, (1968).
- [22] Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 16, p. 337, (1968).
- [23] Darwish, F.A., Revista de Metalurgia da ABM, 36, 270, p. 291. (1980).
- [24] Bridgman, P.W., Studies in Large Plastic Flow and Fracture, McGraw-Hill, New York, (1952).
- [25] McMeeking, R.M., J. Mech. Phys. Solids, 25, p. 397, (1977).
- [26] Igata, N. et al, ASTM STP 570, p. 24, (1975).

EFEITO DO RAO DE CURVATURA DA RAIZ DO ENTALHE NA TENACIDADE DINÂMICA DO AÇO SAE 1060 A BAIXA TEMPERATURA

AUGUSTO C. R. DE ABREU

FATHI A. I. DARWISH

CESAR R. OURO

DEPTº DE CIÊNCIA DOS MATERIAIS E METALURGIA, PUC/RJ

SUMÁRIO

A influência do raio de curvatura da raiz do entalhe, ρ , sobre a tenacidade dinâmica e a energia absorvida na fratura do aço SAE 1060 normalizado foi determinada através de ensaios de impacto instrumentado a -196°C . Os resultados mostraram que ambos os parâmetros decrescem a medida que ρ decresce, permanecendo constantes para raios menores que 0,5mm. Tais resultados são discutidos em termos de distribuição de tensão a frente do entalhe.

INTRODUÇÃO

Alguns pesquisadores tem se preocupado em estudar a influência de condições de serviço sobre a tenacidade na fratura de materiais metálicos estruturais. Geometria do entalhe, temperatura e taxa de deformação são exemplos dessas condições. Os aços são destacadamente os mais importantes materiais estruturais. Nestes a redução da temperatura e/ou aumento da taxa de deformação ocasionam redução de sua tenacidade [1,2]. Isto implica no aumento da fragilidade do aço, o que tende a provocar fratura predominantemente elástica. A determinação da influência da geometria do entalhe é realizada basicamente variando o raio de curvatura de sua raiz, ρ , ou o seu ângulo de abertura, ω , sendo que a influência de ρ é mais significativa que a de ω .

O propósito deste trabalho foi determinar a influência do raio de curvatura da raiz do entalhe no valor do fator crítico de intensidade de tensões sob condições de deformação planar do aço SAE 1060 normalizado, através de ensaios de flexão dinâmica realizados na temperatura de -196°C . A alta taxa de deformação e a baixa temperatura de testes foram escolhidos para garantir fratura dos corpos

de prova abaixo do escoamento geral, o que permitiria a determinação da tenacidade do material $K_{IC}(\rho)$ em função do raio de curvatura. A partir desses resultados, foi estimada a resistência intrínseca do material a fratura, σ_f^* .

Para alcançar os objetivos almejados neste trabalho foram testados diversos corpos de prova em máquina Charpy instrumentada, tendo sido registradas a energia absorvida no processo de fratura e a curva de carregamento dinâmico (carga x tempo) de cada corpo de prova.

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

A composição química do aço SAE 1060, utilizado no decorrer desta investigação, está apresentada na tabela 1.

Os corpos de prova, usinados a partir de barras quadradas de $1/2" \times 1/2"$, foram sujeitos a um tratamento térmico de normalização a uma temperatura de 850°C durante 30 minutos e em seguida resfriados ao ar. A geometria das amostras era a de Charpy, sendo que ρ variava de aproximadamente zero (trinca por fadiga) até 1mm. A figura 1 mostra o desenho e o modo de carregamento dos corpos de prova.

Elemento químico	C	Mn	Si	P	S
Percentagem em peso	0,63	1,289	0,299	0,021	0,029

Tabela 1. Composição química do aço SAE 1060

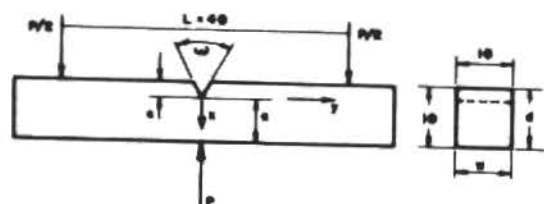


Fig.1. Geometria e modo de carregamento das amostras (Dimensões em mm)

As amostras, após terem sido mergulhadas em nitrogênio líquido por 10 minutos, foram fraturadas em uma máquina de impacto Tinius Olsen equipada com DYNATUP modelo 500 da Effects Technology e com um osciloscópio TEKTRONIX 5103 N [3]. Tais equipamentos, mostrados na figura 2, permitiram o registro

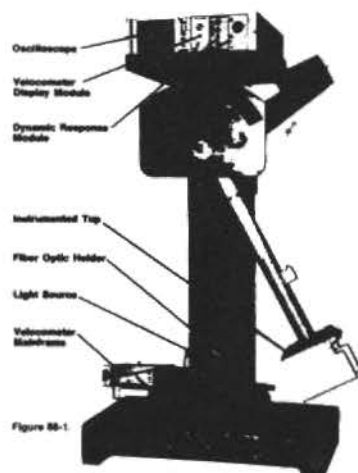


Fig.2. Máquina de impacto instrumentada

de cargas instantâneas no corpo de prova durante seu dobramento, como também a energia integrada no tempo de duração do impacto [3,4].

Ensaio de tração foram também realizados a -196°C em amostras cilíndricas de diâmetro de 10mm a uma taxa de carregamento da ordem de $10\text{Kg/mm}^2\text{seg}$. Determinou-se para o limite

de escoamento σ_y , o limite de resistência σ_f e a ductilidade na tração ϵ_f , os valores $123,6\text{Kg/mm}^2$, $125,2\text{Kg/mm}^2$ e 1,2%, respectivamente.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A figura 3 mostra um exemplo típico de cur

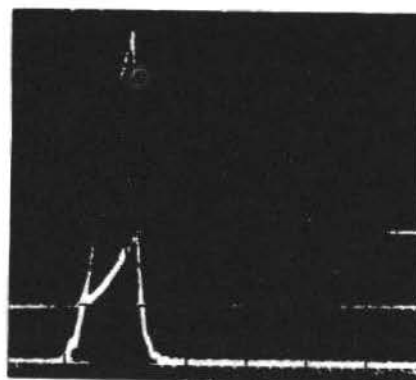
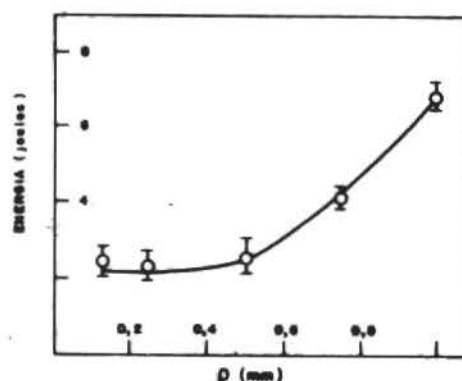


Fig.3. Curva de carregamento dinâmico

vas carga x tempo obtidas durante o ensaio de impacto. Em todos os casos observou-se que as amostras falharam abaixo do escoamento geral.

A variação da energia absorvida no impacto com ρ pode ser observada na figura 4. Veri

Fig.4. Energia absorvida em função de ρ

fica-se que os valores de energia diminuem com o raio de curvatura, tendendo a se nivelar para baixos valores de ρ , permanecendo constantes quando estes são inferiores a 0,5mm.

Desde que as amostras tenham falhado abaixo

do escoamento geral, a carga máxima aplicada, P_u , coincide com a carga de fratura, P_F . A variação desta carga com ρ é semelhante àquela apresentada pela energia absorvida, como pode ser observado comparando as figuras 4 e 5.

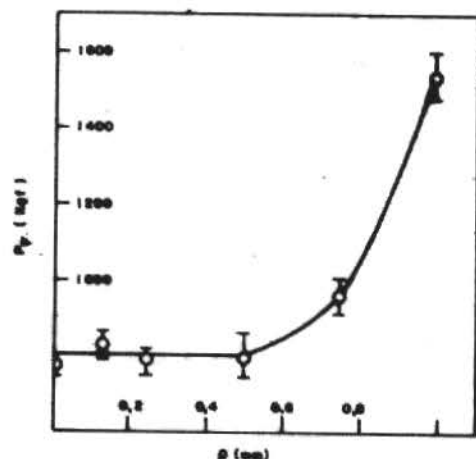


Fig. 5. Carga na fratura em função de ρ

Tenacidade na fratura. Para a geometria e o modo de carregamento utilizados nesta investigação, o fator de intensidade de tensões, K_{IC} , é determinado a partir da equação [5]

$$K_{IC} = \frac{2M}{d^{3/2}} \left[31,7 \left(\frac{c}{d} \right) - 64,8 \left(\frac{c}{d} \right)^2 + 211 \left(\frac{c}{d} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (1)$$

onde M representa o momento aplicado, dado pela expressão $M = PL/4$, sendo P, L, c e d mostrados na figura 1. No instante da fratura a equação (1) representa $K_{IC}(\rho)$, onde o momento aplicado é determinado a partir de P_F .

A figura 6 mostra que $K_{IC}(\rho)$ também é crescente com ρ , permanecendo constante no valor de $44,4 \pm 2,6 \text{ Kgf.mm}^{-3/2}$, para raios de raiz de entalhe menores que aproximadamente 0,5mm. O raio de curvatura efetivo, ρ_0 , abaixo do qual $K_{IC}(\rho)$ não varia, define então a tenacidade de amostras contendo entalhes ou trincas de raios de curvatura menores que ρ_0 . Este valor constante representa a tenacidade do material na fratura sob condições de deformação planar, K_{IC} , visto que o mesmo atende à desigualdade [1,2]

$$w \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y} \right)^2 \leq c$$

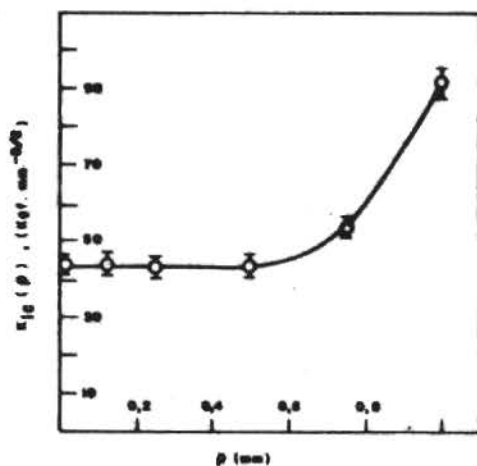


Fig. 6. Tenacidade na fratura em função de ρ

onde w é a espessura do corpo de prova (Fig. 1)

Resistência intrínseca a fratura. Para amostras que falham abaixo do escoamento geral, o critério de fratura mais adequado é aquele baseado em um valor crítico σ_f^* (tensão de fratura intrínseca do material) atingido na frente do entalhe. A tensão máxima longitudinal (na direção y) na seção do entalhe (Fig. 7) ocorre na interface elástico-plástica, a uma distância R da raiz deste, onde R representa a extensão da zona plástica. Fratura ocorre quando a máxima tensão longitudinal, $\sigma_{yy}^{\max}$, alcança o valor σ_f^* , isto é, quando R alcança um valor crítico R_F , dado pela expressão [6,7]

$$R_F = \rho \{ \exp [(\sigma_f^*/\sigma_Y) - 1] - 1 \} \quad (2)$$

Esta relação mostra que R_F cresce com ρ . A extensão da zona plástica, R , é uma função de K_{IC} . Sob condições de deformação planar e no momento da fratura, R_F é dada pela equação [8]

$$R_F = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{K_{IC}(\rho)}{\sigma_Y} \right]^2 \quad (3)$$

Eliminando R_F entre equações (2) e (3), $K_{IC}(\rho)$ é explicitada como

$$K_{IC}(\rho) = 2,9 \sigma_Y \{ \exp [(\sigma_f^*/\sigma_Y) - 1] - 1 \}^{1/2} \rho^{1/2}$$

A tenacidade K_{IC} é então dada por [7,9]

$$K_{IC} = 2,9 \sigma_Y \{ \exp[(\sigma_f^*/\sigma_Y) - 1] - 1 \}^{1/2} \rho_0^{1/2} \quad (4)$$

Substituindo-se os valores de K_{IC} , ρ_0 e σ_Y , determinados experimentalmente, na equação (4), foi obtido o valor de $126,6 \text{ Kgf.mm}^{-2}$ para σ_f^* , valor este pouco maior que a tensão de fratura, σ_f , para amostras de tração ensaiadas a -196°C ($\sigma_f = 125,2 \text{ Kgf.mm}^{-2}$). É importante observar que esta estimativa é baseada no σ_Y de terminado em ensaio de tração realizado a uma taxa de deformação bem inferior à correspondente ao ensaio de impacto. Entretanto a uma baixa temperatura tal como a de -196°C , σ_Y de um aço como SAE 1060 não deve variar com a taxa de deformação. Ensaio realizado neste aço na temperatura ambiente [10] mostraram que o limite de escoamento dinâmico, obtido em impacto, é 17% maior que o seu valor estático.

A observação de que $K_{IC}(\rho)$ cresce com ρ para $\rho > \rho_0$ pode ser explicada na base da distribuição das tensões no plano do entalhe. A figura 7 representa um diagrama esquemático

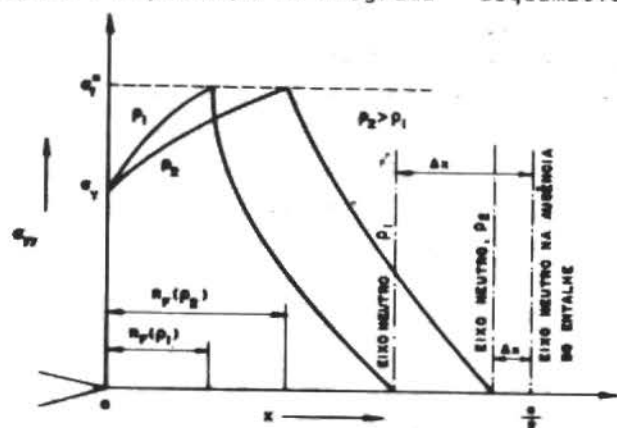


Fig. 7. Diagrama esquemático da distribuição de tensões a frente do entalhe

desta distribuição no momento da fratura para dois valores de ρ ($\rho_2 > \rho_1$). Quando $\rho > \rho_0$, R_F é proporcional a ρ ocasionando a distribuição de tensões, no momento da fratura, mostrada na figura. A tensão na zona plástica é dada por [6,7]

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_Y \left[1 + \ln \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \quad 0 \leq x \leq R_F$$

Para $x > R_F$, as tensões são elásticas e decrescem mais bruscamente quando ρ diminui [7], o que ocasiona maior deslocamento do eixo neutro no sentido do entalhe (Fig. 7).

A força interna de tração no momento da fratura pode ser descrita pela expressão

$$F_t = \sigma_Y \int_0^{R_F} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] dx + \int_{R_F}^{a/2-\Delta x} \sigma_{yy}(x) dx$$

onde $\sigma_{yy}(x)$ no segundo integrante representa a distribuição de tensão na região da seção do entalhe tracionada elasticamente e Δx é o deslocamento do eixo neutro ocasionado pela presença do entalhe.

Pelo exposto podemos concluir que F_t e consequentemente P_F crescem a medida que ρ aumenta. Sendo $K_{IC}(\rho)$ diretamente proporcional a P_F (equação (1)), também cresce com o aumento de ρ .

Distância característica. Utilizando equação (3), foi obtido $R_F = 0,015\text{mm}$ para amostras de $\rho = \rho_0$. No caso de raios de curvatura inferiores a ρ_0 , a extensão da zona plástica no momento da fratura não varia com ρ , devendo permanecer constante no valor de $0,015\text{mm}$ correspondente a ρ_0 . Aparentemente para que haja fratura, escoamento deve ocorrer em um volume finito e mínimo do corpo de prova. Tal volume é definido, conforme figura 8, pela lar

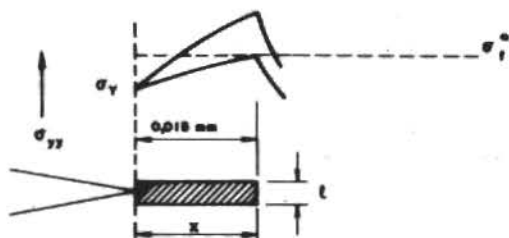


Fig. 8. Distribuição de tensões na frente de entalhes pontiagudos ($\rho < \rho_0$)

gura $x = 0,015\text{mm}$ e altura $l = \rho$. Na presença de entalhes pontiagudos ($\rho < \rho_0$), um material frágil, tal como aço SAE 1060 a -196°C , falha quando escoamento ocorre naquele volume mínimo situado na frente do entalhe, atingindo um nível de tensão na interface elástico-plástica, no mínimo igual a σ_f^* . Para $\rho = \rho_0$, as duas con-

dições são satisfeitas simultaneamente. Enquanto para $\rho < \rho_0$, σ_f^* é atingido a uma distância inferior à distância característica (0,015mm) visto o maior gradiente da tensão σ_{yy} na zona plástica (Fig.8). Entretanto escoamento tem que prosseguir para estender a zona plástica até $x = 0,015\text{mm}$. Assim a tensão longitudinal neste ponto atingirá um nível maior que σ_f^* da do pela equação (4).

REFERÊNCIAS

- [1] Hertzberg, R.W., Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, Wiley, New York, (1976).
- [2] Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, Butterworths, London, (1973)
- [3] Effects Technology, DYNATUP modelo 500, Effects Technology, Santa Barbara, California, (1974).
- [4] Server, W.L., Journal of Testing and Evaluation, Vol. 6, Nº 1, p.29, ASTM, (1978).
- [5] Srawley, J.E. and Brown, W.F., ASTM STP 381, p. 133, (1965).
- [6] Wilshaw, T.R., Rau, C.A. and Tetelman, A. S., Engineering Fracture Mechanics, Vol.1, p. 191, (1968).
- [7] de Abreu, A.C.R., Tese de Mestrado PUC/RJ, (1979).
- [8] McClintock, F.A. and Irwin, G.R., ASTM STP 381, p. 109. (1965).
- [9] Server, W.L. and Tetelman, A.S., Engineering Fracture Mechanics, Vol. 4, p. 367, (1972).
- [10] Darwish, F.A., de Abreu, A.C.R. e Ouro, C.R., Anais do V COBEM, Vol. C, p. 362, Campinas, (1979)

AN UNCOUPLING STRATEGY FOR NUMERICALLY SOLVING THE DYNAMIC THERMOELASTICITY EQUATIONS

CARLOS A. DE MOURA

RAÚL A. FEIJÓO

LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, CNPq

SUMMARY

This paper is concerned with the dynamic equations of coupled linear thermoelasticity. Its aim is to present a numerical algorithm which combines finite-element space approximation with a two-step time discretization in such a way as to reach significant computational savings: it features a strategy for independently calculating the displacement and temperature fields through equations that nevertheless remain coupled. The scheme convergence was shown to be optimal and its machine performance, as illustrated by some examples, fairly satisfactory.

INTRODUCTION

Vibrations and stresses of thermal origin have an important role in a large number of practical situations, as on steam engines, internal combustion motors, thermal power plants, and so on. Thermal stresses may occur when a body is subjected to non-uniform heating or even when heating conditions are uniform but the body's resulting volumetric expansion is mechanically constrained, cf. [1].

On the other hand, for some elastic materials, damping of their free vibrations is theoretically explained as a result of internal production of thermal energy, cf. [2], an effect described in [3] as a thermoelastic internal damping. Experimental evidence of the influence the strain rate may have upon a body's temperature is even part of a layman's background in Physics.

The study of coupled thermoelasticity theory, that is, the mathematical modeling of the interaction between deformation and temperature fields, has therefore strong support under

both theoretical and physical grounds.

This paper is restricted to those assumptions leading to linear equations: small deformations as well as small and slow temperature changes. Despite its apparent oversimplification, linear thermoelasticity has shown to be accurate enough as to describe phenomena presenting a temperature range of about 40°C, cf. [4].

The aim of this article is to discuss a numerical algorithm for linear thermoelasticity which combines finite-element space approximation with two-step time discretization. Its main feature is to calculate the temperature and displacement fields separately, at each time step, thus leading to great computational savings.

In spite of having been designed for linear models, the algorithm may be useful when treating some non linear problems as, for example, those physical situations where one-sided constraints are present. In their mathematical modeling, variational inequalities come up,

see [5], and these are amenable to be treated by linking the regularization or penalization techniques to the numerical scheme under study.

THE MODEL EQUATIONS

For $m=1, 2$ or 3 , let $\Omega \subset E^m$ be the reference configuration of a material body, E^m standing for the m -dimensional Euclidean space. The boundary Γ of the open, bounded, connected region Ω must be piecewise smooth.

The thermodynamical state of the body under study is assumed to be characterized by its displacement $u=(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ and its temperature θ . Both fields are function of the time t and the space variable $x=(x_i)_{1 \leq i \leq m}$

$$u=u(x,t), \quad \theta=\theta(x,t), \quad (x,t) \text{ in } \Omega \times E^1$$

They are defined through the linear differential system

$$\rho \ddot{u}_i = (a_{ijkl} u_{k,l})_{,j} - (l_{ij} [\theta - T_0])_{,j} + \rho f_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1)$$

$$\rho c \theta + l_{ij} T_0 \dot{u}_{i,j} = (b_{ij} \theta_{,j})_{,i} + \rho r \quad (2)$$

plus initial and boundary conditions to be described later on.

The notation used in (1)-(2) is defined as follows:

- $\rho = \rho(x)$ - material density (taken in the reference configuration)
- $a = a(x)$ - elasticity tensor
- $l = l(x)$ - coupling operator
- $T_0 > 0$ - reference temperature
- $f = f(x,t)$ - external force field
- $c = c(x)$ - specific heat
- $b = b(x)$ - heat conduction tensor
- $r = r(x,t)$ - external heat source

The summation convention for repeated indices is employed throughout, along with the standard notation

$$\dot{g} = dg/dt, \quad g_{,j} = \partial g / \partial x_j$$

for any scalar or vector function $g=g(x,t)$.

Some properties of those fields and operators in (1)-(2) will be taken for granted in the sequel:

(i) Symmetry - for all i, j, k, l

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl};$$

$$b_{ij} = b_{ji}; \quad l_{ij} = l_{ji}$$

(ii) Positivity - for some $\alpha > 0$, any x in Ω , all $m \times m$ matrices ξ and m -vectors η ,

$$\rho(x) \geq \alpha; \quad a_{ijkl}(x) \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij};$$

$$c(x) \geq \alpha; \quad b_{ij} \eta_i \eta_j \geq \alpha \eta_i \eta_i$$

(iii) Integrability: for all t

$$\int_{\Omega} f_i f_i dv < \infty; \quad \int_{\Omega} r^2 dv < \infty$$

As explained in [2], a simple deduction of equations (1)-(2) may be gotten by postulating a free energy function e , quadratic in both the deformation gradient and the temperature deviation $T = \theta - T_0$,

$$\rho e = \frac{1}{2} a_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - l_{ij} u_{i,j} T - \frac{1}{2} \rho c \frac{T^2}{T_0}$$

A complete treatment for the general laws of Mechanics and Thermodynamics which leads to (1)-(2) through linearization may be found in [6].

Initial conditions that assure well posedness for (1)-(2) are

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \quad (3)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) \quad (4)$$

where u_0, v_0, θ_0 are given and describe the system state at $t = 0$.

On the boundary Γ , partitioned as $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_S$ and $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q$, Dirichlet conditions are assigned:

$$u = \underline{u}(x,t) \text{ on } \Gamma_U [\text{prescribed displacement}] \quad (5)$$

$$\Theta = \bar{\Theta}(x, t) \text{ on } \Gamma_{\Theta} \text{ [prescribed temperature]} \quad (6)$$

as well as a surface traction

$$\sigma \cdot \nu = \bar{S}(x, t) \text{ on } \Gamma_S \quad \begin{cases} \sigma = \text{stress tensor} \\ \nu = \text{outward normal} \end{cases} \quad (7)$$

and two types of heat flow through $\Gamma_q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ namely

$$b_{ij} \bar{\Theta}_{,i} \nu_j = q_1(x, t) \text{ on } \Gamma_1 \text{ [prescribed heat flow]} \quad (8)$$

$$b_{ij} \bar{\Theta}_{,i} \nu_j = h(\bar{\Theta} - T_{\infty}) \text{ on } \Gamma_2 \text{ [heat transfer by convection]} \quad (9)$$

Knowledge of the fields $\bar{u}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{S}$ and q_1 is assumed. The conductance coefficient, denoted by $h = h(x) \geq \alpha > 0$, and the environment temperature T_{∞} are also given data.

Despite its linearity, system (1)-(9) exhibits a strong mathematical appeal as a consequence of linking a parabolic equation to hyperbolic ones, thus inhibiting a straight-forward application of classical results. In [2], a thorough treatment of this problem was presented, using a method already employed by Visik in [7]. The variational formulation was the approach chosen by Duvaut and Lions [5] and by J.J. Henry [8]. In the former authors' models, variational inequalities are obtained for treating one-sided constraints and particular types of non-linearity. Of course, their results may be applied to the linear case but the external agents they allow are less general than those treated here. A slightly unsatisfactory mathematical treatment for the linear equations of thin plates under thermomechanical stress is given by the latter author [8].

A variational formulation for (1)-(9) may be obtained in a simpler form by introducing new variables u and θ associated to homogeneous Dirichlet conditions

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_U \quad (10)$$

$$\theta = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{\Theta} \quad (11)$$

They are related to u and θ by

$$u = \bar{u} - \phi$$

$$\theta = \bar{\Theta} - \psi$$

where the functions ϕ and ψ are arbitrary regular extensions of $\bar{u}$ and $\bar{\Theta}$ to the whole of Ω . Such a formulation is:

Find $u_i = u_i(x, t)$, $1 \leq i \leq m$ and $\theta = \theta(x, t)$ for which

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \bar{u}_i \nu_i dv + \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{i,j} \nu_{k,l} dv &= \\ &= \int_{\Omega} l_{ij} [\bar{\Theta} - T_0] \nu_{i,j} dv + \\ &+ \int_{\Omega} \rho F_i \nu_i dv + \int_{\Omega} \rho F_{i,j} \nu_{i,j} dv \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \bar{\Theta} \phi dv + \int_{\Omega} b_{ij} \bar{\Theta}_{,j} \phi_{,i} dv &= \\ &= - \int_{\Omega} l_{ij} T_0 \bar{u}_{i,j} \phi dv + \\ &+ \int_{\Omega} \rho c R \phi dv + \int_{\Omega} \rho c R_{,i} \phi_{,i} dv \end{aligned} \quad (13)$$

Equations (12)-(13) must hold for any instant t in the time interval $[0, \bar{t}]$ under consideration, and for all fields $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m}$ and ϕ that satisfy the homogeneous boundary conditions (10)-(11). Such admissible fields will be said to form the space V . As regards to the functions $F = (F_i)_{1 \leq i \leq m}$ and R , they correspond not only to f and r but also to the choice of ϕ and ψ , as well as to the functions $\bar{S}$ and q - related to the Neumann conditions. In fact, F and R are constructed as distributions, all details may be seen in [9].

It is convenient to introduce a self-explanatory notation which lets (12)-(13) to be rewritten as

$$(\rho \bar{u} | v) + A(u; v) = L(\bar{\Theta} - T_0; v) + \langle \rho F, v \rangle \quad (12')$$

$$(\rho c \bar{\Theta} | \phi) + B(\theta; \phi) = -L(T_0 \phi; \bar{u}) + \langle \rho c R, \phi \rangle \quad (13')$$

or, by combining the terms in the right-hand side of (12')

$$(\rho \bar{u} | v) + A(u; v) = L(\bar{\Theta}; v) + \langle \rho \bar{F}, v \rangle \quad (12'')$$

Imposing the initial conditions (3)-(4) in the variational form is more natural and

thus it is required that, for all (v, ϕ) in V ,

$$\langle u(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad (14.a)$$

$$\langle \dot{u}(0), v \rangle = \langle v_0, v \rangle \quad (14.b)$$

$$\langle \theta(0), \phi \rangle = \langle \theta_0, \phi \rangle \quad (15)$$

hold, where the new initial data are specified by

$$u_0(x) = u(x) - \phi(x, 0)$$

$$v_0(x) = v(x) - \dot{\phi}(x, 0)$$

$$\theta_0(x) = \theta(x) - \psi(x, 0)$$

THE NUMERICAL ALGORITHM

For a system which is essentially the same as (1)-(2), a finite-difference scheme was proposed in [10] and analyzed in [11]. An alternate algorithm, which combines finite-element spatial approximations to finite-difference time discretization, and featuring an uncoupling strategy was suggested in [12], many numerical tests for it having been presented. Nevertheless, a convergence proof for such a procedure could not be achieved without a technical device, namely the introduction of an artificial viscosity, see [9]. This does not change the scheme operation count and may even have a heuristic justification: how come the strain rate is taken into account by the parabolic equation of energy and has no influence upon the hyperbolic equations of motion?

To define the computational scheme, first choose approximation spaces V^h that converge to V as $h \rightarrow 0$. [For example, they may be taken as finite-element spaces, h being a parameter associated to the mesh width.] To make it precise, by this convergence it is meant that for any (v, ϕ) in V there exist (v^h, ϕ^h) in V^h such that

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\langle v - v^h, v - v^h \rangle + \langle \phi - \phi^h, \phi - \phi^h \rangle) = 0 \quad (16)$$

Take then a time step $k \equiv \Delta t > 0$, an artificial viscosity parameter $\epsilon > 0$, both fixed

and arbitrary, in order to define (U^n, τ^n) in V^h intended to approximate the discrete values $(u^n, \theta^n) \equiv (u(nk), \theta(nk))$, $n=0, 1, \dots, N = \bar{t}/k$.

For any mesh function g^n , $n=0, 1, \dots$, introduce the quotient difference operators

$$\delta_k g^n = (g^{n+1} - g^{n-1})/2k$$

$$a_k^2 g^n = (g^{n+1} - 2g^n + g^{n-1})/k^2$$

and the weighted averages

$$M_k g^n = (g^{n+1} + g^{n-1})/2$$

$$M_k^p g^n = p M_k g^n + (1-p) g^n, \quad 0 \leq p \leq 1$$

After choosing a value for the weight p , the evolution scheme is characterized by the following equations that must hold for arbitrary (v, ϕ) in V^h . [It should be kept in mind that the computed approximations (U^n, τ^n) are in fact functions of x that depend upon the parameters h, k, ϵ and p .

$$U^n = U^n(h, k, \epsilon, p); \quad \tau^n = \tau^n(h, k, \epsilon, p).$$

The notation (U^n, τ^n) will be kept for the sake of simplicity, though.]

Description of the algorithm.

(a) Initialize the scheme with U^0, U^1, τ^0, τ^1 as given by

$$\langle U^0, v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad (17.a)$$

$$\langle U^1, v \rangle = \langle u_0 + k v_0, v \rangle \quad (17.b)$$

$$\langle \tau^0, \phi \rangle = \langle \theta_0, \phi \rangle \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & (\rho c \frac{\tau^1 - \tau^0}{k} | \phi) + B \left(\frac{\tau^1 + \tau^0}{2}; \phi \right) = \\ & = -L(T_0 \phi; \frac{U^1 - U^0}{k}) + \langle \rho c \frac{R^1 + R^0}{2}, \phi \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

or

$$\begin{aligned} & (\rho c \delta_{k/2} \tau^{1/2} | \phi) + B(M_{k/2} \tau^{1/2}; \phi) = \\ & = -L(T_0 \phi; \delta_{k/2} U^{1/2}) + \langle \rho c R^{1/2}, \phi \rangle \end{aligned} \quad (19')$$

(b) For $n \geq 1$, compute U^{n+1} with the known values of U^n , U^{n-1} , τ^n from

$$(\rho \partial_k^2 U^n | v) + A(M_k^p U^n; v) + \epsilon A(\delta_k U^n; v) = \\ = L(\tau^n; v) + \langle \rho \bar{F}^n, v \rangle \quad (20)$$

and then get τ^{n+1} through

$$(\rho c \delta_k \tau^n | \phi) + B(M_k^p \tau^n; \phi) = -L(T_0 \phi; \delta_k U^n) + \langle \rho c R^n, \phi \rangle \quad (21)$$

a relation which uses U^{n-1} , U^{n+1} , τ^{n-1} and τ^n .

The evolution equations (20)-(21) are always of implicit type, except for $p = 0$. Obtaining their solution at each time level t_n amounts to solving two linear systems of algebraic equations. In fact, let $\{(v_j, 0), (0, \phi_i)\}; 1 \leq i \leq N_h, 1 \leq j \leq mN_h$ be a basis for V^h , associated to which are the following expansions

$$U^n = U_j^n v_j \quad (22)$$

$$\tau^n = \tau_j^n \phi_j \quad (23)$$

When relations (22)-(23) are taken into account, (20)-(21) are rewritten as

$$\partial_k^2 U_j^n (\rho v_j | v_i) + M_k^p U_j^n A(v_j; v_i) + \\ + \epsilon \delta_k U_j^n A(v_j; v_i) = \tau_j^n L(\phi_j; v_i) + \\ + \langle \rho \bar{F}^n, v_i \rangle \quad \text{for } i=1, \dots, mN_h \quad (24)$$

$$\delta_k \tau_j^n (\rho c \phi_j | \phi_i) + M_k^p \tau_j^n B(\phi_j; \phi_i) = \\ -T_0 \delta_k U_j^n L(\phi_i; v_j) + \langle \rho c R^n, \phi_i \rangle \\ \text{for } i=1, \dots, N_h \quad (25)$$

It should be emphasized that, for each n , $(U_j^{n+1})_{1 \leq j \leq mN_h}$ is computed from a system that requires the knowledge of U_j^{n-1} , U_j^n and τ_j^n as can be more easily seen by writing (24) in the form

$$\{(\rho v_j | v_i)/k^2 + pA(v_j; v_i)/2 + \\ + \epsilon A(v_j; v_i)/2k\} U_j^{n+1} = \tau_j^n L(\phi_j; v_i) + \\ + \langle \rho \bar{F}^n, v_i \rangle + \{2(\rho v_j | v_i)/h^2 - \\ - (1-p)A(v_j; v_i)/2\} U_j^n - \{(\rho v_j | v_i)/k^2 + \\ + pA(v_j; v_i)/2 + \epsilon A(v_j; v_i)/2k\} U_j^{n-1} \quad (24')$$

This is then followed by the computation of τ_j^{n+1} from (25). The just obtained values of U_j^{n+1} jointly with U_j^{n-1} , τ_j^{n-1} and τ_j^n are then needed for the corresponding system of order N_h :

$$\{(\rho c \phi_j | \phi_i)/2k + pB(\phi_j; \phi_i)/2\} \tau_j^{n+1} = \\ = -T_0 \delta_k U_j^n L(\phi_i; v_j) + \langle \rho c R^n, \phi_i \rangle - \\ - \tau_j^n \{ (1-p)B(\phi_j; \phi_i)/2 - \{(\rho c \phi_j | \phi_i)/2k + \\ + pB(\phi_j; \phi_i)/2\} \tau_j^{n-1} \} \quad (25')$$

Notice that the computations are performed in an uncoupled way but the variables remain linked. With this (uncoupling) procedure, sensible computational savings are obtained as compared to an algorithm which would calculate both U_j^{n+1} and τ_j^{n+1} from the same (coupled) system. Indeed, the latter strategy would require a number of multiplications of order $[(m+1)N_h]^3$, that is, $8N_h^3$, $27N_h^3$ and $64N_h^3$ for $m=1, 2, 3$, while the corresponding values for the former scheme are $(m^3+1)N_h^3$, that is, $2N_h^3$, $9N_h^3$ and $28N_h^3$, respectively. Therefore, savings are as high as 75%, 66.7% and 56.3%.

Convergence properties of the algorithm under study will be described in the next section.

THEORETICAL RESULTS

From (12)-(13) an energy conservation estimate is readily obtained by taking, for every instant t , $v = \dot{u}(t)$ and $\phi = \theta(t)/T_0$: add the equations thus reached and integrate the resulting one through the time interval $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} \leq \bar{t}$. This gives

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i(x, \bar{t}) \dot{u}_i(x, \bar{t}) dv + \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{i,j}(x, \bar{t}) u_{k,l}(x, \bar{t}) dv + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \rho c \theta^2(x, \bar{t}) dv + \\ & + \frac{1}{T_0} \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} b_{ij} \theta_{,j}(x, t) \theta_{,i}(x, t) dv = \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i(x, 0) \dot{u}_i(x, 0) dv + \\ & + \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{i,j}(x, 0) u_{k,l}(x, 0) dv + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \rho c \dot{\theta}^2(x, 0) dv + \int_0^{\bar{t}} \langle \rho \bar{F}(t), \dot{u}(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^{\bar{t}} \langle \rho c R(t), \theta(t) \rangle dt \end{aligned}$$

which leads, for some constant K, to

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i(x, \bar{t}) \dot{u}_i(x, \bar{t}) dv + \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{i,j}(x, \bar{t}) u_{k,l}(x, \bar{t}) dv + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \rho c \theta^2(x, \bar{t}) dv + \\ & + \frac{1}{T_0} \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} b_{ij} \theta_{,j}(x, t) \theta_{,i}(x, t) dv \leq K \left\{ \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i(x, 0) \dot{u}_i(x, 0) dv + \right. \\ & + \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{i,j}(x, 0) u_{k,l}(x, 0) dv + \frac{1}{T_0} \int_{\Omega} \rho c \dot{\theta}^2(x, 0) dv + \int_0^{\bar{t}} \langle \rho \bar{F}(t), \rho \bar{F}(t) \rangle dt + \\ & \left. + \int_0^{\bar{t}} \langle \rho c R(t), \rho c R(t) \rangle dt \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Equation (26) asserts that at any instant $\bar{t}$ the total energy of the system (mechanical plus thermal energy) remains bounded by the total energy present in the system at the initial state added to the energy amount introduced in it by the external agents. This is the crux of the mathematical analysis for the model. In this estimate, no role is played by the coupling terms: they cancel out when the equations are added.

When analyzing the discrete equations (20)-(21), an analogue of this estimate is sought. It can be obtained only if the artificial viscosity term is present. The reason is as follows: the uncoupling of the equations prevents the cancelation of the coupling terms from occurring. An estimate for these terms is thus required but can not be achieved.

We formalize now the theoretical results obtained.

Convergence of the algorithm.

Assume the above hypothesis (i)-(iii) on the coefficients and external agents and also square integrability for all space derivatives of u_0 (of order ≤ 2) and of v_0 and θ_0 (of order ≤ 1). Choose $p \geq 1/2$ and the approximation spaces V^h such that the limit in (16) may be put under the form

$$\{ \langle v - v^h, v - v^h \rangle + \langle \phi - \phi^h, \phi - \phi^h \rangle \} \leq M h^S \quad (27)$$

where $M = M(v, \phi)$ does not depend upon h and $s > 0$ is a fixed number.

Then the algorithm defined by (17)-(21) is unconditionally convergent, which means that the computed solutions converge to the exact ones as $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, no matter which relationship exist between the parameters h and k . In other words, denoting by (U, τ) piecewise linear interpolations of (U^n, τ^n) the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{t}} \{ \langle U(t) - u(t), U(t) - u(t) \rangle + \\ & + \langle \tau(t) - \theta(t), \tau(t) - \theta(t) \rangle \} dt \leq \\ & \leq M_1 (h^S + k^2 + \epsilon) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & h \int_0^{\bar{t}} \{ \langle U(t) - u(t), U(t) - u(t) \rangle + \\ & + \langle \tau(t) - \theta(t), \tau(t) - \theta(t) \rangle \} dt \leq \\ & \leq M_2 (h^S + k^2 + \epsilon) \end{aligned} \quad (29)$$

where M_1 and M_2 are proportional to $1/\sqrt{\epsilon}$ and depend only on the solution (u, θ) . Thus eqs. (28)-(29) assert that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (U(h, k, \epsilon, p), \tau(h, k, \epsilon, p)) = (u, \theta) \right. \quad (30)$$

and that the convergence in (30) is optimal with respect to the distances associated to the inner products $(\cdot | \cdot)$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ as well as to the accuracy of the approximation spaces as given by (27).

CONCLUSIONS

A numerical algorithm for linear thermoelasticity was presented which, at each time level, requires solving two linear algebraic systems: the one for calculating the temperature field has order $N_h \times N_h$ while the other, for the displacement variables, has order $mN_h \times mN_h$. Here N_h stands for the dimension of the chosen approximation function space and m equals 1, 2 or 3, depending upon the data and the geometry of the body under study. As a function of m , the uncoupling strategy the algorithm is based on allows for computational savings of order 75%, 67% or 56%.

Theoretical and computational analysis have shown the scheme behaves fairly well, see [9] and [12].

ACKNOWLEDGEMENTS

The above results were partly obtained at the Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, Université de Nantes (France), where one of the authors (C.A.M.) was a Visiting Fellow. The hospitality he was granted, particularly by Professor Claude Do, is gratefully acknowledged.

REFERENCES

1. W. Derski, *Introduction à la Thermoélasticité*, 1977, E.N.S.M., Univ. de Nantes.
2. C.M. Dafermos, "On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of Linear Thermoelasticity", *Arch Rational Mech. Anal.*, vol. 29, 1968, pp. 241-271.
3. M.A. Biot, "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics", *J. Appl. Phys.*, vol. 27, 1956, pp. 240-253.

4. H. Parkus, *Thermoelasticity*, Springer-Verlag, Wien, 1976.
5. G. Duvaut, J.L. Lions, "Inéquations en Thermoélasticité et Magnétohydrodynamique", *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 46, 1972, pp. 241-279.
6. D.E. Carlson, "Linear Thermo-elasticity", *Handbuch der Physik*, Band VI a 12, Springer Verlag, Berlin, 1972.
7. M.I. Visik, O.A. Ladzenskaya, "Boundary-value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations", *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, vol. 11, 1956, pp. 41-97. English Transl.: *AMS Translations*, Ser. 2, vol. 10, 1958, pp. 223-281.
8. J.J. Henry, "Théorème d'existence et d'unicité de la flexion simple d'une plaque mince thermoélastique", *Thèse Docteur 3^{ème} cycle*, Univ. Paris VI, 1976.
9. R.A. Feijoo, C.A. de Moura, "Un método variacional en Termoelasticidad Dinámica Acoplada", *Rel. Pesq. Desenv.*, 1981, LCC/CNPq, Rio de Janeiro.
10. R.D. Richtmeyer, *Difference methods for initial-value problems*, Wiley, 1957, N. York.
11. H. Morimoto, "Stability in the wave equation coupled with heat flow", *Numer. Math.*, vol. 4, 1962, pp. 136-145.
12. Z. da Fonseca, "Soluciones numéricas via métodos variacionales de problemas en Termoelasticidad Dinámica Acoplada", *M.Sc. Thesis*, COPPE/UFRJ, 1977, Rio de Janeiro.

PLANE BUOYANT PLUMES

CHIA-SHUN UIH

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN

A. S. GUPTA

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ABSTRACT

Approximate solutions for plane laminar buoyant plumes, with increasing accuracy as the Prandtl number σ approaches $5/9$, for which an exact solution was given by Yih [1,2], are presented, from which the solution for air is obtained by setting σ equal to 0.73. For gases σ is not far from $5/9$, so that approximate solutions for plane laminar plumes are now available, for gases. For plane turbulent plumes the turbulent Prandtl number σ is near 1. An approximate solution for plane turbulent plumes with σ near $2/3$, for which an exact solution was found by Yih [3], is given, and upon setting σ equal to 1 and λ equal to 0.19 (See [3]) in this paper for the definition of λ .) We have found very good agreements with the experimental results of Humphreys obtained under the supervision of Hunter Rouse. See Rouse et al [4]. Finally, a transformation indispensable for a purely numerical computations of the governing equations given in this paper is shown, to facilitate any such computations if they are attempted.

INTRODUCTION

The dispersion of fog on airfields by parallel line sources of heat was of great interest to England during the Second World War. Shortly after it Hunter Rouse of the Iowa Institute of Research, by a dimensional analysis, obtained the dimensionless parameters governing the phenomenon of turbulent gravitational convection from point and line sources of heat, and he enlisted his research students to perform the experiments. The task of turbulent convection from a single line source was given to H.W. Humphreys, and his experimental results, presented according to Rouse's dimensionless parameters, were presented in Rouse, Yih and Humphreys [4]. The task of turbulent convection from two parallel line sources was given to W.

D. Baines and Humphreys, and their experimental results were presented in Rouse, Baines and Humphreys [5]. In recent years convective plumes again attract attention because of their bearing on environmental problems, e.g., problems that arise in the disposal of hot water in rivers, lakes, or the sea.

In this paper, buoyant plumes will simply be called plumes, for brevity. The first analytical solutions for laminar plumes, round or plane, were given by Yih [1], [2], [6], for Prandtl numbers $5/9$ and 2 for plane laminar plumes, and for Prandtl numbers 1 and 2 for round laminar plumes. The analytical solutions for turbulent plumes were found more than two decades later by Yih [3] for turbulent Prandtl numbers $2/3$ and

2 for plane turbulent plumes, and 1.1 and 2 for round turbulent plumes, after he found that Prandtl's simplified theory [7] employed by Görtler [8] to study turbulent jets could be employed to study turbulent plumes as well.

In this paper we study plane plumes. A corresponding paper for round plumes will be presented in a separate paper. We have constructed an approximate solution for plane laminar plumes with Prandtl number σ near 5/9, with its accuracy increasing as σ approaches 5/9. Since for gases σ is near 5/9, e.g., $\sigma = 0.73$ for air this approximate solution is evidently applicable to plane laminar gas plumes. We have also constructed an approximate solution for plane turbulent plumes with the turbulent Prandtl number σ near 2/3. Since for turbulent plumes this σ is expected to be near 1, which is not far from 2/3, we have found an approximate analytical solution for plane turbulent plumes. As will be shown later, the results from our analytical solution agree very well with the experimental results of Humphrey in Rouse et al 4

Finally, we give a transformation indispensable for any numerical computations for plane plumes, laminar or turbulent. This overcomes an important difficulty in any such computations, and will greatly facilitate them if ever they are attempted, for any Prandtl number.

PLANE LAMINAR PLUMES

We shall use Cartesian coordinates x, y , and z , with the x -axis pointing vertically upward. The line source of heat lies on the z -axis, so that the flow is two-dimensional, and depends only on x and y , y being measured in the horizontal direction normal to the z -axis. The velocity components in the directions of increasing x and y will be denoted by u and v , respectively. The gravitational acceleration, acting in the direction of decreasing x , will be denoted by g .

The temperature variation will be represented by the variation of the specific weight γ , which is $g\rho$, ρ being the density. The ambient γ will be denoted by γ_0 , and $\gamma - \gamma_0$ will be denoted by $\Delta\gamma$.

We shall use the boundary-layer equations, that is, we shall ignore the second derivative

of u or $\Delta\gamma$ with respect to x in comparison with its second derivative with respect to y . Then, with ν and α denoting the kinematic viscosity and the thermal diffusivity, respectively, the equation of motion and the equation of heat diffusion are, respectively,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \Delta\gamma}{\partial y^2} \quad (2)$$

The equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

which permits the use of the stream function ψ in terms of which

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ and } v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

The boundary conditions are:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ and } \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial y} = 0 \text{ for } y = 0; \\ u = 0 \text{ and } \Delta\gamma = 0 \text{ for } y = \pm \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Upon integrating (2) with respect to y from minus infinity to plus infinity, and using the boundary conditions, we find that

$$- \int_{-\infty}^{\infty} u \Delta\gamma dy$$

does not vary with x . This is indeed a measure of the strength of the heat source (per unit length in the z -direction), and we shall write

$$G = - \int_{-\infty}^{\infty} u \Delta\gamma dy. \quad (6)$$

Taking (Yih [1], [2], with μ denoting the viscosity

$$\left(\frac{\rho^3}{G x^3 \mu^2} \right)^{1/5} \psi = f(\xi), \quad (7)$$

$$\left(\frac{\mu^2 x^3}{\rho^3 G^4} \right)^{1/5} \Delta\gamma = - \frac{1}{125} \theta(\xi) \quad (8)$$

$$\xi = \frac{1}{5} \left(\frac{\mu^2 G}{\rho^3 x^2} \right)^{1/5} y, \quad (9)$$

and using (4), we can write (1), (2), and (6) as

$$f' f'' - 3 f f''' = f'''' + \theta, \quad (10)$$

$$\theta f' + f \theta' = - \frac{\theta''}{3\sigma}, \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' \theta d\xi = 125, \quad (12)$$

where σ is the Prandtl number ν/α , the boundary conditions can now be written

$$f(0) = f'(\infty) = \theta(0) = 0, \\ f'(\pm\infty) = \theta(\pm\infty) = 0. \quad (13)$$

Yih [1, 2] obtained exact solutions for the differential system (10) to (13) for $\sigma = 5/9$ and $\sigma = 2$. For $\sigma = 5/9$, he obtained $f(\xi) = 2.19 \tanh 1.827\xi$, $\theta(\xi) = 42.74 \operatorname{sech}^2 1.827\xi$. (In Yih, the number 2.19 was given as 2.24, the 1.827 was given as 1.863, and the number 42.74 was given as 41.99. The present numbers are the correct ones, having been obtained by more accurate computation.)

For $\sigma = 2$, he obtained

$$f(\xi) = 1.67 \tanh 2.506\xi, \quad \theta(\xi) = 70.14 \operatorname{sech}^4 2.506\xi. \quad (15)$$

(In Yih, the number 1.67 was given as 1.69, the number 2.506 was given as 2.505, and the number 70.14 was given as 70.20. The present numbers are the correct ones, being obtained by a more accurate computation.) We note that, for $\sigma = 5/9$,

$$5 \left(\frac{\rho u}{G^2 x} \right)^{1/5} u = f'(\xi) = 4.00 \operatorname{sech}^2 1.827\xi, \quad (16)$$

In Yih, the correct number 4.00 was given as 4.16)

For $\xi = 2$,

$$5 \left(\frac{\rho u}{G^2 x} \right)^{1/5} u = f'(\xi) = 4.19 \operatorname{sech}^2 2.506\xi. \quad (17)$$

(In Yih [2], the correct number 4.19 was given as 4.23)

For air $\sigma = 0.73$ approximately. Mr. E. Bendor (private communication, 1953), formerly at the Imperial College of London, performed a numerical computation for $\sigma = 0.733$. Unfortunately his velocity curve does not cross the velocity curve for $\sigma = 5/9$, as it should but lies entirely below it. It seems desirable to give an analytical solution, albeit approximate, for any Prandtl number near $5/9$, including 0.73 , so that it can be applied to all plane gaseous plumes.

Before presenting our solution we note that a systematic approach is possible if we take

$$f = f_0 + \Delta\sigma f_1 + (\Delta\sigma)^2 f_2 + \dots, \\ \theta = \theta_0 + \Delta\sigma \theta_1 + (\Delta\sigma)^2 \theta_2 + \dots,$$

where f_0 and θ_0 are the solution for $\sigma = 5/9$, and $\Delta\sigma = \sigma - 5/9$. The appropriate expansions of f_1 and θ_1 are

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tanh B\xi \operatorname{sech}^{2(n-1)} B\xi, \\ \theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sech}^{2n} B\xi,$$

where B can be determined afterwards from (12). But the convergence of both series is painfully slow, and therefore we do not think the approach is practical. The same thing can be said of a similar systematic approach for the plane turbulent plume. We shall now present our simple approximate solution for plane laminar plumes below.

First, we note that (11) can be integrated to

$$-3\sigma\theta f = \theta', \quad (18)$$

upon use of the boundary conditions on θ . The crucial approximation we make in this paper is the approximation of $\operatorname{sech}^4 B\xi$ (whatever B may be) by $\beta \operatorname{sech}^2 B\xi$. Since the velocity as well as the temperature distribution varies with ξ as $\operatorname{sech}^2 B\xi$, we could determine β by requiring that (with $\eta = B\xi$)

$$\beta \operatorname{sech} \eta - \operatorname{sech}^4 \eta = \begin{cases} -\epsilon & \text{at } \eta = 0 \\ \epsilon & \text{at } \eta = 2\eta_0, \end{cases}$$

η_0 being the value of η at which $\operatorname{sech}^2 \eta$ has the point of inflection. This would give a fairly good approximation of $\operatorname{sech}^4 \eta$ in the core of the plume. But since $\operatorname{sech}^4 \eta$ diminishes very much faster than $\operatorname{sech}^2 \eta$ as η increases, a better approximation is provided by the method of least squares over the whole range of ξ , i.e., from $\xi = -\infty$ to $\xi = \infty$. The value of β so determined is 0.8 , so that we shall use the approximation

$$\operatorname{sech}^4 B\xi = 0.8 \operatorname{sech}^2 B\xi. \quad (19)$$

The solution we seek is

$$f = A \tanh B\xi, \quad (20)$$

with

$$A = \frac{2}{3\sigma} B, \quad (21)$$

so that, from (18)

$$\theta = C \operatorname{sech}^2 B\xi \quad (22)$$

The constants A and C are to be determined. So far (10) has not been satisfied.

But using (20), (21), and (22) we find that (10) becomes

$$B^4 \left[\left(1 - \frac{20}{9\sigma^2} + \frac{4}{\sigma} \right) \text{sech}^4 B\xi + \left(\frac{24}{9\sigma^2} - \frac{8}{3\sigma} \right) \text{sech}^2 B\xi \right] = C = \text{sech}^2 B\xi \quad (23)$$

With (20), (21) and (22), equation (12) gives

$$C = \frac{375}{4A} = \frac{1125}{8B} \sigma \quad (24)$$

Substituting (24) into (23), and using (19), we have

$$B^5 = \frac{10125\sigma^3}{64(1+0.6\sigma)} \quad (25)$$

For $\sigma = 0.73$ (air)

$$B^5 = 42.7981, \quad B = 2.1198, \quad A = 1.9358, \\ AB = 4.1035, \quad C = 48.4273, \quad (26)$$

so that we have

$$f' = 4.10 \text{ sech}^2 2.12 \xi, \quad \theta = 48.43 \text{ sech}^2 2.12 \xi \quad (27)$$

For any other gas, a similar calculation follows immediately from (25), once σ is given.

We can also give a similar solution for Prandtl number σ near 2. But since for gases σ is near 1 (and therefore near 5/9) and for water and oil σ is much larger than 2 whereas for liquid metal σ is very much less than 1, there is not much practical need to present the solution near $\sigma = 2$.

The velocity distribution, represented by f' (See the first equality in (16)), and the temperature distribution, represented by θ , are shown in Figure 1, for

$$\sigma = 0.73 \text{ and } \sigma = 5/9.$$

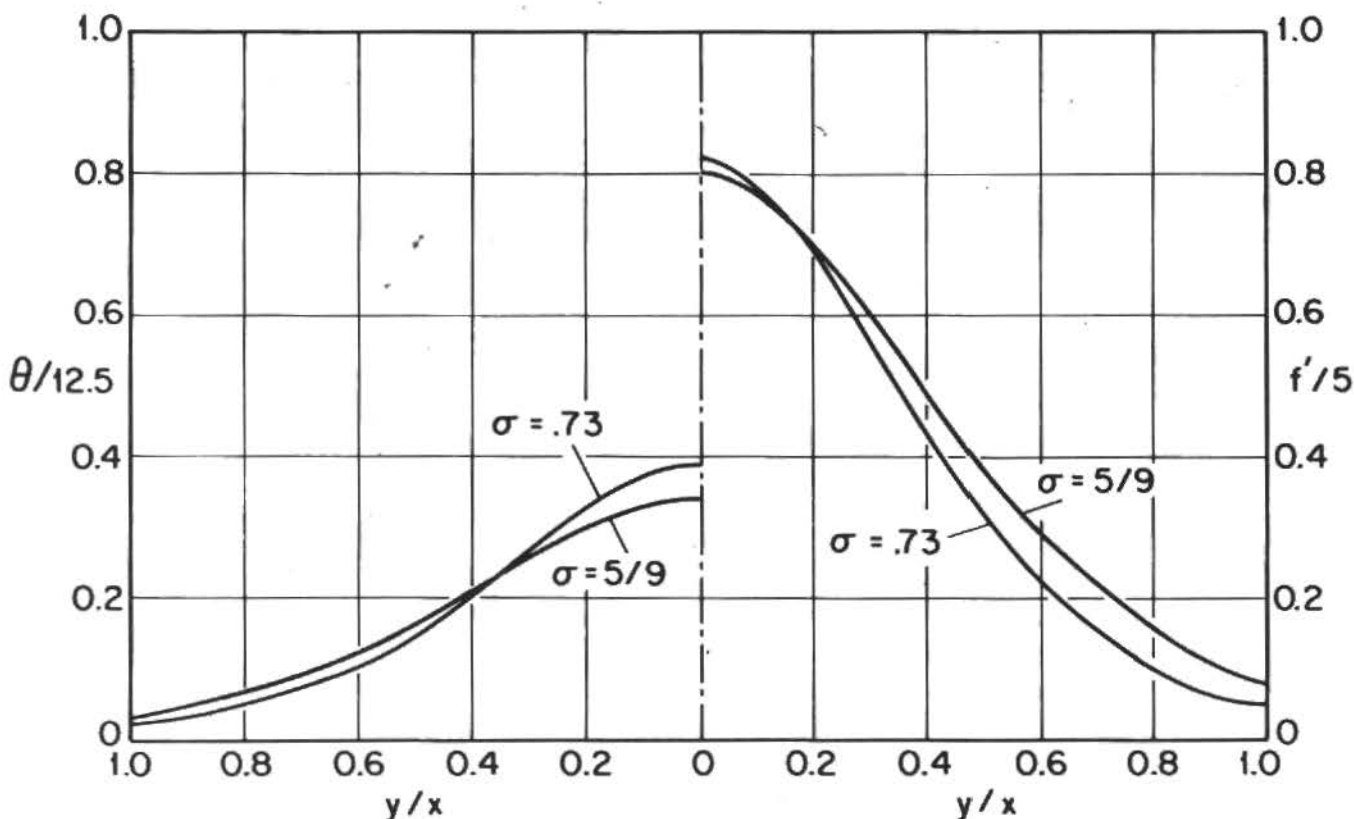


Fig. 1. Velocity and temperature profiles for plane laminar plumes, for Prandtl numbers 5/9 and 0.73. σ denoted Prandtl number. θ is proportional to $\Delta \gamma$, and f' to u . See equations (14) and (16).

Note that, unlike Bendor's results, the velocity curves do cross each other, as they should. Otherwise our results do not differ a great deal from Bendor's results obtained purely by numerical calculation. We emphasize that our results are for any σ near 5/9, not just 0.73. Note also that the coefficient of $\text{sech}^4 B \xi$ in (23) is proportional to $\sigma - \frac{5}{9}$, so that the closer σ is to 5/9, the more accurate is the approximation.

The error committed by (19) in the determination of the constants A, B, and C arise from the residue $B^4 R$, where

$$R = \frac{4}{\sigma^2} \left(\sigma - \frac{5}{9} \right) (\text{sech}^4 B \xi - 0.8 \text{sech}^2 B \xi).$$

This residue is tantamount to a vertical body force distribution. It is positive for $B \xi < 0.46$ and negative for $B \xi > 0.46$ if $\sigma > 5/9$. The effects of the positive and negative values of the residue on the maximum velocity thus compensate each other to a certain extent. But even if we ignore this mutual compensation and give the percentage error its most unfavorable estimate, we see from (23) that for $\sigma = 0.73$ the ratio of the maximum residue (at $\xi = 0$) to the value of the left-hand side of (23) at the same location is 12%. The maximum error in B^5 determined by (25) is then 12% at most, and the error in B is 2.3% at most. From (21) and (24) it can be seen then that the error in A and C is 2.3% at most. For σ less than 0.73 and greater than 5/9, the results are even more accurate.

We note that (21) is obtained by an exact integration of (11), and (24) satisfies the integral condition (12) exactly, once one accepts the form of f given by (20). These facts together with the high power of B in (25), which reduces the error in B, contribute to the accuracy of the results.

Very much the same arguments can be put forth for the solution for the turbulent case. We shall, then, not repeat them later.

PLANE TURBULENT PLUMES

For the analysis of the turbulent plume, we use the (kinematic) eddy viscosity ϵ instead of the molecular kinematic viscosity ν so that equations (1) and (2) now become

$$u u_x + v u_y = \epsilon u_{yy} - g \Delta \gamma / \gamma_0, \quad (28)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \Delta \gamma + v \frac{\partial}{\partial y} \Delta \gamma = \epsilon \sigma^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \gamma, \quad (29)$$

where now σ is the turbulent Prandtl number, which is generally accepted to be very near 1 if not exactly equal to 1. Equations (3), (4), and the boundary conditions (5) remain the same. As to the definition of the strength of the heat source, (6) should be replaced by

$$G = - \int_{-\infty}^{\infty} (u \Delta \gamma + u' \Delta \gamma') dy, \quad (30)$$

where the primes indicate turbulent fluctuations. Equation (30) can be obtained from the complete heat-diffusion equation in its boundary-layer form, including fluctuating quantities, but retaining ν instead of using ϵ (which is used to account for the turbulent part of the inertial terms). It can be argued in dimensional terms, and it has been shown in all experimental researches on plumes (George et al. [9], Kotsovinos and List [10], Kotsovinos [11], Beuther et al. [12],) that for either round or plane turbulent plumes the turbulent part of the integral in (30) is a definite proportion of the primary part (the part based on $u \Delta \gamma$), though this proportion is not the same for round and plane plumes. Thus we can retain (6) as the nominal definition of the strength of the heat source, understanding that the G given by (30) is somewhat larger. This has the advantage of convenience when comparison is made with the majority of experimental results, since often G is determined by the profiles of u and $\Delta \gamma$.

Yih [3] used a dimensional analysis as well as Prandtl's simplified theory [7] (which was previously used by Görtler for analyses of turbulent jets) to reach the expression for ϵ :

$$\epsilon = \lambda x (G/\rho)^{1/3}, \quad (31)$$

where λ is a numerical constant to be determined by experiments. Then the following transformation was used (Here we have added the factor λ to the expression for the stream function ψ , and the factor λ^2 to the expression for $\Delta \gamma$, in order to rid of the final differential equations of the presence of λ , but this modification is for convenience only and does not change the substance of things.):

$$\psi = (G/\rho)^{1/3} x f(\xi), \quad (32)$$

$$\Delta Y = \lambda^2 (\rho G^2)^{1/3} x^{-1} \theta(\xi), \quad (33)$$

where ξ continues to be defined by (9).

The velocity components are given by

$$u = \lambda (G/\rho)^{1/3} f'(\xi), \quad v = -\lambda (G/\rho)^{1/3} (f - \xi f'), \quad (34)$$

and equations (28) and (29) become

$$-ff'' = f''' + \theta, \quad (35)$$

$$-\sigma(f\theta)' = \theta'', \quad (36)$$

The boundary conditions are still given by (13). Equation (36) can be immediately integrated, with the aid of the boundary conditions for θ , into

$$-\sigma f\theta = \theta'. \quad (37)$$

The integral condition (6) now has the form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\theta d\xi = \lambda^{-3}. \quad (38)$$

Yih[3] gave two exact solutions for the differential system consisting of (35), (37), (38), and the boundary conditions (13), for $\sigma = 2/3$ and $\sigma = 2$. Since for turbulent flows σ should be very near unity, the solution for $\sigma = 2/3$ is significant, because we can construct an approximate solution for σ near $2/3$, and 1 is not very different from $2/3$. Yih's[3] solution for $\sigma = 2/3$ is

$$f = A \tanh B\xi, \quad \theta = C \operatorname{sech}^2 B\xi, \quad (39)$$

where

$$A = 3B, \quad C = 6B^4 \quad (40)$$

with another relation between A and C given by (38),

$$AC = 3/4 \lambda^3. \quad (41)$$

Then (40) and (41) give

$$24B^5 \lambda^3 = 1. \quad (42)$$

Once λ is given, A , B , and C can be immediately obtained from (40) and (42).

Now for σ near $2/3$, we write

$$f = A \tanh B\xi, \quad (43)$$

and by choosing

$$A = \frac{2B}{\sigma} \quad (44)$$

integration of (37) gives

$$\theta = C \operatorname{sech}^2 B\xi \quad (45)$$

One relationship between A and C is furnished by (38),

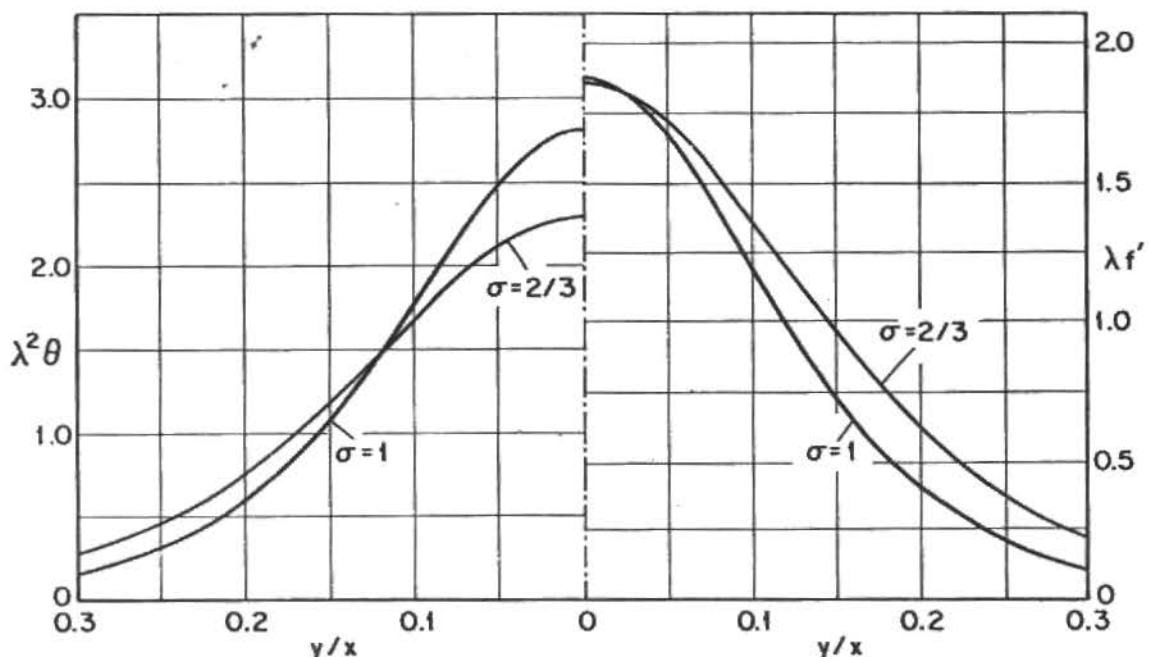


Fig.2. Velocity and temperature (represented by ΔY) profiles for plane turbulent plumes. The curves are obtained for turbulent Prandtl number 1 and $\lambda = 0.019$, from the solution given in this paper. See equations (33) and (34).

and is

$$AC = 3/4 \lambda^3 \quad (46)$$

substituting (43), (44), and (45) into (35), we have

$$\frac{48^4}{\sigma} \left(\frac{3}{\sigma} - \frac{2}{\sigma} \right) \text{sech}^4 B + \frac{4B^4}{\sigma} \left(\frac{2}{\sigma} - 2 \right) \text{sech}^2 B \xi = C \text{sech}^2 B \xi. \quad (47)$$

Using (19) again, we have

$$C = \frac{1.6}{\sigma^2} (\sigma + 1) B^4 \quad (48)$$

From (44), (46) and (48), we have finally,

$$B = \left[\frac{156^3}{64 (\sigma + 1) \lambda^3} \right]^{1/5} \quad (49)$$

For any σ , once λ is given, A, B, and C are immediately calculated. We can determine λ by requiring that the resulting solution give the best fitting to the experimental data.

For turbulent flows we assume $\sigma = 1$, and find that for

$$\lambda = 0.19 \quad (50)$$

the results of Humphrey's measurements under the supervision of Hunter Rouse (Rouse et al [4]) agree very well with the solution given by (43) to (46), (48), and (49), as shown in Figure 2. Also, for the λ given by (50), we have presented graphically the temperature and velocity profiles for $\sigma = 2/3$ and for $\sigma = 1$, respectively, in Figure 3, for comparison. Figure 2 shows that our solution given above can be used to represent the mean temperature and velocity profiles with a very good degree of approximation.

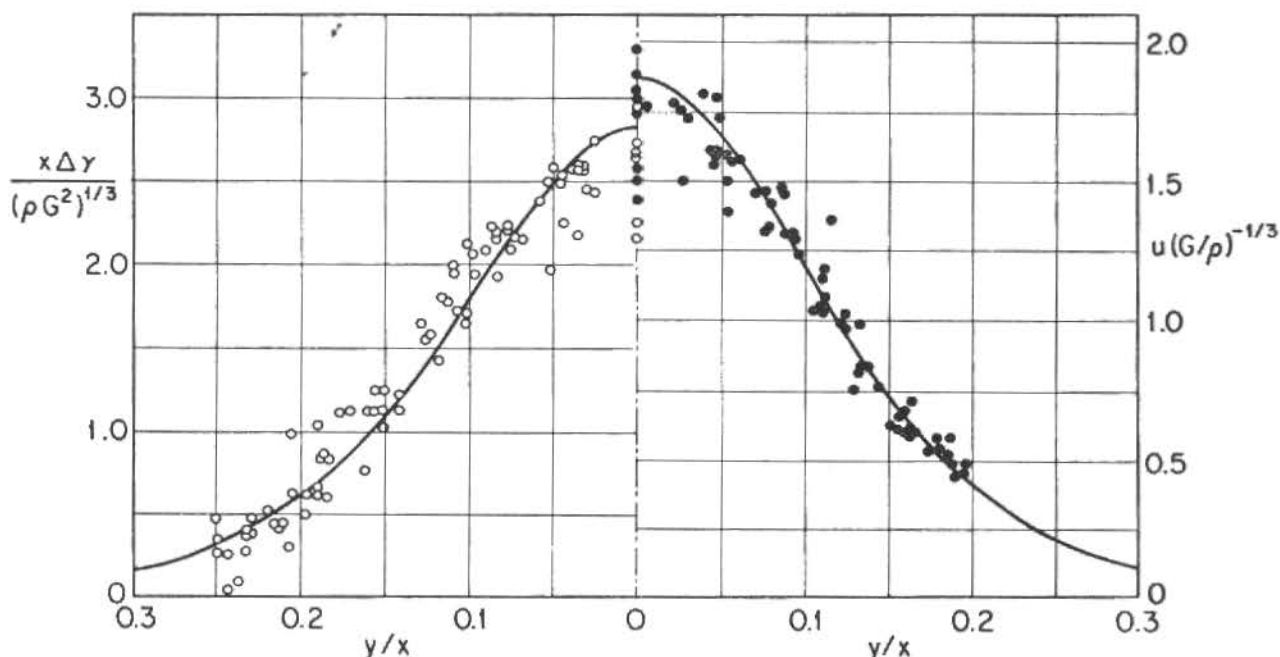


Fig. 3. Comparison of θ (proportional to $\Delta\gamma$) and f' (proportional to u) for turbulent Prandtl numbers 2/3 and 1 and for $\lambda = 0.019$.

A TRANSFORMATION INDISPENSABLE FOR NUMERICAL CALCULATIONS

Since the approximation (19) has been used, it may be desirable for some to give a numerical computation for the plane plume, whether laminar or turbulent. When a purely numerical computation is attempted, one difficulty is that the integral condition (12) or (38) can be tested only after the computation is done.

Let us consider the plane laminar plume first. There are three boundary conditions in (5) at $\xi = 0$. In trying to satisfy (10) and (18), we are at liberty to choose a value for $f'(0)$ and another for $\theta(0)$, in the hope of satisfying the boundary conditions at $\xi = \pm\infty$. But first of all we note from the differential system (as well as by physical insight) that f must be an odd function and θ an even function of ξ . Hence the boundary conditions at infinity can be simply written as

$$f'(\infty) = 0 \quad (51)$$

$$\theta(\infty) = 0. \quad (52)$$

Since we do not expect downward velocities, (51) implies that $f(\infty)$ is positive, infinite or finite (our analytical solutions show that it is finite). In either case the solution of (18),

$$\theta = C \exp \left[-3\alpha \int_0^\xi f d\xi \right] \quad (53)$$

shows that (52) is satisfied. Hence the choices of $f'(0)$ and $\theta(0)$ are to satisfy (51) and the integral condition (12).

As we have said above, the satisfaction of (12) poses practical difficulties. To overcome them, we shall give a transformation which allows us to assume any value, say 1, for $\theta(0)$, and to satisfy (12) after a calculation is made. Thus, we assume a value for $f'(0)$ which allows us, with $\theta(0) = 1$, to proceed with the numerical solution of (10), (18) or (53), satisfying the boundary conditions at $\xi = 0$ in (5). When the correct value of $f'(0)$ is assumed, (51) will be satisfied. Let the solution so obtained be denoted by $f(\xi)$ and $\theta(\xi)$, and let α (is now not the thermal diffusivity)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f' \theta d\xi = 125\alpha^5. \quad (54)$$

If $\alpha = 1$, then the solution has been obtained. If α is not equal to 1, we make the following transformation (note that α^5 is expected to be positive):

$$f = \alpha \bar{f}(\bar{\xi}), \quad \theta = \alpha^4 \bar{\theta}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} = \alpha \xi. \quad (55)$$

These substitutions obviously leave (1) invariant in form (i.e., every variable in it is circumflexed)

but gives

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}' \bar{\theta} d\bar{\xi} = 125, \quad (56)$$

in which $\bar{f}' = d\bar{f}/d\bar{\xi}$. Thus $\bar{f}(\bar{\xi})$ and $\bar{\theta}(\bar{\xi})$ satisfy the differential system as well as (12), and hence furnish solution

For turbulent plumes the same transformation (55) can be used and the same procedure followed, whatever λ is assumed. Indeed, since λ does not appear in the differential equations or in the boundary conditions, we can solve the differential equation to satisfy the boundary conditions without regard to λ or the integral condition (38), by again taking $\theta(0)$ to be 1, and determine α afterwards for whatever λ is assumed to fit the experimental data best.

ACKNOWLEDGMENT

This work has been supported by the Office of Naval Research.

BIBLIOGRAPHY

- [1] C.-S. Yih, Trans. Am. Teophy. Union 33, 665 (1952)
- [2] C.-S. Yih, in Proceedings of the 1st Symposium on the Use of Models in Geophysical Fluid Dynamics (Government Printing Service, Washington, 1956), p. 117.
- [3] C.-S. Yih, Phys. of Fluids 20, 1234 (1977)
- [4] H. Rouse, C. - S. Yih, and H. W. Humphreys, Tellus 4 201-1952.
- [5] H. Rouse, W.D. Baines, and H.W. Humphreys, Proc. Phys. Soc. B LXVI, 393 (1952).
- [6] C.-S. Yih, in Proceedings of the 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, ed. by E. Sternberg (American Society of Mechanical Engineers, NY, 1951) p. 941
- [7] L. Prandtl, Z. Angew. Math. Mech. 22, 241 (1942)
- [8] H. Görtler, Z. Angew. Math. Mech. 22, 244 (1942)
- [9] W.K. George Jr., R.L. Alpert, and F. Tamani, Int. J. Heat Mass Transfer 20, 1145 (1977)
- [10] N.E. Kotsovinos and E.J. List, J. Fluid Mech. 81, 25 (1977)
- [11] N.E. Kotsovinos, J. Fluid Mech. 81, 45 (1977)
- [12] P.D. Beuther, S.P. Capp, and W.K. George Jr, ASME/AICHE 18th Nat'l Heat Transfer Conference, San Diego, California (1979).

