VOL. III - Nº 3 - 1981

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

# REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

*Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.*

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.



**Assinaturas**

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.**

ISSN 0100-7386
REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
VOL. III, nº 3, 1981





**EDITORA CAMPUS**

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981, pp. 3 a 8


# ESTUDO ANALÍTICO E EXPERIMENTAL DE DINÂMICA DE ROTORES

**VALDER STEFFEN JÚNIOR**
DEPTº DE ENGENHARIA MECÂNICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

SUMÁRIO

*Dentre os métodos analíticos existentes para o cálculo dinâmico de estruturas, destaca-se o "transfer-matrix-method" (método das matrizes de transferência). Este método foi aqui utilizado para a resolução de um sistema constituido de um rotor montado sobre mancais flexíveis. Os resultados teóricos são comparados àqueles obtidos experimentalmente.*

## INTRODUÇÃO

A finalidade deste trabalho foi a de modelizar matematicamente um rotor, considerado como sistema contínuo, de forma a obter-se uma formulação geral com respeito aos auto-valores e auto-vetores. Calculou-se então, para uma dada configuração física comumente encontrada em engenharia, as diversas pulsações próprias e velocidades críticas. Em seguida foram comparados os diversos resultados teóricos aos resultados experimentais obtidos utilizando uma maquete cujos dados de construção coincidem com os utilizados no cálculo teórico.

## SIMBOLOS

- b : constante sem dimensão
- D : operador diferencial
- E,G : módulo de Young, coeficiente de rigidez
- G : matriz giroscópica
- I : momento de inércia da seção transversal
- Id : momento de inércia de massa do disco
- i : símbolo imaginário = $\sqrt{-1}$
- K : matriz rigidez
- k : constante de Timoshenko - depende da forma da seção transversal
- L : comprimento do rotor
- M : matriz massa
- $M_d$ : massa do disco
- $M_p$ : massa do mancal
- m : massa do rotor por unidade de comprimento do rotor.
- $P_\nu$ : $\nu$-ésimo auto-valor
- $Q_n$ : constantes complexas sem dimensão
- $R_d$ : raio do disco
- r : semi-raio do rotor
- $V_\nu$ : $\nu$-ésimo auto-vetor
- W : matriz de transferência
- X,Y,Z: sistema de referência fixo
- X,Y,Z: variáveis adimensionais, definidas como segue:

$$X = \frac{x}{L} \; ; \; Y = \frac{y}{L} \; ; \; Z = \frac{z}{L}$$

- x,y,z: deslocamentos ao longo de X,Y,Z respectivamente
- $\alpha,\beta$ : ângulos de rotação das seções transversais nos planos OXZ e OYZ respectivamente, em flexão pura.
- $\Omega$ : velocidade angular de rotação do rotor
- $\omega$ : pulsação própria
- $\rho$ : densidade

## MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático estudado é aquele representado pela Fig.1. Tem-se um rotor de seção circular não uniforme, de comprimento L, suportado nas extremidades A e B por mancais flexíveis e oscilantes.

Não foram considerados os amortecimentos internos e externos ou dos mancais, nem o peso próprio do rotor.

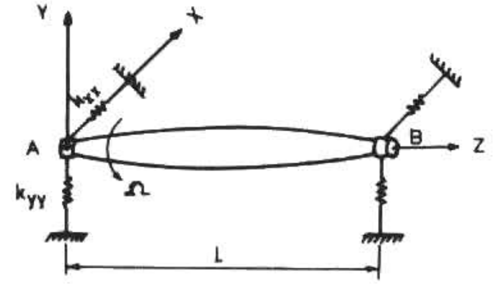



Fig. 1

Considerando a seção transversal do rotor como sendo circular e uniforme e adotando a teoria de barras de Timoshenko [1] para a formulação, o sistema que estudamos pode ser representado pela equação matricial (1) :

$$\left[P_\nu^2 \ M + P_\nu G + K\right]\left[v_\nu\right] = 0 \qquad (1)$$

onde:

$$M = \begin{bmatrix} mr^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2mr^2\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2mr^2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} -EID^2 + KAG & -KAGD & 0 & 0 \\ KAGD & -KAGD^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EID^2+KAG & -KAGD \\ 0 & 0 & KAGD & -KAGD^2 \end{bmatrix}$$

$$v_\nu = \begin{bmatrix} \alpha \ (z) \\ x \ (z) \\ \beta \ (z) \\ y \ (z) \end{bmatrix}$$

Na referência [3] encontramos uma formulação correspondente, partindo da teoria de barras de Navier - Bernouilli.

EXPRESSÃO GERAL DOS AUTO-VETORES

A solução geral é obtida combinando as diversas soluções particulares; para as variáveis adimensionais:

$$X\ (Z) = \sum_{n=1}^{8} x_n \ e^{pt + Qn \, . \, Z}$$

$$\alpha\ (Z) = \sum_{n=1}^{8} x_n \ . \ a_n \ e^{pt + Q_n . Z}$$

$$Y\ (Z) = \sum_{n=1}^{8} x_n \ . \ d_n \ e^{pt + Qn . Z} \qquad (2)$$

$$\beta\ (Z) = \sum_{n=1}^{8} x_n \ . \ b_n \ e^{pt + Qn . Z}$$

onde: $x_n$ são constantes complexas arbitrárias

$$a_n = Q_n - \frac{S}{KQ_n}$$

$$b_n = \frac{1}{8\emptyset} a_n \left(Q_n^2 - 4\sigma\right) + a \ \frac{S}{KQ_n}$$

$$d_n = \frac{1}{a - Q_n} \ b_n \left(a - Q_n^2 + 4\sigma\right) - 8\emptyset \ . \ a_n$$

$$Q_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2}\left[\frac{S}{k} + 4\sigma - 8\emptyset i) \pm \sqrt{\left(\frac{S}{k} + 4\sigma - 8\emptyset i\right)^2 - 16\left(\frac{L^2}{r^2}\ \frac{\sigma + S\sigma}{k} + \frac{2S\emptyset i}{k}\right)}\ \right]$$

$Q_{5,6,7,8}$ = expressão análoga à precedente, invertendo o sinal de $\emptyset$.

$$S = \frac{\alpha L^2 p^2}{G} \ ; \ \sigma = \frac{\alpha L^2 p^2}{4E} \ ; \ \emptyset = \frac{\alpha L^2 \Omega P}{4E} \ ; \ a = 4K \frac{G}{E} \frac{L^2}{r^2}$$

A constante k é função da secção transversal do rotor e é dada por exemplo, na referência [4] para várias formas de secções transversais.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

O método de resolução utilizado é o "transfer-matrix-method" (método das matrizes de transferência) que encontra-se de forma detalhada em [5] e que será discutido brevemente.

Para o estudo teórico e experimental foi escolhido o sistema representado pela Fig.2, o qual é decomposto nos sub-sistemas I e II da Fig. 3.

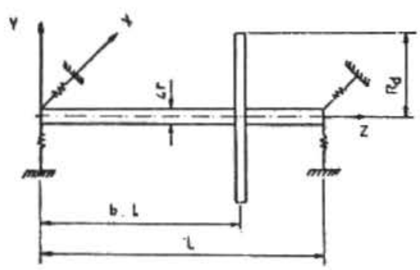



Fig. 2

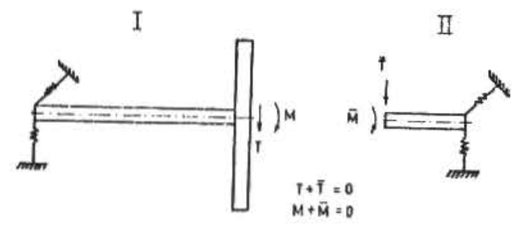



Fig. 3

Condições de contorno do Sub-sistema I:

a) Para Z=0, tem-se:

$$(EI\alpha_I')_{Z=0} = 0 \tag{3}$$

$$(EI\beta_I')_{Z=0} = 0 \tag{4}$$

$$KAG(X_I' - \alpha_I)_{Z=0} = \left[k_{xx}^A\ X_I(0) + k_{xy}^A\ Y_I(0)\right]L \tag{5}$$

$$KAG(Y_I' - \beta_I)_{Z=0} = \left[k_{yx}^A\ X_I(0) + k_{yy}^B\ Y_I(0)\right]L \tag{6}$$

b) Para Z = b, tem-se:

$$-\alpha_I'(b) = -g_2\ \alpha_I(b) + ig_I\ \beta_I(b) + \frac{My}{EI} \tag{7}$$

$$-\beta_I'(b) = -g_2\ \beta_I(b) - ig_I\ \alpha_I(b) + \frac{Mx}{EI} \tag{8}$$

$$(X_I' - \alpha_I)_{Z=b} = F_d\ X_I(b) + \frac{T_x}{KAG} \tag{9}$$

$$(Y_I' - \beta_I)_{Z=b} = F_d\ Y_I(b) + \frac{T_y}{KAG} \tag{10}$$

Condições de contorno do sub-sistema II:

a) Para Z=0, tem-se:

$$(EI\alpha_{II}')_{Z=0} = \overline{My} \tag{11}$$

$$(EI\beta_{II}')_{Z=0} = \overline{Mx} \tag{12}$$

$$-(X_{II}' - \alpha_{II})_{Z=0} = \frac{\overline{T_x}}{KAG} \tag{13}$$

$$-(Y_{II}' - \beta_{II})_{Z=0} = \frac{\overline{T_y}}{KAG} \tag{14}$$

b) Para Z = 1-b, tem-se:

$$-EI(\alpha_{II}')_{Z=1-b} = 0 \tag{15}$$

$$-EI(\beta_{II}')_{Z=1-b} = 0 \tag{16}$$

$$-(X' - \alpha)_{Z=1-b} = \left[\frac{K_{xx}^B}{KAG}\ X_{II}(1-b) + \frac{k_{xy}^B}{KAG}\ Y_{II}(1-b)\right]L \tag{17}$$

$$-(Y' - \beta)_{Z=1-b} = \left[\frac{k_{yx}^B}{KAG}\ X_{II}(1-b) + \frac{k_{yy}^B}{KAG}\ Y_{II}(1-b)\right]L \tag{18}$$

Nas equações acima considerou-se:

$$g_1 = \frac{I_d\omega 2\Omega L}{EI}\ ;\ g_2 = \frac{I_d\omega^2 L}{EI}\ ;\ F_d = \frac{M_d\omega^2 L}{KAG} \tag{19}$$

sendo $\quad I_d = \dfrac{M_d\ Rd^2}{4}$

Para se recompor o sistema original (Fig.2), a partir dos sub-sistemas I e II, definiram-se as "condições de religação":

$$\begin{aligned} Tx + \overline{Tx} = 0 \quad &; \quad Ty + \overline{Ty} = 0 \\ My + \overline{My} = 0 \quad &; \quad Mx + \overline{Mx} = 0 \\ X_I(b) = X_{II}(0) \quad &; \quad \alpha_I(b) = \alpha_{II}(0) \\ Y_I(b) = Y_{II}(0) \quad &; \quad \beta_I(b) = \beta_{II}(0) \end{aligned} \tag{20}$$

Os deslocamentos e esforços generalizados podem ser escritos na forma matricial:

$$V(Z) = W(Z).h \tag{21}$$

onde:

${}^T V(Z) = \left[X;Y;\alpha;\beta,X'-\alpha,Y'-\beta,\alpha',\beta'\right]$: auto-vetor

$W(Z)$ = matriz que leva em conta as soluçoes expressas pelas eq. (2).

Considerando as condições de religação dadas pelas eq. (20) e as condições de contorno, define-se a matriz de passagem Wp, tal que:

$$V_{II0} = Wp \cdot V_{I1} \qquad (22)$$

onde: $V_{II0}$ : auto-vetor definido na extremidade esquerda do sub-sistema II, isto é, $V_{II}0 = V_{II}(0)$.

$V_{I1}$ : auto-vetor definido na extremidade direita do sub-sistema I, isto é, $V_{I1} = V_I(b)$.

$$Wp = \mathrm{diag}\left[1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\right]$$

Substituindo as condições de contorno do sub-sistema I, para Z=0, na eq. geral (21), obtem-se a equação matricial:

$$V_{I0} = W_{I0} \cdot h_I \qquad (23)$$

onde: $V_{I0}$ = auto-vetor calculado na extremidade esquerda do sub-sistema I.

$W_{I0} = W_I(0)$: Calculada para Z=0 no sub-sistema I

$h_I$ = vetor de constantes do sub-sistema I.

Semelhantemente, para Z=b, obtem-se também para o sub-sistema I:

$$V_{I1} = W_{I1} \cdot h_I \qquad (24)$$

onde $V_{I1}$ = auto-vetor calculado na extremidade direita do sub-sistema I.

$W_{I1} = W_I(b)$: Calculada para Z=b no sub-sistema I.

Das eq. (23) e (24), tem-se:

$$V_{I1} = W_I \cdot V_{I0} \qquad (25)$$

onde $W_I = W_{I0} \cdot W_{I0}^{-1}$ ; matriz de transferência do sub-sistema I.

Analogamente, para o sub-sistema II, pode-se obter:

$$V_{II1} = W_{II} \cdot V_{II0} \qquad (26)$$

onde $W_{II} = W_{II1} \cdot W_{II0}^{-1}$ : matriz de transferência, do sub-sistema II.

Finalmente, das eq. (22),(25) e (26), pode-se definir a matriz de transferência global W do sistema 5:

$$V_{II1} = W \cdot V_{I0} \qquad (27)$$

onde $W = W_{II} \cdot W_p \cdot W_I$

A eq.(27) pode ser re-escrita da forma:

$$\begin{bmatrix} X_{II}(1-b) \\ Y_{II}(1-b) \\ \alpha_{II}(1-b) \\ \beta_{II}(1-b) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline \boxed{W_3} & W_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_I(0) \\ Y_I(0) \\ \alpha_I(0) \\ \beta_I(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (27a)$$

Considerou-se o caso das matrizes rigidez dos mancais serem simétricos, isto é, $k_{xy}=k_{yx}$. Assim sendo tem-se $\rho_\nu = i\omega_\nu$ 6 , o que significa que os auto-valores são imaginários puros.

Da eq. (27a), conclui-se que os auto-valores $\omega_\nu$ são calculados anulando o valor do determinante da matriz $W_3$, para uma dada velocidade de rotação $\Omega$ do rotor. Assim,

$$\det \boxed{W_3} = 0 \qquad (28)$$

ESTUDO DO SISTEMA DA FIG.2 - RESULTADOS

Para o presente estudo, foram considerados os seguintes dados numéricos:

$M_d$ = 3,0kg ; Rd = 100mm ; Mp = 0,733 kg

$k_{xx} = k_{yy} = 1{,}4 \times 10^4$ N/m ; L = 900 mm

b . L = 700 mm ; r = 2 mm

Calculou-se as pulsações próprias $\omega$ do sistema para diferentes velocidades de rotação $\Omega$ do rotor, e as curvas obtidas são mostradas na Fig.4. A interseção de tais curvas com a reta $\Omega=\omega$ nos dá os valores teóricos das velocidades críticas do rotor.

O estudo experimental foi feito utilizando a maquete de ensaio do "Laboratoire de Mécanique Appliquée de la Faculté des Sciences et des Techniques" de Besançon (França). A referida maquete, esquematizada pela Fig.5, permite o estudo de um rotor suportando um ou vários discos de posição variável, sendo que o rotor é ele mesmo suportado por pelo menos dois mancais de rigidez variáveis segundo duas direções perpendiculares. Nas posições dos mancais dispõe-se de excitadores eletrodi namicos, de captores de deslocamento à variação de indução e de captores de velocidade do mesmo tipo que os excitadores. A técnica de obtenção experimental dos auto-valores, consiste basicamente de, fixada a velocidade de rotação $\Omega$ do rotor, variar-se a frequência da força de excitação sendo os valores da ressonância detectados pelos captores colocados a nível dos mancais. A obtenção das velocidades críticas é feita simplesmente variando a velocidade de rotação $\Omega$ a partir do valor $\Omega = 0$, e verificando as velocidades $\Omega_c$ para as quais sistema apresenta vibrações importantes, sem excitação externa.

Os valores experimentais pulsações são assinalados por um "X" na Fig.4. A tabela 1 nos dá as velocidades críticas teóricas e as obtidas experimentalmente.

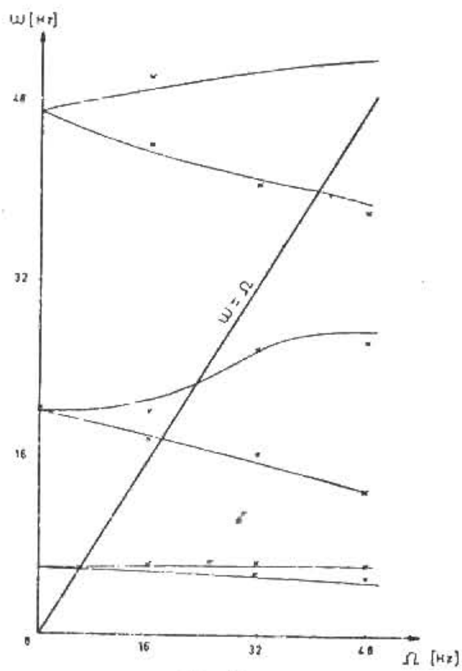



Fig.4

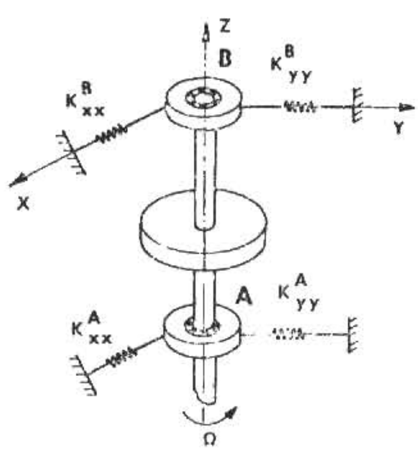



Fig.5

TABELA 1

| VELOCIDADES CRÍTICAS $\Omega_c$ [$H_z$] | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Teóricas | 5,83 | 17,54 | 22,25 | 40,15 | 51,36 |
| Experimentais | 5,90 | 18,00 | 23,00 | 39,60 | - |

CONCLUSÕES

- Foi mostrado que a utilização de um método analítico "exato" pode ser utilizado na resolução de problemas em Dinâmica de Rotores, sem complicar excessivamente o tratamento numérico destes problemas.

- O método usado é particularmente interessante do ponto de vista numérico, pois mesmo complicando o modelo estudado (colocando vários discos e mancais por exemplo) a ordem da matriz complexa cujo determinante temos que anular para determinação dos auto-valores é sempre 4.

- A utilização da teoria de Timoshenko para as barras é indicada principalmente quando não se pode desprezar o cisalhamento nas vibrações transversais e quando interessa-se às altas frequências.

- Constatou-se uma boa correspondeência entre os resultados teóricos e experimentais conforme podemos ver na Fig. 4 e na Tabela 1.

REFERÊNCIAS

[1] Timoshenko, Théorie des Vibrations, Libr. Polytechnique Ch. Béranger, 1954, pp.345-345.

[2] V.Steffen Jr., "Contribution à l'étude de la Dynamique des Rotors", Tese de Docteur-Ingénieur, nº 95, Outubro, 1979, Université de Franche-Comté, Besançon-França.

[3] A. Tondl, Some Problems of Rotor Dynamics, Ed. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praga, 1965, pp. 96-99.

[4] G.R. Cowper, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Bean Theory", J.ofApplied Mechanics, June, 1966.

[5] V.Steffen Jr., "Contribution à l'étude de la Dynamique des Rotors", Tese de Docteur-Ingénieur nº 95, Outubro, 1979, Université de Franche-Comté, Besançon-França.

[6] P.T. Pedersen, "On the forward and backward precession of Rotors", Ingenieur-Archiv 42, 1972, pp.26-41.

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981

Título em Inglês: Analytical and Experimental Study on Rotor-dynamics

SUMMARY

*Among the existing analytical methods for the dynamical calculation of mechanical structures, the transfer-matrix-method is a very important one. This method was used in this paper to obtain the solution of a mechanical system represented by a rotor mounted on flexible journals. Theoretical results are compared with those obtainned experimentally.*

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981, pp. 9 a 18



# TENSIONES EN DIFERENTES TAPAS TORIESFERICAS DE RECIPIENTES DE PRESION

**E. TAROCO**
**R. A. FEIJÓO**
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, CNPq

RESUMEN

*Preséntase en este trabajo la influencia sobre el estado de tensiones y deformaciones que diferentes tapas toriesféricas producen en recipientes de presión de material elástico isotrópico. El análisis se realiza a través del Método de Elementos Finitos utilizando un elemento curvo de tres nudos desarrollado por los autores.*

## INTRODUCCION

El análisis de tensiones en depósitos de presión ha progresado paralelamente al desarrollo de la teoría de cáscaras y a la aplicación de dicha teoría en la resolución de casos particulares, donde diferentes geometrías de la superficie media son estudiadas.

Posteriormente a la formulación de la teoría de cáscaras, realizada por Love [1] a fines del siglo pasado y conocida como Teoria Elástica de Cáscaras Delgadas, múltiples investigadores se abocaron a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultantes para cáscaras con diferentes geometrías.

Dada la complejidad del problema, sólo fue posible la determinación de soluciones para casos particulares, tales como cilindros, conos y esferas. En alguno de ellos se hizo necesario introducir simplificaciones adicionales a las propuestas por Love en la formulación de su teoría [2,3].

La dificultad anterior motivó al desarrollo de una teoría más simple, conocida con el nombre de Teoría de Membrana, en la que solamente los esfuerzos directos son llevados en cuenta. En este caso las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno hacen posible la determinación de una distribución de tensiones estáticamente admisible.

En la medida que la cáscara sea delgada y que los esfuerzos de membrana sean compatibles con las condiciones de contorno, los esfuerzos de flexión son pequeños y las tensiones de membrana se aproximan a las tensiones reales. Si la carga a que la cáscara está sometida y los radios de la superficie media son continuos, la solución de membrana es una buena aproximación para múltiples aplicaciones que se presentan en Ingeniería.

Sin embargo, cuando existen cargas concentradas o discontinuidades en el radio de curvatura o quiebres en la superficie media o los esfuerzos de membrana no son compatibles con las condiciones de contorno, la solución de membrana es solamente válida en puntos suficientemente alejados de las zonas perturbadas. En dichas zonas se hace necesario llevar en cuenta, además de los esfuerzos de membrana, los efectos de flexión, y solamente con la superposición de ambos es posible aproximar la solución del problema. Mediante este procedimiento se han analizado cáscaras compuestas por cilindros, conos, cilindros semiesferas, cilindros esferas rebajadas, etc. [2,3].

Paralelamente al desarrollo teórico para determinar el estado de tensiones en cáscaras, com miras a las aplicaciones en recipientes de presión, multiples investigaciones experimentales en modelos reducidos y modelos fotoelásticos se han realizado. De esta manera ha sido posible complementar y verificar los resultados obtenidos mediante las teorías simplificadas [4,5].

Los trabajos anteriores constituyeron la base para la confección de normas y reglamentos que permiten proyectar recipientes de presión con razonable grado de suguridad [6].

En la última decada, el empleo de la energía nuclear y el gran desarrollo de industrias tales como petroquímica y aeronáutica, no solamente incrementó la demanda de recipientes de presión sino que colocó a los proyectistas frente a problemas especiales no previstos en los reglamentos existentes.

Condiciones extremas de carga y serios riesgos en la falla, que se presentan en casos específicos tales cono reactores nucleares, exigieron análisis de tensiones precisos en la mayor parte de sus componentes.

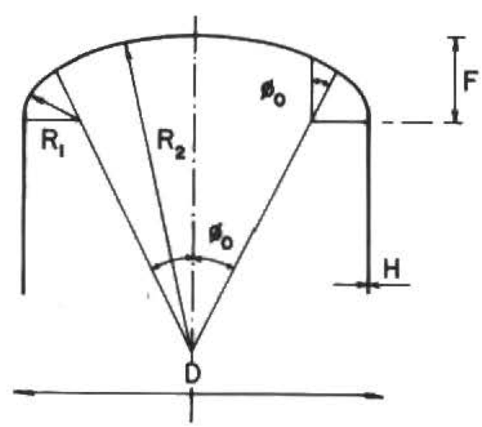
Lo anterior fue posible con el desarrollo de métodos aproximados para la determinación de tensiones y con el advenimiento del computador como poderosa máquina de cálculo. Así es que en la actualidad con el uso de programas adecuados es posible obtener la distribución de tensiones en recipientes de presión con toda la precisión que los procesos tecnológicos requieren.

En este trabajo se analizan las tensiones resultantes en recipientes cilíndricos sometidos a presión interna con tapas de forma toriesférica y el caso límite de semiesfera. Los resultados obtenidos mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos, empleando un elemento de cáscara desarrollado por los autores [7,8] son presentados. En el primer ejemplo se comparan los resultados obtenidos, con valores teóricos y experimentales a que arribaron otros autores.

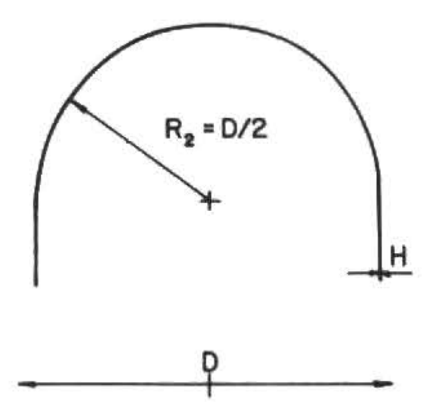
Posteriormente se analizan diferentes tapas de un mismo recipiente y se muestra como varía la distribución de tensiones en función del rebajamiento.

GEOMETRÍA DE LOS RECIPIENTES DE PRESIÓN

Los recipientes de presión analizados en este trabajo son de espesor constante, tienen forma cilíndrica con tapas constituidas por un casquete esférico y un segmento toroidal que permite el acordamiento de las paredes cilíndricas con dicho casquete, Fig.1a. En el caso límite en que el radio de la esfera coincide con el del cilindro, el segmento de toro desaparece y el recipiente de presión obtenido tiene la forma de un cilindro semiesfera, Fig.1b.




a) toriesfera cilindro




b) semiesfera cilindro

Figura 1. Geometría de las Tapas

Teniendo en cuenta la simetría de revolución, la geometría de la tapa está definida cuando se conoce el meridiano y el correspondiente espesor en cada punto, que hemos admitido constante.

En el caso particular toriesférico, Fig.1a, los parámetros que determinan la geometría son: radio de la esfera $R_2$ radio del toro $R_1$, diámetro del cilindro D y espesor H. Para la semies fera, Fig. 1b, $R_2 = 0.5D$.

El ángulo $\phi_o$, transición entre la esfera y el toro, está relacionado con $R_1$, $R_2$, y D mediante la expresión $0.5D = (R_2-R_1)\,\text{sen}\,\phi_o + R_1$ lo mismo el rebajamiento $\delta$ de la tapa definido por la relación

$$\delta = \frac{F}{0.5D} = \frac{R_2-(R_2-R_1)\cos\phi_o}{0.5D}$$

Por lo tanto la tapa de un recipiente cilíndrico de espesor constante, de forma toriesférica esta caracterizado por las tres relaciones $R_1/H$, $R_2/H$, $D/H$.

En el análisis de tensiones de recipientes de presión |9,10| las relaciones anteriores son empleadas para mostrar las distribuciones de tensiones obtenidas en cada caso.

ESFUERZOS RESULTANTES SEGÚN LA TEORÍA DE LOVE

Teniendo presente que los recipientes de presión que estamos analizando, tienen simetría de revolución y llevando en consideración solamente como carga externa la presión p, el equilibrio de un elemento diferencial, Fig. 2, conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales |2,3|, en los esfuerzos $N_\phi$, $N_\theta$, $M_\phi$, $M_\theta$ y $Q_\phi$:

$$\frac{d}{d\phi}(r\,N_\phi) - r_1\cos\phi\,N_\theta - r\,Q_\phi = 0$$

$$r\,N_\phi + r_1\,\text{sen}\,\phi\,N_\theta + \frac{d}{d\phi}(r\,Q_\phi) - r\,r_1 p = 0$$

$$\frac{d}{d\phi}(r\,M_\phi) - r_1\cos\phi\,M_\theta - r_1 r\,Q_\phi = 0$$

Con N, M, Q indicamos fuerza directa, momento y fuerza cortante por unidad de longitud de la superficie media de la cáscara, $r_1$ radio de curvatura del meridiano, r radio del paralelo y con los subíndices $\phi$ y $\theta$ las direcciones del meridiano y paralelo respectivamente.

El sistema de ecuaciones anteriores puede reducirse a dos mediante la eliminación de $Q_\phi$. Para ello introducimos en las dos primeras ecuaciones el valor $r\,Q_\phi$:

$$r\,Q_\phi = \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(r\,M_\phi) - \cos\phi\,M_\theta$$

deducido de la tercera, con lo que se tiene:

$$\frac{d}{d\phi}(r\,N_\phi) - r_1\cos\phi\,N_\theta - \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(r\,M_\phi) + {}$$
$$+ \cos\phi\,M_\theta = 0$$

$$r\,N_\phi + r_1\,\text{sen}\,\phi\,N_\theta + \frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(r\,M_\phi) - \cos\phi\,M_\theta\right] -$$
$$- r\,r_1 p = 0$$

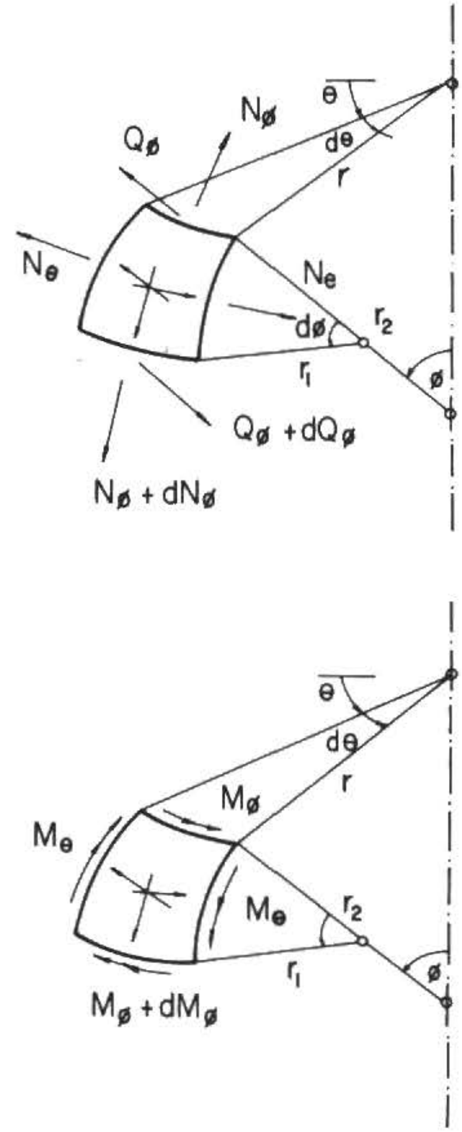



Figura 2. Fuerzas y Momentos en un Elemento de Cáscara

Dentro de las hipótesis de Love, los esfuerzos directos $N_\phi$, $N_\theta$ y los momentos $M_\phi$, $M_\theta$ pueden ser relacionados con los desplazamientos de la superficie media v, w, mediante las expresiones:

$$N_\phi = D(\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_\theta) \quad ; \quad N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\phi)$$

$$M_\phi = K(\chi_\phi + \nu\chi_\theta) \quad ; \quad M_\theta = K(\chi_\theta + \nu\chi_\phi)$$

donde:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} H \quad ; \quad K = \frac{E}{12(1-\nu^2)} H^3$$

son las rigideces de la cáscara a esfuerzos directos y momentos.

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1}\frac{dv}{d\phi} + \frac{w}{r_1} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{r_2}\,\mathrm{cotg}\,\phi + \frac{w}{r_2}$$

son las deformaciones de la superficie media en la dirección de $\phi$ y $\theta (r_2 = r/\mathrm{sen}\ \phi)$

$$\chi_\phi = -\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}\right) \ ; \ \chi_\theta = -\frac{\mathrm{cotg}\ \phi}{r_2}\left(\frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}\right)$$

son los cambios de curvatura de la superficie media.

Para obtener las correspondientes ecuaciones de la parte esférica, del segmento de toro y del cilindro, bastará introducir en las expresiones anteriores los correspondientes valores de $r$, $r_1$ y $r_2$ de cada caso:

Esfera $\quad r_1 = r_2 = \dfrac{r}{\mathrm{sen}\ \phi} = R_2$

Toro $\quad r_1 = R_1\ ,\ r_2 = \dfrac{r}{\mathrm{sen}\ \phi}$

Cilindro $\quad r_1 d\phi = dx\ ,\ r_2 \mathrm{sen}\ \phi = r = 0.5D$

$$\phi = \pi/2\ ,\ r_1 \to \infty$$

La integración del sistema de ecuaciones de equilibrio, con adecuadas condiciones de contorno, permitirá determinar los deplazamientos $v$ y $w$ y, a partir de ellos, las deformaciones $\varepsilon_\phi$, $\varepsilon_\theta$, las curvaturas $\chi_\phi$, $\chi_\theta$ y los esfuerzos $N_\phi$, $N_\theta$, $M_\phi$, $M_\theta$ correspondientes.

En el caso particular de este trabajo, la cáscara axisimétrica que nos proponemos resolver está formada por una composición de tramos de diferentes geometrías. Por lo tanto además de realizar la integración del sistema de ecuaciones anteriores para cada tramo esfera, toro, cilindro, será necesario además compatibilizar los desplazamientos en los puntos de unión de geometrías diferentes.

Lo anterior, bastante conocido en la literatura para casos simples [2,3], puede resultar un trabajo tedioso no siempre con solución analítica conocida.

Otra manera de resolver el problema es recurrir a formulaciones variacionales [3] y sus corespondientes métodos directos.

## FORMULACIÓN VARIACIONAL

Como ya es clásico en el cálculo variacional, el problema de integrar las ecuaciones de equilibrio es equivalente al problema variacional conocido em Mecánica como Principio de Mínima Energía Potencial.

Dicho problema consiste en determinar los desplazamientos $v^*$ y $w^*$, pertenecientes a un campo cinematicamente admisibles, que minimicen el Funcional Energía:

$$\pi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left[\frac{1}{2}(N_\phi\varepsilon_\phi + N_\theta\varepsilon_\theta + M_\phi\chi_\phi + M_\theta\chi_\theta) - pw\right] r_1 r_2 \mathrm{sen}\phi\, d\phi$$

donde los esfuerzos N y M están relacionados con las deformaciones $\varepsilon$ y $\chi$ a través de las ecuaciones constitutivas presentadas en la sección anterior.

De la condición de mínimo se sigue que la primera variación de $\pi$ se anula o sea:

$$\hat{\pi} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} [(N_\phi\hat{\varepsilon}_\phi + N_\theta\hat{\varepsilon}_\theta + M_\phi\hat{\chi}_\phi + M_\phi\hat{\chi}_\theta) - p\hat{w}]\, r_1 r_2 \mathrm{sen}\phi\, d\phi = 0$$

Para mostrar la equivalencia entre ambos problemas y establecer lo que se entiende por desplazamiento cinematicamente admisible, se procederá a establecer cuales son las ecuaciones de Euler y las condiciones de contorno (principales y naturales) asociadas al problema variacional.

Para ello, introducimos en $\hat{\pi}$ las relaciones cinemáticas $\varepsilon$ y $\chi$, presentadas en la sección anterior, e integramos por parte las veces necesarias la expresión variacional $\hat{\pi} = 0$, con lo que se obtiene:

$$\hat{\pi} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \{N_\phi(\frac{1}{r_1}\frac{d\hat{v}}{d\phi} + \frac{\hat{w}}{r_1}) + N_\theta(\frac{\hat{v}}{r_2}\cot g\ \theta + \frac{\hat{w}}{r_2}) -$$

$$- M_\phi \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(\frac{\hat{v}}{r_1} - \frac{d\hat{w}}{r_1 d\phi}) - M_\theta \frac{\cot g\ \phi}{r_2}(\frac{\hat{v}}{r_1} - \frac{d\hat{w}}{r_1 d\phi}) -$$

$$- p\hat{w}\} r_1 r_2 \operatorname{sen}\phi\ d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \{-\frac{d}{d\phi}(rN_\phi) + r_1\cos\phi\ N_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(rM_\phi) - \cos\phi\ M_\theta\}\hat{v}\ d\phi + rN_\phi\hat{v}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} - rM_\phi\frac{\hat{v}}{r_1}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} +$$

$$+ \int_{\phi_1}^{\phi_2} \{rN_\phi + r_1\operatorname{sen}\phi\ N_\theta + \frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(rM_\phi) - \cos\phi M_\theta\right] -$$

$$- r\ r_1 p\}\hat{w}\ d\phi + rM_\phi\frac{d\hat{w}}{r_1 d\phi}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(rM_\phi)\hat{w}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} +$$

$$+ \cos\phi\ M_\theta\hat{w}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2} = 0$$

Como la expresión anterior debe ser nula para cualquier $\hat{v}$, $\hat{w}$, se deducen las siguientes ecuaciones de Euler y condiciones de contorno asociadas al problema variacional planteado:

- Ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{d\phi}(r\ N_\phi) - r_1\cos\phi\ N_\theta - \frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(r\ M_\phi) + \cos\phi M_\theta = 0$$

$$r\ N_\phi + r_1\operatorname{sen}\phi\ N_\theta + \frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(r\ M_\phi) - \cos\phi\ M_\theta\right] -$$

$$- r\ r_1 p = 0$$

Como podemos apreciar, las ecuaciones de Euler corresponden a las ecuaciones de equilibrio de la cáscara.

- Condiciones de contorno

| Principales | Naturales |
|---|---|
| $v = \bar{v}$ en $\phi_1, \phi_2$ | o $r\ N_\phi\Big\vert_{\phi_1,\phi_2} = 0$ |
| $w = \bar{w}$ en $\phi_1, \phi_2$ | o $\{\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\phi}(rM_\phi) - \cos\phi M_\theta\}\Big\vert_{\phi_1,\phi_2} = rQ_\phi\Big\vert_{\phi_1,\phi_2} = 0$ |
| $(\frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}) = (\frac{\bar{v}}{r_1} - \frac{d\bar{w}}{r_1 d\phi})$ en $\phi_1, \phi_2$ | o $r\ M_\phi\Big\vert_{\phi_1,\phi_2} = 0$ |

La última de las condiciones de contorno pone en evidencia un aspecto importante. En efecto, en la unión del casquete esférico con el cilindro, o en la unión del casquete toriesférico con el cilindro, o en la unión de la esfera con el toro, existe una discontinuidad en $r_1$; no obstante esta discontinuidad la condición de contorno también nos dice que el campo $v/r_1 - dw/r_1 d\phi$ debe ser contínuo independientemente de las posibles discontinuidades de la cáscara. Desde el punto de vista físico, lo anterior establece que el ángulo entre las normales a la generatriz a ambos lados de la discontinuidad es el mismo antes y después de la deformación.

De esta manera estamos en condiciones de establecer lo que entendemos por "desplazamientos cinemáticamente admisibles".

Diremos que v y w son "desplazamientos cinematicamente admisibles" si son suficientemente regulares excepto en un número finito de puntos donde $v/r_1 - dw/r_1 d\phi$ es continuo como lo es en todo otro punto de la cáscara. A su vez v, w y $v/r_1 - dw/r_1 d\phi$ deben satisfacer las condiciones de contorno principales.

ELEMENTO FINITO EMPLEADO

Si introducimos en el funcional de Energía $\pi$ las ecuaciones constitutivas y cinemáticas de la teoría de cáscaras delgadas presentadas anteriormente, dicha expresión variacional resulta en un funcional de dos campos v y w:

$$\pi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} f(v, \frac{dv}{d\phi}, w, \frac{dw}{d\phi}, \frac{d^2w}{d\phi^2})\ d\phi$$

con condiciones de continuidad en v, w y $\frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}$

Tomando la relación diferencial $\frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}$ como una nueva variable $\beta$ en el funcional anterior, el problema de minimizar $\pi$ es equivalente a determinar el mínimo del funcional $\pi^*$ de tres campos independientes v, w y $\beta$:

$$\pi^* = \int_{\phi_0}^{\phi_1} f^*(v, \frac{dv}{d\phi}, w, \beta, \frac{d\beta}{d\phi})d\phi$$

con la condición subsidiaria:

$$\beta = \frac{v}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi}$$

y condiciones de contorno en v, w y β:

| Principales | | Naturales | |
|---|---|---|---|
| $v = \bar{v}$ | o | $N_\phi = 0$ | en $\phi_0$, $\phi_1$ |
| $w = \bar{w}$ | o | $Q_\phi = 0$ | en $\phi_0$, $\phi_1$ |
| $\beta = \bar{\beta}$ | o | $M_\phi = 0$ | en $\phi_0$, $\phi_1$ |

Basándose en el desenvolvimiento anterior fue desarrollado por los autores [7,8] un elemento finito curvo. Basicamente las aproximaciones introducidas con este elemento corresponden a:

1) *Aproximación de la Superficie*

La curva que define el meridiano de la cascara es aproximada en cada elemento a través de (Figura 3):

$$r = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \, r^i \quad , \quad z = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \, z^i$$

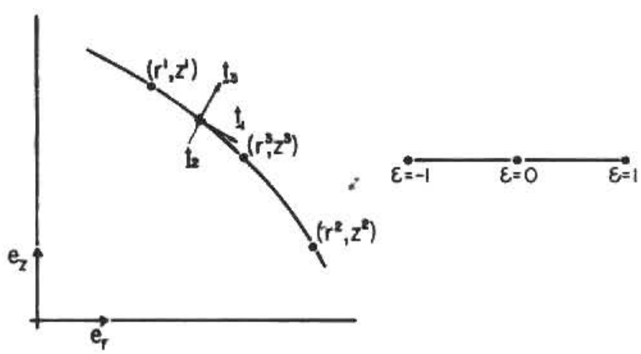



Figura 3. Elemento finito curvo

donde $(r^i, z^i)$ son las coordenadas del nudo i-ésimo del elemento y donde:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad , \quad \phi_3 = 1-\xi^2$$

2) *Aproximación del Campo de Desplazamiento*

En cada elemento el campo de desplazamiento es aproximado de la siguiente forma:

$$v^a = \sum_{i=1}^{3} \phi_i v^i \; ,$$

$$w^a = \sum_{i=1}^{3} \{\psi_{oi} w^i + s'^i \psi_{1i} (\frac{v^i}{r_1^i} - \beta^i)\}$$

$$\beta^a = \sum_{i=1}^{3} (\frac{\phi_i}{r_1} - \frac{1}{s'} \psi_{1i,\xi} \frac{s'^i}{r^i}) v^i - \frac{1}{s'} \psi_{oi,\xi} w^i +$$

$$+ \frac{1}{s'} \psi_{1i,\xi} s'^i \beta^i \} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \phi_i v^i}{r_1} - \frac{1}{s'} \frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^{3} \{\psi_{oi} w^i +$$

$$+ s'^i \psi_{1i} (\frac{v^i}{r_1^i} - \beta^i)\} = \frac{v^a}{r_1} - \frac{1}{s'} \frac{dw^a}{d\xi} = \frac{v^a}{r_1} - \frac{dw^a}{r_1 d\phi}$$

donde:

$$\psi_{01} = \xi^2(1-\xi^2)\ (1+ \frac{3}{4}\xi)$$

$$\psi_{02} = \xi^2(1+\xi^2)\ (1- \frac{3}{4}\xi)$$

$$\psi_{03} = (1-\xi^2)^2$$

$$\psi_{11} = \frac{1}{4}\xi^2(1-\xi)^2(1+\xi)$$

$$\psi_{12} = -\frac{1}{4}\xi^2(1+\xi)^2(1-\xi)$$

$$\psi_{13} = \xi(1-\xi^2)^2$$

$$\psi_{,\xi} = \frac{d\psi}{d\xi}$$

a su vez $s'^i$ y $r_1^i$ representan los valores de $s'$ y $r_1$ en el nudo i-ésimo del elemento, evaluados haciendo uso de la aproximación geométrica establecida en 1), es decir:

$$s' = \sqrt{r'^2+z'^2} \quad , \quad \frac{1}{r_1} = \frac{r''z'-r'z''}{s'^3}$$

y donde $r' = dr/d\xi$ $\quad r'' = d^2r/d\xi^2$

Las cantidades $v^i$, $w^i$ representan los desplazamientos v y w en el nudo i-ésimo del elemento, y $\beta^i$ es la rotación del nudo i-ésimo.

Con las aproximaciones propuestas puede observarse [6]:

1. Los coeficientes que aparecen en el integrando de la formulación variacional son

aproximados uniformemente dentro de cada elemento.

2. Los campos $v^a$ y $w^a$ referidos al sistema global son continuos independientemente de toda no regularidad de la superficie media de la cáscara.
3. El campo $\beta^a$ es continuo y satisface la condición subsidiaria:

$$\beta^a = \frac{v^a}{r_1} - \frac{dw^a}{r_1 d\phi}$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos y utilizando el elemento curvo presentado se analizaron cuatro ejemplos.

El primero de ellos con la finalidad de comparar los resultados obtenidos empleando el elemento propuesto, con los que arribaron Stoddart y Owen en forma experimental [4,11] y Marcal y Pilgrim aplicando el Método de Elementos Finitos [4,12].

El recipiente ensayado por Stoddart, a una presión interna de p = 100 psi, fué construido de acero común con módulo de elasticidad de $E = 30.354 \times 10^6$psi, coeficiente de Poisson $\nu = 0.31$ y tapas de forma toriesféricas con las siguientes características geométricas. $R_1 = 2$in., $R_2 = 24$in., D = 24in. y H = 0.25in.

Dentro de las hipóteses de la teoría de Love las tensiones resultantes $\sigma_\phi$ y $\sigma_\theta$ varían linealmente en la dirección del espesor de la cáscara. Sus valores extremos coinciden con las fibras exteriores e interiores de la lámina y están dadas por la expresión:

$$\sigma = \frac{N}{H} \pm \frac{6M}{H^2}$$

En este trabajo, cada cáscara fué subdividida en elementos finitos de igual tamaño, siendo que el número de elementos en la esfera, toro y cilindro corresponden respectivamente a Nesf = 24 elem., $N_{toro}$ = 10 elem., $N_{cil.}$=15 elem. como indica la Figura 4.

Los resultados obtenidos para las tensiones meridionales $\sigma_\phi$ y circunferenciales $\sigma_\theta$ son presentados conjuntamente con los de Stoddart y Marcal en las Figuras 5 y 6.

En la zona toroidal, que es donde las tensiones son máximas los valores obtenidos con el elemento propuesto practicamente coinciden con los resultados experimentales de Stoddart y difieren poco de los que arribaron Marcal y Pilgrim.

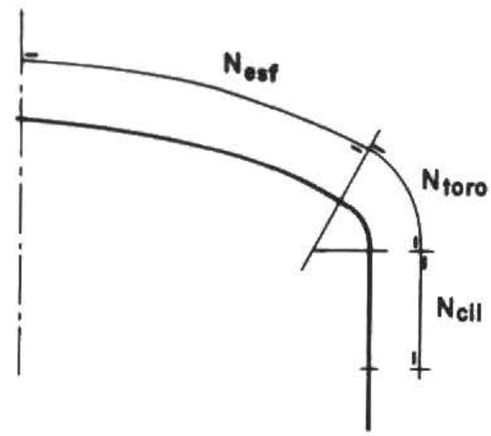



Figura 4. División de la Cáscara en Elementos Finitos

Posteriormente se analizaron además tres ejemplos de tapas, todos ellos de material elástico con las siguientes constantes $E=30\times10^6$psi, $\nu = 0.30$, espesor H = .24in. y rebajamiento $\delta$ variable en cada caso.

Los dos primeros de forma toriesférica con las siguientes características geométricas

| Ejemplo | D/H | $R_1/H$ | $R_2/H$ | $\phi_o$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 100 | 2/.24 | 22/.24 | 30º | .390 |
| 3 | 100 | 25 | 75 | 30º | .634 |

y el último ejemplo de forma semiesférica con radio $R_2$ igual al del cilindro o sea $R_2=0.5D(\delta=1)$.

La división de elementos finitos empleada fué la misma para los casos toriesféricos y la siguiente para la semiesfera $N_{esf.}$ = 24 elem y $N_{cilin.}$ = 24 elem.

Los resultados obtenidos para las tensiones meridionales $\sigma_\phi$ y circunferenciales $\sigma_\theta$ tanto interiores como exteriores, para los tres casos analizados en que el rebajamiento $\delta$ varía desde $\delta$=.39 a $\delta$=1 son graficados en las Figuras 7, 8, 9 y 10. Para adimensionar los valo res presentados en dichos gráficos $\sigma_\phi/\sigma_o$, $\sigma_\theta/\sigma_o$ se empleó la tensión circunferencial en la parte cilíndrica $\sigma_o = pD/2H$.

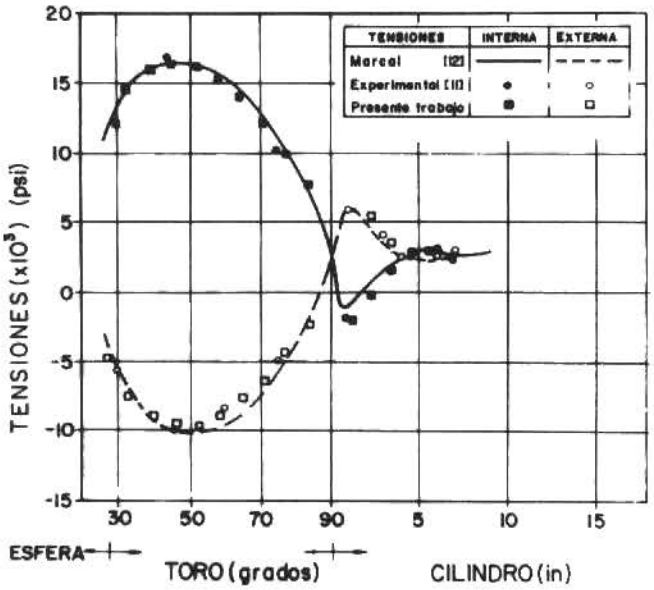



Figura 5. Tensiones Meridionales

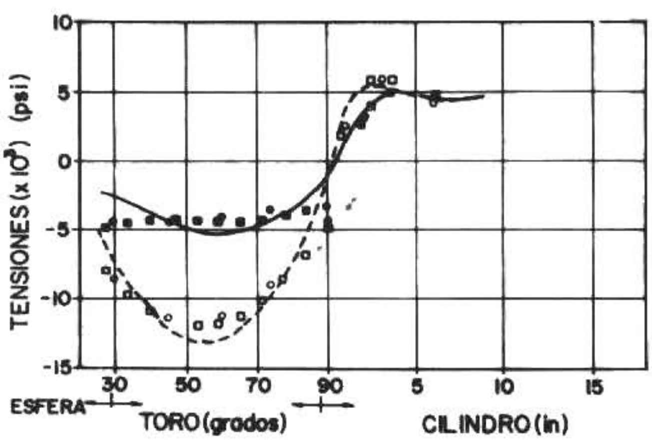



Figura 6. Tensiones circunferenciales

CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra como es posible mediante la implementación del elemento propuesto en un programa de elementos finitos, determinar la distribución de tensiones en un recipiente axisimétrico sometido a presión interna.

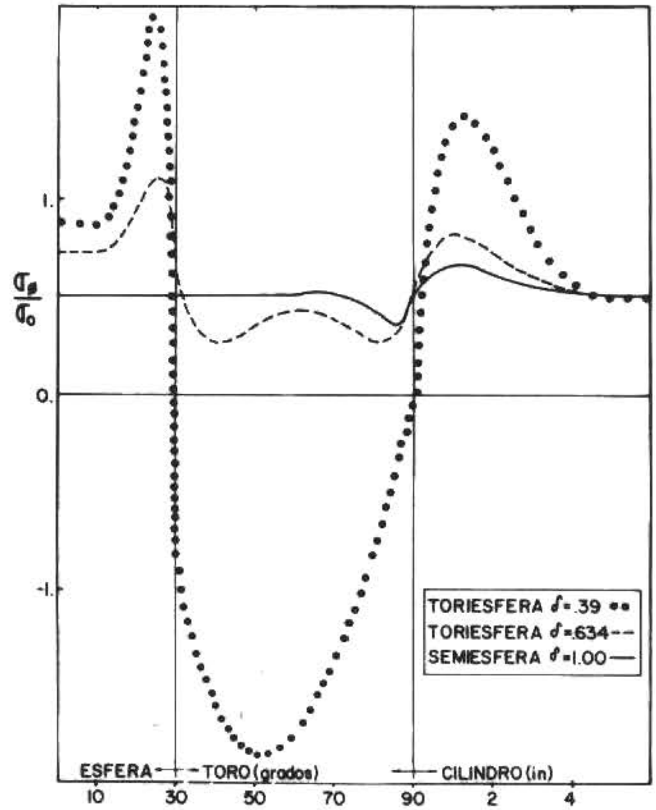



Figura 7. Tensión meridional externa adimensional $\sigma_\phi/\sigma_o$

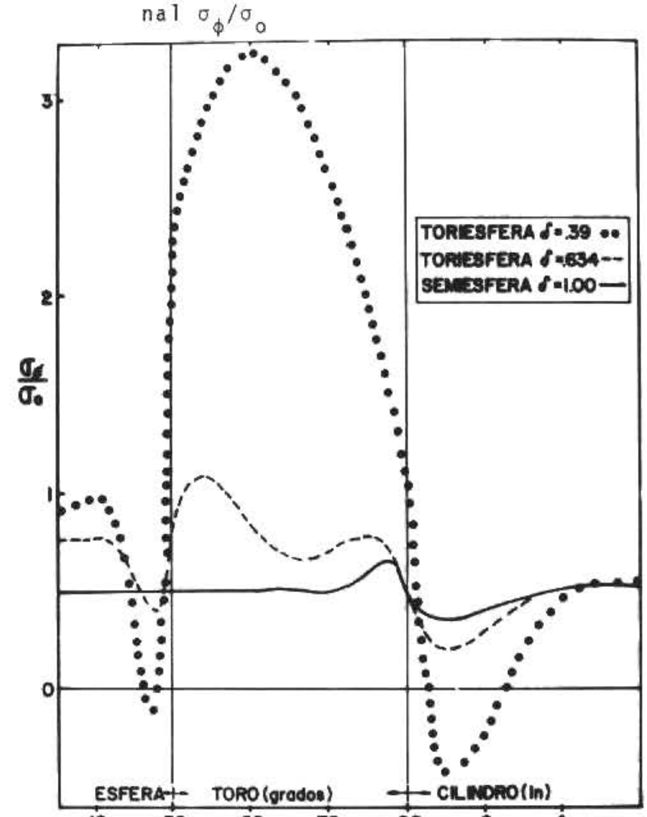



Figura 8. Tensión meridional interna adimensional $\sigma_\phi/\sigma_o$

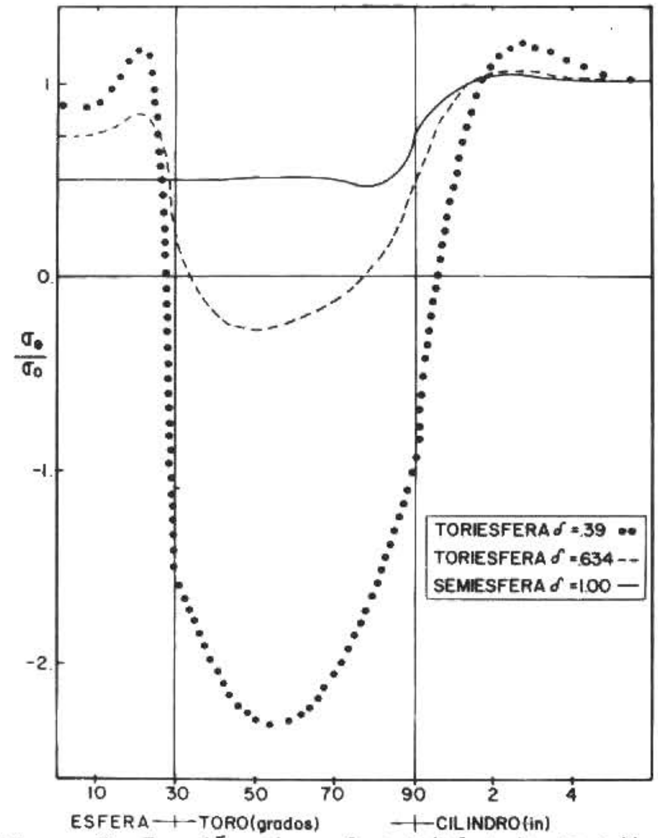



Figura 9. Tensión circunferencial externa adimensional $\sigma_\theta/\sigma_o$

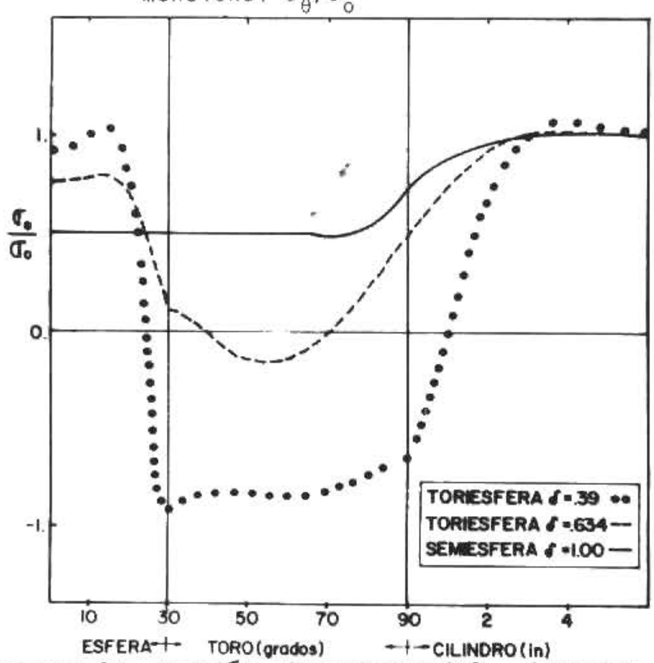



Figura 10. Tensión circunferencial interior adimensional, $\sigma_\theta/\sigma_o$

Las tensiones obtenidas, que muestran buen grado de aproximación con resultados experimentales de otros autores, varían en forma sensible con el rebajamiento de la tapa.

En el caso de tapa semiesférica las tensiones meridionales y circunferenciales, tanto externas como internas, son de tracción. Sin embargo en el caso de tapas toriesféricas a medida que disminuye el rebajamiento se invierte el signo de las tensiones en la zona del toro, apareciendo tensiones circunferenciales de compresión.

Tal fenómeno alerta sobre problemas adicionales a ser tenidos en cuenta en el proyecto de recipientes de presión.

En el caso de recipientes delgados ( relaciones H/D pequeñas) se hace necesario analizar la inestabilidad elástica de la zona toroidal.

Si los recipientes no son delgados (relaciones H/D moderadas), la inversión de signos de las tensiones principales máximas en la zona del toro hace que allí sea necesario analizar el inicio de la plastificación.

En el caso de espesura intermedia a los dos casos anteriores, efectos de inestabilidad plástica deben ser llevados en cuenta en la parte toroidal de la tapa.

## AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen el apoyo económico de CNPq, CNEN y FINEP para la realización de este trabajo.

## BIBLIOGRAFIA

1. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, 1944.
2. Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
3. Krauss, H., "Thin Elastic Shells", John and Sons, Inc., 1967.
4. Gill, S.S., "The Streess Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components", Pergamon Press, Oxford, London 1970
5. Nichols, R.W., "Pressure Vessel Engineering Technology", Elsevier Company Limited, London, 1971.
6. Rules for Construction of Pressure Vessels Divisions 1 an 2: Alternative Rules, ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, ASME, New York, 1974.

7. Feijõo, R.; Taroco, E., "Formulación de un elemento finito curvo para la solución de problemas en la teoría de cáscaras de revolución", IV COBEM, vol.D, paper D-26, pág. 1449-1458, Brasil, 1977.
8. Feijõo, R.; Jospin, R.; Bevilacqua, L. ; Taroco, E., "A Curvilinear finite element for shells of revolution", 2nd Int. Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Austin, Texas, USA, Março 1979, publicado en el Int.J.Num.Meth. Engng. Vol 16, 19-33, 1980.
9. Kraus, H., "Elastic stresses in pressure vessel heads", Welding Research Council Bulletin, vol. 129, 1968.
10. Aggarwal, S.K.; Nayak, G.C.; Shankar Lal, "Parametric studies of cylindrical pressure vessels with different end closures", Int. J.Pres.Ves. & Piping(6),1978,p.417-50.
11. Tuba, I.S.; Wright, W.B.; "Pressure Vessel and Piping 1972 Computer Programs Verification", ASME.
12. Marcal, P.V.; Pilgrim, W.R.; "A Stiffness method for elasticplastic shells of revolution", J. Strain Analysis,1, 1966, p. 339-50.

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981, pp. 19 a 30



# ANALISIS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES EN PROBLEMAS DE CREEP ESTACIONARIO Y NO ESTACIONARIO

**R. A. FEIJÓO**
**E. TAROCO**
**JOÃO NISAN C. GUERREIRO**
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA, CNPq

RESUMEN

*Se presenta en este trabajo el problema de creep estacionario y no estacionario con sus correspondientes formulaciones variacionales. Para el problema de creep estacionario se establecen restricciones débiles capaces de asegurar la unicidad de la solución. Posteriormente, propónese un algoritmo numérico capaz de permitir la obtención de soluciones aproximadas para ambos problemas. Finalmente se presentan dos aplicaciones numéricas mostrando la eficiencia del método propuesto.*

## INTRODUCCION

Uno de los problemas que frecuentemente se presenta en la aplicación estructural de materiales que experimentan deformaciones de tipo viscoso, es el análisis de tensiones y deformaciones correspondientes a cargas y temperaturas dependientes o no del tiempo, que actúan durante prolongados intervalos de tiempo.

El proceso de deformación lenta baja carga es conocido con el nombre de deformación de creep o fluencia. Generalmente se admite que la teoría fenomenológica de creep comenzo a princípios de este siglo con el trabajo pionero del físico da Costa Andrade [1]. Fue él quien introdujo la terminologia empleada hasta el presente y el primero en postular una ley constitutiva de deformaciones dependientes del tiempo.

Lo anterior contribuyó a que, en la Mecánica de los Sólidos, el fenómeno de creep haya sido tratado extensivamente por numerosos investigadores [2,3], dando lugar al surgimiento de diferentes ecuaciones constitutivas, formulaciones variacionales, y métodos numéricos que permiten obtener soluciones de problemas donde el fenómeno de creep debe ser llevado en cuenta.

El problema del diseño de componentes mecánicos, de geometría generalmente compleja, sometidos a elevadas temperaturas, condiciones e historia de cargas numerosas veces evaluadas con un cierto margen de imprecisión, etc., sumado al problema de la falta de conocimiento o datos sobre el comportamiento de los materiales inelásticos, es realmente un problema sumamente complejo. Afortunadamente no todo problema de diseño precisa llevar en cuenta todos los efectos, surgiendo así reglas empíricas que dan lugar, en general, a cálculos conservativos. Por otra parte, toda vez que se desée proyectar de manera de llevar en cuenta efectos térmicos, tiempo, acumulación de deformaciones, etc., resulta forzoso considerar comportamientos inelásticos capaces de atender a tales acciones.

Mucho del ímpetu en esta dirección se debe a la necesidad de analizar estructuras cada vez más sofisticadas, tales como las empleadas en reactores nucleares, turbinas, intercambiado -

res de calor, refinerías de petroleo, etc. En estas estructuras los componentes en general deben ser proyectados para largos períodos de utilización, del orden de 20 a 30 años, durante los cuales estarán sometidos a severas condiciones de temperatura, cargas, radiación, etc.

El surgimiento del computador conjuntamente con algoritmos numéricos, como el proporcionado por el Método de Elementos Finitos, permiten en la actualidad desenvolver programas de cálculo automático capaces de atender análisis estructurales por complejos que ellos sean. Cuéntase asi con herramientas de cálculo poderosísimas pero, en contrapartida, dispónese de poca información en lo que se refiere al comportamiento inelástico de los materiales. Esta situación es bastante diferente de la existente décadas atrás donde, además del desconocimiento sobre el comportamiento inelástico de los materiales, no se disponía de adecuadas técnicas de cálculo. Esta fue una de las razones por las cuales los códigos introdujeron criterios y fórmulas de cálculo simplificados que actualmente tienden a ser modificados para dar lugar a criterios y fórmulas de cálculo "rigurosas" para atender el análisis inelástico.

En el análisis de creep, son necesarias ecuaciones constitutivas dependientes o no del tiempo [1-7], siendo que el creep primario debe incluirse toda vez que represente una parcela importante de la deformación total por creep.

Actualmente las ecuaciones constitutivas para creep mas utilizadas son del tipo ecuaciones de estado donde el tensor velocidad de deformación de creep depende del estado de tensiones, deformación, temperatura y tiempo [5]. Existen ecuaciones del tipo integral que permiten incluir la influencia de la historia del proceso en la respuesta del material. Sin embargo, débese notar que no existe información experimental suficiente para definirlas.

Las ecuaciones para creep, dentro del tipo ecuaciones de estado, requieren elementos similares a los que permiten definir las ecuaciones elasto-plásticas. Así, se tiene:

1. Una ecuación de creep uniaxial describiendo el comportamiento uni-axial a tensión y temperatura constante.
2. Una ecuación de creep permitiendo generalizar el comportamiento anterior a estados múltiples de tensión.
3. Una ley de endurecimiento para permitir aplicar la ley anterior al caso de variaciones en el estado de tensiones y temperatura.

Diferentes expresiones para el item 1 han sido propuestas (véase [5]), lo mismo para el item 2 (véase [7]). Aquí debe resaltarse que las hipótesis para establecer la generalización del comportamiento uniaxial son enteramente idénticas a las de plasticidad (las deformaciones ocurren a volumen constante, la presión hidrostática no modifica las deformaciones inelásticas, etc.).

Para la solución de problemas de creep, distintos algoritmos numéricos basados en el Método de Elementos Finitos han sido propuestos [4-8] siendo el pionero en esta área el trabajo de Greenbaum y Rubinstein [8] realizado en 1968. Todos ellos se reducen a considerar un análisis elástico incremental con deformación inicial dada por el incremento de deformación de creep. Este incremento es calculado a partir del estado inicial en cada paso.

Resumiendo podemos decir, que todo proyecto estructural dentro del rango inelástico requiere para un análisis riguroso de:

i) Información experimental del comportamiento plástico y de creep;

ii) Definición de las ecuaciones constitutivas elasto-plásticas y de creep ya mencionadas;

iii) Un programa oe cálculo automático capaz de permitir un análisis que lleva en cuenta efectos elásticos, plásticos y viscosos.

En este trabajo presentamos, dentro de la teoría de deformaciones infinitesimales, el problema de valor de contorno en creep estacionario y su correspondiente formulación variacional equivalente. Debido a la no linealidad a nivel de la ecuación constitutiva del material, el problema anterior presenta el inconveniente de ser no lineal y además requerir que el campo de velocidades sea isócoro de manera de satisfacer la condición de incompresibilidad.

Posteriormente analizamos un segundo procedimiento para determinar la solución del problema de creep estacionario que tiene la ventaja, con respecto al anterior, de que ella es obtenida mediante la resolución de una serie de problemas lineales dependientes de un parámetro t, denominado ficticiamente de tiempo, en los cuales no precisa ser satisfecha la condición de isocoridad.

Tal procedimiento lo denominamos de elasto creep y mostramos como su solución estacionaria coincide con la solución de creep secundario. La formulación variacional correspondiente así como el algoritmo numérico basado en la técnica de Elementos Finitos para la aproximación espacial y el Método de Euler para la integración en el tiempo son también analizados.

En la segunda parte de este trabajo presentamos el problema de valor de contorno en creep no estacionario, analizamos su formulación variacional equivalente y mostramos un algoritmo numérico similar al de elasto-creep.

Finalmente, con el objetivo de mostrar la eficiencia de los algoritmos propuestos presentamos algunas aplicaciones numéricas.

## PROBLEMA DE CREEP ESTACIONARIO

Consideremos un cuerpo que ocupa la región $\Omega$ de contorno $\Gamma$ del espacio euclidiano tridimensional, constituído de un material que experimenta deformaciones de creep estacionario [3,8], sometido a la acción de un sistema de fuerzas $(b,\bar{a})$ y a una velocidad prescripta $\bar{v}$ en parte del contorno $\Gamma$.

El problema de creep estacionario consiste en determinar los campos $T=T(x)$, tensor de tensiones, $D=D(x)$, tensor velocidad de deformación, y $v=v(x)$, velocidad, tales que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} T + b = 0 \\ D = \frac{1}{2}(\nabla v+\nabla v^T) = (\nabla v)^S \\ T = S+pI=g(D)D+pI, \ \operatorname{tr}D=\operatorname{div} v=0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega$$

con las condiciones de contorno

$$Tn = \bar{a} \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$v = \bar{v} \quad \text{en } \Gamma_v$$

donde:

$b = b(x)$ es la densidad de fuerzas por unidad de volumen

$\bar{a} = \bar{a}(x)$ es la densidad de fuerzas por unidad de superfície prescripta en el contorno $\Gamma_T$.

$g = g(D)$ función escalar de variable tensorial que satisface las siguientes propiedades:

- continua
- si g=Cte., la constante es estrictamente positiva o bien, $g=g(D)$ es positiva definida es decir $g=g(D)\geq 0$ e=0 si y sólo si $D\equiv 0$.
- dados $D_1$ y $D_2$ arbitrarios resulta $(g_2-g_1)(D_2.D_2-D_1.D_1)\geq 0$ con $g_i=g(D_i)$

$p = p(x)$ presión hidrostática ($p=1/3$ tr T)

$I$ tensor identidad

$\nabla(.)$, div(.), tr(.) operadores gradiente, divergencia y trazo (tr T=I.T).

$S$ parte desviadora del tensor de tensiones T

Como podemos apreciar el problema de valor de contorno es no lineal, debido a la no linealidad en la ecuación constitutiva, y está definido para todo campo de velocidades que satisfaga la restricción div v=0.

## FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE CREEP ESTACIONARIO

El problema de valor de contorno anteriormente descripto puede ser colocado dentro de una formulación variacional equivalente.

Para ello, definamos previamente el conjunto de velocidades cinematicamente admisibles que designaremos con $Kin_v$:

$$Kin_v = \{v; v=v(x), \text{ regular, div } v=0 \text{ para } \forall x\in\Omega, \ v|_{\Gamma_v}=\bar{v}\}$$

El problema variacional equivalente consiste en: "determinar $v=v(x)\in Kin_v$ tal que:

$$\int_\Omega T.(D^*-D)d\Omega=\int_\Omega b.(v^*-v)d\Omega+\int_{\Gamma_T} \bar{a}.(v^*-v)d\Gamma$$

para todo $v^*\in Kin_v$". Donde $T=g(D)D+pI$, $D=(\nabla v)^S$, $D^*=(\nabla v^*)^S$.

Introduciendo la ecuación constitutiva en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $tr(D^*-D)=0$, el problema variacional puede ser reescrito de la siguiente forma: "determinar $v=v(x)\in Kin_v$ tal que:

$$\int_\Omega g(D)D.(D^*-D)d\Omega = \int_\Omega b.(v^*-v)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(v^*-v)d\Gamma$$

para todo $v^*\in Kin_v$".

El problema variacional así planteado permite determinar el campo v, con éste y la ecuación cinemática determínase D y a través de la ecuación constitutiva sólo podrá determinarse la parte desviadora de tensiones S. Para obtener la presión hidrostática p será necesario , una vez conocido S, resolver el siguiente problema:

$$\nabla p = b - \mathrm{div}\, S \qquad \text{en } \Omega$$

$$p = (\bar{a}-Sn).n \qquad \text{en } \Gamma_T$$

UNICIDAD DE LA SOLUCION

En esta sección será mostrado que el problema de creep estacionario anteriormente descripto admite una solución única.

Para ello consideremos el siguiente lema:

Lema: Sean $v_1$, $v_2\in Kin_v$ arbitrarios, recordando que $D_i=(\nabla v_i)^S$, $g=Cte>0$ o bien $g=g(D_i)\geq 0$ e=0 si y sólo si $D_i\equiv 0$ y que $(g_2-g_1)(D_2.D_2 - D_1.D_1)\geq 0$, resulta:

$$(g_2D_2-g_1D_1).(D_2-D_1) \geq 0$$

$$e = 0 \text{ si y sólo si } v_1 \equiv v_2$$

Demostración:

$$(g_2D_2-g_1D_1).(D_2-D_1)= \tfrac{1}{2}(g_2-g_1)(D_2.D_2 - D_1.D_1)+ \tfrac{1}{2}(g_2+g_1)(D_2-D_1).(D_2-D_1)$$

Como puede apreciarse el primer término del último miembro es positivo o nulo por la propiedad de la función g, el segundo es positivo definido por propiedad del producto escalar y por la propiedad de g. Por tanto se concluye que:

$$(g_2D_2-g_1D_1).(D_2-D_1) \geq 0$$

$$e = 0 \text{ si y sólo si } D_1 \equiv D_2 \ .$$

Ahora bien, si $D_1\equiv D_2$ resulta $D_1-D_2\equiv 0$ y por ser $v_1$, $v_2\in Kin_v$ se tiene $v_1-v_2=0$ en $\Gamma_v$, luego:

$$\nabla(v_1-v_2)^S = 0 \qquad \text{en } \Omega$$

$$v_1 - v_2 = 0 \qquad \text{en } \Gamma_v$$

La solución del problema anterior resulta $v_1-v_2\equiv 0$ por lo que $v_1\equiv v_2$ con lo que queda demostrado el Lema.

Planteado este Lema, la demostración de que el problema de creep estacionario, admite solución única es inmediata. Para demostrar esto supongamos lo contrario es decir, supóngase $v_1\neq v_2$ soluciones del problema. Dado que cada solución satisface el problema variacional, tendremos:

$$\int_\Omega g_1D_1.(D^*-D_1)d\Omega = \int_\Omega b.(v^*-v_1)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(v^*-v_1)d\Gamma$$

$$\int_\Omega g_2D_2.(D^*-D_2)d\Omega = \int_\Omega b.(v^*-v_2)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(v^*-v_2)d\Gamma$$

Dado que $v^*\in Kin_v$ es arbitrario, consideremos $v^*=v_2$ y $v^*=v_1$ en la primera y segunda de las expresiones anteriores. Sumando miembro a miembro las ecuaciones resultantes se tiene que:

$$\int_\Omega (g_2D_2-g_1D_1).(D_2-D_1)d\Omega = 0$$

Ahora bien, por el Lema presentado anteriormente, el integrando resulta estrictamente positivo llegándose así a una contradicción que provino de suponer $v_1\neq v_2$. Se tiene así demostrado que si existe solución el campo de velo cidades v es único. Lo anterior asegura la unicidad de D y del tensor desviador de tensiones S. Para garantizar la unicidad del tensor de tensiones T resta probar la unicidad de la presión hidrostática p.

Para ello supongamos dos soluciones diferentes $p_1 \neq p_2$. Introduciendo estos valores en:

$$\nabla p = b - \mathrm{div}\, S \qquad \text{en } \Omega$$

$$p = (\bar{a} - Sn).n \qquad \text{en } \Gamma_T$$

y efectuando la diferencia se tiene:

$$\nabla(p_1 - p_2) = 0 \qquad \text{en } \Omega$$

$$p_1 - p_2 \doteq 0 \qquad \text{en } \Gamma_T$$

cuya solución es $p_1 - p_2 \equiv 0$, resultando así la unicidad de p y por consiguiente la del tensor T.

PROBLEMA DE ELASTO-CREEP

En esta sección y en la siguiente, presentamos un segundo procedimiento, llamado de "elasto-creep", que permite, también, resolver el problema de creep estacionario ya descripto.

Como anteriormente, consideremos un cuerpo ocupando la región $\Omega$ de contorno $\Gamma$, sometido al sistema de fuerzas $(b, \bar{a})$ y a la misma velocidad prescripta $\bar{v}$ en $\Gamma_v$, constituido ahora por un material que experimenta deformaciones de "elasto-creep".

El problema de valor de contorno con condición inicial de elasto-creep, consiste en determinar los campos $\dot{u} = \dot{u}(x,t)$, $\dot{E} = \dot{E}(x,t)$, $\dot{E}^c = \dot{E}^c(x,t)$ y $T = T(x,t)$ tales que satisfagan las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\, \dot{T} = 0 \\ \dot{E} = (\nabla \dot{u})^s \\ \dot{T} = \mathbb{D}(\dot{E} - \dot{E}^c) \\ \dot{E}^c = f(S)S \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \times [0, \infty)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\dot{T}n = 0 \quad \text{en } \Gamma_T \times [0,\infty)$$

$$\dot{u} = \bar{v} \quad \text{en } \Gamma_v \times [0,\infty)$$

y condiciones iniciales:

$$u(x,0) = u_o, \; E(x,0) = E_o, \; E^c(x,0) = 0,$$

$$T(x,0) = T_o$$

donde $u_o$, $E_o$, $T_o$ son soluciones del siguiente problema de valor de contorno, conocido como problema elástico:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\, T_o + b = 0 \\ E_o = (\nabla u_o)^s \\ T_o = \mathbb{D}\, E_o \end{array}\right\} \text{ en } \Omega$$

$$T_o n = \bar{a} \qquad \text{en } \Gamma_T$$

$$u_o = 0 \qquad \text{en } \Gamma_v$$

En las expresiones anteriores $t \in [0,\infty)$, $\mathbb{D}$ es el tensor de elasticidad isotrópica, $\mathbb{D} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda(I \otimes I)$, $\mathbb{I}$ y I tensores unitarios de cuarta y segunda orden, $\lambda$ y $\mu$ constantes de Lamé, $\dot{E}^c = f(S)S$ es la inversa de la ley constitutiva de creep secundario $S = g(\dot{E})\dot{E}$.

SOLUCION ESTACIONARIA DEL PROBLEMA DE ELASTO-CREEP

Supongamos que la solución $T(x,t)$, $\dot{E}(x,t)$ y $\dot{u}(x,t)$ del problema de elasto-creep converge para $t \to \infty$ a una solución estacionaria $\tilde{T}(x)$, $\tilde{E}(x)$, $\tilde{u}(x)$. Existiendo este límite no resulta difícil mostrar que el mismo es la propia solución del problema de creep estacionario descripto en la primera parte de este trabajo. En efecto, si:

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = \tilde{T}$$

resulta:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{E}^c = f(\tilde{S})\tilde{S}\ , \ \tilde{S} \text{ parte desviadora de } \tilde{T}$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{T} = 0$$

De la relación constitutiva $\dot{T} = \mathbb{D}(\dot{E} - \dot{E}^c)$, de la positividad de $\mathbb{D}$ y de $\lim_{t\to\infty} \dot{T} = 0$ resulta:

$$\lim_{t\to\infty} (\dot{E} - \dot{E}^c) = 0$$

de donde:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{E} = \lim_{t\to\infty} \dot{E}^c = f(\tilde{S})\tilde{S} = \tilde{\dot{E}}$$

De las consideraciones anteriores se sigue que la solución estacionaria $\tilde{T}$, $\tilde{E}$, $\tilde{u}$ del problema de elasto-creep satisface las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \tilde{T} + b = 0 \\ \tilde{\dot{E}} = (\nabla\tilde{\dot{u}})^s \\ \tilde{\dot{E}} = f(\tilde{S})\tilde{S} \text{ o su inversa } \tilde{S}=g(\tilde{\dot{E}})\tilde{\dot{E}} \end{array}\right\} \text{en } \Omega$$

con las condiciones de contorno

$$\tilde{T}n = \bar{a} \qquad \text{en } \Gamma_T$$

$$\tilde{\dot{u}} = \bar{v} \qquad \text{en } \Gamma_v$$

que no son otra cosa que las ecuaciones de creep estacionario.

Por último debemos observar que, como $\tilde{S}$ es el tensor de tensiones desviador, la condición de isocoridad ($\operatorname{div} \tilde{\dot{E}}=0$) está implicitamente satisfecha en la expresión $\tilde{\dot{E}} = f(\tilde{S})\tilde{S}$.

FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE ELASTO CREEP

Para arribar a la formulación variacional equivalente al problema de elasto-creep [7], consideremos los conjuntos:

$$Kin_u = \{u;\ \text{regular en } \Omega,\ u=0 \text{ en } \Gamma_v\}$$

$$Kin_{\dot{u}} = \{\dot{u};\ \text{regular en } \Omega,\ \dot{u}=\bar{v} \text{ en } \Gamma_v\}$$

Definido estos conjuntos el problema variacional consiste en determinar $\dot{u} \in Kin_{\dot{u}}$ tal que:

$$\int_\Omega \dot{T}.(\dot{E}^*-\dot{E})d\Omega = 0$$

para todo $\dot{u}^* \in Kin_{\dot{u}}$ y todo $t \in |0,\infty)$ con la condición inicial $E_o^c=0$, $u_o \in Kin_u$ satisfaciendo:

$$\int_\Omega T_o.(E^*-E_o)d\Omega = \int_\Omega b.(u^*-u_o)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(u^*-u_o)d\Gamma$$

para todo $u^* \in Kin_u$, y en donde:

$$\dot{T} = \mathbb{D}(\dot{E}-\dot{E}^c) \quad , \quad \dot{E}^c = f(S)S$$

$$\dot{E}^* = (\nabla\dot{u}^*)^s \quad , \quad \dot{E} = (\nabla\dot{u})^s$$

$$T_o = \mathbb{D}\,E_o \quad , \quad E_o = (\nabla u_o)^s \quad , \quad E^* = (\nabla u^*)^s$$

Introduciendo las relaciones constitutivas en las expresiones integrales, el problema anterior puede ser reescrito de la siguiente forma:

"Determinar $\dot{u} \in Kin_{\dot{u}}$ tal que:

$$\int_\Omega \mathbb{D}\dot{E}.(\dot{E}^*-\dot{E})d\Omega = \int_\Omega \mathbb{D}f(s)S.(\dot{E}^*-\dot{E})d\Omega$$

se verifique para todo $\dot{u}^* \in Kin_{\dot{u}}$ y todo $t \in |0,\infty)$ con la condición inicial $E_o^c=0$ y $u_o \in Kin_u$ satisfaciendo:

$$\int_\Omega \mathbb{D}E_o.(E^*-E_o)d\Omega = \int_\Omega b.(u^*-u_o)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(u^*-u_o)d\Gamma$$

para todo $u^* \in Kin_u$".

ALGORITMO NUMERICO EN ELASTO-CREEP

El problema variacional presentado en la sección anterior está definido en $Kin_{\dot{u}}$ y $Kin_u$ de dimensión infinita. Para la obtención de soluciones aproximadas es necesario redefinir el problema variacional en espacios $Kin_{\dot{u}}^a$ $Kin_u^a$ de dimensión finita.

Uma manera de lograr lo anterior consiste en suponer que los campos incógnitas pueden expresarse como productos de funciones en la variable x por funciones en la variable t. En otras palabras los campos $\dot{u}$ y u pueden aproximarse de la siguiente manera:

$$\dot{u}^a = v_\alpha(t)\phi_\alpha(x) + \bar{v}$$

$$u^a = u_\alpha \phi_\alpha(x)$$

donde se ha adoptado la convención de índices repetidos para indicar sumatoria y:

| | |
|---|---|
| $\phi_\alpha(x)$, $\alpha=1,2,\dots,N$ | son vectores de aproximación tales que $\phi_\alpha(x)=0$ para todo $\alpha=1,2,\dots,N$ y todo $x \in \Gamma_v$ |
| $v_\alpha$, $u_\alpha$, | campos escalares cuyos valores serán determinados a |

través del problema variacional propuesto.

Ahora bien, las funciones de aproximación $\dot{u}^a$ y $u^a$ pueden construirse en forma sistemática a través del Método de Elementos Finitos [9]. Como es conocido, dicho método consiste en particionar en subregiones llamadas elementos y aproximar, independientemente en cada uno de ellos, las funciones candidatas $\dot{u}^a$ y $u^a$. En este caso las escalares $v_\alpha$ y $u_\alpha$ tienen sentido físico pues son las componentes de los campos $\dot{u}^a$ y $u^a$ en los nudos puestos en evidencia cuando la partición de $\Omega$. Por otro lado los campos de aproximación $\Phi_\alpha$ son obtenidos a través de la composición de los respectivos campos de aproximación a nivel de cada elemento.

Con las aproximaciones propuestas el problema variacional en elasto-creep queda ahora definido por:

"Determinar $\dot{u}^a \in Kin^a_{\dot{u}}$ tal que:

$$\int_\Omega \mathbb{D}\dot{E}^a.(\dot{E}^{*a}-\dot{E}^a)d\Omega = \int_\Omega \mathbb{D}f(S)S.(\dot{E}^{*a}-\dot{E}^a)d\Omega$$

se verifique para todo $\dot{u}^{*a} \in Kin^a_{\dot{u}}$ y todo $t \in |0,\infty)$ con la condición inicial $E^c_0=0$ y $u^a_0 \in Kin^a_u$ satisfaciendo:

$$\int_\Omega \mathbb{D}E^a_0.(E^{*a}-E^a_0)d\Omega = \int_\Omega b.(u^{*a}-u^a_0)d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.(u^{*a}-u^a_0)d\Omega$$

para todo $u^a \in Kin^a_u$", y donde:

$$Kin^a_{\dot{u}} = \{\dot{u}^a;\ \dot{u}^a = v_\alpha\Phi_\alpha + \bar{v}\}$$

$$Kin^a_u = \{u^a;\ u^a_\alpha = u\Phi_\alpha\}$$

De la aproximación adoptada el problema anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable t:

$$K_{\beta\alpha}v_\alpha = h^c_\beta - f^2_\beta \qquad \alpha,\beta=1,2,\ldots,N\ ; \quad \text{para } t \in [0,\infty) \tag{1}$$

con la condición inicial:

$$K_{\beta\alpha}u_\alpha = f^1_\beta \qquad \alpha,\beta=1,2,\ldots,N\ ;\ E^c_0=0 \tag{2}$$

donde:

$$K_{\beta\alpha} = \int_\Omega \mathbb{D}(\nabla\Phi_\alpha)^s.(\nabla\Phi_\beta)^s d\Omega \tag{3}$$

$$h^c_\beta = \int_\Omega \mathbb{D}(\dot{E}^{ca}).(\nabla\Phi_\beta)^s d\Omega = \int_\Omega \mathbb{D}(f(S)S).(\nabla\Phi_\beta)^s d\Omega \tag{4}$$

$$f^1_\beta = \int_\Omega b.\Phi_\beta d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.\Phi_\beta d\Gamma \tag{5}$$

$$f^2_\beta = \int_\Omega \mathbb{D}(\nabla\bar{v})^s.(\nabla\Phi_\beta)^s d\Omega \tag{6}$$

Tal como puede observarse de (1)-(6) el problema en elasto-creep es lineal en las variables $\dot{T}$, $\dot{E}$, $\dot{u}$ resultando además equivalente al problema de elasticidad infinitesimal con deformación inicial donde $\dot{E}^c$, dada por la ley constitutiva $\dot{E}^c=f(S)S$, corresponde a la deformación inicial.

La integración numérica del sistema (1)-(6) puede realizarse por alguno de los métodos clásicos ya existentes tales como el Método de Euler, Runge-Kutta, etc. A efectos de simplificar la presentación en este trabajo presentamos solamente el Método de Euler. Para ello, si en un instante t son conocidos los campos $u^a$, $E^a$, $E^{ca}$ y $T^a$, mediante el sistema anterior se determinan $\dot{E}^{ca}$, $v^a$, $\dot{E}^a$, $\dot{T}^a$. Conocidas las tasas respecto al tiempo la respuesta para el nuevo instante, según el Método de Euler, se realiza a través de la secuencia de cálculo siguiente:

i . Para $t_0=0$, el sistema (2) permite determinar $u^a_0$ y con éste:

$$E^a_0 = (\nabla u^a_0)^s \quad , \quad T^a_0 = \mathbb{D}E^a_0$$

ii . Conocido $T^a_0$ se determina $S^a_0 = T^a_0 - \frac{1}{3}\,trT^a_0 I$ y con este valor es posible determinar:

$$\dot{E}^{ca}_0 = f(S^a_0)S^a_0 \quad , \quad h^c_\beta = \int_\Omega \mathbb{D}\dot{E}^{ca}_0.(\nabla\Phi_\beta)^s d\Omega \quad ,$$

$$\beta=1,2,\ldots,N$$

iii. Con el vector $h^c$, los vectores $f^1$ y $f^2$ definidos por las expresiones (5) y (6) es posible resolver el sistema (1). La solución de este sistema permite conocer $v^a$ y con él:

$$\dot{E}^a = (\nabla v^a)^s \quad , \quad \dot{T}^a = \mathbb{D}(\dot{E}^a - \dot{E}^{ca}_0)$$

iv . Con estos elementos ya es posible conocer el estado de tensiones en que se encuentra el sólido en el instante $t_1=\Delta t$:

$$T^a = T^a_o + \Delta t\ \dot{T}^a$$

Conocido este nuevo estado se procede a repetir los pasos (ii)-(iv) hasta que la solución estacionaria sea alcanzada. Desde el punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento numérico hasta que la solución estacionaria sea alcanzada. Desde el punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento numérico hasta que la norma de la diferencia del vector $h^c$ en un instante $t_{n+1}$ y el instante anterior $t_n$ sea suficientemente pequeña. Es decir hasta que:

$$\frac{\left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} \int_\Omega [\mathbb{D}(\dot{E}^c(t_{n+1})-\dot{E}^c(t_n))^a.(\nabla\Phi_\alpha)^s]^2 d\Omega\right\}^{1/2}}{\left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} \int_\Omega \mathbb{D}\dot{E}^{ca}(t_n).(\nabla\Phi_\alpha)^s d\Omega\right\}^{1/2}} < \varepsilon$$

donde $\varepsilon>0$ es suficientemente pequeño.

El paso de integración t es escogido de manera de satisfacer los siguientes criterios [10]:

$$\Delta t_{n+1} \leq 1.5\Delta t_n$$

$$\Delta t_{n+1} = \min_{x \in \Omega} \tau \frac{\|E\|}{\|\dot{E}^c\|}$$

donde $\tau \cong 0.1$ y $\|E\| = (E.E)^{1/2}$.

APLICACION NUMERICA EN CREEP ESTACIONARIO

A efectos de mostrar la eficiencia del algoritmo propuesto analizamos el problema de una esfera hueca, sometida a una presión interna constante y constituída de un material que experimenta deformaciones de creep secundario según la ley de von Mises-Odqvist [7].

En este caso, las funciones f y g introducidas en la definición de la ley constitutiva están dadas por:

$$f(S) = \frac{3}{2}\ k\ \sigma_e^{n-1/2} \quad y \quad g(D) = \frac{2}{3}\ k^{-1/n} D_e^{1-n/n}$$

donde:

| | |
|---|---|
| $\sigma_e = (\frac{3}{2}\ S.S)^{1/2}$ | tensión desviadora efectiva |
| $D_e = (\frac{2}{3}\ D.D)^{1/2}$ | velocidad de deformación efectiva |
| n, k | constantes del material |

La región de la esfera estudiada fue dividida en 10 elementos isoparamétricos lineales como indica la Figura 1.

Las distribuciones de tensiones radiales y circunferenciales para una relación de radios externo e interno de $r_e/r_i=1.5$ y n=2,6 obtenidas mediante el algoritmo de elasto-creep, propuesto en este trabajo, son presentadas en la Figura 1 conjuntamente con las correspondientes soluciones exactas. También se compara en dicha figura los valores aproximados de la velocidad radial para n=2 y 6 con las respectivas soluciones exactas.

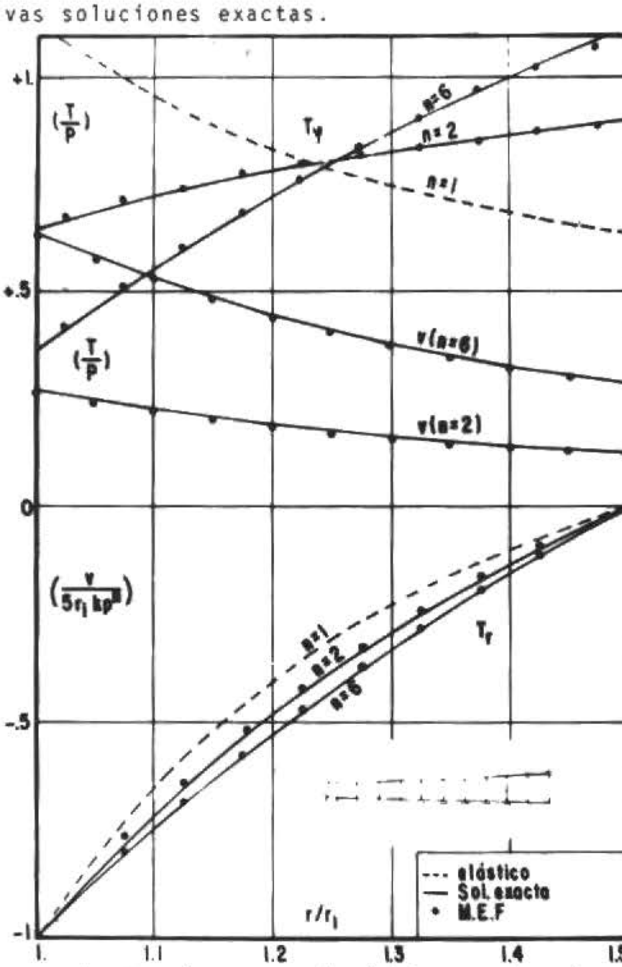



Fig. 1. Tensiones y velocidad en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Creep secundario, ley de von Mises-Odqvist.

En el caso de las velocidades se graficaron los resultados obtenidos en los nudos y en el caso de las tensiones, se graficaron las tensiones en el centro de gravedad de cada elemento.

PROBLEMA DE CREEP NO ESTACIONARIO

Según podemos apreciar en [5] las ecuaciones uniaxiales para creep no estacionario toman la forma:

$$\dot{\varepsilon}^c = f_1(\sigma) f_2(\Theta) f_3(t)$$

donde:

$\dot{\varepsilon}^c$ : es la velocidad de deformación de creep (uniaxial)

$\sigma$ : estado de tensión (uniaxial)

$\Theta$ : temperatura absoluta

$t$ : tiempo

La ecuación constitutiva uniaxial anterior es común a la teoría conocida con el nombre de "time hardening theory", en virtud de la forma explícita que el parámetro de tiempo t aparece en la expresión.

Existe otra teoría - "strain-hardening theory" - en la cual la respuesta depende de la deformación inelástica acumulada, es decir:

$$\dot{\varepsilon}^c = g_1(\sigma) g_2(\Theta) g_3(\varepsilon^c)$$

y su extensión para estados múltiples de tensión toma la forma general:

$$\dot{E}^c = g(\sigma_e, \Theta, \varepsilon_e^c) S$$

mientras que para el endurecimiento por tiempo (time hardening) resulta en general:

$$\dot{E}^c = f(\sigma_e, \Theta, t) S$$

donde:

$\varepsilon_e^c$ : deformación efectiva de creep, $\varepsilon_e^c = (\frac{2}{3} E^c . E^c)^{1/2}$

Teniendo presente lo anterior y dentro del contexto de la teoría de endurecimiento por tiempo (time hardening theory) el análisis del problema de creep no estacionario puede plantearse como sigue.

Sea un cuerpo que ocupa la región $\Omega$ de contorno $\Gamma$ sometido a la acción de cargas de cuerpo $b=b(x,t)$ y de superficie $\bar{a}=\bar{a}(x,t)$, actuante esta última en la parte $\Gamma_T$ de $\Gamma$ y teniendo prescripto en la parte $\Gamma_v$ del contorno $\Gamma$ el desplazamiento $\bar{u}=\bar{u}(x,t)$. Luego, el problema de creep no estacionario consiste en determinar los campos $u=u(x,t)$, $E=E(x,t)$, $E^c=E^c(x,t)$, $T=T(x,t)$ tales que satisfagan en cada instante de tiempo t las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0 \\ \dot{E} = (\nabla \dot{u})^s \\ \dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^c \\ \dot{E}^e = \mathbb{D}^{-1} \dot{T} \\ \dot{E}^c = f(\sigma_e, \Theta, t) S \end{array}\right\} \text{ en } \Omega$$

con las condiciones de contorno:

$$\dot{T}n = \dot{\bar{a}} \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$\dot{u} = \dot{\bar{u}} \quad \text{en } \Gamma_v$$

siendo las condiciones iniciales definidas por los campos $u_o=u(x,0)$, $E_o=E(x,0)$, $E_o^c=E^c(x,0)$, $T_o=T(x,0)$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} T_o + b(x,0) = 0 \\ E_o = (\nabla u_o)^s \\ E_o^c = 0 \\ T_o = \mathbb{D} E_o \end{array}\right\} \text{ en } \Omega$$

con las condiciones de contorno:

$$T_o n = \bar{a}(x,0) \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$u_o = \bar{u}(x,0) \quad \text{en } \Gamma_v$$

FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE CREEP NO ESTACIONARIO

El problema de valor inicial y de contorno enunciado en la sección anterior puede plantearse a través de una formulación variacional equivalente.

Para ello definamos los siguientes conjuntos:

$Kin_{\dot{u}} = \{\hat{u}; \hat{u} = \hat{u}(x,t)$ sea regular en $\Omega, \hat{u}|_{\Gamma_V} = \bar{u}\}$ ,

campo de velocidades cinematicamente admisibles

$Var_{\dot{u}} = \{\hat{v}; \hat{v} = \hat{v}(x)$ sea regular en $\Omega, \hat{v}|_{\Gamma_V} = 0\}$ , campo de variaciones cinematicamente admisibles en la velocidad

Com estos campos definidos, el problema variacional equivalente al problema de creep no estacionario consiste en:

"Determinar $\dot{u} \in Kin_{\dot{u}}$ tal que para cada instante de tiempo t se verifique:

$$\int_\Omega \mathbb{D}(\dot{E}-\dot{E}^c).\hat{E}\, d\Omega = \int_\Omega \dot{b}.\hat{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}}.\hat{v}\, d\Gamma$$

para todo $\hat{v} \in Var_{\dot{u}}$ y donde las condiciones iniciales $u_0$, $E_0$, $T_0$ satisfacen:

$$\int_\Omega \mathbb{D}E_0.\hat{E}\, d\Omega = \int_\Omega b.\hat{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a}.\hat{v}\, d\Gamma$$

para todo $\hat{v} \in Var_{\dot{u}}$, donde $\hat{E} = (\nabla\hat{v})^s$.

ALGORITMO NUMERICO Y SU IMPLEMENTACION VIA ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA CREEP NO ESTACIONARIO

La aplicación del Método de Elementos Finitos en la formulación variacional, definida en la sección anterior, conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$K\,\dot{d} - \dot{h}^c = \dot{f}$$

con las condiciones iniciales

$$K\,d_0 = f_0$$

donde:

K : matriz de rigidez global del sistema

$\dot{f}$ : vector término independiente asociado al sistema de fuerzas actuante en el cuerpo

$\dot{h}^c$ : vector asociado a las deformaciones de creep

$\dot{d}$ : vector de velocidades nodales generalizadas

d : vector de desplazamientos.

El algoritmo numérico para la resolución del sistema anterior puede realizarse a través de técnicas bien conocidas como son el Método de Euler, Runge-Kutta, etc. Por ejemplo si se utiliza el Método de Euler el algoritmo consiste en:

1. Calcúlase $d_0$ a partir del sistema $K\,d_0 = f_0$, es decir $d_0 = K^{-1}f_0$.
2. Conocido $d_0$ es inmediato el cálculo del estado de tensiones y deformaciones $T_0, E_0$ respectivamente.
3. Conocido el estado del cuerpo es posible calcular $\dot{f}^c$.
4. Calcúlase $\dot{d}$ a partir de $K\,\dot{d} = \dot{f} + \dot{h}^c$, es decir $\dot{d} = K^{-1}(\dot{f} + \dot{h}^c)$.
5. Conocido $\dot{d}$ es posible calcular $\dot{T}$ y $\dot{E}$, tasas respecto al tiempo del estado de tensiones y deformaciones respectivamente.
6. El Método de Euler consiste en suponer que las tasas respecto al tiempo son constantes en cada paso de integración $\Delta t$. Con esta hipótesis los desplazamientos, deformaciones y tensiones para $t_1 = \Delta t$ resultan iguales a:

$$d_1 = d_0 + \Delta t\,\dot{d}$$

$$E_1 = E_0 + \Delta t\,\dot{E}$$

$$T_1 = T_0 + \Delta t\,\dot{T}$$

siendo que la deformación de creep está dada por:

$$E_1^c = E_0^c + \Delta t\,\dot{E}^c = 0 + \Delta t\,\dot{E}^c$$

De esta manera, para el instante $t_1$ se tiene completamente conocido el estado del cuerpo. Luego, el proceso de cálculo consistirá en retornar al item 3 y repetir los pasos 3-6 hasta alcanzar el tiempo de integración que se desea o bien, si la carga aplicada es constante en el tiempo, hasta que la solución corresponda al período secundario del fenómeno de creep [1].

APLICACION NUMERICA

El algoritmo presentado en la sección ante rior lo aplicamos al problema de un cilindro infinito, de relación de radios externo interno igual a $r_e/r_i = 1.2402$, sometido a una presión interna p constante.

El el ejemplo estudiado tomamos como ecuación constitutiva para creep estacionario, la ecuación de Odqvist [3,5,7] con exponente n=10:

$$\dot{E}^c = \frac{3}{2}\, k\, \sigma_e^{n-1} S \ , \quad \sigma_e = \left(\frac{3}{2}\, S.S\right)^{1/2}$$

y para la ecuación de creep variable con el tiempo se adoptó la ecuación:

$$\dot{E}^c = \frac{3}{2}\, k\, \sigma_e^{n-1} S\, \dot{f}(t)$$

donde f(t) es la función de endurecimiento por tiempo propuesta por Mc Vetty [3]:

$$f(t) = G(1-e^{-Qt}) + Ht$$

adoptándose para las constantes los valores:

$$G = Q = H = 1$$

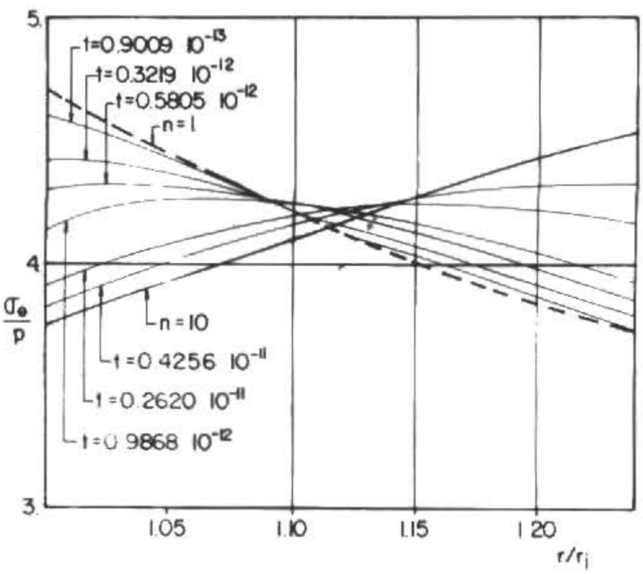



Fig. 2. Distribución de tensiones circunferenciales en cilindro infinito de relación de radios $r_e/r_i = 1.2402$.

En este problema la tensión circunferencial $\sigma_\theta$, es la que más se modifica durante el proceso de deformación por creep. En la Figura 2 se ha graficado $\sigma_\theta/p$ a lo largo de la espesura del cilindro para diferentes valores de t.

Para el instante t=0 el estado de tensiones coincide con la distribución elástica (respuesta elástica instantanea) y, en virtud de ser p=cte., a medida que el tiempo trascurre la distribución de tensiones converge a la correspondiente al problema de creep estacionario para n=10.

## CONCLUSIONES

Como pudo apreciarse el problema de creep estacionario presenta el inconveniente de su nolinealidad y de la necesidad de satisfacer la condición div v=0. Ambos inconvenientes son eliminados en la formulación de elasto-creep que consiste así en una sucesión de soluciones elásticas con deformación inicial. De esta manera, el algoritmo propuesto presenta una ventaja adicional en el sentido de que todo programa automático para cálculo elástico puede ser utilizado en la resolución de problemas que envuelven creep. Por otra parte, en la demostración de la unicidad de la solución del problema de creep estacionario no fue necesariosuponer la existencia de los potenciales de creep [7,8]. Lo anterior permite extender este teorema a ecuaciones constitutivas no asociativas.

El algoritmo para creep no estacionario puede observarse es similar al de elasto-creep, diferenciándose unicamente en la ecuación constitutiva. De esta manera, en este trabajo proponemos un único algoritmo que permite resolver tanto el problema de elasto-creep como el de creep no estacionario.

Por último podemos decir que el cálculo de la respuesta de una estructura sometida al fenómeno de creep (estacionario o no estacionario) no representa un problema desde el punto de vista computacional. Queda por tanto resaltar la necesidad del estudio, tanto experimental como teórico, de cuales son las ecuaciones constitutivas para creep propias de cada material.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) y a la Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) por el apoyo financiero.

BIBLIOGRAFIA


1. E.N. da C. Andrade, "The viscous flow in metals and allied phenomena", Proc. Roy. Soc., A/84, 1910, p. 1.
2. J.A.H. Hult, "Creep in Engineering Structures", Blaisdell Publishing Company, 1966.
3. F.K.G. Odqvist, "Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture", Oxford Clarendon Press, 1974.
4. R. Feijõo, E. Taroco, "Introducción a plasticidad y su formulación variacional", II Escola de Matemática Aplicada, vol. 2, pag. 1-156, Laboratório de Computação Científica - CNPq, 1980.
5. Comitê da ABCM sobre Comportamento Inelástico de Materiais, "Influência dos parâmetros da lei de Norton na determinação de tensões e deformações em materiais que experimentam fenômenos de fluência", Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador 19 a 21 de Nov., 1980.
6. E. Taroco, R. Feijõo, "Problema de creep en discos que giran a velocidad constante", Anales del V COBEM, Campinas, 1979.
7. E. Taroco, R. Feijõo, "Introducción a Viscoplasticidad y su formulación variacional", II Escola de Matemática Aplicada, Vol. 2, pág. 157-337, Laboratório de Computação Científica - CNPq, 1980.
8. R. Feijõo, E. Taroco, "Formulación variacional del problema de creep secundario", XX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Córdoba, Argentina, Tomo III, A. 10, 1979.
9. J.T. Oden; "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, N.Y., 1972.
10. O.C. Zienkiewicz; "Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids, a unified numerical solution approach", Int. J.Num.Meth.Engng., vol. 8, p. 821-845, 1974.

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981, pp. 31 a 40


# INTRODUÇÃO A UMA TEORIA UNIDIMENSIONAL DE ACÚMULO DE DANO PARA PROBLEMAS ESTRUTURAIS

**MANUEL AMÉRICO G. SILVA**
ENGENHEIRO-CIVIL
**DUSAN KRAJCINOVIC**
DEPT. MATERIALS ENG., UNIV. OF ILLINOIS

SUMÁRIO

*A teoria unidimensional de dano é apresentada como sequência da teoria proposta por Kachanov que é interpretada em termos probabilísticos. Um modelo discreto de barras é utilizado para introduzir a variabilidade aleatória da resistência à tração. As leis força-deslocamento para materiais frágeis e elasto-plásticos são obtidas para diversas funções de distribuição, levando em consideração o dano acumulado ao longo do carregamento. A teoria proposta é ainda aplicada a vigas sujeitas a flexão pura, conduzindo a resultados que permitem uma interpretação analítica de disposições de códigos baseadas em evidência experimental. A variação da deformação no tempo é estudada para casos simples de ocorrência do fenômeno de fluência.*

## 1. INTRODUÇÃO

Os trabalhos de pesquisa e desenvolvimento produzidos nas últimas décadas na área de mecânica de estruturas têm incidido mais sobre métodos de análise do que sobre o estudo do comportamento real dos materiais. Consequência direta dessa orientação tem sido a divulgação de técnicas analíticas de grande rigor, o desenvolvimento de algoritmos numéricos complexos e a aplicação desses recursos a vasta gama de sistemas para os quais se fazem hipóteses simplificadoras de comportamento físico.

Um exame crítico do acervo de conhecimentos atuais mostra que há frequente falta de realismo ao aplicar técnicas de rigor "exagerado" a modelos matemáticos que estão, comparativamente, longe de representar o sistema físico com precisão adequada. Com frequência, o engenheiro de estruturas a quem se confia a solução de problemas de alguma complexidade dispõe de técnicas para os resolver após a sua idealização, mas carece de orientação em dois passos importantes da definição do modelo:

- A representação global apropriada do sistema estrutural e da solicitação por um modelo matemático.
- A atribuição correta de propriedades físicas aos materiais, em função do tipo e do regime de carga e da variável tempo.

A procura de critérios de modelação global que evitem erros grosseiros de representação tem sido objeto de numerosos estudos nos anos mais recentes, ainda que seja frequente encontrar trabalhos cuja validade é questionável por não os respeitarem. Exemplos desse renovado esforço são as regras de discretização de massa, de escolha de intervalo de integração no tempo, de dimensão máxima de malha de elementos finitos, a correlação entre o conteúdo de frequência da solicitação e o tipo de discretização do sistema. Esse tema de grande interesse prático e academicamente estimulante não se insere no conteúdo deste estudo e a ele não se fará mais alongada referência.

A exposição que se apresenta a seguir concentra-se outrossim em aspectos de comportamento físico de metais, ligas metálicas e, eventualmente, concreto. O trabalho é orientado de modo a acomodar mais os interesses do engenheiro de mecânica aplicada do que as necessidades do pesquisador. Objetiva-se apresentar conceitos básicos através de exemplos elementares que ilustram desenvolvimentos recentes na definição de modelos físicos racionais para o estudo de fenômenos de fluência e fadiga e determinação da capacidade de resistência à ruptura.

Apresenta-se na sequência uma revisão sucinta de alguns estudos pioneiros e/ou fundamentais, comenta-se a importância daqueles fenômenos em certos problemas estruturais e listam-se referências bastantes para aprofundamento de estudos e início de pesquisa por parte do leitor que por ela se interesse e tenha a boa fortuna de a poder realizar.

O ponto de vista adotado na sequência do trabalho é mais próximo da mecânica de estruturas do que da metalurgia ou termodinâmica. Importa no entanto enfatizar a importância dessas disciplinas no estudo integrado deste capítulo da ciência dos materiais.

A aplicação dos resultados destes estudos decorre evidentemente de que a resistência das estruturas só pode ser determinada se houver conhecimento das propriedades físicas dos materiais usados para as construir. Mais especificamente, os projetos de componentes de turbinas movidas a gás, para temperaturas cada vez mais elevadas, e os de vasos de pressão e tubulações de usinas nucleares sujeitos a ciclos e gradientes térmicos criaram a necessidade de maior pesquisa nesta área. Adicionalmente, os fenômenos de fadiga e de escoamento plástico, mesmo a temperaturas não muito elevadas, requerem estudos desde o estágio de concepção do projeto.

Estabelecidas estas premissas é feita em seguida uma introdução sumária aos conceitos de acumulação de dano, ruptura por fluência e de interpretação probabilística da teoria de Kachanov.

## 2. RUPTURA POR ACÚMULO DE DANO

O estudo científico da ruptura é relativamente recente e tem-se desenvolvido com a expansão dos meios de cálculo numérico, até porque se trata de fenômeno de caráter local e ocorre, em geral, em regiões de geometria singular ou mais complexa.

Os acontecimentos sucessivos que conduzem à ruptura são essencialmente os seguintes:

- Aparecimento de fissura macroscópica.
- Evolução da fissura no sólido.

A quantificação do que seja uma fissura macroscópica em materiais metálicos pode seguir a sugestão de Lemaître e Chaboche [1] que assim consideram uma descontinuidade material em que a dimensão principal seja em torno de 1mm.

O estudo da evolução de fissuras de dimensão superior aquele valor é objeto da Mecânica da Fratura. O estudo e a previsão da ocorrência das fissuras macroscópicas constituem o objetivo das teorias de acúmulo de dano ou, simplesmente, teorias de dano.

Na Mecânica da Fratura a resistência estrutural é função de um defeito individualizado, uma fissura bem definida. O material na vizinhança da fissura supõe-se não enfraquecido sob o ponto de vista mecânico. Na Mecânica do Dano a resistência estrutural é afetada pela progressiva deterioração material causada pelo carregamento.

A combinação dos dois enfoques, isto é, o estudo da condição de fratura de uma estrutura em que ocorreu uma fissura macroscópica em um meio submetido a uma distribuição contínua de dano tem sido abordada na literatura podendo referir-se trabalhos de Janson e Hult [e.g. 2].

A base da Mecânica da Fratura reside no trabalho de Griffith (1920) e seus seguidores. O documento base da teoria de dano acumulado foi apresentado por Kachanov em 1958 [3]. Kachanov estudava ruptura frágil por fluência e introduziu o conceito da distribuição volumétrica contínua de defeitos materiais. Nesses estudos sobre sistemas uni-dimensionais, Kachanov introduziu uma variável de estado escalar, associada ao dano, denotada por $\omega$. O dano $\omega$, como se verá, define uma medida do decréscimo da capacidade de carga devido à deterioração da área resistente do elemento estrutural.

Exames fratográficos e microscópicos confirmam que ocorre dano material anteriormente à formação de macro-fissuras [2]. A resistência de um sistema fissurado deve, por isso, ser avaliada levando em conta a deterioração material ocorrida, i.e. a acumulação de dano anterior à formação da macro-fissura.

Tal como se entende hoje (1981) essa deterioração material de metais e ligas metálicas compreende três fases [2]:

i) Produção de defeitos microscópicos pontuais, quer por aumento da densidade de deslocações, quer por cisalhamento ao nível de inclusões ou precipitados.
ii) Formação de microfissuras superficiais e/ou microvazios volúmicos.
iii) Evolução dos microdefeitos, seja originando macro-fissuras no caso de materiais frágeis, seja originando vazios que conduzem ao modo de ruptura dúctil.

A compatibilização do estudo da mecânica da ruptura com os conceitos da mecânica dos meios contínuos exige que aquele seja feito sob um ponto de vista macroscópico, que é a via adotada por Kachanov como se descreverá mais adiante.

De modo geral a combinação da deformação plástica e da progressão das microfissuras explicam, como já foi referido:

- O endurecimento ou amolecimento do material [12].
- A mudança de propriedades elásticas sob carregamento cíclico.
- A fadiga.
- A fluência.

No caso de fluência os fenômenos viscosos predominam nos estágios iniciais enquanto a acumulação de dano prevalece no estágio terciário, como ficará exposto ao analisar as teorias de Hoff e Kachanov. A capacidade de carga do sistema é examinada logo que o dano atinge um valor crítico (medido e.g. pela densidade de vazios).

As teorias de dano ensaiam apenas os primeiros passos para problemas tri-dimensionais, com algumas dificuldades na formulação de teoria geral que respeite a invariância do referencial. Um relatório com numerosos resultados e que pode servir de guia em estudos preliminares para 3-D é devido a Chaboche [4]. Dentro dos limites propostos para esta apresentação preliminar não se fará referência a esses problemas, confinando a atenção a problemas uni-dimensionais.

## 3. RUPTURA POR FLUÊNCIA

A ruptura por fluência pode ser observada e.g. sujeitando um corpo de prova de aço estrutural a uma força de tração constante, a uma temperatura elevada. Uma exposição das diversas teorias fenomenológicas para quantificação do processo é dada na referência [5] escrita por Odqvist. Curvas relacionando tensão inicial $\sigma_0$ com o tempo de ruptura ou vida $t_r$, em escalas log-log, mostram tipicamente o andamento da Fig. 1, retirada de [5]. Observam-se dois segmentos quase retilíneos, com o de maior declive correspondendo à vida mais longa. De modo genérico, quanto mais longa a vida do corpo de prova, mais frágil é o tipo de ruptura que experimenta.

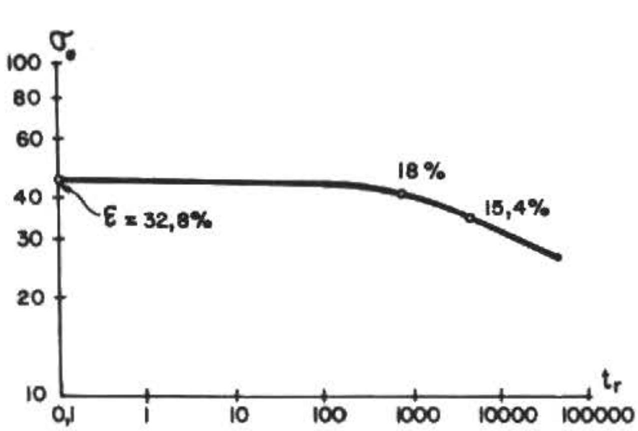



Fig. 1 - Tempo de ruptura em horas

A Fig. 2 esquematiza a lei de variação temporal de $\varepsilon$. Na fase primária a velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}$ é decrescente e o comportamento material é essencialmente viscoso. Na fase secundária $\dot{\varepsilon}$ ≈ constante e na fase terciária $\dot{\varepsilon}$ crescente conduz à coagulação dos micro-defeitos e à ruptura, quando se atinge a "densidade crítica de micro-defeitos".

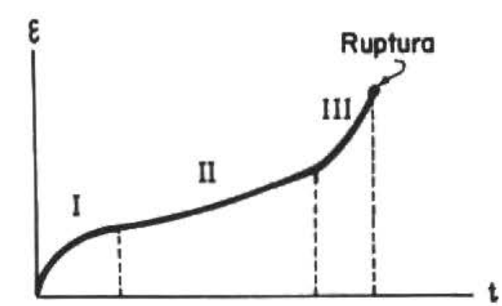



Fig. 2 - Estágios de fluência

N.J. Hoff, partindo da hipótese que o ensaio de tração se processa no estágio secundário e utilizando a lei de Norton para a velocidade de fluência, propôs uma lei fenomenológica para a ruptura dúctil por fluência. Kachanov fez notar que a teoria de Hoff, não levando em consideração a acumulação de dano, excluia a causa real da fragilidade da ruptura que é, além do mais, a característica mais indesejável da ruptura por fluência. A teoria de Kachanov baseia-se na introdução do fator de dano $\omega$ definido pela densidade de vazios na secção $A_0$:

$$\omega = \frac{A_0 - A_e}{A_0} = \frac{\text{Área de Vazios}}{A_0} \tag{1}$$

em que $A_0$ = área da secção reta inicial e $A_e$ = área resistente efetiva da seção reta (já parcialmente danificada) no instante t. A tensão real S relaciona-se com a tensão nominal $\sigma$, no caso de tração pura, através de:

$$S = P/A_e = \sigma/(1-\omega) \tag{2}$$

em que P = força solicitante. A hipótese de que a velocidade de dano só depende de S e não da história temporal das tensões i.e. $d\omega/dt = f(S)$, com f escolhida criteriosamente, permite escrever:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right) \tag{3}$$

equação diferencial que condiciona $\omega = \omega(t)$. No estado virgem é $\omega = o$ e na ruptura $\omega = \omega_R$. Kachanov e Rabotnov especificaram $f(x) = Cx^{r_o}$ e (3) transforma-se, então, em:

$$\dot{\omega} = \left[\frac{\sigma}{C_o(1-\omega)}\right]^{r_o} \tag{4}$$

em que $C_o$, $r_o$ são constantes do material dependentes da temperatura. Neste modelo $\dot{\omega} \to \infty$ quando $\omega \to 1$ e o tempo até a ruptura $t_R$ é dado pela condição $\omega(t_R) = 1$ que conduz a

$$t_R = \frac{1}{r_o+1}\left(\frac{\sigma}{C_o}\right)^{-r_o} \tag{5}$$

O dano é expresso em termos do tempo reduzido $(t/t_R)$ por

$$\omega = 1 - \left[1 - \frac{t}{t_R}\right]^{1/(r_o+1)} \tag{6}$$

As expressões (5), (6) comparam bem com valores experimentais na faixa de tensões baixas em que prevalece a ruptura frágil. Um modelo mais aperfeiçoado que prevê a ruptura para $\omega = \omega_R$ conduz a

$$t_R = \frac{1}{r_o+1}\left[1 - (1-\omega_R)^{r_o+1}\right]\left(\frac{\sigma}{C_o}\right)^{-r_o} \tag{7}$$

A relação (6) não depende de $\sigma$ e verifica a regra de superposição linear de dano de Robinson[6]. Considere-se um teste em que se aplique uma tensão $\sigma$, durante um intervalo de tempo $t_1$, alterando-se a tensão para $\sigma_2$ até que a fratura ocorre após novo tempo $t_2$. A lei de Robinson afirma que $(t_1/t_{1R})+(t_2/t_{2R}) = 1$. Em geral para cada etapa i do teste, com $\sigma_i$ = constante atuando durante $t_i$, os tempos de ruptura $t_{Ri}$ obtêm-se e.g. de (5) e os valores parciais do dano calculam-se por (6). A equação que define o tempo T que seria necessário decorrer até à ruptura da peça é a seguinte:

$$\int_0^T \frac{dt}{t_r} = 1 \tag{8}$$

em que as parcelas $t_r$ referentes às experiências anteriores são calculadas como se referiu e os sucessivos limites de integração correspondem aos tempos durante os quais as tensões $\sigma_i$ foram mantidas.

Este procedimento está associado à hipótese de irreversibilidade de dano[2] conceito que carece de maior investigação, em particular no caso de carregamento cíclico.

A teoria de Kachanov aplicada a tubos sob pressão interna mostra que a fissuração se inicia da face externa para a interna, conclusão corroborada por experiências. Este resultado tem valor notável já que a ruptura frágil por fluência prevista pela teoria da elasticidade prevê o início da fissuração na face interna do tubo. Não decorre, porém, deste acerto que a teoria de Kachanov ofereça sempre resultados <u>quantitativos</u> próximos dos experimentais[5].

## 4. FADIGA

Uma teoria satisfatória da diminuição da capacidade resistente das estruturas provocada por solicitações cíclicas não está ainda estabelecida. O fenômeno da fadiga parece claramente ligado à deterioração material associada aos ciclos de deformação e a teoria de dano acumulado indicada para seu estudo. Adicionalmente o caráter estatístico do fenômeno é conhecido e os esforços recentes de desenvolvimento da teoria de dano acumulado procuram incorporar estes aspectos estatísticos [8]. Uma apresentação sintética das noções de estatística aplicáveis ao estudo de fadiga encontra-se em artigo de Armitage [9] no qual se analisam as funções de distribuição da vida em função da tensão. As distribuições que melhor parecem representar a realidade física[10], a mais citada sendo a de Weibull, são um pouco menos fáceis de manipular e nesta fase de estabelecimento de concei tos básicos é frequente adaptar-se uma distribuição retangular. Por vezes usa-se mesmo p (f). Δf = probabilidade da tensão de ruptura de fibra material estar compreendida no intervalo {f, f+Δf} = $1/f^*$ para $f\varepsilon\{o,f^*\}$, $f^*$ sendo a máxima tensão de ruptura. Distribuições, como esta, implicam probabilidade finita de fratura sob carga nula fato causticado pelo comentário de Weibull de que isso é" ... to exaggerate your pessimism". Apesar das suas deficiências, a distribuição retangular uniforme serve os propósitos preliminares dos estudos correntes e é usada com a compreensão das limitações que serão facilmente obviadas no futuro.

Em artigo posterior apresentar-se-á a aplicação de teorias e resultados obtidos recentemente ao estudo da fadiga. Antecipa-se que a abordagem mais rigorosa do problema exige a consideração de superfícies de dano, conceito paralelo ao de superfície de escoamento, e do efeito de Bauschinger. O possível comportamento histerético do material pode incluir-se através do uso do modelo proposto por Iwan [11] que será descrito adiante.

## 5. DANO ACUMULADO EM VIGA À FLEXÃO

O exemplo que se apresenta abaixo segue a referência [8], apresentada por um dos autores, e foi escolhido por se aplicar a um tipo de estrutura (e solicitação) comumente encontrado na prática de engenharia: viga sujeita a flexão pura. Inicialmente aplicam-se os resultados já derivados ao caso de viga simplesmente tracionada.

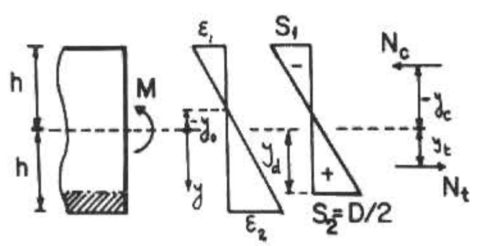



**Fig. 3 - Viga flectida e parcialmente danificada.**

### 5.1 Tração Pura

Recorrendo aos conceitos, definidos em 3, de dano ω, tensão nominal σ e tensão real S procura estabelecer-se inicialmente as relações constitutivas entre a deformação ε, a tensão S e o dano ω. Em problemas unidimensionais Janson e Hult [2] sugeriram as relações

$$S = E\varepsilon \tag{9}$$

$$\omega = S/D, \quad S>o \tag{10.a}$$

$$\omega = o, \quad S<o \tag{10.b}$$

em que D é o módulo de dano determinado experimentalmente ($D=4\sigma_R$ em teoria unidimensional como se verá). Conjugando (9) com (2) obtem-se

$$\sigma = E\varepsilon\{1 - \frac{E\varepsilon}{D}\} \tag{11}$$

As relações (2) e (10.a) produzem, por eliminação de S, a equação seguinte:

$$\omega^2 - \omega + \sigma/D = o \tag{12}$$

A condição de fratura $d\sigma/d\varepsilon = o$, [2], conjugada com (9), determina $\varepsilon_R = 0{,}5\ D/E$ e $S_R = 0{,}5\ D$. A tensão nominal obtem-se de (11) e vale $\sigma_R = 0{,}25\ D = 0{,}5\ S_R$. A relação $S_R = 2\sigma_R$ implica que $\omega_R = 0{,}5$. O valor obtido para $\omega_R$ é decorrência da lei linear escolhida para definir $\omega = \omega(\varepsilon)$.

### 5.2 Flexão

A flexão é estudada em viga retangular de seção (b x 2h) sujeita ao momento fletor M considerando válidas as leis (10.a/b). Utilizando as designações definidas na figura, a resultante de compressão $N_c$ vale
$N_c = b\ (h+y_o)\ S_1/2$. A resultante de tração $N_t$ obtem-se por integração que leva em conta a lei de dano $S = \omega D$ e as forças elementares de tração nas fibras conduzindo a

$$N_t = \int_{y_o}^{h} S\ (1-\frac{S}{D})\ b\ dy = b\ (h-y_o)(3-2\ \frac{S_2}{D})\ \frac{S_2}{6}$$

A condição de que a seção reta permanece plana escreve-se

$$S_1 = -\ (h+y_o)\ S_2/(h-y_o)$$

e, conjugada com as equações de equilíbrio, conduz a uma equação cúbica para $\bar{y}_o = y_o/h$:

$$(9-2m)\bar{y}_o^3 + 3(9+2m)\bar{y}_o^2 + 6(2-m)\bar{y}_o + 2m = o \tag{13}$$

em que m = M/(WD) e W = módulo da seção. A posição do eixo neutro é função do momento fletor, i.e. $M = M(y_o)$ ou $m = m(\bar{y}_o)$. Pode escrever-se

$$m = 1{,}5\ (3\bar{y}_o^3 + 9\bar{y}_o^2 + 4\bar{y}_o)/(\bar{y}_o - 1)^3 \qquad (13')$$

e a variação do momento com o eixo neutro conduz a um valor máximo de M para $dM/dy_o = o$ que será considerado critério de ruptura:

$$9\bar{y}_{oR}^2 + 13\bar{y}_{oR} + 2 = o \qquad (14)$$

A equação (14) fornece a solução $\bar{y}_{oR} = -\ 0{,}17506$, $m_R = 0{,}407$ ou $M_R = 0{,}407$ WD. Conclui-se que a subida do eixo neutro, devida ao dano acumulado, se processa até $M = M_R$. A tensão nominal máxima vale $\sigma_{Rflex\tilde{a}o} = 0{,}407$ D em constraste com $\sigma_{Rtra\c{c}\tilde{a}o} = 0{,}250$ D achada em 5.1.

Os valores achados mostram maior capacidade resistente para tração à flexão do que para tração pura (0,407 > 0,25), resultado conforme com observações experimentais. No caso de concreto, por exemplo o ACI 318-77 recomenda um quociente $\sigma_{Rf}/\sigma_{Rt} = 1.5$, enquanto a teoria simplificada que aqui se apresenta prevê $\sigma_{Rf}/\sigma_{Rt} = 1.62$, resultado que não poderia ser achado pelas teorias convencionais de resistência de materiais.

## 6. DISTRIBUIÇÃO ALEATÓRIA DE CAPACIDADE RESISTENTE

O modelo proposto para representar a distribuição aleatória da capacidade resistente é introduzido como generalização de um modelo discreto do ensaio de tração simples apresentado inicialmente por Iwan[11] para estudar a histerese. O corpo de prova é modelado por um conjunto de N elementos como se ilustra na Fig. 4. Cada elemento i é formado por uma mola linear de constante (k/N), ligada em série a um amortecedor do tipo Coulomb com uma força máxima admissível $f_i^*/N$.

Na fase de carga, $\dot{x} > o$, a lei força-deslocamento para o elemento genérico i (elasto-plástico ideal) é descrita por:

$$f_i = Kx/N,\quad 0 \leq x \leq f_i^*/K$$
$$f_i = f_i^*/N,\quad x \geq f_i^*/K \qquad (15\text{-a,b})$$

A lei força-deslocamento para o sistema total é obtida adicionando a resistência de cada

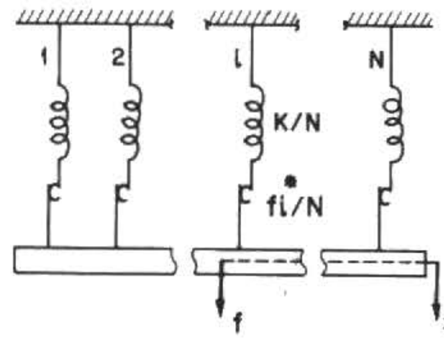



Fig. 4 - Modelo discreto de corpo tracionado.

elemento. A parcela da força proveniente dos elementos plastificados é

$$f_Y = \sum_{N_y} f_i^*/N,\quad kx \geq f_i^*, \qquad (16)$$

com esses elementos admitidamente numerados em ordem consecutiva de 1 a $N_y$. A parcela dos elementos respondendo elasticamente vale

$$f_E = \frac{kx}{N}\cdot(N - N_y),\quad kx < f_i^* \qquad (17)$$

A força total f escreve-se

$$f = \sum_{i=1}^{N_y} \frac{f_i^*}{N} + \frac{kx}{N}\ (N - N_y) \qquad (18)$$

ou, na passagem ao limite para N e $N_y$ muito grandes,

$$f = \int_o^{kx} f^* p(f^*) df^* + kx \int_{kx}^{\infty} p(f^*) df^*,\quad \dot{x} > o, \qquad (19)$$

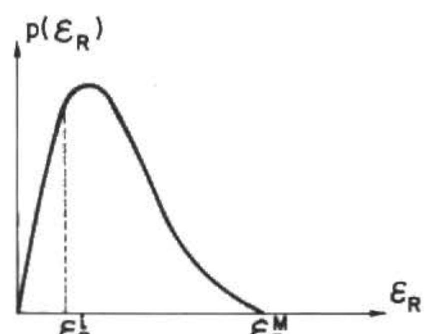



Fig. 5 - Função de densidade de deformação na ruptura.

A função de densidade da resistência $p(f^*)$ pode interpretar-se pelo seu significado probabilístico: $p(f^*)df^*$ representa a fração do número total de elementos que desenvolvem a

resistência $f_i^*$ tal que $f^* < f_i^* < f^* + df^*$.
O modelo diz-se de resistência continuamente variável porque um acréscimo $(A_o\Delta\sigma)$ na força solicitante produz a ruptura de uma fração correspondente de $A_o$. O número de elementos que rompe entre $\sigma$ e $(\sigma + \Delta\sigma)$ corresponde, no sistema contínuo, à diminuição $(-dAe)$ da área efetiva $A_e$ definida em (1). O número total de elementos (modelo de Iwan) corresponde à área total inicial $A_o$. Relembradas estas definições e o significado da função $p(\sigma_u)$ pode relacionar-se $\omega$ com $p(\sigma_u)$. A probabilidade de que a ruptura se dê para $\sigma_u \varepsilon \{\sigma, \sigma+\Delta\sigma\}$ = (Nº elementos rompendo para $\{\sigma, \sigma+\Delta\sigma\}$):(Nº total de elementos), quociente que define o incremento de dano $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} p(\sigma_u)d\sigma_u = -\frac{\Delta A_e}{A_o} \qquad (20)$$

Considere-se como aplicação uma distribuição $p(\sigma_u)$ de resistência $\sigma_u$ uniforme, na banda $\sigma_o$ a $\sigma_M$, para um material frágil que rompe sem escoamento prévio. Abaixo de $\sigma_o$ o material não rompe (probabilidade zero) e acima de $\sigma_M$ nenhum elemento resiste. Neste caso (20) conduz a $d\omega = d\sigma/(\sigma_M - \sigma_o)$ e o incremento de força $\Delta F$ é dado por $\Delta F = A_o\Delta\sigma = -(\sigma_M - \sigma_o)\Delta A_e$.
A área efetiva pode obter-se por integração

$$A_e = -\frac{1}{\sigma_M - \sigma_o}\int_{F_o}^{F} dF + A_o = A_o\frac{\sigma_M - \sigma}{\sigma_M - \sigma_o} \qquad (21)$$

A partir da definição de dano, $d\omega = -dA_e/A_o$ e de (21) obtem-se

$$\omega = -\int_{A_o}^{A_e}\frac{dA_e}{A_o} = 1 - \frac{A_e}{A_o} \qquad (22)$$

e $S = F/A = (F/A_o)(1-\omega) = \sigma/(1-\omega)$. Estes resultados concretizam uma interpretação probabilística para a teoria proposta por Kachanov. A generalização de $p(\sigma_u)$ em nada afetaria os resultados qualitativos achados.

6.1 Relações Força-Deslocamento

A lei de banda limitada uniforme conduz à relação da capacidade resistente do sistema F com o deslocamento x, por aplicação do raciocínio usado para estabelecer (19):

$$F = Kx\int_{kx}^{F_M}\frac{1}{F_m - F_o}dN = \frac{F_m}{F_m - F_o}Kx\left(1 - \frac{Kx}{F_m}\right) \qquad (23)$$

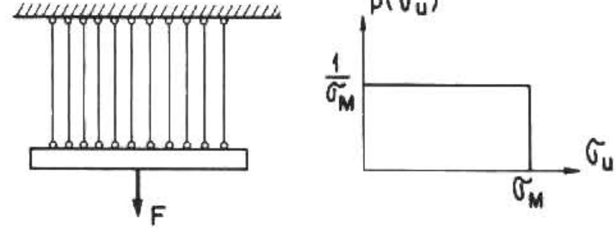



Fig. 6 - Modelo de barras e distribuição uniforme de resistência.

em que $F_m = A_o\sigma_M$, $F_o = A_o\sigma_o$. Se a ruptura se iniciar para $\sigma_o = o$

$$F = Kx\left(1 - \frac{Kx}{F_m}\right) \qquad (24)$$

expressão equivalente à de Kachanov para barra contínua. A equação (24) conduz a $\sigma = E\varepsilon(1-c\varepsilon) = E\varepsilon(1-\omega)$, $C = (KL/Fm)$ e $E = KL/A_o$ [8].
A constante C é determinada pela condição de extremo de $\sigma(\varepsilon)$ na ruptura, obtendo-se $C = 0{,}25E/\sigma_R$.
No caso de lei triangular, $p(f^*) = 2f^*/F_m^2$, obtem-se a relação

$$F = kx\{1 - (kx/F_m)^2\} \qquad (25)$$

Se a distribuição adotada for parabólica, $p(f^*) = 6\{\frac{f^*}{F_m} - (\frac{f^*}{F_m})^2\}$, o valor da força resistente em função de x torna-se

$$F = kx\{1 - 3\left(\frac{kx}{F_m}\right)^2 + 2\left(\frac{kx}{F_m}\right)^3\} \qquad (26)$$

6.2 Dano e Tensão Efetiva

Os resultados traduzidos por (20) e (22) podem estabelecer-se de modo mais geral reconhecendo que $\omega$ é o quociente do número de barras rompidas pelo número total de barras

$$\omega = \frac{\int_0^{kx} p(F)dF}{\int_0^{\infty} p(F)dF} = \int_0^{F=kx} p(z)dz = P(kx) \qquad (27)$$

i.e. $\omega(x)$ = valor da função de probabilidade acumulada para $F = kx$. Por exemplo, se a função de acumulação de probabilidade for correspondente à lei de densidade de Weibull [12]

$P(y) = 1 - e^{-\alpha y^{\beta}}$, $\alpha > o, \beta > 1$, pode escrever-se $\omega = 1 - e^{-c_1(kx/F_m)^{\beta}}$, com as constantes $c_1$ e $\beta$ a serem obtidas conforme dados experimentais.

A noção de superfície de dano conjugada com a propriedade de que a energia de deformação $U$ é quadrática na deformação permite obter a capacidade do sistema na ruptura. A tensão $\sigma$ pode achar-se por diferenciação de $U$, para $\omega$ = constante, i.e. $\sigma = \partial U/\partial \varepsilon$.
Escrevendo $U = 0.5\ E\ (1-k\omega)\varepsilon^2$, obtem-se

$$\sigma = E(1-k\omega)E \qquad (28)$$

A condição de que o ponto $(\varepsilon,\omega)$ permanece na superfície de dano $\emptyset = \emptyset(\varepsilon,\omega,T)$, i.e. $d\emptyset = o$, conduz a

$$d\omega = -\left[(\partial\emptyset/\partial\varepsilon)/(\partial\emptyset/\partial\omega)\right] dE = \lambda(\varepsilon,\omega)d\varepsilon \qquad (29)$$

Na hipótese da superfície de dano $\emptyset$ ser linear em $\omega$ é $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ (termos cruzados em $\varepsilon$ e $\omega$ não aparecendo em $\emptyset$) e por integração de (29) obtem-se $\omega = a\ \varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots$ (com $\omega = o$ para $\varepsilon = o$).

Distribuição Retangular Uniforme

Substituindo $\omega$ pelo polinomio em $\varepsilon$ na operação (28) e identificando a expressão obtida com $\sigma = E\varepsilon(1-C\varepsilon)$ resulta que $\omega = C\varepsilon/K$ como utilizado em 6. A condição de máxima tensão na ruptura impõe $C = 1/(2\varepsilon_R)$ e a lei constitutiva pode escrever-se:

$$\sigma = E\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}\right) \qquad (30)$$

com $\varepsilon_R$ representando a extensão do corpo tracionado na ruptura ($\sigma_R = 0.5E\varepsilon_R = 0.5S_R$).

Distribuição Parabólica

No caso da função de densidade ser parabólica, as expressões que têm que se tornar idênticas são:

$$\sigma = E\varepsilon\left[1-3\left(\frac{KL}{F_m}\right)^2\varepsilon^2 + 2\left(\frac{KL}{F_m}\right)^3\varepsilon^3\right]$$

$$\sigma = E\varepsilon\left[1-Ka_1\varepsilon - 0.5ka_2\varepsilon^2 - (1/3)Ka_3\varepsilon^3\right]$$

determinando $a_1 = o$ e$(a_2kc) = -a_3k = 6c^2$, com $c = KL/F_m$.
A condição de ruptura conduz a uma equação cúbica cuja menor raiz positiva é $c\varepsilon_R \cong 0.42$.
A relação constitutiva pode escrever-se em função de $\varepsilon_R$:

$$\sigma = E\varepsilon\left[1-0.53\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}\right)^2 + 0.15\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}\right)^3\right] \qquad (31)$$

em que se verifica $\sigma_R \approx 0.62E\varepsilon_R = 0.62\ S_R$.

## 7. APLICAÇÃO AO ESTUDO DA INTERAÇÃO DANO-FLUÊNCIA

O modelo de barras com distribuição de resistência segundo lei de densidade $p(\varepsilon_R)$ e comportamento frágil é utilizado em seguida no estabelecimento da lei de variação temporal de $\varepsilon$ no caso de interação dano-fluência [13].

Cada barra está sujeita a uma extensão instantânea $\varepsilon^{(i)}$ e a uma extensão $\varepsilon^{(c)}$ devida à fluência, i.e. $\varepsilon = \varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(c)}$.

Adotam-se a lei de Norton para a fluência e a lei linear de dano, que se podem traduzir assim

$$\varepsilon^{(i)} = S/E \qquad\qquad \dot{\varepsilon}(c) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{S}{S_n}\right)^n \qquad (32\text{-a,b})$$

em que $\tau$, $n$, $S_n$ são parâmetros materiais. As expressões (32-a,b) permitem escrever

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{E}\frac{dS}{dt} + \frac{1}{T}\left(\frac{S}{S_n}\right) \qquad (33)$$

A lei de dano pode ser a correspondente à distribuição de Weibull [14]

$$\omega = P(\varepsilon) = 1-\exp(-\gamma\varepsilon^m) \qquad (34)$$

ou qualquer outra que reproduza, com rigor suficiente, a realidade física. Admita-se uma lei cúbica:

$$\omega = \gamma\varepsilon^m - \frac{1}{2}(\gamma\varepsilon^m)^2 + \frac{1}{6}(\gamma\varepsilon^m)^3 \qquad (35)$$

Diferenciando (35) acha-se $\lambda(\varepsilon,\omega) = m\gamma\varepsilon^{m-1}\left[1 - \gamma\varepsilon^m + 0.5(\gamma\varepsilon^m)^2\right]$, expressão que se simplifica para $m = 1$, $\lambda = (1-\gamma\varepsilon+0.5\gamma^2\varepsilon^2)$.
Se for $\gamma\varepsilon^m \ll 1$ a função $\lambda$ pode aproximar-se por $\lambda(\varepsilon,\omega) = \gamma$ para $m = 1$. Nesta hipótese fica $\omega = \gamma\varepsilon$ e $\dot{\omega} = \gamma\dot{\varepsilon}$ e comparando estas expressões e (33) conclui-se que a deformação influencia $\omega$, enquanto $\dot{\varepsilon}$ depende de $\dot{\omega}$. As expressões derivadas acima permitem que se escreva

$$\dot{\omega} = \gamma\dot{\varepsilon} = \frac{\gamma}{E}\dot{S} + \frac{\gamma}{T}\left(\frac{S}{S_n}\right)^n \qquad (36)$$

equações que podem ser transformadas nas apresentadas por Westlund [17]. Eliminando $S$, $\dot{S} = \sigma\dot{\omega}/(1-\omega)^2$ e definindo $A = (TS_n)^{-1}$ chega-se à equação $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\frac{\sigma}{(1-\omega)^2}(\gamma\varepsilon) + A\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^n$ que, integrada, origina:

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981

$$\frac{(1-\gamma\varepsilon)^{n+1}}{\gamma(n+1)}\left[\frac{\gamma\sigma}{E}\,\frac{n+1}{n-1}\,\frac{1}{(1-\gamma\varepsilon)^{2}}-1\right] = A\sigma^{n}t+C_1 \qquad (37)$$

No instante inicial $t = 0$ é $\varepsilon^{(i)}_{(o)} = \varepsilon_o = \sigma_o/\left[E(1-\omega_o)\right]$ i.e. $E\varepsilon_o - E\gamma\varepsilon_o^2 = \sigma_o$ ou $\varepsilon_o = (1-\sqrt{1-4(\gamma\sigma_o/E)})$. A constante de integração obtem-se por simples inserção do valor de $\varepsilon_o$ em (37), para $t = o$. O problema da avaliação de $\varepsilon = \varepsilon(t)$ está, assim formalmente resolvido, para os casos em que as hipóteses feitas sejam fisicamente razoáveis.

## 8. CONCLUSÃO

O texto e os resultados apresentados evidenciam a potencialidade da teoria de acúmulo de dano na avaliação da capacidade resistente de sistemas estruturais executados em material frágil.

Uma interpretação probabilística da teoria de Kachanov é estabelecida e abre caminho à definição de relações força-deslocamento que levam em consideração a variabilidade da resistência mecânica através da seção reta.

Examinam-se os casos de tração e flexão simples de vigas mostrando a maior coerência entre a teoria de distribuição contínua de dano e os dados experimentais.

Em trabalho a ser apresentado brevemente estendem-se os resultados a materiais com patamar de escoamento e a problemas de instabilidade de equilíbrio.

## BIBLIOGRAFIA


[1] J. Lemaître, J.L. Chaboche, "Aspect Phenoménologique de la Rupture par Endommagement", Journal de Mécanique Appliquée, vol.2, Nº 3 (1978), pp. 317-365.

[2] J. Janson, H. Hult, "Fracture Mechanics and Damage Mechanics: A Combined Approach", Journal de Mécanique Appliquée, vol. 1, Nº 1 (1977), pp. 69-84.

[3] L.M. Kachanov, "Time of the Rupture Process Under Creep Conditions", Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otd. Tekh. Nauk. NO. 8, 1958, pp. 26-31.

[4] J.L. Chaboche, "Description Thermodynamique et Phenomenologique de la Viscoplasticité Cyclique avec Endomagement", ONERA, Publication 1978-3, FR ISSN 0078-379X.

[5] F.K.G. Odqvist, "On Theories of Creep Rupture", International Symposium on Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics, Pergamon Press, London, 1964.

[6] E.L. Robinson, "Effect of Temperature Variation on the Long Time Rupture Strength of Steels", Trans. ASME, 74, (1951) pp 777.

[7] F.K.G. Odqvist, J. Erikson, "Influence of Redistribution of Stress on Brittle Creep Rupture of Thick-Walled Tubes under Internal Pressure", Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary volume, McMillan, 1963.

[8] D. Krajcinovic, "Distributed Damage Theory of Beams in Pure Bending". J. Appl. Mechanics, vol. 46, 1979, pp. 592-596.

[9] P.H. Armitage, "Statistical Aspects of Fatigue", Metallurgical Reviews, vol. 6, No. 23, 1961, pp. 353-385.

[10] A.M. Freudhental, E.J. Gumbel, "On the Statistical Interpretation of Fatigue Tests", Proc. Roy, Soc. A, vol. 216, 1952, pp. 319-331.

[11] W.D. Iwan, "A Distributed-Element Model for Hysteresis and its Steady-State Dynamic Response", Journal of Applied Mechanics, Dec. 1966, pp. 893-900.

[12] B. Epstein, "Statistical Aspects of Fracture Problems", J. Appl. Physics, 19, Feb. 1948, pp. 140-147.

[13] R. Westlund, "A Qualitative Evaluation of Phenomenological Creep Rupture Theories", J. Mechanical Eng. Science, vol. 18, No. 4, 1976, pp. 175-178.

[14] D. Krajcinovic, M.A.G. Silva, "Statistical Aspects of the Continuous Damage Theory"(a ser publicado).

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. III, nº 3, 1981, pp. 41 a 45



# ESTABILIDADE DE PÊNDULO INVERTIDO

**NELSON DIÓGENES DO VALLE**
**ROBERTO MÜLLER HEIDRICH**
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SUMÁRIO

*Inicialmente é feita uma pequena introdução sobre equações diferenciais não lineares, estabilidade de soluções periódicas e equações diferenciais lineares de coeficientes periódicos. O movimento de um pêndulo simples para pequenas amplitudes de vibração com excitação periódica pelo apoio é descrito por uma equação diferencial linear de coeficientes periódicos. A partir da chamada "carta de estabilidade", para a referida equação, obtém-se teoricamente as condições de estabilidade do pêndulo. Uma montagem experimental comprova o valor teórico obtido.*

## INTRODUÇÃO

Sistema não linear. Quando se estuda vibrações faz-se uso, em geral, de hipóteses simplificativas de modo a linearizar os sistemas. Exemplo disso é o caso em que se toma como sendo constante a relação entre a força de mola e o deslocamento em um sistema mecânico constituído de massa e mola. Tal simplificação não é mais válida se as amplitudes forem grandes, fazendo com que o sistema se torne não linear.

Bastante comuns são ainda as vibrações não lineares que aparecem pelo atrito entre elementos. Vibrações originadas pelo deslocamento do carro de uma máquina operatriz com baixa velocidade sobre as guias da mesma, é um exemplo de tal fenômeno, conhecido na literatura inglesa como "stick-slip". Outro exemplo é o das vibrações autoexcitadas que aparecem entre as ferramentas de corte e as peças durante a usinagem.

Vibrações não lineares aparecem, também, em sistemas mecânicos que apresentam folga entre seus elementos.

Solução de sistema não linear. Em geral não existe procedimentos analíticos para se determinar a solução geral de uma equação não linear, como no caso de equações diferenciais lineares. Numericamente pode-se obter uma solução particular para cada conjunto de condições iniciais.

À primeira vista pode se imaginar que existam infinitas soluções, para os infinitos conjuntos de condições iniciais possíveis. Isto nem sempre é verdade. Pois pode existir finitas soluções estáveis constituídas de pontos de equilíbrio estável e, ou soluções limitadas. Assim sendo, desde que o sistema seja colocado dentro da região de atração de um ponto de equilíbrio, ou dentro de uma região de atração de uma solução limitada, ele tenderá para este ponto ou para esta solução, respectivamente. Determinadas as separatrizes que delimitam as regiões de atração destas soluções estáveis, tem-se o sistema perfeitamente conhecido no que diz respeito à influência na mudança das condições iniciais sobre a solução final do problema.

A influência de distintos conjuntos de parâmetros no comportamento do sistema, poderá ainda ser verificada ao repetir-se o estudo dos pontos de equilíbrio e soluções limitadas para cada conjunto de parâmetros.

Assim sendo, pode ser previsto o comportamento do sistema para distintas condições iniciais e distintos parâmetros.

Pesquisa da estabilidade de solução. Determinados os pontos de equilíbrio através da consideração que suas velocidades e acelerações são nulas, passa-se ao estudo da estabilidade dos mesmos. Para tal lineariza-se a equação diferencial numa pequena vizinhança no ponto de equilíbrio |1|, usando a série de Taylor. Obtém-se então uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, cuja estabilidade é facilmente verificável.

Soluções limitadas importantes são as soluções periódicas obtenÍveis através de métodos aproximados, tais como das pertubações |5|, das aproximações sucessivas |1|, e da comparação de Fourier |1| e o de Galerkin |6|.

Substituída a solução periódica, assim obtida, na equação diferencial não linear e desenvolvendo o termo não linear segundo Taylor obtém-se uma equação diferencial linear com coefifientes periódicos. Tal equação por sua vez pode se transformar em uma equação de Hill. Se esta última for estável, então a solução periódica da equação diferencial não linear original também o será.

Então, estudando-se a equação de Hill poder-se-á verificar a estabilidade de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares.

ESTABILIDADE DE SOLUÇÃO PERIÓDICA

Considere-se a equação diferencial não linear de segunda ordem

$$\ddot{x} + H(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad (1)$$

e seja $x = \phi(t)$ uma solução periódica, limitada, de perÍodo T, da equação (1).

Considere-se o movimento perturbado

$$x(t) = \phi(t) + u(t) \qquad (2)$$

onde $u(t)$ é a pertubação.

Substituindo a expressão (2) na equação (1) tem-se

$$\ddot{u} + F(u, \dot{u}, t) = 0 \qquad (3)$$

onde $F(u,\dot{u},t) = H(\phi + u, \dot{\phi} + \dot{u}, t) - H(\phi, \dot{\phi}, t)$ (4)

Das equações (3) e (4) pode-se comprovar que $u(t) = 0$ é solução da equação (3).

Assim sendo, pesquisar a estabilidade da solução periódica $x = \phi(t)$, corresponde estudar a estabilidade de $u(t) = 0$.

Desenvolvendo $F(u, \dot{u}, t)$ em série de Taylor na vizinhança do ponto $(u, \dot{u}) = (0,0)$,

$$F(u,\dot{u},t) = F(0,0,t) + \frac{\partial F}{\partial u}(0,0,t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(0,0,t)\dot{u} + F_2(u,\dot{u},t) \qquad (5)$$

onde $F_2(u,\dot{u},t)$ contém as derivadas de $F(u,\dot{u},t)$ de ordem maior ou igual a 2 em $u$ e $\dot{u}$.

Chamando

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0,t) = q(t) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(0,0,t) = p(t)$$

obtém-se a equação variacional linearizada

$$\ddot{u} + p(t)\,\dot{u} + q(t)\,u = 0, \qquad (6)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são T-periódicos.

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = V\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t p(\tau)d\tau} \qquad (7)$$

Substituindo u, dado por (7) e suas derivadas em (6), obtém-se a equação de Hill.

$$\ddot{V} + (\lambda + \phi(t))V = 0 \qquad (8)$$

onde $(\lambda + \phi(t)) = (q - \frac{p^2}{4} - \frac{\dot{p}}{2})$ é T-periódico.

Seja $\int_0^t p(\tau)\,d\tau \neq -\infty$, resolvida a equação (8) e sendo $V(t)$ limitada para qualquer tempo t, da equação (7), u também o será.

Pode haver o caso em que $V(t)$, além de limitada tende a zero quando t tende a infinito neste caso $x = \phi(t)$ é dita assintoticamente estável. Isto significa que uma perturbação pequena que retira o sistema da solução periódica $x = \phi(t)$, desaparecerá com o tempo, fazendo com que o sistema volte a esta solução $\phi(t)$. A solução seria instável no caso de $V(t)$ ser ilimitada.

## EQUAÇÃO DO PÊNDULO SIMPLES EXCITADO PELO APOIO

Considerando o pêndulo simples esquematizado na figura 1.

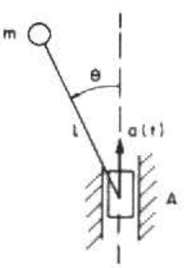



Fig. 1 Pêndulo simples invertido

Levando em conta o somatório dos momentos em relação ao ponto de apoio A, obtém-se para valores pequenos de $\Theta$

$$\ddot{\Theta} + \frac{1}{\ell}(-g + \ddot{a})\Theta = 0 \qquad (9)$$

Se a aceleração $\ddot{a}$ for periódica, a equação (9) tem a forma da equação de Hill dada em (8), equivalendo

$$\Theta = V \qquad \lambda = -g/\ell \qquad \phi(t) = \ddot{a}/\ell$$

## EQUAÇÃO DE MATHIEU

A equação de Mathieu é uma particularização da equação de Hill com a função periódica $\phi(t)$ constituída de um único harmônico.

A partir da equação (9) considerando $a = -a_0 \cos \Omega t$ e fazendo a mudança de variável $\sigma = \Omega t$, obtem-se a equação adimensional

$$\Theta'' + (\lambda + \mu \cos \sigma)\Theta = 0 \qquad (10)$$

onde $\Theta'' = d/d\sigma$

$$\lambda = -g/\ell\ \Omega^2 \qquad (11a)$$

$$\mu = a_0/\ell \qquad (11b)$$

A equação de Mathieu (10) para o caso de $\mu \ll 1$ pode ser resolvida através do método das perturbações ou aproximações sucessivas.

Para $\mu$ da ordem de 1 ou maior, ela pode ser resolvida através da comparação de Fourier ou método de Galerkin.

Para o estudo da estabilidade da equação de Mathieu, os resultados dos métodos indicados acima já foram a muito determinados, existindo inclusive a carta de estabilidade em função dos parâmetros $\mu$ e $\lambda$ (ver figura 2). |4|.

Na figura 2, $\lambda < 0$ corresponde ao pêndulo invertido. O valor $\lambda > 0$ corresponde ao pêndulo na posição normal, isto é massa abaixo do ponto de apoio.

As curvas da figura 2 são dadas pelas expressões:

$$\tau_0:\ \lambda = -\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{7}{32}\mu^4 - \dots \qquad \tau_{1/2}:\ \lambda = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2 + \dots$$

$$\sigma_{1/2}:\ \lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2 - \dots \qquad \tau_1:\ \lambda = 1 + \frac{5}{12}\mu^2$$

$$\sigma_1:\ \lambda = 1 - \frac{1}{12}\mu^2 + \dots \qquad \tau_{3/2}:\ \lambda = \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\mu^2 - \dots$$

$$\sigma_{3/2}:\ \lambda = \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\mu^2 + \dots \qquad \sigma_2:\ \lambda = 4 + \frac{1}{30}\mu^2 + \dots \qquad (12)$$

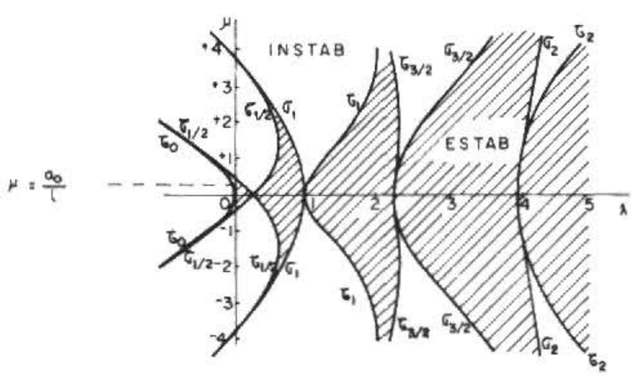



Fig. 2 Carta de estabilidade da equação de Mathieu

## CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE OBTIDA ANALITICAMENTE

Para a análise teórica usa-se como ponto de partida a carta de estabilidade apresentada na figura 2, determinada a partir das expressões (12).

Será estudado um pêndulo invertido acoplado a um sistema biela-manivela (ver Fig. 3). Este sistema, desde que

$$\frac{\text{comprimento da biela}}{\text{raio da manivela}} >> 1,$$

gera praticamente uma vibração periódica constituída de um harmônico puro dado por $a = a_0 \cos \Omega t$, onde $a_0$ é o raio da manivela.

Considerando as expressões (11a) e (11b) segue para um pêndulo invertido com $a_0 << \ell$ : $\lambda < 0$ e $\mu << 1$. Nestas condições, a curva limite de estabilidade é a $\tau_0$ das expressões (12), podendo-se desprezar os termos de ordem maior do que 2 em $\mu$. Considerando-se $2\pi f = \Omega$ obtem-se a partir de $\tau_0$, (11a) e (11b)

$$f = \frac{60}{2\pi} \frac{\sqrt{2g}}{a_0} \sqrt{\ell} \text{ (rpm)} \tag{13}$$

Escolhido um par de valores $(a_0, \ell)$ e substituindo-se na expressão (13) pode-se calcular uma rotação f limite. Mantidos fixos os valores previamente escolhidos $(a_0 \ell)$ e aumentando f acima daquela rotação limite tem-se pontos sobre uma reta $\mu = a_0/\ell$, delimitados pelas curvas $\lambda = 0$ e $\tau_0$ (ver Fig. 2) que são pontos de estabilidade. Por outro lado diminuindo-se $\Omega$ ter-se-á pontos da mesma reta $\mu = a_0/\ell$ na região delimitada pelas curvas $\mu = 0$ e $\tau_0$ que são pontos de instabilidade.

## VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DA ESTABILIDADE

O esquema da montagem para a verificação experimental da estabilidade está apresentado na Fig. 3.

Atuando no regulador R pode ser variada a velocidade do motor M entre 0 e 4000 rpm. O motor aciona a manivela Mv que por sua vez está acoplada à biela B.

O movimento da extremidade superior da biela excita o pêndulo invertido $(\ell, m)$.

Com a lâmpada estroboscópica L pode-se medir a rotação do motor indicada em rpm.

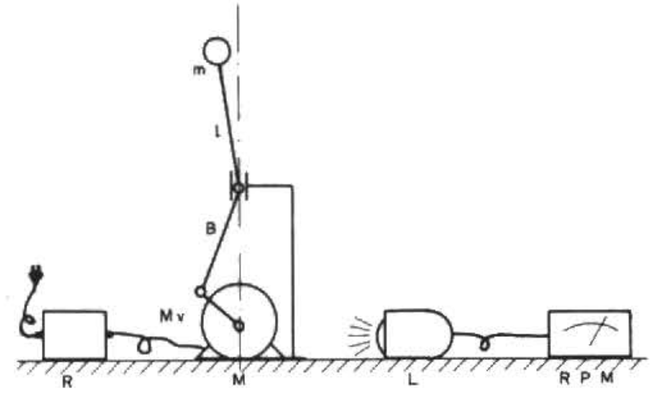



Fig. 3 Sistema e equipamento utilizado para a verificação da estabilidade

## CONCLUSÕES

Foi ensaiado um pêndulo invertido com $a_0 = 0{,}85$ e $\ell = 15$ cm. Nestas condições a rotação limite segundo a equação (13) é $f = 1927$ rpm.

Testando o sistema para o caso de $f \approx 2000$ rpm, verifica-se que o sistema é estável. Para rotações um pouco menores o sistema tornava-se instável de acordo com a teoria.

Teoricamente poder-se-ia aumentar indefinidamente a rotação do motor acima de 1927 rpm continuando o sistema estável (compare expressão (11a) e Fig. 2).

Praticamente verificou-se que rotações pouco maiores do que 2000 rpm causavam vibrações laterais da haste que foi utilzada para a construção do pêndulo, não se podendo comprovar a estabilidade para freqüências maiores.

## REFERÊNCIAS

1. E. Bromundt, Nichtlineare Schwingungen Vorlesungs Manuskript, Technische Universitat, Braunschweig, 1976.

2. N.V. Butenin, Elements of the theory of nonlinear oscilations, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London, 1965.

3. N. Forbat, Analytische Mechanik der Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

4. H. Kauderer, Nichtlineare Mechanik, Spinger Verlag, 1958.

5. J.J. Stoker, Nonlinear vibration, Interscience Publishers, New York, London, Sydney, 1966.

6. M. Urabe, Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5(1969), 79-112.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and tecnological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280mm – with a letter containing title of the papers, name (s) of the institution (s) and author (s)' address (es).

Together with the letter, the author (s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

*Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.*

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author (s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.



Subscriptions

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO