

VOL. III - Nº 4 - 1981

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Exceção em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora. Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1981, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

Assinaturas

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

ISSN 0100-7386

**REVISTA
BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS**

VOL. III, nº 4, 1981



patrocinada pela

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

CONSELHO DIRETOR

Arno Blass (Presidente); Hans Ingo Weber; Sérgio Colle;
Guilherme Creus; Raul Guenther; Samir Nagi Yousri Gerges

EDITOR RESPONSÁVEL

L. Bevilacqua

EDITOR EXECUTIVO

R. Sampaio

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J.J. de Espíndola

R. A. Feijóo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarini

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Aplicação de Técnicas Variacionais ao Problema de Estruturas com Movimento Prescrito nos Apoios

Augusto C. N. R. Galeão

Hélio J. C. Barbosa

Laboratório de Computação Científica – CNPq

3

Teoria Intrínseca de Superfícies Singulares

J. C. Leite dos Santos

Inst. Matemática/UFS

Dept^o Eng. Mecânica/PUC-RJ

Rubens Sampaio

Dept^o Eng. Mecânica/PUC-RJ

13

Dinâmica da Partícula Sólida: Efeito da Forma da Partícula

Giulio Massarani

Escola de Química

COPPE/UFRJ

23

Influência do Atrito no Forjamento a Frio de Placas Retangulares

Guilherme J. P. Moreira

Dept^o Materiais/FEG-UNESP

Pesquisador Assistente EAV/IAE/CTA

Hazim A. Al-Qureshi

Div. Eng. Mecânica

Inst. Tecnológico de Aeronáutica

31

EDITORA CAMPUS

APLICAÇÃO DE TÉCNICAS VARIACIONAIS AO PROBLEMA DE ESTRUTURAS COM MOVIMENTO PRESCRITO NOS APOIOS

AUGUSTO C. N. R. GALEÃO
HÉLIO J. C. BARBOSA
LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – CNPq
Av. Wenceslau Braz 71 fundos
22290 Rio de Janeiro RJ

SUMÁRIO

Neste trabalho mostra-se que problemas envolvendo a resposta dinâmica de estruturas sujeitas a movimentos de apoios podem ser adequadamente simulados utilizando-se molas de rigidez elevada para representar o relaxamento das condições de contorno prescritas. Esta técnica permite a inclusão dos termos de excitação associados ao acoplamento entre os graus de liberdade livres e aqueles com movimento imposto sem alterar o esquema convencional de montagem do método dos elementos finitos. Mostra-se também, através de exemplos numéricos, a influência da consideração ou não desses termos sobre a resposta do sistema.

INTRODUÇÃO

A necessidade de se cumprir com os requisitos de segurança na indústria nuclear leva a problemas envolvendo a análise sísmica de estruturas e componentes de centrais nucleares, entre os quais os sistemas de tubulações.

Como normalmente tais tubulações estão ligadas a diferentes prédios ou ainda ancoradas em um mesmo prédio, porém em níveis distintos, uma situação usual consistiria em avaliar os esforços causados pelo movimento dos apoios segundo direções quaisquer e com diferentes histórias no tempo.

Problemas dessa natureza correspondem, matematicamente, a equações diferenciais com condições de contorno geométricas não-homogêneas.

Embora formuladas para estruturas contínuas, nas referências [1,2] as equações do problema são escritas diretamente na forma discretizada, envolvendo matrizes e vetores conhecidos na literatura técnica como matrizes de massa e de rigidez e vetores de deslocamentos, acelerações

e excitações.

Na referência [3] esse problema é formulado dentro da teoria da elasticidade infinitesimal chegando-se, através do método dos elementos finitos, ao mesmo sistema de equações discretas.

Outros trabalhos [4,5,6] partindo das equações já discretizadas procuram comparar a performance de diferentes técnicas de obtenção da resposta: integração direta, superposição modal e resposta espectral.

Os trabalhos [4,7] discutem programas especialmente elaborados com a finalidade de obter a solução numérica deste problema. Ambos os programas empregam a técnica de molas de rigidez elevada para simular deslocamentos prescritos nos apoios, técnica esta que já era utilizada em problemas estáticos [8].

Neste trabalho, usando-se uma formulação variacional, mostra-se que esta técnica é equivalente ao relaxamento das condições de contorno através de uma função de penalização [9]. Com

essa formulação demonstra-se na referência [10] a convergência do processo quando aplicado a este problema dinâmico.

Por último, justifica-se a implementação deste procedimento, mostrando-se que com o mesmo consegue-se uma melhor representação das forças de inércia provenientes do movimento dos apoios mantendo-se inalterado o esquema convencional de montagem das matrizes globais do Método dos Elementos Finitos.

Este último aspecto é discutido em alguns exemplos específicos, onde se busca fundamentalmente analisar a influência dos termos de acoplamento sobre a resposta da estrutura.

Os resultados obtidos indicam que a ausência de tais termos, na formulação do problema, pode levar a erros sensíveis na resposta se se usa uma discretização pobre. Isso está de acordo com resultados mostrados em [2]. No entanto, conforme será visto, o uso de uma discretização mais refinada nas proximidades dos apoios é capaz de reduzir sensivelmente aqueles erros.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Se não se consideram forças de massa, e admite-se elasticidade infinitesimal, o problema da determinação da resposta dinâmica de corpos elásticos submetidos a movimentos de apoios consiste em obter o campo de deslocamentos $\underline{w}(\underline{x}, t)$ satisfazendo:

- Equação do movimento,

$$\text{div } \underline{\sigma} - \rho \underline{\ddot{w}} = \underline{0} \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

- Condições de contorno

$$\underline{w}(\underline{x}, t) = \underline{g}(\underline{x}, t) \quad \text{em } \partial\Omega_D \quad (2a-b)$$

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0} \quad \text{em } \partial\Omega_F$$

- Condições iniciais

$$\underline{w}(\underline{x}, 0) = \underline{0} \quad \text{em } \Omega \quad (3a-b)$$

$$\underline{\dot{w}}(\underline{x}, 0) = \underline{0}$$

- Equação cinemática

$$\underline{\varepsilon}(\underline{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{w} + \nabla \underline{w}^T) \quad (4)$$

- Equação constitutiva

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{w}) \quad (5)$$

Nas relações anteriores $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ e \underline{D} são respectivamente os tensores de tensão e deformação, e o tensor constitutivo. \underline{w} , $\underline{\dot{w}}$ e $\underline{\ddot{w}}$ representam respectivamente os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações, e \underline{n} é a normal exterior ao contorno $\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_D$. ρ é a massa específica e os símbolos div e ∇ denotam divergência e gradiente.

O movimento dos pontos do contorno $\partial\Omega_D$ ($\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_F = \text{vazio}$) é definido pela função $\underline{g}(\underline{x}, t)$ que satisfaz no instante inicial

$$\underline{g}(\underline{x}, 0) = \underline{\dot{g}}(\underline{x}, 0) = \underline{0} \quad (6)$$

A formulação variacional deste problema pode ser feita, utilizando-se o método de Galerkin. Assim, para cada t , tem-se de (1):

$$\int_{\Omega} (\text{div } \underline{\sigma} - \rho \underline{\ddot{w}}) \cdot \underline{\tilde{w}} \, dV = 0 \quad (7)$$

onde (\cdot) denota produto escalar. Na equação anterior $\underline{\tilde{w}}(\underline{x}, t)$ é o campo de deslocamentos virtuais, assumido suficientemente diferenciável, e tal que no contorno $\partial\Omega_D$ satisfaz:

$$\underline{\tilde{w}}(\underline{x})|_{\partial\Omega_D} = \underline{0} \quad (8)$$

Usando-se a identidade:

$$\text{div } \underline{\sigma} \cdot \underline{\tilde{w}} = \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{\tilde{w}}) - \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{\tilde{w}} \quad (9)$$

e aplicando-se o teorema da divergência, vem:

$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{\sigma} \cdot \underline{\tilde{w}} \, dV = - \int_{\Omega} \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{\tilde{w}} \, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{\tilde{w}} \, dA \quad (10)$$

Em vista da condição de contorno (2b) e da definição de $\underline{\tilde{w}}$ (eq. 8) a integral no contorno é identicamente nula, e portanto a equação (7) reduz-se a:

$$\int_{\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{\tilde{w}} + \rho \underline{\tilde{w}} \cdot \underline{\ddot{w}}) \, dV = 0 ; \forall \underline{\tilde{w}} \quad (11)$$

Da simetria de $\underline{\sigma}$ e das definições (4) e (5) vem:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{w}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{w}} \cdot \underline{\bar{w}} dV = 0 ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (12)$$

Assim, o problema variacional consiste em: determinar $\underline{w}(x,t)$ satisfazendo a condição de contorno (eq. 2a), o princípio dos trabalhos virtuais (eq. 12) e as condições iniciais (eqs. 3a-b).

Neste ponto é conveniente introduzir a mudança de variáveis:

$$\underline{w}(x,t) = \underline{u}(x,t) + \underline{v}(x,t) \quad (13)$$

onde \underline{u} e \underline{v} são campos cinematicamente admissíveis, arbitrários, mas escolhidos de forma a cumprir com:

$$\underline{u}(x,t) = \underline{0} ; \underline{v}(x,t) = \underline{g}(x,t) \text{ em } \partial\Omega_d \quad (14)$$

Substituindo-se (13) em (12), vem:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{\bar{w}} dV = 0 \quad (15)$$

Como \underline{u} e \underline{v} são arbitrários pode-se adotar: Problema P1. \underline{v} satisfazendo:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV = 0 ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (16)$$

Problema P2. \underline{u} solução de:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\bar{w}} dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\ddot{v}} \cdot \underline{\bar{w}} dV ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (17)$$

Para cada t fixo, $\underline{v}(x,t)$ é, portanto, a solução de um problema estático correspondente à aplicação dos deslocamentos prescritos $\underline{g}(x,t)$.

A equação (17) representa um problema de resposta dinâmica forçada onde o termo de excitação provém do campo de acelerações $\underline{\ddot{v}}(x,t)$ induzido pelo movimento dos apoios.

Do ponto de vista prático, essa mudança de variáveis adapta-se bem aos problemas de análise sísmica de estruturas, onde o dado de entrada é normalmente fornecido em termos das acele-

rações dos apoios. Além disso, é importante do ponto de vista da verificação de tensões[5] distinguir esforços causados pelo movimento diferenciado dos apoios (esforços secundários na classificação das normas [11]), dos esforços primários, estes provenientes das forças de inércia devidas à aceleração dos apoios.

Uma característica da formulação variacional associada com a equação (12) é a necessidade de a satisfação em forma exata da condição de contorno não-homogênea (2a).

Este inconveniente pode ser superado relaxando-se essa condição de contorno, via técnica de multiplicadores de Lagrange. Em termos do método de Galerkin isto é equivalente a exigir que no contorno $\partial\Omega_d$, se tenha:

$$\int_{\partial\Omega_d} (\underline{w} - \underline{g}) \cdot \underline{\lambda} dA = 0 ; \forall \underline{\lambda} \quad (18)$$

Usando-se as equações (18), (7), (10), (4) e (5), e observando-se que neste caso $\underline{\bar{w}}$ é livre no contorno, vem:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{w}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{w}} \cdot \underline{\bar{w}} dV - \int_{\partial\Omega_d} [\underline{\lambda} \cdot \underline{\bar{w}} + (\underline{w} - \underline{g}) \cdot \underline{\lambda}] dA = 0 ; \forall \underline{\bar{w}} \text{ e } \underline{\lambda} \quad (19)$$

Neste caso a formulação variacional consiste em obter o par $(\underline{w}, \underline{\lambda})$ satisfazendo (19), mais condições iniciais (eqs. 3a-b), e que fornece como condição natural:

$$\underline{w}(x,t) = \underline{g}(x,t) \quad \text{em } \partial\Omega_d \quad (20a-b)$$

$$\underline{\lambda}(x,t) = \underline{\sigma} \underline{n}$$

Com isso consegue-se relaxar a condição de contorno essencial, mas em contrapartida se é obrigado a trabalhar com dois campos $(\underline{w}, \underline{\lambda})$.

Reconhece-se nessa formulação que $(-\underline{\lambda})$ representa a reação de apoio no ponto $x \in \partial\Omega_d$.

Se para o campo $\underline{\lambda}(x,t)$ é assumido:

$$\underline{\lambda} = \underline{\sigma} \underline{n} = -k(\underline{w} - \underline{g}) \quad (21)$$

o que fisicamente corresponde a simular a reação de apoio como uma força elástica linear (k é a constante elástica), então $\underline{\lambda}$ e \underline{w} não podem variar livremente.

Neste caso:

$$\underline{\lambda} = -k \underline{\bar{w}} \quad (22)$$

e o princípio variacional fica sendo:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{w}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho \underline{\bar{w}} \cdot \underline{\bar{w}} dV + \int_{\partial\Omega_d} k(\underline{w}-\underline{g}) \cdot \underline{\bar{w}} dA = 0 ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (23)$$

com a vantagem de se trabalhar exclusivamente com o campo $\underline{w}(\underline{x}, t)$, relaxando artificialmente a condição de contorno prescrita em termos de deslocamentos.

Para cada valor de k existirá uma solução $\underline{w}_k(\underline{x}, t)$ de (23) e um correspondente $\underline{\lambda}_k$ (eq. 21). Fazendo-se $k \rightarrow \infty$ a sequência $\{\underline{w}_k\}$ converge [10] para

$$\underline{w} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{w}_k \quad (24)$$

solução do problema (12). Tem-se assim definido um esquema de penalização [9].

Um experimento numérico dessa convergência será mostrado mais adiante no exemplo 1.

Uma vez estabelecida a equação (23) pode-se, usando a mesma mudança de variáveis previamente utilizada (eq. 13), separar o problema original em dois outros; o primeiro que fornece a solução quase-estática, e o segundo representando o problema dinâmico propriamente dito.

Assim substituindo-se (13) em (23), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{\bar{w}} dV + \int_{\partial\Omega_d} k \underline{u} \cdot \underline{\bar{w}} dA + \int_{\Omega} \rho \underline{v} \cdot \underline{\bar{w}} dV + \int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\partial\Omega_d} k(\underline{v}-\underline{g}) \cdot \underline{\bar{w}} dA = 0 ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (25)$$

Como \underline{v} e \underline{u} são arbitrários pode-se escolher: Problema P3. \underline{v} satisfazendo:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\partial\Omega_d} k(\underline{v}-\underline{g}) \cdot \underline{\bar{w}} dA ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (26)$$

Problema P4. \underline{u} satisfazendo:

$$\int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{\bar{w}}) dV + \int_{\partial\Omega_d} k \underline{u} \cdot \underline{\bar{w}} dA + \int_{\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{\bar{w}} dV = - \int_{\Omega} \rho \underline{v} \cdot \underline{\bar{w}} dV ; \forall \underline{\bar{w}} \quad (27)$$

A seguir, soluções aproximadas dos problemas (P1), (P2), (P3) e (P4) serão construídas utilizando-se o método dos elementos finitos.

SOLUÇÕES APROXIMADAS

Utilizando-se o procedimento padrão do M. E.F. na construção dos espaços de aproximação, a região Ω é particionada em sub-regiões (elementos finitos), conectadas através de pontos nodais.

Para o problema P1, equação (16), a função $\underline{v}(\underline{x}, t)$ é aproximada por:

$$\underline{v}''(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\underline{x}) v_j(t) + \sum_{k=1}^p \phi_{n+k}(\underline{x}) \bar{g}_k(t) \quad (28)$$

onde as ϕ_{ℓ} ($\ell=1, 2, \dots, n+p$) são as interpolantes globais (construídas a partir das funções de interpolação local). v_j ($j=1, \dots, n$) representam os deslocamentos generalizados (incógnitas do problema) e \bar{g}_j ($j=1, \dots, p$) são os parâmetros nodais conhecidos (correspondem aos graus de liberdade associados aos nós do contorno com deslocamentos prescritos).

Para os deslocamentos virtuais a interpolação é:

$$\underline{\bar{w}} = \sum_{j=1}^n \phi_j \underline{\bar{w}}_j \quad (29)$$

A substituição de (29) e (28) em (16) conduz a um sistema de n equações algébricas da forma:

$$[K]\{V\} = \{G\} \quad (30)$$

onde $\{V\}$ é o vetor das incógnitas nodais v_j , e $[K]$ é a matriz de rigidez ($n \times n$) cujos elementos K_{ij} são:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\phi_j) \cdot \underline{\varepsilon}(\phi_i) dV ; i, j=1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

O vetor dos termos independentes está constituído de elementos G_i dados por:

$$G_i = - \sum_{k=1}^p \int_{\Omega} \underline{D} \underline{\varepsilon}(\phi_{n+k}) \cdot \underline{\varepsilon}(\phi_i) dV \cdot \bar{g}_k(t) \quad i=1, \dots, n \quad (32)$$

Matricialmente {G} pode ser escrito como:

$$\{G\} = -[A]\{\bar{g}\} \quad (33)$$

onde os elementos A_{ik} da matriz retangular [A] (n x p) são:

$$A_{ik} = \int_{\Omega} D \underline{\epsilon}(\phi_{n+k}) \cdot \underline{\epsilon}(\phi_i) dV ; \quad i=1,2,\dots,n ; k=1,2,\dots,p \quad (34)$$

e {g} é o vetor das funções $\bar{g}_k(t)$ (k=1,2,...,p).

Usando-se (33) a solução de (30) é:

$$\{V\} = -[K]^{-1}[A]\{\bar{g}\} \quad (35)$$

e portanto de acordo com (28), a descrição espacial da função $\underline{v}^h(\underline{x},t)$ será:

$$\underline{v}^h(\underline{x},t) = - \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^p \phi_j(\underline{x}) K_{jr}^{-1} A_{rs} \underline{v}_s(t) + \sum_{k=1}^p \phi_{n+k}(\underline{x}) \bar{g}_k(t) \quad (36)$$

onde com K_{jr}^{-1} se está representando um elemento genérico de $[K]^{-1}$.

Uma vez obtida a função $\underline{v}^h(\underline{x},t)$ a aproximação para a aceleração \bar{e} , de acordo com (36), dá-se por:

$$\underline{v}^h(\underline{x},t) = - \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^p \phi_j(\underline{x}) K_{jr}^{-1} A_{rs} \bar{g}_s(t) + \sum_{k=1}^p \phi_{n+k}(\underline{x}) \bar{g}_k(t) \quad (37)$$

onde: $\bar{g}_k(t)$ (k=1,...,p) representam as acelerações generalizadas correspondentes aos graus de liberdade associados aos nós do contorno com deslocamentos prescritos.

Para a solução do Problema P2 os deslocamentos $\underline{u}(\underline{x},t)$, e as acelerações $\underline{\ddot{u}}(\underline{x},t)$ são interpoladas usando-se as mesmas funções base ϕ_j (j=1,...,n) adotadas anteriormente, ou seja:

$$\begin{aligned} \underline{u}^h(\underline{x},t) &= \sum_{j=1}^n \phi_j(\underline{x}) U_j(t) \\ \underline{\ddot{u}}^h(\underline{x},t) &= \sum_{j=1}^n \phi_j(\underline{x}) \ddot{U}_j(t) \end{aligned} \quad (38a-b)$$

Levando-se essas relações em (17) e usando-se a definição (37) chega-se a um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = ([M][K]^{-1}[A] - [B])\{\bar{g}\} \quad (39)$$

onde {U} e {U} são os vetores das acelerações e deslocamentos nodais respectivamente, e os elementos M_{ij} da matriz de massa [M] (n x n) estão dados por:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_j(\underline{x}) \cdot \phi_i(\underline{x}) dV ; \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (40)$$

A matriz [K] é a mesma matriz de rigidez já obtida anteriormente (eq. 31). {g} é o vetor das acelerações nodais conhecidas, e a matriz retangular [B] (n x p) representa o acoplamento entre os graus de liberdade livres e aqueles associados com os nós com aceleração imposta. Um elemento genérico dessa matriz é expresso por:

$$B_{ik} = \int_{\Omega} \phi_{n+k} \cdot \phi_i dV \quad i=1,2,\dots,n ; k=1,2,\dots,p \quad (42)$$

Uma vez que se conheçam os valores nodais {U} em cada instante de tempo (integração de (39)) a solução aproximada $\underline{u}^h(\underline{x},t)$ é obtida de (38), e a solução geral $\underline{w}^h(\underline{x},t)$ é determinada de (13) usando-se (38a) e (28). Finalmente as tensões são calculadas utilizando-se (4) e (5) completando-se desta forma a análise do problema.

Se se utiliza a formulação variacional que relaxa a condição de contorno, os deslocamentos $\underline{v}(\underline{x},t)$ correspondentes ao Problema P3, serão aproximados por:

$$\underline{v}^h(\underline{x},t) = \sum_{\ell=1}^n \phi_{\ell}(\underline{x}) V_{\ell}(t) + \sum_{r=1}^p \phi_{n+r}(\underline{x}) V_{n+r}(t) \quad (43)$$

onde as ϕ_i (i=1,2,...,n+p) são as interpolantes globais. V_{n+r} (r=1,...,p) representam os deslocamentos generalizados associados aos nós pertencentes ao contorno com movimento prescrito e V_{ℓ} (l=1,...,n) correspondem aos graus de liberdade restantes.

Da mesma forma para os deslocamentos virtuais escreve-se:

$$\bar{w}^h = \sum_{\ell=1}^n \phi_{\ell} \bar{W}_{\ell} + \sum_{r=1}^p \phi_{n+r} \bar{W}_{n+r} \quad (44)$$

e portanto em termos dessa aproximação a equa-

ção (26) é escrita como:

$$\int_{\Omega} D \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{v}^h) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{w}^h) dV + \int_{\partial\Omega} k(\underline{v}^h - \underline{g}) \cdot \underline{w}^h dA; \forall \underline{w}^h. \quad (45)$$

Se os apoios são discretos, a segunda integral em (45) reduz-se a uma somatória. Se os apoios são contínuos, o uso de molas em pontos discretos e associadas a cada grau de liberdade com deslocamento prescrito permite aproximar a integral no contorno pela somatória.

Procedendo-se dessa forma chega-se a um sistema de $(n+p)$ equações algébricas da forma:

$$[K]\{V(t)\} = \{G(t)\} \quad (46)$$

onde

$$K_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} D \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_j) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_i) dV & i=1,2,\dots,n \\ & j=1,2,\dots,n+p \\ \int_{\Omega} D \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_j) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_i) dV + \delta_{ij} k & i,j=n+1,\dots,n+p \\ \int_{\Omega} D \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_j) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\phi_i) dV & i=n+1,\dots,n+p \\ & j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (47)$$

$$G_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \leq n \\ k \bar{g}_r(t) & \text{para } n < i \leq n+p \end{cases} \quad (48)$$

sendo que $\bar{g}_r(t)$ representa o deslocamento prescrito associado ao grau de liberdade V_{n+r} , $r=1,2,\dots,p$, e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Usando-se (46) pode-se determinar o campo de deslocamentos $\underline{v}^h(\underline{x},t)$ e portanto o campo de acelerações $\underline{\ddot{v}}^h(\underline{x},t)$ dado por:

$$\underline{\ddot{v}}^h(\underline{x},t) = \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{n+p} \phi_i(\underline{x}) K_{ij}^{-1} \ddot{G}_j(t) \quad (49)$$

onde K_{ij}^{-1} representa um elemento genérico da matriz $[K]^{-1}$ de ordem $(n+p)$. Utilizando-se uma interpolação idêntica a (43) para definir o campo de deslocamentos $\underline{u}(\underline{x},t)$, e tendo em vista (49), a equação (27) conduz ao sistema de equações diferenciais:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = -[M][K]^{-1}\{\ddot{G}(t)\}, \quad (50)$$

onde o elemento genérico M_{ij} de $[M]$ $(n+pxn+p)$ é:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_j(\underline{x}) \cdot \phi_i(\underline{x}) ; i,j=1,2,\dots,n+p. \quad (51)$$

$[K]$ é a mesma matriz de rigidez obtida em (47) e

$$\{\ddot{G}\} = k \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{\ddot{g}}\} \end{Bmatrix}, \quad (52)$$

onde $\{\bar{\ddot{g}}\}$ é o mesmo vetor previamente definido em (39) e que contém as p acelerações nodais conhecidas.

Vê-se portanto que com a utilização de molas para a simulação do movimento dos apoios consegue-se representar as forças de inércia provenientes da interação entre os graus de liberdade associados com acelerações prescritas:

\ddot{V}_{n+r} ($r=1,2,\dots,p$), e os restantes graus de liberdade do sistema: \ddot{V}_l ($l=1,2,\dots,n$), com a vantagem de se manter inalterada a técnica convencional de montagem das matrizes globais de massa e rigidez. Comparar a equação (46) com a equação (30), e a equação (50) com a equação (39).

Na próxima seção serão mostrados alguns resultados numéricos obtidos com a utilização do SISTEMA TUBO [4], cuja concepção de cálculo, para o tratamento de problemas de resposta dinâmica de estruturas com movimentos de apoios, está baseada na formulação dos Problemas P3 e P4, isto é, montagem e solução das equações (46) e (50).

Antes da apresentação desses resultados é conveniente analisar alguns aspectos relacionados com as técnicas computacionais normalmente usadas na solução desses problemas.

Alguns programas automáticos de cálculo [7,8] adotam matriz de massa diagonal no tratamento de problemas em dinâmica estrutural. Com essa simplificação a matriz retangular $[B]$ (eq. 39) é sempre nula, e portanto, as forças de inércia provenientes do acoplamento entre os graus de liberdade livres e os prescritos não são computadas.

Situação semelhante ocorre quando todos os pontos do contorno estão sujeitos a um movimento homogêneo. Neste caso a solução de Pl é simplesmente:

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}(\underline{x}_0,t) + \underline{R}(t)(\underline{x}-\underline{x}_0)$$

onde o primeiro termo representa uma translação de um ponto qualquer x_0 e R representa uma rotação.

A relação anterior define um movimento de corpo rígido e obviamente neste caso $\underline{\epsilon}(\underline{v})=0$.

Assim a resolução de (30) é dispensável, e a prática comum, no caso de uma translação, é montar o vetor $\{V\}$ colocando-se 1's e 0's conforme o grau de liberdade coincida ou não com essa translação. E para manter o esquema convencional de montagem das matrizes globais, no problema dinâmico, (eq. 39) a matriz de acoplamento $[B]$ não é computada.

A influência desse efeito será discutida na próxima seção.

RESULTADOS NUMÉRICOS

No primeiro exemplo estudado analisou-se uma viga bi-apoiada cujos apoios movem-se com a mesma aceleração, caracterizada pela função $\ddot{f}(t)$ (fig. 1). Considerou-se a simetria do problema e a discretização foi feita com 4 elementos iguais.

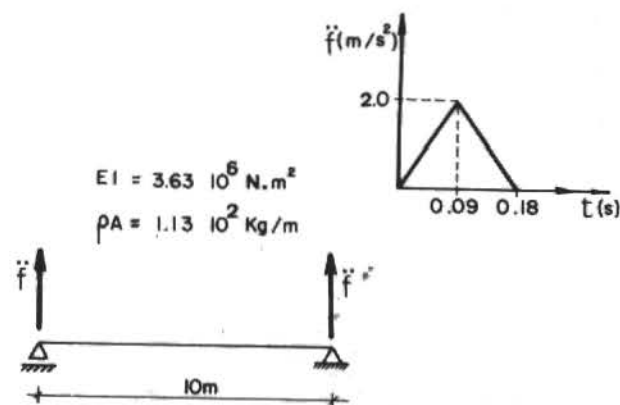


Fig. 1. Viga bi-apoiada com movimento uniforme dos apoios.

Os resultados mostrados nas tabelas 1 a 5 referem-se exclusivamente à solução do problema dinâmico (eq. 50). O problema pseudo-estático (P3) é simplesmente uma translação de corpo rígido.

Na tabela 1 estão indicados deslocamentos, velocidades e acelerações máximas dos apoios para diferentes valores da constante de mola K . Dessas tabelas verifica-se que para $K \gg EI$, esses valores tendem a zero, o que indica convergência para a solução exata.

TABELA 1

	$K = 10^4$	$K = 10^8$	$K = 10^{12}$	$K = 10^{16}$
$ u _{\max}$	$0.118 \cdot 10^{-3}$	$0.120 \cdot 10^{-7}$	$0.120 \cdot 10^{-15}$	$0.249 \cdot 10^{-15}$
$ \dot{u} _{\max}$	$0.217 \cdot 10^{-2}$	$0.249 \cdot 10^{-6}$	$0.249 \cdot 10^{-10}$	$0.249 \cdot 10^{-14}$
$ \ddot{u} _{\max}$	$0.811 \cdot 10^{-1}$	$0.342 \cdot 10^{-4}$	$0.331 \cdot 10^{-8}$	$0.331 \cdot 10^{-12}$

Nas tabelas 2 a 5 procura-se demonstrar a influência da consideração dos termos de acoplamento sobre a solução do problema. A solução exata mencionada nessas tabelas está deduzida na referência [3].

As tabelas 2 e 3 correspondem a instantes nos quais a aceleração de base ainda está atuando (fig. 1). Verifica-se dos resultados mostrados que os valores obtidos com a consideração dos termos de acoplamento são sempre mais próximos da solução exata do que aqueles obtidos sem se levar em conta esses termos.

Observa-se que quando não se consideram os termos de acoplamento os erros calculados (última coluna) são sempre maiores para os pontos mais próximos dos apoios com aceleração prescrita.

TABELA 2. Instante $t=0.009s$

Abcissa	Solução Exata	c/termos de acoplamento	Erro %	s/termos de acoplamento	Erro %
1.25	$-0.255954 \cdot 10^{-5}$	$-0.256275 \cdot 10^{-5}$	0.1254	$-0.220363 \cdot 10^{-5}$	-13.90
2.50	$-0.292156 \cdot 10^{-5}$	$-0.292324 \cdot 10^{-5}$	0.0575	$-0.284420 \cdot 10^{-5}$	-2.648
3.75	$-0.268672 \cdot 10^{-5}$	$-0.268833 \cdot 10^{-5}$	0.0599	$-0.272964 \cdot 10^{-5}$	1.597
5.00	$-0.267632 \cdot 10^{-5}$	$-0.267588 \cdot 10^{-5}$	-0.0164	$-0.267340 \cdot 10^{-5}$	-0.109

TABELA 3. Instante $t=0.180s$

Abscissa	Solução Exata	c/termos de acoplamento	Erro %	s/termos de acoplamento	Erro %
1.25	$-0.400170 \cdot 10^{-2}$	$-0.400159 \cdot 10^{-2}$	-0.0027	$-0.390911 \cdot 10^{-2}$	-2.3138
2.50	$-0.738829 \cdot 10^{-2}$	$-0.738813 \cdot 10^{-2}$	-0.0022	$-0.721851 \cdot 10^{-2}$	-2.2980
3.75	$-0.964626 \cdot 10^{-2}$	$-0.964597 \cdot 10^{-2}$	-0.0030	$-0.942572 \cdot 10^{-2}$	-2.2863
5.00	$-0.104381 \cdot 10^{-1}$	$-0.104378 \cdot 10^{-1}$	-0.0029	$-0.101999 \cdot 10^{-1}$	-2.2820

TABELA 4. Instante $t=0.240s$

Abscissa	Solução Exata	c/termos de acoplamento	Erro %	s/termos de acoplamento	Erro %
1.25	$-0.187309 \cdot 10^{-2}$	$-0.187339 \cdot 10^{-2}$	0.0160	$-0.183144 \cdot 10^{-2}$	-2.2236
2.50	$-0.346649 \cdot 10^{-2}$	$-0.346720 \cdot 10^{-2}$	0.0205	$-0.338849 \cdot 10^{-2}$	-2.2501
3.75	$-0.453601 \cdot 10^{-2}$	$-0.453696 \cdot 10^{-2}$	0.0209	$-0.443280 \cdot 10^{-2}$	-2.2753
5.00	$-0.491279 \cdot 10^{-2}$	$-0.491363 \cdot 10^{-2}$	0.0171	$-0.480040 \cdot 10^{-2}$	-2.2877

Na tabela 4 (instante $t=0.24s$) a excitação de base já não atua, a viga está em vibração livre, e os erros obtidos (última coluna) não apresentam a característica acima ressaltada.

Essas observações evidenciam a influência dos termos de acoplamento e sugerem, se os mesmos não são incluídos na análise, um maior refinamento próximo aos apoios, como forma de diminuir este efeito.

Na tabela 5 isto é analisado comparando-se os resultados obtidos com diferente número de elementos (discretização uniforme) tomados a meio vão (simetria). Vê-se que ao se empobrecer a discretização os erros crescem bem mais se não se considera o acoplamento, devido a uma pior representação da distribuição das forças de inércia.

TABELA 5. Variação do Erro com a Discretização
Abscissa = 5.0; Instante $t=0.18s$

Nº de elem.	c/termos de acoplamento	Erro %	s/termos de acoplamento	Erro %
1	$-0.104542 \cdot 10^{-1}$	1.5424	$-0.696004 \cdot 10^{-2}$	-33.3208
2	$-0.104384 \cdot 10^{-1}$	0.0029	$-0.950062 \cdot 10^{-2}$	- 8.9813
4	$-0.104378 \cdot 10^{-1}$	-0.0029	$-0.101999 \cdot 10^{-1}$	- 2.2820

Sol. exata = $-0.104381 \cdot 10^{-1}$

O segundo exemplo analisado consistiu no estudo da tubulação mostrada na figura 2 sujeita a um movimento uniforme dos apoios segundo a direção Z.

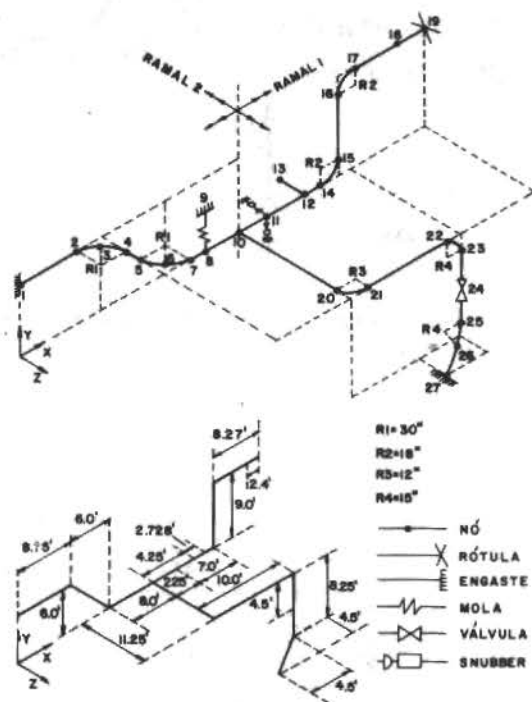


Fig. 2. Modelo Discreto da Tubulação

A aceleração aplicada aos apoios (nós 1, 9, 11, 19, 27) é a indicada na figura 3 multiplicada por um fator de escala de 0.4.

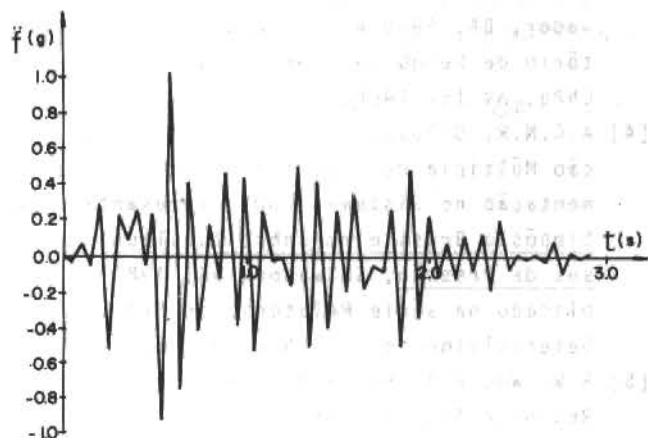


Fig. 3. Dependência temporal das acelerações (g: aceleração da gravidade)

Nas tabelas 6 e 7 mostram-se, para alguns nós, os deslocamentos segundo as direções globais X e Z avaliados no instante $t=0.1s$, bem como os seus máximos, calculados considerando-se ou não os termos de acoplamento, e determinam-se as variações percentuais causadas pela omissão desses termos.

Comparando-se com o primeiro exemplo observa-se que, mesmo para uma estrutura mais complexa submetida a uma aceleração com dependência temporal também mais complexa, a variação percentual nos resultados manteve-se praticamente dentro da mesma faixa, isto é, não ultrapassando os 15%.

Além disso, verifica-se também a mesma tendência anteriormente já observada, de que à medida que a resposta se propaga no tempo, a diferença entre as duas soluções tende a diminuir e a se distribuir mais uniformemente ao longo da estrutura.

TABELA 6. Direção X

Nós	VALORES MÁXIMOS			VALORES EM $t=0.1s$		
	c/termos de acoplamento	s/termos de acoplamento	var.rel. (%)	c/termos de acoplamento	s/termos de acoplamento	var.rel. (%)
2	$.2760 \cdot 10^{-3}$	$-.2754 \cdot 10^{-3}$	-0.22	$-.2361 \cdot 10^{-5}$	$-.2481 \cdot 10^{-5}$	5.08
10	$.4634 \cdot 10^{-1}$	$.4608 \cdot 10^{-1}$	-0.56	$-.2293 \cdot 10^{-3}$	$-.2285 \cdot 10^{-3}$	- 0.35
13	$.4757 \cdot 10^{-1}$	$.4684 \cdot 10^{-1}$	-1.53	$-.8010 \cdot 10^{-4}$	$-.9087 \cdot 10^{-4}$	13.44
20	.1864	-.1853	-0.59	$-.1510 \cdot 10^{-2}$	$-.1505 \cdot 10^{-2}$	- 0.33
26	$-.5288 \cdot 10^{-1}$	$-.5251 \cdot 10^{-1}$	-0.70	$-.1347 \cdot 10^{-3}$	$-.1332 \cdot 10^{-3}$	- 1.11

TABELA 7. Direção Z

Nós	VALORES MÁXIMOS			VALORES EM $t=0.1s$		
	c/termos de acoplamento	s/termos de acoplamento	var.rel. (%)	c/termos de acoplamento	s/termos de acoplamento	var.rel. (%)
2	$-.2482 \cdot 10^{-1}$	$-.2407 \cdot 10^{-1}$	-3.02	$-.6965 \cdot 10^{-3}$	$-.6606 \cdot 10^{-3}$	- 5.15
10	$.2639 \cdot 10^{-1}$	$.2613 \cdot 10^{-1}$	-0.99	$-.2554 \cdot 10^{-3}$	$-.2480 \cdot 10^{-3}$	- 2.90
13	$.2276 \cdot 10^{-1}$	$.2242 \cdot 10^{-1}$	-1.49	$.1442 \cdot 10^{-3}$	$.1365 \cdot 10^{-3}$	- 5.34
20	$.2661 \cdot 10^{-1}$	$.2635 \cdot 10^{-1}$	-0.98	$-.2563 \cdot 10^{-3}$	$-.2490 \cdot 10^{-3}$	- 2.85
26	$.5318 \cdot 10^{-1}$	$.5281 \cdot 10^{-1}$	-0.70	$-.1338 \cdot 10^{-3}$	$-.1325 \cdot 10^{-3}$	- 0.97

CONCLUSÕES

Viu-se que, num problema de resposta dinâmica de estruturas sujeitas a movimentos de apoios, é possível relaxar artificialmente a condição de contorno (em deslocamentos) pela introdução de molas de rigidez elevada (eq. 23) e que com essa técnica de penalização pode-se esperar convergência para a solução do problema original (eq. 12).

Quando os suportes se movem diferenciadamente obrigatoriamente se tem que resolver um problema estático de deslocamentos impostos (eq. 46) para a determinação das funções de influência. Neste caso o uso desta técnica é particularmente interessante pois mantém inalterado o esquema convencional de montagem das matrizes globais do método dos elementos finitos (as molas são tratadas como elementos comuns). Além disso, no problema dinâmico (eq. 50), consegue-se representar corretamente a distribuição das forças de inércia provenientes da aceleração dos apoios, já que os termos de acoplamento são automaticamente computados.

A análise da influência desses termos, no caso de apoios discretos submetidos a uma mesma excitação de base, mostrou que se os mesmos não são considerados os maiores erros ocorrem próximos aos apoios e nos instantes iniciais, e que à medida que o movimento se propaga esses erros tendem a diminuir, e a se distribuir ao longo da estrutura.

Isto parece indicar que, em problemas de análise sísmica de tubulações, a influência desses termos não é de grande importância. De qualquer forma, se os mesmos não são considerados, pode-se melhorar sensivelmente a representação das forças provenientes da aceleração dos apoios usando-se uma discretização mais refinada na região próxima aos mesmos.

REFERÊNCIAS

- [1] R.W. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Inc., 1975, pp. 575-578.
- [2] D.E. Shaw, "Seismic Structural Response Analysis using Consistent Mass Matrices having Dynamic Coupling", Proceedings of the IV SMIRT, paper K 3/4, San Francisco, 1977.
- [3] A.C.N.R. Galeão, H.J.C. Barbosa, "Excitação Múltipla de Suportes, Parte I: Formulação", apresentado no Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, BA, 1980 e publicado na série Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento LCC/CNPq, nº 14, 1980.
- [4] A.C.N.R. Galeão, H.J.C. Barbosa, "Excitação Múltipla de Suportes, Parte II: Implementação no Sistema TUBO", apresentado no Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, BA, 1980 e publicado na série Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento LCC/CNPq, nº 15, 1980.
- [5] R.W. Wu, F.A. Hussain, L.K. Liu, "Seismic Response Analysis of Structural Systems Subjected to Multiple Support Excitation", Nuclear Engineering and Design 47, 1978, pp. 273-282.
- [6] K.R. Leimbach, H.P. Sterkel, "Comparison of Multiple Support Excitation Solution Techniques for Piping Systems", Nuclear Engineering and Design 57, 1980, pp. 295-307.
- [7] K.R. Leimbach, H. Schmid, "Automated Analysis of Multiple Support Excitation Piping Problems", Nuclear Engineering and Design 51, 1979, pp. 245-252.
- [8] K.J. Bathe, E.L. Wilson, F.E. Peterson, "SAP-IV a Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", Report nº EERC 73-11, June 1973, University of California, Berkeley.
- [9] G. Strang, G.J. Fix, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, Inc. 1973, pp. 132-133.
- [10] C.A. Moura, A.C. Galeão, H.C. Barbosa, "Simulação de Apoios Rígidos através de Molas com Elevada Rigidez", a ser apresentado no XIV Seminário Brasileiro de Análise, nov., 1981.
- [11] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, Nuclear Power Plant Components, 1974.

TEORIA INTRÍNSECA DE SUPERFÍCIES SINGULARES

J. C. LEITE DOS SANTOS

I. MATEMÁTICA/UFS E PUC/RJ — DEPTº DE ENG. MECÂNICA

RUBENS SAMPAIO

PUC/RJ — DEPTº DE ENG. MECÂNICA

SUMÁRIO

Desenvolve-se os conceitos básicos de Geometria Diferencial de Superfícies aplicando-os para obter, de forma intrínseca, condições de compatibilidade geométrica e cinemática para Superfícies Singulares.

INTRODUÇÃO

Na física do contínuo entende-se por onda qualquer perturbação que se propague com velocidade finita.

O comportamento de um meio com relação à propagação de ondas está relacionado com a natureza deste. A velocidade de propagação de uma onda depende das propriedades inerciais e elásticas do meio.

A resposta termomecânica de um contínuo é descrita, em geral, por um sistema de equações parciais não lineares, acoplado com condições suplementares, tais como: condições iniciais, de contorno, de radiação, etc. A solução de um tal sistema com condições suplementares adequadas se constitui no problema matemático de propagação de ondas.

Como a solução de um problema desse tipo é extremamente difícil, uma aproximação geralmente usada é linearizar o sistema e estudar o seu comportamento para pequenas perturbações. Apresentaremos aqui um método de aproximação diferente, baseado nas idéias de Hugoniot (1885) e desenvolvido por Hadamard (1903) e Thomas (1957). Nesse método, denominado teoria das superfícies singulares, enfrenta-se o sistema não linear e perturbações de intensidade qualquer, po-

rém estas são confinadas a uma superfície regular de medida nula. Nenhuma hipótese é feita acerca da forma da superfície.

A novidade do nosso trabalho é o tratamento inteiramente intrínseco do problema o qual, acreditamos tem um maior sabor geométrico. Os tratamentos usuais do assunto são feitos em coordenadas, que obscurece a física do problema. Pensamos que coordenadas só têm lugar na solução de problemas especiais, nunca em desenvolvimentos teóricos.

NOTAÇÕES

Tomaremos como espaço vetorial n - dimensional $V \cong \mathbb{R}^n$. O produto interno e a norma em \mathbb{R}^n e $\text{Lin}^p(\mathbb{R}^n)$ serão denotadas indistintamente por " \cdot " e " $\| \cdot \|$ ", respectivamente.

Denotaremos por ϕ uma função de valores em \mathbb{R} e ψ uma função de valores em $\text{Lin}^p(\mathbb{R}^n)$, (ver Apêndice). Dado $\Pi \in \mathbb{N}$ denotamos também por $\bar{\Pi}$ ao conjunto dos naturais menores ou iguais a Π , ou seja: $\bar{\Pi} = \{1, 2, \dots, \Pi\}$. Convencionamos que índices gregos α, β, \dots têm variação 1, 2 e índices latinos i, j, \dots têm variação 1, 2, \dots , $\Pi \in \mathbb{N}$, Π sendo fixado previamente.

GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFÍCIES REGULARES

Nessa seção, para realçar o sabor geométrico de alguns resultados, enunciaremos esses re-

sultados para o \mathbb{R}^3 , espaço euclidiano tridimensional. Porém isto não é necessário sendo óbvio a reinterpretação dos resultados para \mathbb{R}^n , n qualquer.

Def. 1: Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma superfície regular se $\forall x \in S$ existe uma vizinhança V_x de x em \mathbb{R}^3 e uma aplicação \tilde{x} de um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 , i.e.,

$$\begin{aligned} \tilde{x}: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_x \cap S \\ \omega &\longmapsto \tilde{x}(\omega) \in V_x \cap S \end{aligned}$$

satisfazendo:

- i) \tilde{x} é um homeomorfismo diferenciável
- ii) $T_x: TU \rightarrow TV_x \cap S$ é injetiva (ver Apêndice)
 $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ será chamado de parâmetro e \tilde{x} de parametrização.

O subespaço bidimensional $d\tilde{x}_\omega(\mathbb{R}^2) \subset T_{\tilde{x}(\omega)}\mathbb{R}^3$ (ver Apêndice) é chamado de espaço superficial tangente de S em $x = \tilde{x}(\omega)$ e será denotado por $T_\omega \tilde{x}$. Os elementos de $T_\omega \tilde{x}$ serão chamados de vetores tangentes de S em $x = \tilde{x}(\omega)$. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos $T_\omega \tilde{x}$ simplesmente por T_x .

É evidente que uma base $b_2 = \{f_1, f_2\}$ de $T_\omega \mathbb{R}^2$ é mapeado por $d\tilde{x}_\omega$ em uma base de $T_\omega \tilde{x}$. Escrevemos:

$$d\tilde{x}_\omega f_\alpha = \left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^\alpha} \right|_\omega =: \partial_\omega^\alpha \tilde{x}, \quad \alpha = 1, 2$$

e definimos:

$$e_\alpha(x) = (\partial_\omega^\alpha \tilde{x}) \circ \tilde{x}^{-1} \quad \alpha = 1, 2$$

com $b_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Def. 2: Uma superfície S regular é dita orientável se existe um campo diferenciável de vetores $\mathbf{n}: S \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, onde $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| = 1\}$, tal que $\forall x \in S$, $x = \tilde{x}(\omega)$, $\mathbf{n}(x)$ é ortogonal a $T_\omega \tilde{x}$. Vê-se logo que $\{\mathbf{n}(x), e_\alpha(x), \alpha = 1, 2\}$ forma um campo de referência móvel sobre S .

Dada uma função diferenciável $H: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tendo 0 na imagem, e tal que $\text{grad } H \neq 0$ é fácil mostrar [1] que o conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3: H(x) = 0\}$$

é uma superfície regular orientável, onde o campo $\mathbf{n}: S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é definido por:

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\text{grad } H}{\|\text{grad } H\|}$$

Nesse trabalho estaremos interessados apenas em superfícies desse tipo.

Se representarmos a base dual de $b = \{e_\alpha(x), \alpha = 1, 2\}$ por $b^\# = \{e^\alpha(x), \alpha = 1, 2\}$ é fácil provar que, $\forall x \in S$ existe um único tensor $A(x)$ tal que:

$$e^\alpha(x) = A(x) e_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2$$

a transformação identidade

$$I: T\mathbb{R}^3 \longrightarrow T\mathbb{R}^3$$

pode ser representada por:

$$I = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + e_\alpha \otimes A e_\alpha \quad (1)$$

onde é suposta a convenção de soma nos índices repetidos.

Dada uma superfície S qualquer, já frisamos que $\forall x \in S$, $(\mathbf{n}(x), e_\alpha(x), \alpha = 1, 2)$ é uma base de $T_x \mathbb{R}^3$, sendo assim podemos definir a transformação linear:

$$B(x): T_x \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_x,$$

tal que

$$B(x)e_\alpha(x) = -\left. \partial_\omega^\alpha \mathbf{n}(y) \right|_{y=x}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

$$B(x)\mathbf{n}(x) = 0.$$

Para ver que o contradomínio de $B(x)$ é realmente T_x basta considerarmos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, logo: $(\partial_\omega^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0$. O tensor $B(x)$ é denominado de tensor de curvatura de Cauchy no ponto x .

A restrição $B(x)|_{T_x}$ é simétrica, o que pode ser provado considerando:

$$\mathbf{n} \cdot e_\alpha = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot e_\beta = 0$$

derivando com relação a ω^α e ω^β respectivamente.

te, e considerando \bar{x} de classe C^2 e que $e_\alpha = \partial_{\omega^\alpha} \bar{x}$ temos:

$$-(\partial_{\omega^\alpha} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\alpha = -(\partial_{\omega^\alpha} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\beta$$

Logo, da definição de $B(x)$, temos:

$$(B(x) \Big|_{T_x} \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta \cdot (B(x) \Big|_{T_x} \mathbf{e}_\alpha) \quad (3)$$

E fácil ver, ainda, que:

$$B(x) = (\partial_{\omega^\alpha} \mathbf{n}) \otimes A e_\alpha \quad (4)$$

Denomina-se de curvatura Gaussiana no ponto x , $k(x)$, e de curvatura média no ponto x , $\Omega(x)$, as funções:

$$k(x) = \det B(x) \quad e \quad \Omega(x) = \text{tr} B(x) \quad (5)$$

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE GEOMÉTRICA

Consideremos agora um domínio β de \mathbb{R}^3 tendo, no seu interior, uma superfície S que divide-o em duas partes β^+ e β^- (ver Fig. 1).

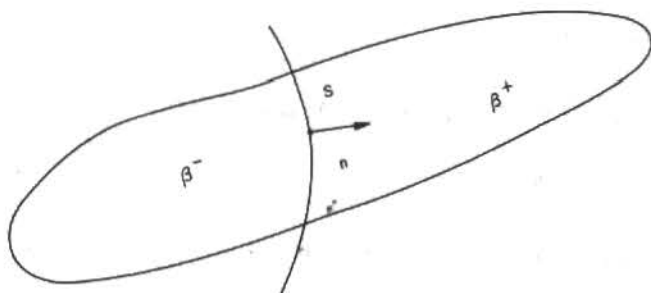


FIGURA 1

Seja ϕ uma função de valores escalares, vectoriais ou tensoriais, definida em β^+ e β^- , mas não necessariamente em S , de classe C^2 e suporemos, ainda, que os limites:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \beta^+}} \phi(y) = \phi^+(x) \quad e \quad \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \beta^-}} \phi(y) = \phi^-(x)$$

existem e são independentes dos caminhos tomados. O salto de ϕ através de S é definido por

$$[\phi] = \phi^+ - \phi^-$$

Dizemos que S é uma superfície singular com respeito a ϕ se $[\phi] \neq 0$.

O resultado básico para o estudo de superfícies singulares que segue [2] é:

Lema de Hadamard: seja S uma superfície singular com respeito a ϕ e $\lambda: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ uma curva de classe $C^2(I)$.

Então:

$$d_S \phi^+ = (\text{grad} \phi)^+ \cdot d_S \lambda$$

$$d_S \phi^- = (\text{grad} \phi)^- \cdot d_S \lambda$$

Desse modo, temos:

$$d_S [\phi] = [\text{grad} \phi] \cdot d_S \lambda \quad (6)$$

e em particular para as curvas coordenadas superficiais da parametrização \bar{x} teremos:

$$\partial_{\omega^\alpha} [\phi] = [\text{grad} \phi] \cdot \partial_{\omega^\alpha} \bar{x}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (7)$$

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [2]. O lema é facilmente estendido para Ψ se tomarmos um campo Π constante, tal que $\phi = \Psi \cdot \Pi$ e aplicando o lema anterior temos então:

$$\partial_{\omega^\alpha} [\Psi] = [\text{grad} \Psi] \cdot \partial_{\omega^\alpha} \bar{x}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (8)$$

Podemos explicitar em (7) o salto do gradiente de ϕ como função de sua componente normal e do salto de ϕ ; a saber:

$$[\text{grad} \phi] = [\text{grad} \phi \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} + \partial_{\omega^\alpha} [\phi] A e_\alpha \quad (9)$$

Prova: Fazendo o produto escalar de (7) por $A e_\alpha$ e somando em α (adotando a convenção de soma de índices repetidos) temos:

$$([\text{grad} \phi] \cdot \mathbf{e}_\alpha) A e_\alpha = \partial_{\omega^\alpha} [\phi] A e_\alpha$$

daí temos:

$$(A e_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) [\text{grad} \phi] = \partial_{\omega^\alpha} [\phi] A e_\alpha$$

usando a representação (1):

$$(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) [\text{grad} \phi] = \partial_{\omega^\alpha} [\phi] A e_\alpha$$

finalmente, temos:

$$[\text{grad}\phi] = [\text{grad}\phi \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\phi] \mathbf{Ae}_\alpha$$

Podemos obter resultado equivalente para um campo ψ substituindo em (9) ϕ por $\psi \cdot \Pi$ onde Π é um campo constante.

$$[\text{grad}\psi] = [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\psi] \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \quad (10)$$

As equações (9) e (10) são denominadas de Condições de Compatibilidade Geométrica de 1ª Ordem para superfícies singulares. Estas condições expressam o fato das singularidades distribuírem-se suavemente sobre S .

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE GEOMÉTRICA ITERADAS

Podemos obter o salto do 2º gradiente de ϕ e ψ , considerando $[\phi] = 0$ e $[\psi] = 0$, a saber:

$$[\text{grad grad}\phi] = c\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2\partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\phi \cdot \mathbf{n}] \text{sim}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha) - [\text{grad}\phi \cdot \mathbf{n}] \mathbf{B} \quad (11)$$

$$[\text{grad grad}\psi] = C \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2\partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \text{sim}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha) - [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{B} \quad (12)$$

onde

$$c = \mathbf{n} \cdot [\text{grad grad}\phi] \mathbf{n}$$

$$C = [\text{grad grad}\psi] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

Prova: Daremos, aqui, somente a demonstração de (12) a demonstração de (11) segue-se obviamente. Para isto fazendo a substituição em (10) de ψ por $\text{grad}\psi$ temos:

$$[\text{grad grad}\psi] = [(\text{grad grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \quad (13)$$

transpondo (13), temos

$$[\text{grad grad}\psi]^T = \mathbf{n} \otimes [(\text{grad grad}\psi)\mathbf{n}] + \mathbf{Ae}_\alpha \otimes \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi]$$

aplicando em \mathbf{n}

$$[\text{grad grad}\psi]^T \mathbf{n} = \mathbf{n} \otimes C + \mathbf{Ae}_\alpha \otimes \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \mathbf{n} \quad (14)$$

onde $C = [\text{grad grad}\psi] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ é de ordem p .

Lembrando que a derivada covariante de um campo tensorial em um espaço euclidiano comuta temos:

$$([\text{grad grad}\psi]^T \mathbf{n})^{-T} = [\text{grad grad}\psi] \mathbf{n} \quad (15)$$

aplicando $-T$ a (14) e usando (15) temos:

$$[\text{grad grad}\psi] \mathbf{n} = C \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \quad (16)$$

e substituindo (16) em (13), temos:

$$[\text{grad grad}\psi] = C \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \quad (17)$$

como $[\psi] = 0$ de (10), temos:

$$[\text{grad}\psi] = [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n}$$

daí teremos:

$$\partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] = \partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \partial_{\omega\alpha} \mathbf{n}$$

$$\text{como } \partial_{\omega\alpha} \mathbf{n} = -\mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha$$

$$\partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] = \partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} - [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha$$

daí como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha = 0$, temos:

$$\partial_{\omega\alpha} [\text{grad}\psi] \mathbf{n} = \partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \quad (18)$$

substituindo (18) em (17):

$$[\text{grad grad}\psi] = C \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha - [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{Ae}_\alpha$$

levando em conta a representação (1), teremos:

$$[\text{grad grad}\psi] = C \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2\partial_{\omega\alpha} [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \text{sim}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{Ae}_\alpha) - [(\text{grad}\psi)\mathbf{n}] \otimes \mathbf{B}$$

As equações (11) e (12) são conhecidas como Condições de Compatibilidade Geométrica Iteradas de 2ª Ordem.

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE CINEMÁTICA

As condições obtidas no parágrafo precedente supõem a superfície S fixa no espaço, porém nosso interesse maior é em superfícies propagantes, i.e., que se deslocam no espaço. Condições que relacionam saltos com o movimento da superfície são denominadas de Condições de Compatibilidade Cinemática.

Uma superfície em movimento pode ser definida como uma família uniparamétrica de superfícies $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^3: H(x,t) = 0, t \in I\}$. Consideremos que para cada t_0 fixo, $S(t_0)$ é regular e orientável de modo que podemos descrevê-la com uma parametrização $\bar{x}: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $x = \bar{x}(\omega^1, \omega^2, t)$ é um ponto da superfície. Fixando (ω^1, ω^2) e variando t temos a trajetória de um ponto. A velocidade u de um ponto x da superfície é, portanto:

$$u = \partial_t \bar{x}$$

como $u \in T_{\bar{x}}\mathbb{R}^3$ podemos ainda escrever:

$$u = u_n n + u^\alpha e_\alpha \quad (19)$$

Neste sentido a componente normal u_n é a responsável pelo deslocamento da superfície $S(t)$ através do espaço, pois fixado t_0 , se $u_n = 0$ um ponto de S_{t_0} se move de uma posição em S_{t_0} para outra posição em S_{t_0} .

Diferenciando $H(x,t) = 0$ com relação ao tempo e usando a regra da cadeia, temos:

$$\partial_t H + \text{grad}H \cdot \partial_t \bar{x} = 0$$

como $n = \frac{\text{grad}H}{|\text{grad}H|}$, temos:

$$u_n = - \frac{\partial_t H}{\|\text{grad}H\|} \quad (20)$$

Definiremos, agora, o ponto central de nosso estudo, o da derivada deslocamento de um campo ϕ com relação à superfície S_t , denotada $\delta_t \phi$ e definida por:

$$(\delta_t \phi)(x,t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \tau u_n, t + \tau) - \phi(x,t)}{\tau}, \quad \forall x \in S_t. \quad (21)$$

Pela regra da cadeia, para um campo ϕ vemos que:

$$\delta_t \phi = \partial_t \phi + u_n \text{grad}\phi \cdot n \quad (22)$$

e para um campo ψ temos similarmente:

$$\delta_t \psi = \partial_t \psi + u_n (\text{grad}\psi) \cdot n \quad (23)$$

Uma forma útil de escrever a derivada deslocamento é fazendo $\phi(x,t) = \phi(\bar{x}(\omega^1, \omega^2, t), t) = \bar{\phi}(\omega^1, \omega^2, t)$ daí usando a regra da cadeia, também válida para a derivada deslocamento e escreveremos:

$$\delta_t \bar{\phi} = \partial_t \bar{\phi} + \partial_{\omega^\alpha} \bar{\phi} \delta_t \omega^\alpha$$

por outro lado:

$$\delta_t \bar{x} = \partial_t \bar{x} + \partial_{\omega^\alpha} \bar{x} \delta_t \omega^\alpha$$

como na definição:

$$\delta_t \bar{x} = u_n n$$

e

$$\partial_t \bar{x} = u_n n + u^\alpha e_\alpha$$

temos que:

$$\delta_t \omega^\alpha = - u^\alpha$$

logo

$$\delta_t \bar{\phi} = \partial_t \bar{\phi} - u^\alpha \partial_{\omega^\alpha} \bar{\phi} \quad (24)$$

Dada uma superfície singular $S(t)$ com relação aos campos ϕ e ψ , e aplicando o Lema de Hadamard no espaço produto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ com relação à curva $\lambda: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \lambda(s) = (s u_n, s)$ temos:

$$\delta_t [\phi] = [\partial_t \phi] + u_n [\text{grad}\phi] \cdot n \quad (25)$$

e

$$\delta_t [\psi] = [\partial_t \psi] + u_n [\text{grad}\psi] \cdot n \quad (26)$$

Estas equações são denominadas de Condições de Compatibilidade Cinemática de 1ª Ordem para uma superfície singular propagante e refletem a persistência do salto com o tempo.

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE CINEMÁTICA ITERADAS

Obteremos, agora, as Condições de Compatibilidade Cinemática Iteradas de 2.^a Ordem, para $[\phi] = 0$ e $[\psi] = 0$, a saber:

$$[\partial_t^2 \phi] = u_n^2 c - 2u_n \delta_t([\text{grad} \phi] \cdot \mathbf{n}) - ([\text{grad} \phi] \cdot \mathbf{n}) \delta_t u_n \quad (27)$$

$$[\text{grad}(\partial_t \phi)] = -u_n c \mathbf{n} + \delta_t([\text{grad} \phi] \mathbf{n}) \mathbf{n} - \partial_{\omega \alpha} (u_n [\text{grad} \phi] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Ae}_\alpha \quad (28)$$

e, para o campo ψ temos:

$$[\partial_t^2 \psi] = u_n^2 c - 2u_n \delta_t([\text{grad} \psi] \cdot \mathbf{n}) - ([\text{grad} \psi] \cdot \mathbf{n}) \delta_t u_n \quad (29)$$

$$[\text{grad}(\partial_t \psi)] = -u_n c \otimes \mathbf{n} + \delta_t([\text{grad} \psi] \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} - \partial_{\omega \alpha} (u_n [\text{grad} \psi] \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{Ae}_\alpha \quad (30)$$

Para a demonstração de (29) e (30) (ver o Apêndice, item 4) (27) e (28) segue-se de maneira óbvia.

Um resultado bastante útil é a fórmula proposta por THOMAS [3] para a derivada deslocamento do vetor normal \mathbf{n} , a saber:

$$\delta_t \mathbf{n} = -\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha \quad (31)$$

Prova: Da definição, temos:

$$u_n = \partial_t \bar{x} \cdot \mathbf{n} \quad (32)$$

diferenciando com relação a ω^α

$$\partial_{\omega \alpha} u_n = \partial_t (\partial_{\omega \alpha} \bar{x}) \cdot \mathbf{n} + \partial_t \bar{x} \cdot \partial_{\omega \alpha} \mathbf{n}$$

como

$$\partial_{\omega \alpha} \bar{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\partial_{\omega \alpha} u_n = -\partial_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \partial_t \bar{x} \cdot \partial_{\omega \alpha} \mathbf{n} \quad (33)$$

substituindo (21) em (33), temos:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n = -\partial_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\alpha - \partial_t \bar{x} \cdot \mathbf{Be}_\alpha \quad (34)$$

fazendo o produto de (34) por \mathbf{Ae}_α e somando em , temos:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -(\partial_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{Ae}_\alpha - (\partial_t \bar{x} \cdot \mathbf{Be}_\alpha) \mathbf{Ae}_\alpha \quad (35)$$

como a restrição de B a $T_{\bar{x}}$ é simétrica podemos estender B simetricamente a $T_x(\mathbb{R}^3)$ daí:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -(\mathbf{Ae}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \partial_t \mathbf{n} - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{B} \partial_t \bar{x}) \mathbf{Ae}_\alpha \quad (36)$$

Usando a representação (1), em (36), temos:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \partial_t \mathbf{n} - (\mathbf{B} \partial_t \bar{x} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{Ae}_\alpha$$

como $\mathbf{n} \cdot \partial_t \mathbf{n} = 0$

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -\partial_t \mathbf{n} - (\mathbf{B} \partial_t \bar{x} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{Ae}_\alpha \quad (37)$$

como $\partial_t \bar{x} = u_n \mathbf{n} + u_n^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ e $\mathbf{B} \mathbf{n} = 0$

temos:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -\partial_t \mathbf{n} - (u_n^\beta \mathbf{Be}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{Ae}_\alpha$$

ou de outra forma:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -\partial_t \mathbf{n} - u_n^\beta (\mathbf{Ae}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{Be}_\beta$$

novamente usando a representação (4) e o fato de que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{Be}_\alpha = 0$

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -\partial_t \mathbf{n} - u_n^\beta \mathbf{Be}_\beta$$

como $\partial_{\omega \beta} \mathbf{n} = -\mathbf{Be}_\beta$, temos:

$$\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha = -\partial_t \mathbf{n} + u_n^\beta \partial_{\omega \beta} \mathbf{n}$$

logo, de (24), concluímos que:

$$\partial_t \mathbf{n} = -\partial_{\omega \alpha} u_n \mathbf{Ae}_\alpha$$

A equação (31) expressa o fato de que se a velocidade normal de propagação não varia sobre a superfície, $S(t)$ se propaga como uma família de superfícies paralelas.

APÊNDICE

1. Tensores. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, denotaremos por $\text{Lin}(V, W)$ ao conjunto de todas as transformações lineares

de V em W . Quando $V \equiv W$ denotaremos apenas $\text{Lin}^2(V)$. Podemos dar a $\text{Lin}(V, W)$ uma estrutura de espaço vetorial definindo uma soma e um produto por escalar da seguinte forma:

$$+ : \text{Lin}(V, W) \times \text{Lin}(V, W) \longrightarrow \text{Lin}(V, W)$$

$$\circ : \mathbb{K} \times \text{Lin}(V, W) \longrightarrow \text{Lin}(V, W)$$

tais que

$$f(L_1, L_2) \in \text{Lin}(V, W) \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$$

$$\forall v \in V$$

$$(\alpha \circ L_1)(v) = \alpha L_1(v) \quad (\text{Ap.1})$$

onde $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

É comum omitir o símbolo \circ para representar o produto de α por L_1 e escrever simplesmente αL_1 .

Pelo exposto acima, podemos definir iterativamente e denotar $\text{Lin}^{p+q}(V) = \text{Lin}(\text{Lin}^p(V), \text{Lin}^q(V))$. $\text{Lin}^1(V) \equiv V$ é fácil verificar que $\text{Lin}^{p_1+q_1}(V) \equiv \text{Lin}^{p_2+q_2}(V)$ se $p_1+q_1 = p_2+q_2$, adotamos no corpo do trabalho $V \equiv \mathbb{R}^n$ e, em particular, $n=3$. Denomina-se aos elementos de $\text{Lin}^p(V)$ de tensores.

Dados $v \in V$ e $A \in \text{Lin}^p(V)$ definimos um tensor $A \otimes v \in \text{Lin}^{1+p}(V)$ por:

$$(A \otimes v)u = (v \cdot u)A, \quad \forall u \in V \quad (\text{Ap.2})$$

definimos, também, um operador identidade $\underline{1} \in \text{Lin}(\text{Lin}^p(V), \text{Lin}^p(V))$ por:

$$\underline{1}A = A, \quad \forall A \in \text{Lin}^p(V) \quad (\text{Ap.3})$$

e um operador $T \in \text{Lin}(\text{Lin}^{1+p}(V), \text{Lin}^{p+1}(V))$ por:

$$(A \otimes v)^T = v \otimes A, \quad \forall v \in V \text{ e } A \in \text{Lin}^p(V) \quad (\text{Ap.4})$$

denotaremos por $-T$ ao operador inverso de T .

Dada uma base $\{e_j\}$ de V espaço vetorial n -dimensional é fácil mostrar que o conjunto de todas as combinações

$$b_{j_1 \dots j_p} = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}, \quad \begin{matrix} j_\kappa = 1, \dots, n \\ \kappa = 1, \dots, p \end{matrix} \quad (\text{Ap.5})$$

denotado $\otimes^p \{e_j\}$ é uma base de $\text{Lin}^p(V)$.

Dados $(a_1 \dots a_p) \in V$ existe $A \in \text{Lin}^p(V)$ dado por:

$$A = a_1 \otimes \dots \otimes a_p \quad (\text{Ap.6})$$

e definimos, também, um produto interno $\langle, \rangle : \text{Lin}^p(V) \times \text{Lin}^p(V) \rightarrow \mathbb{K}$ dado por:

$$\forall (A, B) \in \text{Lin}^p(V)$$

$$A = a_1 \otimes \dots \otimes a_p \text{ e } B = b_1 \otimes \dots \otimes b_p$$

$$\langle A, B \rangle = (a_1 \cdot b_1) \dots (a_p \cdot b_p) \quad (\text{Ap.7})$$

onde " \cdot " denota o produto interno em V . É comum representar-se o produto interno em $\text{Lin}^p(V)$ também por " \cdot ", assim:

$$A \cdot B = (a_1 \cdot b_1) \dots (a_p \cdot b_p) \quad (\text{Ap.8})$$

2. Derivação. Dada a função $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se F for diferenciável em $x_0 \in U$, representaremos sua derivada em x_0 por $dF_{x_0} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

No nosso estudo o conceito de espaço tangente desempenha um papel importantíssimo. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o espaço tangente de \mathbb{R}^n em x_0 ; denotado $T_{x_0} \mathbb{R}^n$; é o conjunto dos pares $(x_0, x) \in \{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ com estrutura de espaço vetorial definida pela projeção canônica

$$\Pi_{x_0} : T_{x_0} \mathbb{R}^n \longrightarrow U \quad (\text{Ap.9})$$

$$(x_0, x) \longmapsto x$$

Seja U um subconjunto de \mathbb{R}^n . O feixe tangente de U , denotado TU , é a união disjunta dos espaços tangentes $T_{x_0} \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, juntamente com a projeção canônica:

$$H : TU \longrightarrow U \quad (\text{Ap.10})$$

$$(x_0, x) \longmapsto x_0$$

Se U for um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável, para cada $x_0 \in U$, definimos a aplicação:

$$TF_{x_0}: T_{x_0} \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(x_0)} \mathbb{R}^m \quad (\text{Ap.11})$$

$$(x_0, x) \longmapsto (F(x_0), dt_{x_0}(x)).$$

A aplicação $TF: TU \longrightarrow T\mathbb{R}^m$ definida por:

$$TF: T_{x_0} \mathbb{R}^n = TF_{x_0} \cdot TF \quad (\text{Ap.12})$$

é chamada diferencial de F . Convém frisar que algumas vezes será conveniente identificar $T_{x_0} \mathbb{R}^n$ com \mathbb{R}^n de maneira canônica e também $T_{F(x_0)} \mathbb{R}^m$ com \mathbb{R}^m , nesse caso no lugar de escrever $TF_{x_0}: T_{x_0} \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(x_0)} \mathbb{R}^m$, escreveremos simplesmente:

$$dF_{x_0}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

3. Derivação de Funções Tensoriais. Seja $\psi: \text{Lin}^2(V) \longrightarrow \text{Lin}^2(V)$ não necessariamente linear, definimos a derivada de ψ no ponto $x \in \text{Lin}^2(V)$, como o funcional linear $\partial_x \psi \in \text{Lin}^{2+p}(V)$ tal que:

$$\psi(X+A) = \psi(X) + (\partial_x \psi)A + o(\|A\|), \forall A \in \text{Lin}^2(V) \quad (\text{Ap.13})$$

onde $0: \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}^2(V)$ é tal que

$$\lim_{\|A\| \rightarrow 0} \frac{o(\|A\|)}{\|A\|} = 0$$

É fácil estender a definição trocando $\text{Lin}^2(V)$ por $\text{Lin}^q(V)$.

Sejam as funções

$$\psi: \text{Lin}^q(V) \longrightarrow \text{Lin}^p(V) \quad \text{e} \quad \phi: \text{Lin}^p(V) \longrightarrow \text{Lin}^r(V)$$

e $(\psi \circ \phi): \text{Lin}^q(V) \longrightarrow \text{Lin}^r(V)$ a derivada da composta $\psi \circ \phi$ é dada por:

$$(\partial_x (\psi \circ \phi))A = (\partial_\phi \psi)(\partial_x \phi)A, \forall A \in \text{Lin}^q(V) \quad (\text{Ap.14})$$

Sejam as funções:

$$\chi: \text{Lin}^p(V) \times \text{Lin}^q(V) \longrightarrow \text{Lin}^r(V) \quad \text{e}$$

$$\phi: \text{Lin}^p(V) \times \text{Lin}^q(V) \longrightarrow \text{Lin}^q(V)$$

lineares em $\text{Lin}^q(V)$ e a composta $(\psi \circ \phi): \text{Lin}^p(V) \times \text{Lin}^q(V) \longrightarrow \text{Lin}^r(V)$ dada por $(\psi \circ \phi)(X, Y) = \psi(X, \phi(X, Y))$ podemos mostrar que a derivada de $\psi \circ \phi$ com relação a $X \in \text{Lin}^p(V)$ é dada por:

$$\partial_x (\psi \circ \phi)A = ((\partial_x \psi)A) \circ \phi + \psi \circ ((\partial_x \phi)A) \quad (\text{Ap.15})$$

Podemos usar a definição para mostrar que:

$$\partial_F \det(F) = \det(F) F^{-1T} \quad (\text{Ap.16})$$

e também de (Ap. 15):

$$(\partial_F^{-1T})C = -F^{-1T} C^T F^{-1T} \quad \forall C \in \text{Lin}^2(V) \quad (\text{Ap.17})$$

$$(\partial_F^{-1T})C \otimes C = 2 F^{-1T} C^T F^{-1T} C^T F^{-1T}$$

4. Condições de Compatibilidade Cinemática Iteradas. Passaremos à demonstração das condições de compatibilidade cinemática iterada de 2ª. Ordem dadas, a saber:

$$[\partial^2 \Psi] = u_n^2 C - 2u_n \delta_t([\text{grad} \Psi]n) - ([\text{grad} \Psi]n) \delta_t u_n$$

$$[\text{grad}(\partial_t \Psi)] = -u_n C \otimes n + \delta_t([\text{grad} \Psi]n) \otimes n - \partial_{\omega\alpha}(u_n [\text{grad} \Psi]n) \times A e_\alpha$$

Prova: Substituindo Ψ por $\partial_t \Psi$ em (26):

$$\delta_t[\partial_t \Psi] = [\partial_t^2 \Psi] + u_n [\text{grad}(\partial_t \Psi)]n \quad (\text{Ap.18})$$

e como

$$[\text{grad} \Psi] = [(\text{grad} \Psi)n] \otimes n + \partial_{\omega\alpha}[\Psi] \otimes A e_\alpha$$

Substituindo Ψ por $\partial_t \Psi$

$$[\text{grad}(\partial_t \Psi)] = [(\text{grad}(\partial_t \Psi))n] \otimes n + \partial_{\omega\alpha}[\partial_t \Psi] \otimes A e_\alpha \quad (\text{Ap.19})$$

também

$$\delta_t([\text{grad} \Psi]n) = \delta_t[\text{grad} \Psi]n + [\text{grad} \Psi] \delta_t n$$

levando em conta (31), temos:

$$\delta_t([\text{grad} \Psi]n) = \delta_t[\text{grad} \Psi]n - \partial_{\omega\alpha} u_n [\text{grad} \Psi] A e_\alpha \quad (\text{Ap.20})$$

de (26) substituindo Ψ por $\text{grad} \Psi$ temos:

$$\delta_t[\text{grad} \Psi] = [(\text{grad}(\partial_t \Psi))] + u_n [\text{grad} \text{grad} \Psi]n$$

daí, substituindo em (Ap.20):

$$\delta_t([\text{grad}\psi]n) = [\text{grad}(\partial_t\psi)]n + u_n[\text{grad grad}\psi]n \otimes n - \partial_{\omega\alpha} u_n [\text{grad}\psi] \cdot Ae_\alpha \quad (\text{Ap.21})$$

da definição

$$C = [\text{grad grad}\psi]n \otimes n$$

e supondo $[\psi] = 0$, temos:

$$[\text{grad}\psi] = [(\text{grad}\psi)n] \otimes n$$

logo

$$[\text{grad}\psi]Ae_\alpha = 0$$

daí escrevemos (Ap.21) como

$$[\text{grad}(\partial_t\psi)]n = \delta_t([\text{grad}\psi]n) - u_n C \quad (\text{Ap.22})$$

novamente como $[\psi] = 0$ temos:

$$[\partial_t\psi] = -u_n [\text{grad}\psi]n \quad (\text{Ap.23})$$

substituindo (Ap.22) e (Ap.23) em (Ap.19)

$$[\text{grad}(\partial_t\psi)] = -u_n C \otimes n + \delta_t([\text{grad}\psi]n) \otimes n - \partial_{\omega\alpha} (u_n [\text{grad}\psi]n) \otimes Ae_\alpha$$

e substituindo (Ap.22) e (Ap.23) em (Ap.18)

$$[\partial_t\psi] = u_n C - 2u_n \delta_t([\text{grad}\psi]n) - (\delta_t u_n) [\text{grad}\psi]n$$

REFERÊNCIAS

- [1] M.P. Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] A.S. Silva, Superfícies Singulares e Ondas de Aceleração em Misturas, COPPE/UFRJ, (1979).
- [3] T.Y. Thomas, Extended Compatibility Conditions for the Study of Surfaces of Discontinuity in Continuum Mechanics, Journal of Mathematics and Mechanics, V.6, nº 3, 1957.
- [4] A.S. Silva e R. Sampaio, Superfícies Singulares: Condições de Compatibilidade, COPPE/UFRJ, PTC-02/79.

DINÂMICA DA PARTÍCULA SÓLIDA: EFEITO DA FORMA DA PARTÍCULA

GIULIO MASSARANI

ESCOLA DE QUÍMICA E COPPE, UFRJ

SUMÁRIO

Os dados de PETTYJOHN & CHRISTIANSEN (1948) relativos à dinâmica de partículas isométricas isoladas são manipulados de modo a fornecer gráficos, tabelas e correlações empíricas relacionando, de diferentes modos, o coeficiente de arraste ao número de Reynolds e à esfericidade da partícula.

1) INTRODUÇÃO

Retomamos neste trabalho o estudo clássico da dinâmica de partículas sólidas em movimento livre na massa de um fluido em escoamento. Na análise.

- a) A partícula apresenta um "certo grau" de simetria e, por esta razão, admitiremos que a força resistiva exercida pelo fluido sobre a partícula, $\underline{\ell}$, tenha o mesmo sentido que a velocidade relativa fluido-partícula, $\underline{u} - \underline{v}$;
- b) Os efeitos de aceleração da partícula não são considerados;
- c) Os efeitos de interação partícula-partícula e os efeitos de "parede" não são levados em conta; consideraremos, portanto, que a partícula esteja "isolada";
- d) O movimento da partícula é translacional;
- e) O fluido é newtoniano e as partículas suficientemente grandes de modo que os efeitos de "deslizamento" possam ser desprezados.

A análise dimensional conduz para a força resistiva $\underline{\ell}$ ao resultado clássico

$$\underline{\ell} = \frac{1}{2} \rho \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 A C_D \frac{(\underline{u} - \underline{v})}{\|\underline{u} - \underline{v}\|} \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, A uma área característica e C_D o coeficiente de arraste cujo valor depende da definição de A . C_D pode ser determinado facilmente medindo-se a velocidade terminal v_t da partícula em queda livre a través de um líquido estagnado.

$$C_D = \frac{2V(\rho_s - \rho)g}{\rho A v_t^2}, \quad (2)$$

onde V e ρ_s são respectivamente o volume e a densidade da partícula e g a aceleração do campo gravitacional.

Um número substancial de dados experimentais obtidos desde o trabalho pioneiro de Pernolet [1], 1851, parece indicar que o coeficiente de arraste depende do número de Reynolds, da relação entre as densidades da partícula e do fluido e de fatores de forma da partícula,

$$C_D = f(\text{Re}, \rho_s/\rho, \psi), \quad (3)$$

sendo $\text{Re} = \frac{dU\rho}{\mu}$, d uma dimensão característica da partícula e $U = \|\underline{u} - \underline{v}\|$.

A próxima etapa consiste na busca de definições para a área e dimensão características A e d e da especificação dos fatores de forma de modo que os resultados experimentais relativos a C_D possam ser de alguma maneira normalizados, permitindo interpolações com razoável precisão. Para uma melhor avaliação das respostas a estas perguntas reproduziremos, em seguida, as observações feitas por Pettyjohn e Christiansen [2] na queda livre de partículas isométricas em fluido estagnado.

"In the viscous range ($Re < 0,05$) the particles had no tendency to orient themselves in any particular position with respect to the direction of motion as predicted mathematically by Gans.

Furthermore, the settling rates of a particle were independent of the orientation within the experimental error which was less than 0,5% in the viscous range. In the case of non-isometric particles, however, orientation is known to affect setting rates.

Whereas in the streamline flow range ($Re < 0,05$) the particles did not favor any particular orientation with respect to the direction of motion, at $Re \sim 10$, the tetrahedrons and cubes assumed an orientation with a face in the horizontal plane or perpendicular to the direction of motion and the other particles showed a tendency to do likewise by $Re \sim 20$. This orientation was maintained up to $Re = 70$ to 300 where the particles beginning with the tetrahedrons, "teetered" or wobbled and eventually spun or rolled on a horizontal axis and followed a spiral path rather than a straight vertical path in their descent. The coefficient of resistance increased rather abruptly with the onset of spinning as indicated on the C_R vs. Re chart and eventually became constant. The Re range between the onset of spinning and the point where C_R became constant was a transition period, some of the particles of a set or shape remaining oriented at Re values considerably beyond the point where others of the same set or shape began to spin. Consequently the data were quite scattered in this range".

Em relação à queda livre de partículas de formas regulares não-isométricas, Heiss e Coull

[3] constataram experimentalmente para baixos números de Reynolds ($Re < 0,1$) que o coeficiente de arraste depende da posição em que a partícula é lançada. Ainda para partículas regulares não-isométricas, desta feita para números de Reynolds elevados ($Re > 10^3$), Becker [4], Christiansen e Barker [5] e Isaacs e Thodos [6] observaram que o coeficiente de arraste depende da forma da partícula, da relação ρ_s/ρ (a vibração nas partículas mais leves acarreta um aumento no valor de C_D) e não da posição em que a partícula é lançada no fluido.

Voltemos à caracterização de A , d e do fator de forma da partícula. Wadell [7] reuniu resultados experimentais da literatura para partículas regulares tomando para a dimensão d o diâmetro da esfera de igual volume que a partícula d_p , como área característica aquela do círculo de diâmetro d_p , $A = \pi d_p^2/4$, e na especificação da forma empregou a esfericidade ϕ ,

$$\phi = \left(\frac{\text{superfície da esfera}}{\text{superfície da partícula}} \right)_V$$

Brown et al. [p. 76,8] estenderam de maneira bastante duvidosa os resultados reunidos por Wadell: o leitor poderá julgar a audácia da extrapolação comparando as figs. (1) e (2). Fazemos notar que a fig. (1) passou a ser amplamente utilizada na literatura relativa às aplicações tecnológicas dos Sistemas Particulados e de modo indiscriminado.

Heywood [9], trabalhando com partículas irregulares, recomendou o emprego de um coeficiente de arraste baseado na área projetada da partícula em sua posição mais estável na lâmina do microscópio, A_p . Caracterizou a dimensão através do diâmetro da esfera de igual área projetada que a partícula d_n , $A_p = \pi d_n^2/4$, e a forma através do fator β , $V = \beta d_n^3$. Pettyjohn e Christiansen [2] mostraram posteriormente que a representação proposta por Heywood é extremamente conveniente para baixos Re conduzindo, no entanto, a uma manipulação incômoda para Re elevados.

Pettyjohn e Christiansen [2] estudaram exhaustivamente a dinâmica de partículas isométricas e chegaram à conclusão de que o modo de representação proposto por Wadell [7] era ple-

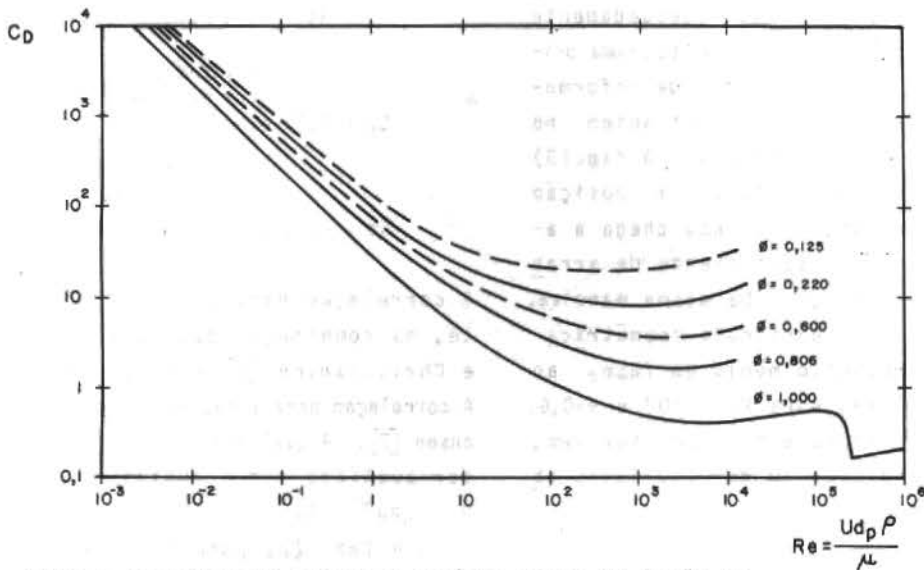


Figura 1 - Coeficiente de arraste de partículas sólidas em função do número de Reynolds e da esfericidade (reprodução da fig. 70 de Brown et al. [p.76,83]).

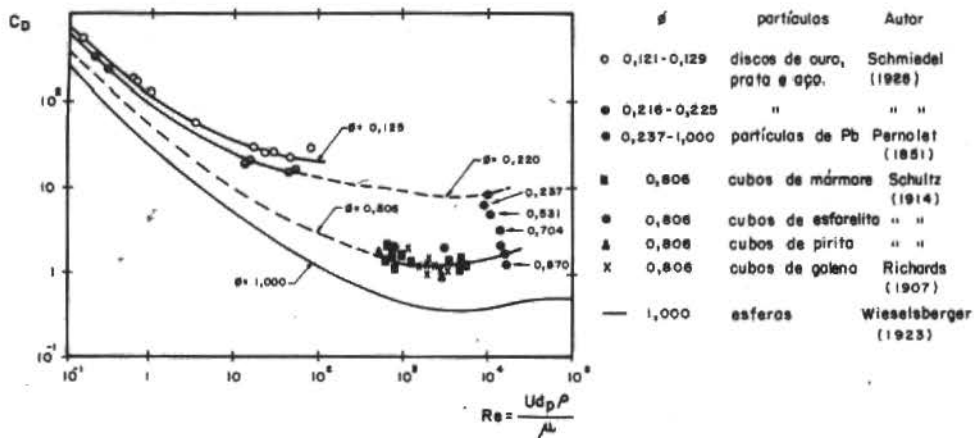


Figura 2 - Coeficiente de arraste de partículas regulares em função do número de Reynolds e da esfericidade (reprodução da fig. 3 de Wadell [7]).

namente satisfatório.

Finalmente, Becker [4], trabalhando nos dados de Pettyjohn e Christiansen [2] e em outros relativos a partículas regulares não isométricas, decidiu pela seguinte representação: diâmetro da esfera de igual área projetada que a partícula d_n , como dimensão característica; área projetada da partícula A_p , caracte-

terizando a área; dois fatores de forma, sendo o primeiro $\Omega = d_p^2/4 A_p$ (para baixos Re) e o segundo a esfericidade (para Re elevados). O todo resulta incômodo para utilização.

As partículas de nosso interesse são aquelas que aparecem nas aplicações tecnológicas, obtidas pela moagem de um minério ou resultante dos processos de precipitação ou cristali-

zação: partículas tipicamente irregulares. Na falta de dados experimentais nos quais as partículas irregulares tenham sido adequadamente caracterizadas, adotaremos para elas, numa primeira aproximação, todo o cabedal de informações reunido por Pettyjohn e Christiansen no estudo das partículas isométricas. A fig. (3) evidencia que, afinal de contas, a posição da partícula no seu lançamento não chega a afetar substancialmente o coeficiente de arraste para $Re < 0,1$ e $\phi > 0,6$. Da mesma maneira, a fig. (4) mostra que a partícula isométrica apresenta um comportamento médio em face ao de partículas regulares para $Re > 10^3$ e $\phi > 0,6$. Os pontos da figura representam, por sua vez, médias com pequena dispersão de resultados obtidos a diferentes ρ_s/ρ .

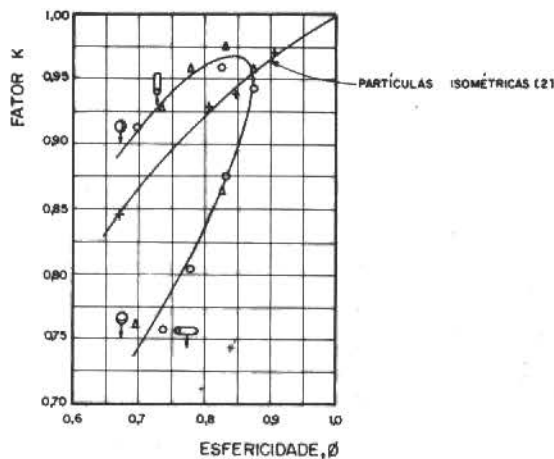


Figura 3 - Fator K ($C_D = 24/KRe$) para partículas regulares isométricas e não-isométricas, em função da esfericidade: $Re < 0,1$ (reprodução da fig. 6 de Heiss e Coull [3]).

2) $C_D \times Re$

A interpolação e extrapolação dos dados experimentais de Pettyjohn e Christiansen [2] conduzem à Tab. (1). A partícula é caracterizada pelo diâmetro da esfera de igual volume que esta e pela esfericidade. A representação gráfica encontra-se na Fig. (5). São propostas as seguintes correlações para os dados

de Pettyjohn e Christiansen,

$$Re \leq 4(1,7\phi - 1)10^3,$$

$$C_D = 0,33 \frac{\left[1 + \frac{9,06}{Re^{1/2}}\right]^2}{\ell g_{10} \frac{\phi}{0,065}} + (1,91 - 1,88\phi) \quad (4)$$

$$Re \geq 4(1,7\phi - 1)10^3, \quad C_D = 5,31 - 4,88\phi \quad (5)$$

A correlação para altos Re constitui-se, em parte, na combinação das correlações de Pettyjohn e Christiansen [2] e de Concha e Almendra [10]. A correlação para altos Re é a de Pettyjohn e Christiansen [2]. A qualidade das correlações propostas pode ser avaliada com o auxílio da Tab. (1).

3) $C_D Re^2 \times Re$

A Tab. (2) permite determinar por interpolação linear logarítmica o valor de Re uma vez conhecido $C_D Re^2$,

$$C_D Re^2 = \frac{4}{3} \frac{d_p^3 \rho (\rho_s - \rho) g}{\mu^2} \quad (6)$$

Pode-se obter desta maneira o valor da velocidade relativa fluido-partícula U uma vez conhecidos o diâmetro da partícula e as propriedades do sistema. No caso de Re baixos ou de Re elevados podemos dispor diretamente das fórmulas,

$$Re < 0,1, \quad U = \left[0,843 \ell g_{10} \frac{\phi}{0,065} \left[\frac{g(\rho_s - \rho) d_p^2}{18\mu} \right] \right]^{1/2} \quad (7)$$

$$Re > 4(1,7\phi - 1)10^3, \quad U = \left[\frac{4g(\rho_s - \rho) d_p}{3(5,31 - 4,88\phi)\rho} \right]^{1/2} \quad (8)$$

4) $C_D/Re \times Re$

A Tab. (3) permite determinar por interpolação linear logarítmica o valor de Re uma vez conhecido C_D/Re ,

$$C_D/Re = \frac{4}{3} \frac{(\rho_s - \rho) g \mu}{\rho^2 U^3} \quad (9)$$

Pode-se obter desta maneira o valor do diâmetro da partícula uma vez conhecidas a velocidade relativa fluido-partícula e as propriedades do sistema. No caso de Re baixos ou de Re elevados podemos dispor diretamente das fórmulas

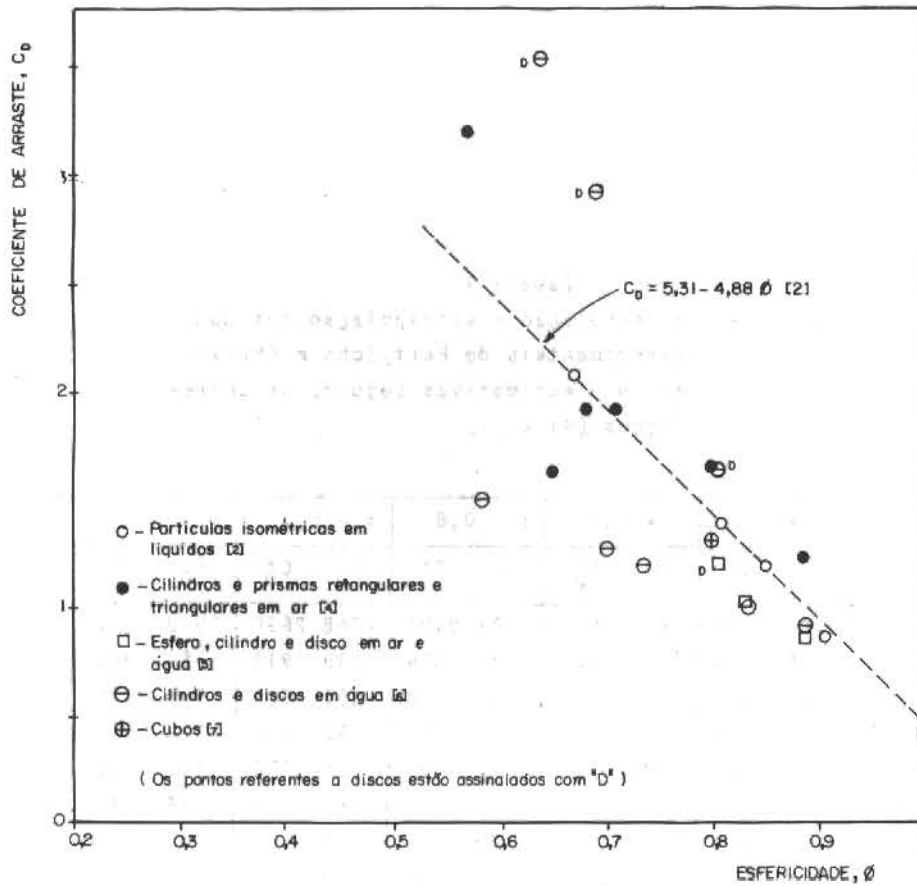


Figura 4 - Coeficiente de arraste para partículas regulares isométricas e não-isométricas em função da esfericidade: $Re > 10^3$

mulas

$$Re < 0,1,$$

$$d_p = \left[\frac{18\mu U}{0,8432g_{10} \frac{\phi}{0,965} \cdot g(\rho_s - \rho)} \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$Re > 4(1,7\phi - 1)10^3,$$

$$d_p = \frac{3(5,31 - 4,88\phi)\rho U^2}{4(\rho_s - \rho)g} \quad (11)$$

REFERÊNCIAS

- [1] Pernolet, V., citado em Wadell, H., J. Franklin Inst., 217, 459 (1934).
- [2] Pettyjohn, E.S. e Christiansen, E.B., Chem. Eng. Progress, 44, 2, 171 (1948).
- [3] Heiss, J.F. e Coull, J., Chem. Eng. Progress, 48, 3, 133 (1952).
- [4] Becker, H.A., Can. J. Chem. Eng., 37, 4, 85 (1959).
- [5] Christiansen, E.B. e Barker, D.H., A.I.Ch.E. Journal, 11, 1, 145 (1965).
- [6] Isaacs, J.L. e Thodos, G., Can. J. Chem. Eng., 45, 6, 150 (1967).
- [7] Wadell, H., J. Franklin Inst., 217, 459 (1934).
- [8] Brown, G.G. (Editor) "Unit. Operations", John Wiley & Sons, Inc., Nova Iorque e Londres, 6a. impressão (1956).
- [9] Heywood, H., Proc. Inst. Mech. Engs., 140, 257 (1938).
- [10] Concha, F. e Almendra, E.R., Int. J. Mineral Processing, 5, 349 (1979).

Tabela 1
 $C_D \times Re$: interpolação e extrapolação dos dados experimentais de Pettyjohn e Christensen e estimativas segundo as correlações (4) e (5)

Re	$\phi = 1$		$\phi = 0,9$		$\phi = 0,8$		$\phi = 0,7$		$\phi = 0,6$	
	C_D	C_D^*	C_D	C_D^*	C_D	C_D^*	C_D	C_D^*	C_D	C_D^*
10^{-2}	2400	2350	2494	2520	2611	2520	2758	2690	2949	2850
3×10^{-2}	800	796	831	825	870	854	919	911	983	968
5×10^{-2}	480	482	499	500	522	518	551	553	589	588
10^{-1}	240	246	255	255	272	265	292	283	312	310
3×10^{-1}	80	86,2	84	89,4	90	93	96	100	103	105
5×10^{-1}	49,5	53,5	52,5	55,6	56	58	60	62	64	66
1	26,5	28,4	28	29,6	30	31	32	33	33	35
3	10,4	10,9	11	11,5	11,8	12,1	12,6	13,0	13,3	14,0
5	6,9	7,2	7,5	7,6	8,0	8,1	8,9	8,8	9,4	9,5
10	4,1	4,2	4,3	3,6	5,0	4,9	5,5	5,4	5,9	5,8
3×10	2,0	2,0	2,3	2,3	2,6	2,5	2,9	2,8	3,32	3,20
5×10	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0	2,3	2,3	2,55	2,55
10^2	1,07	1,05	1,2	1,27	1,5	1,5	1,95	1,75	2,70	2,38
3×10^2	0,65	0,68	0,77	0,89	1,05	1,11	1,59	1,33	2,60	2,38
5×10^2	0,55	0,58	0,73	0,79	1,02	1,00	1,49	1,22	2,38	2,38
10^3	0,46	0,49	0,79	0,70	1,19	0,91	1,90	1,89	2,38	2,38
3×10^3	0,40	0,43	0,92	0,92	1,41	1,41	1,89	1,89	2,38	2,38
5×10^3	0,39	0,43	0,92	0,92	1,41	1,41	1,89	1,89	2,38	2,38
10^4	0,41	0,43	0,92	0,92	1,41	1,41	1,89	1,89	2,38	2,38

C_D^* - valores obtidos através das correlações (4) e (5).

Tabela 2

 $C_D Re^2 \times Re$

$\lg_{10} Re$	$\lg_{10} (C_D Re^2)$				
	$\phi=1$	$\phi=0,9$	$\phi=0,8$	$\phi=0,7$	$\phi=0,6$
-2,000	-0,620	-0,604	-0,583	-0,559	-0,530
-1,523	-0,155	-0,126	-0,106	-0,082	-0,053
-1,301	0,079	0,097	0,117	0,140	0,167
-1,000	0,380	0,407	0,431	0,465	0,494
-0,523	0,857	0,879	0,908	0,937	0,967
-0,301	1,093	1,117	1,146	1,176	1,204
0,000	1,423	1,447	1,477	1,502	1,525
0,477	1,971	1,996	2,025	2,053	2,079
0,699	2,238	2,274	2,301	2,338	2,371
1,000	2,613	2,635	2,703	2,740	2,771
1,477	3,255	3,316	3,369	3,425	3,476
1,699	3,574	3,616	3,677	3,762	3,804
2,000	4,029	4,079	4,173	4,290	4,431
2,477	4,767	4,841	4,975	5,155	5,369
2,699	5,140	5,262	5,407	5,580	5,775
3,000	5,663	5,898	6,076	6,279	6,377
3,477	6,556	6,917	7,104	7,230	7,330
3,699	6,984	7,362	7,548	7,679	7,775
4,000	7,607	7,963	8,149	8,276	8,377

Tabela 3

 $C_D/Re \times Re$

$\lg_{10} Re$	$\lg_{10} (C_D/Re)$				
	$\phi=1$	$\phi=0,9$	$\phi=0,8$	$\phi=0,7$	$\phi=0,6$
-2,000	5,380	5,396	5,417	5,441	5,470
-1,523	4,427	4,442	4,462	4,486	4,516
-1,301	3,982	3,999	4,017	4,041	4,072
-1,000	3,380	3,407	3,435	3,465	3,494
-0,523	2,427	2,447	2,477	2,505	2,535
-0,301	1,996	2,021	2,049	2,079	2,107
0,000	1,423	1,447	1,477	1,502	1,525
0,477	0,540	0,565	0,594	0,623	0,646
0,699	0,140	0,176	0,204	0,241	0,274
1,000	-0,387	-0,365	-0,297	-0,260	-0,229
1,477	-1,176	-1,115	-1,062	-1,007	-0,955
1,699	-1,523	-1,481	-1,420	-1,335	-1,292
2,000	-1,971	-1,921	-1,827	-1,710	-1,569
2,477	-2,664	-2,558	-2,456	-2,276	-2,062
2,699	-2,959	-2,836	-2,690	-2,548	-2,322
3,000	-3,337	-3,102	-2,924	-2,721	-2,623
3,477	-3,876	-3,514	-3,328	-3,201	-3,101
3,699	-4,114	-3,735	-3,550	-3,423	-3,322
4,000	-4,393	-4,037	-3,851	-3,724	-3,623

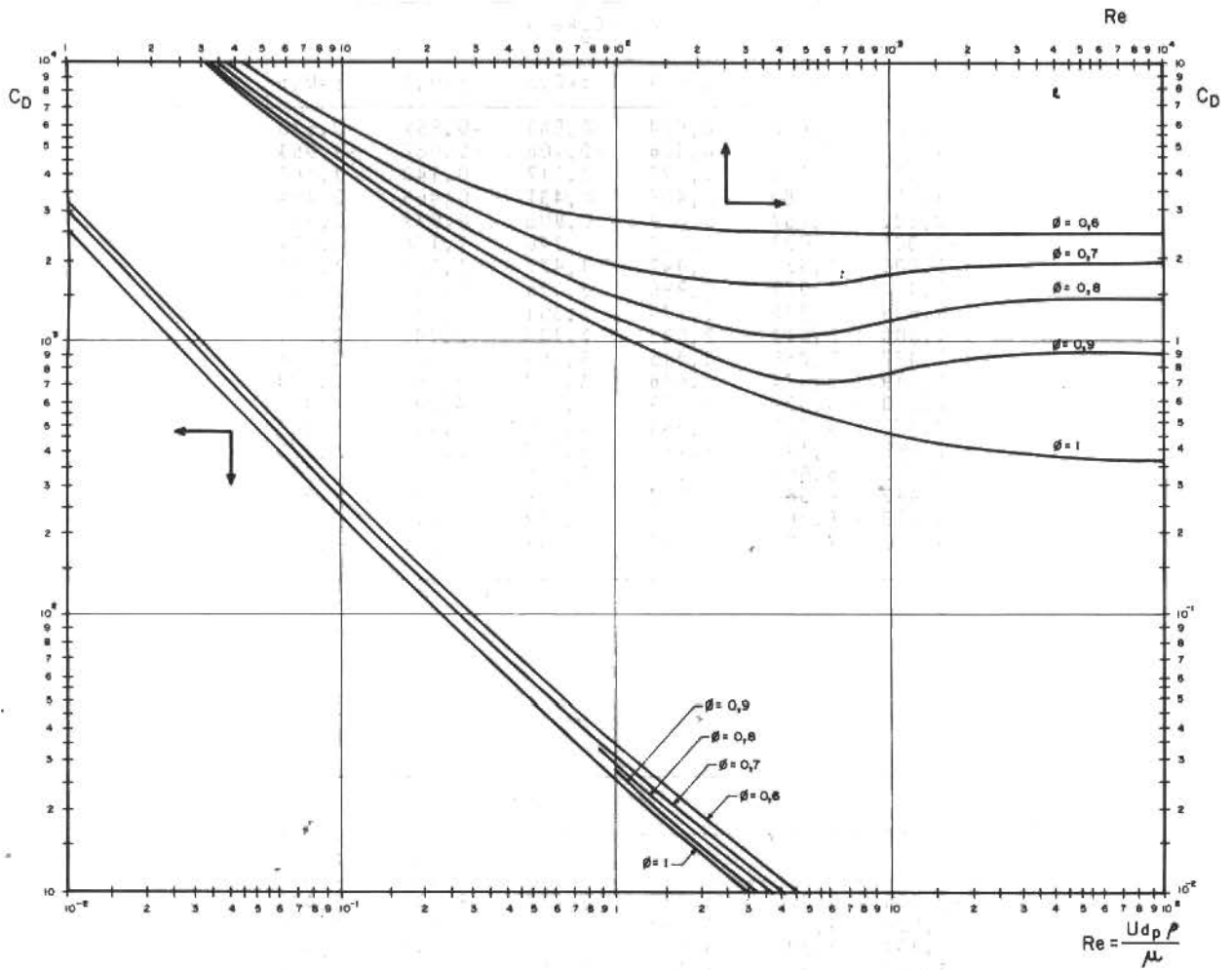


Figura 5 - Coeficiente de arraste para partículas isométricas em função do número de Reynolds e da esfericidade (gráfico obtido a partir dos dados experimentais de Pettyjohn e Christiansen [2]).

INFLUÊNCIA DO ATRITO NO FORJAMENTO A FRIO DE PLACAS RETANGULARES

GUILHERME J. P. MOREIRA

DEPARTAMENTO DE MATERIAIS, FEG/UNESP

PESQUISADOR ASSISTENTE, EAV/IAE/CTA

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS SP CEP 12200

HAZIM A. AL-QURESHI

DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CTA SÃO JOSÉ DOS CAMPOS SP CEP 12200

SUMÁRIO

No presente trabalho é feito uma análise de tensões em compressão de placas retangulares a frio entre matrizes rugosas. Assume-se que o coeficiente de atrito, do tipo columbiano depende somente dos materiais e tipo de superfície. A presente teoria mostra a variação da pressão tipo "Friction Hill", em três dimensões. Mostra-se também a influência dos parâmetros considerados na análise, sobre a validade da hipótese do caso particular do estado de deformações plana.

SUMMARY

This work presents a theoretical analyses of the compression of slabs between two rough flat dies. It is assumed that the coefficient of friction "Coulomb Type", depends only on the material properties and the surface conditions. The present theory shows the variations of the pressure distributions "Friction Hill Type" in three dimensions. The theory also illustrate the influence of the various parameters considered for the validity of the special case of plane strain.

INTRODUÇÃO

Para a análise de esforços e determinação do coeficiente de atrito em forjamento existem duas maneiras de se resolver o problema, uma a compressão axissimétrica de formas geométricas geradas por superfícies de revolução e outra a compressão plana, isto é, que admite um estado plano de deformação, de formas geométricas tais como placas retangulares, triangulares, etc.

Devido talvez a facilidade de se propor hipóteses mais consistentes, o problema de forjamento axissimétrico recebeu maiores atenções, principalmente no tocante ao estudo do coeficiente de atrito, tanto do tipo columbiano [1], como do tipo coeficiente de proporcionalidade [2][3]; bem como mais recentemente novas hipóteses foram feitas sobre a variação de tensão de cisalhamento ao longo da superfície comprimida [4] obtendo-se com isto informações mais precisas sobre a distribuição de pressão em forjamento axissimétrico.

Entretanto, neste mesmo tempo a compressão plana sofreu pouca ou quase nenhuma evolução, ficando ainda

basicamente presa a hipótese de que quando, por exemplo, em uma placa o comprimento fosse muito maior que a largura o problema poderia ser resolvido como sendo um caso de deformações planas, [5],[6]. Porém, em processos industriais nem sempre existem condições de se fazer valer esta hipótese, bem como não existe um limite definido indicando quando as dimensões serão propícias para se fazer valer a hipótese de estado de deformação plana [7],[8].

Em vista disto, no presente trabalho procura-se obter uma solução mais geral para a compressão não axissimétrica, mostrando haver uma distribuição de pressão dependente do sistema de coordenadas da superfície comprimida, bem como é mostrado haver um limite de validade para a hipótese de deformações planas. Neste trabalho, a análise de tensões é feita em termos do forjamento a frio de uma placa retangular.

PRESENTE TEORIA

Considere-se o elemento infinitesimal de uma placa, retirado ao longo da espessura (t), mostrado na figura 1. Admite-se neste caso que o coeficiente de atrito do tipo columbiano (μ) é função somente das condições de acabamento superficial, material e lubrificante, independentemente da direção assumida.

Sejam σ_x e σ_z as tensões nas direções x e z respectivamente, p a pressão na direção y , $d\sigma_x$ e $d\sigma_z$ incrementos de tensão e μp a tensão de cisalhamento na superfície da placa, das equações de equilíbrio nas direções x e z temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{2\mu p}{t} \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{2\mu p}{t} \quad (1.b)$$

Entretanto as equações (1.a) e (1.b) não podem ser integradas visto que p é um certo $p(x, z)$.

Porém, recorrendo às equações de Lévy-Mises em sua forma integrada, e a condição de que não existe abaulamento ao longo da espessura da placa, durante a compressão, temos:

$$\epsilon_x = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_z - p) \right] \quad (2.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[-p - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad (2.b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x - p) \right] \quad (2.c)$$

onde ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z são as deformações nas direções x, y e z respectivamente, $\bar{\epsilon}$ é a deformação efetiva e $\bar{\sigma}$ a tensão efetiva. Sendo:

$$\epsilon_y = \lambda_n \frac{t_f}{t_0} \quad (3)$$

onde t_f é a espessura obtida após a compressão e t_0 a espessura inicial, sabendo que t não depende de x e z e que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\epsilon}$ são constantes em todo o material para um dado t_f , temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_y) = 0 \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_y) = 0 \quad (4.b)$$

ou

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = -2 \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -2 \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6)$$

Substituindo as equações (1.a) e (1.b) em (5) e (6), temos:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = -2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu p}{t} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = -2 \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu p}{t} \right) \quad (8)$$

Da equação de Von Mises para tensão efetiva derivada com respeito a x e z , associada às equações (7) e (8), obtemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Resolvendo-se a equação (9) encontramos:

$$p = C_1 \exp [-k(x+z)] \quad (10)$$

Admitindo-se que p é simétrico com relação a x e z , obtemos:

$$p = C_1 \exp [-k(|x|+|z|)] \quad (11)$$

Com a equação (11) nas equações (1.a) e (1.b), obtemos:

$$\sigma_x = -\frac{2\mu}{tk} C_1 \exp [-k(|x|+|z|)] + f(z) \quad (12)$$

$$\sigma_z = -\frac{2\mu}{tk} C_1 \exp [-k(|x|+|z|)] + g(x) \quad (13)$$

A constante de integração C_1 , e as funções $f(z)$ e $g(x)$ são determinadas a partir das seguintes condições de contorno:

$$(a) \sigma_x \Big|_{|x|=a} = 0$$

$$(b) \sigma_z \Big|_{|z|=b} = 0$$

$$(c) p \Big|_{\substack{|x|=a \\ |z|=b}} = Y_0$$

onde a é a metade da dimensão total da placa na direção x e b é a metade da dimensão total da placa na direção z e Y_0 é a tensão de escoamento correspondente a uma certa deformação imposta à placa.

Desta forma:

$$f(z) = \frac{2\mu}{kt} C_1 \exp [-k(a+|z|)] \quad (14)$$

$$g(x) = \frac{2\mu}{kt} C_1 \exp[-k(b+|x|)] \quad (15)$$

$$C_1 = -Y_0 \exp[k(a+b)] \quad (16)$$

A constante k pode ser determinada a partir da análise de distribuição de pressão em uma placa, com a hipótese de haver um estado de deformações plana. Neste caso:

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{2} Y_0 \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a - |x|)\right] \quad (17)$$

Quando $a \gg b$, isto é, p não varia sobre a menor dimensão, no caso b , e $\epsilon_z = 0$.

Da equação (17), temos:

$$k = \frac{2\mu}{t} \quad (18)$$

Com as equações (14), (15), (16) e (18) sendo substituídas nas equações (11), (12) e (13), obtemos:

$$p = -Y_0 \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a+b-|x|-|z|)\right] \quad (19)$$

$$\sigma_x = Y_0 \left\{ \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a+b-|x|-|z|)\right] - \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a-|z|)\right] \right\} \quad (20)$$

$$\sigma_z = Y_0 \left\{ \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a+b-|x|-|z|)\right] - \exp\left[\frac{2\mu}{t}(a-|x|)\right] \right\} \quad (21)$$

As quais expressam as variações da pressão em função de x e z (Friction Hill), da tensão na direção x e da tensão na direção z , também como funções de x e z .

RESULTADOS TEÓRICOS E CONCLUSÕES.

Com o propósito de se estudar o comportamento das expressões (19) (20) e (21). Foi feita uma análise numérica para o processo de forjamento de placas, conforme especificadas na tabela 1.

Tabela 1 - Dimensões finais das placas analisadas, admitindo-se $\bar{\sigma} = 50,2(\bar{\epsilon})^{0,4}$ (kgf/mm²) e $\mu = 0,343$. (conforme ref. (4)) (Material cobre recozido).

	Espessura (t) (mm)	Largura (a) (mm)	Comprimento (b) (mm)	b/a
Placa nº 1	4.62	9.0	9.0	1/1
Placa nº 2	4.62	9.0	7.2	7.2/9.0
Placa nº 3	4.62	9.0	3.6	3.6/9.0
Placa nº 4	4.62	9.0	1.8	1.8/9.0
Placa nº 5	4.62	9.0	.09	1/100

Admitindo-se uma taxa de deformação igual a 50%,

foram então encontrados os valores de p , σ_x e σ_z para cada placa e plotados, como pode ser visto nas figuras de nºs 2 a 6, inclusive, as curvas p vs. x vs. z as quais nos fornecem a distribuição de pressão sobre a superfície da placa para cada relação b/a .

Como pode ser observado, a medida que b diminui, a variação da pressão ao longo do eixo z torna-se mais acentuada até que quando esta relação atinge aproximadamente o valor de 1/100, praticamente podemos considerar que p não varia ao longo de z , isto é, para esta relação seria válida, ainda que aproximadamente, a hipótese de estado plano de deformações.

Com isto, podemos notar que a imposição da hipótese de estado de deformação plana deve ser vinculada a uma análise da geometria da peça a ser forjada, das propriedades mecânicas do material e das condições superficiais.

Deve ser observado que os valores numéricos mostrados neste trabalho são valores puramente teóricos, não expressando a realidade do material utilizado como fonte. Desta forma, a previsão do limite de validade da hipótese de deformação plana será determinado a partir de cálculos teóricos com dados experimentais.

Este tipo de análise presta-se ainda para estimativas mais precisas de cargas de forjamento a frio.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IAE/EAV as facilidades de computação e a ajuda financeira. Agradecem também ao Cap. Engº Germanto de Freitas por sua ajuda na execução do programa.

REFERÊNCIAS

1) Revistas:

- [1] Schroeder, W. e Webster, D.A.; "Press-Forging thin sections: Effect of Friction, Area and Thickness on Pressure Required". *Journal of Applied Mechanics*, vol.16, 1949, pp.289.
- [2] Male, A.T. e Cockcroft, M.G.; "A Method for the Determination of Friction of Metals under Conditions of Bulk Plastic Deformation"; *Journal of the Institute of Metals*, vol.93, 1964, pp.38.
- [3] Avitzur, B.; "Forging of Hollow Disks"; *Israel Journal of Technology*, vol.2, nº3, 1964, pp.295.
- [4] Moreira, G.J.P. e Al-Qureshi, H.A.; "Determinação do Coeficiente de Atrito em Forjamento"; *Anais V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, vol.B, 1979, pp.8-128.
- [5] Green A.P.; "A Theoretical Investigation of the Compression of Ductile Materials Between Smooth flat Dies". *Phil Mag.*, vol.42, 1951, pp.900.

- [6] Alexander J.M. "The effect of Coulomb Friction in the plane Strain Compression of Rigid - Plastic Material"; J.Mech Phys Solids, vol.3,1955, pp.233 .
- [7] Bishop, J.F.W.; "On the effect of friction on Compression Indentation Between flat dies"; J. Mech Phys. Solids, vol.6,1958, pp.132.
- [8] Kobayashi S. e Thomsen E.G.; "Approximate Solution to a problems of Press Forging"; Trans.ASME.Series B.J.Eng.Ind., vol. 81, 1959, pp.217.

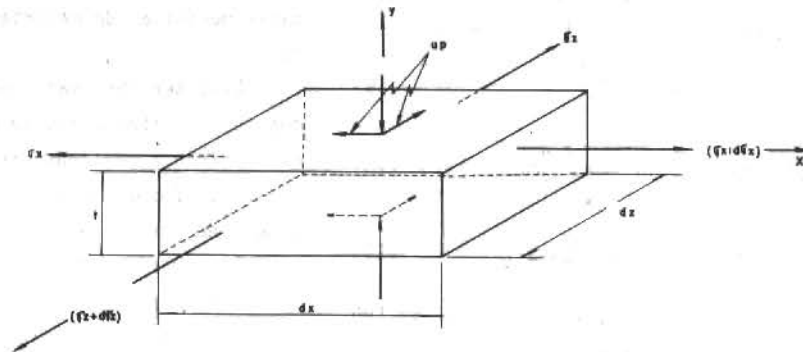


Fig. 1 - Tensões no Elemento de Placa Infinitesimal

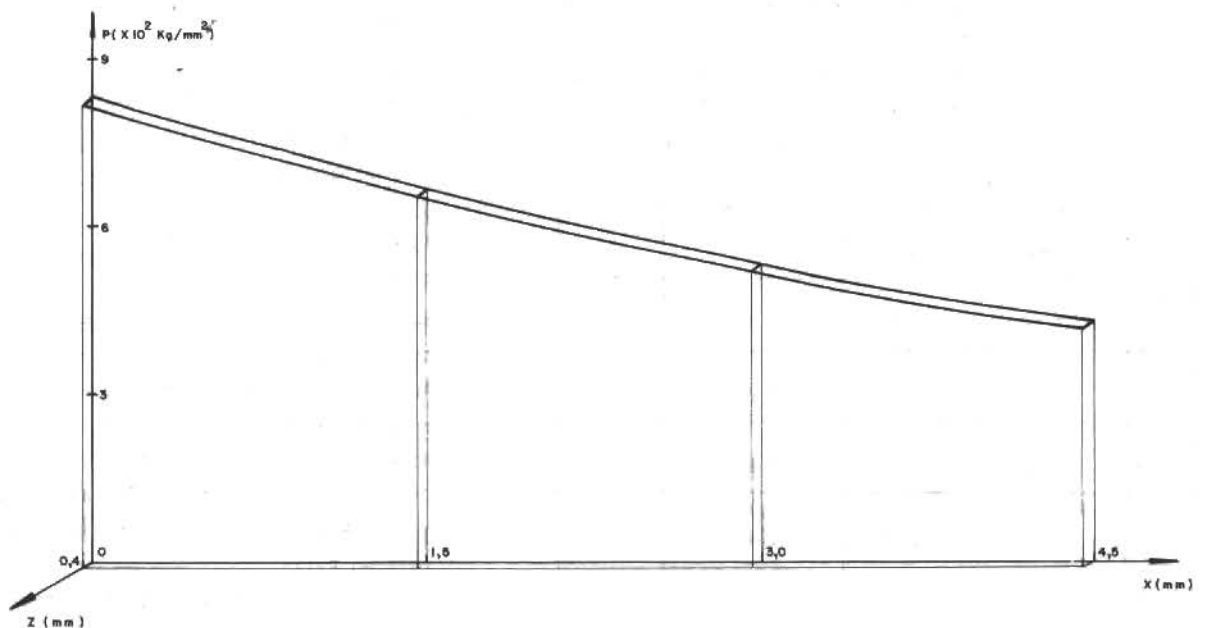


Fig. 2 - P. vs. x. vs. z. para $b/a = 1/100$

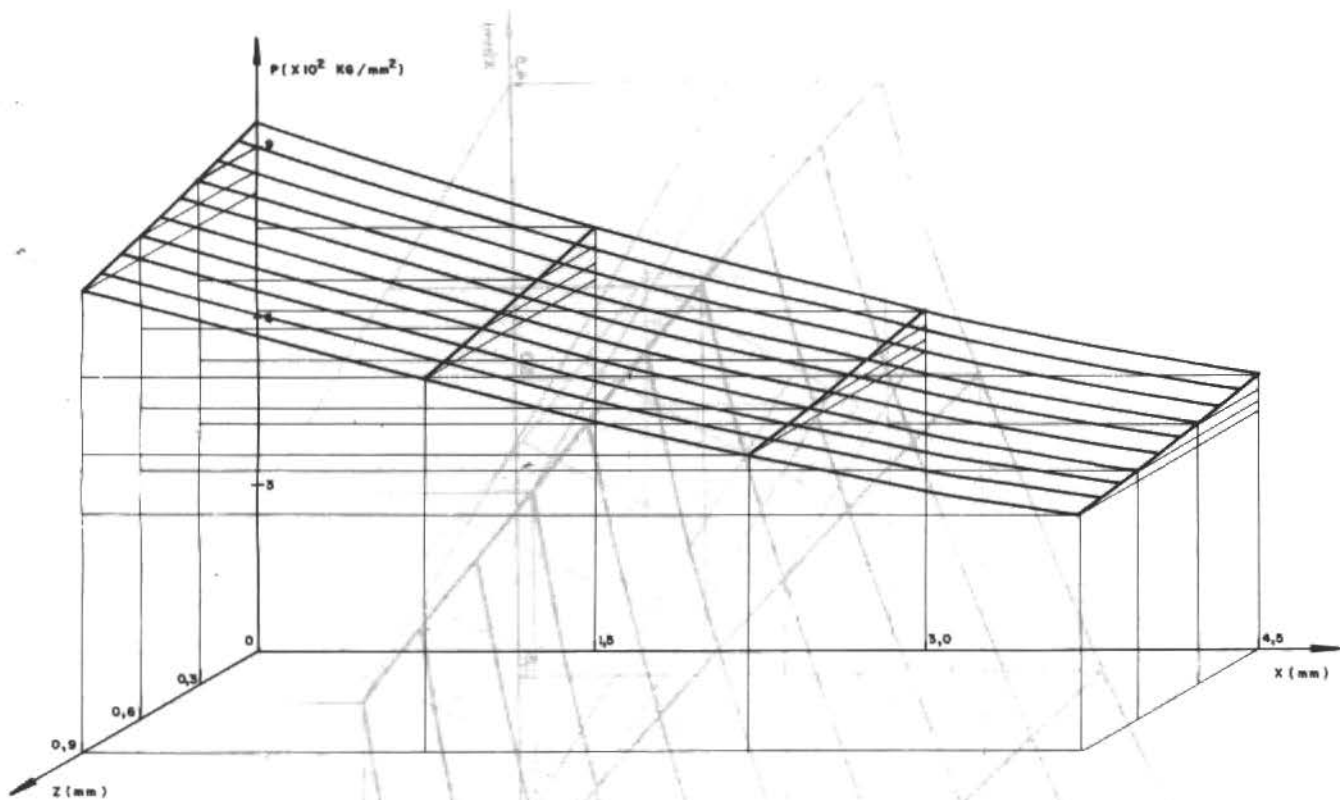


Fig.3 - P. vs. x. vs. z. para $b/a = 1.8/9.0$

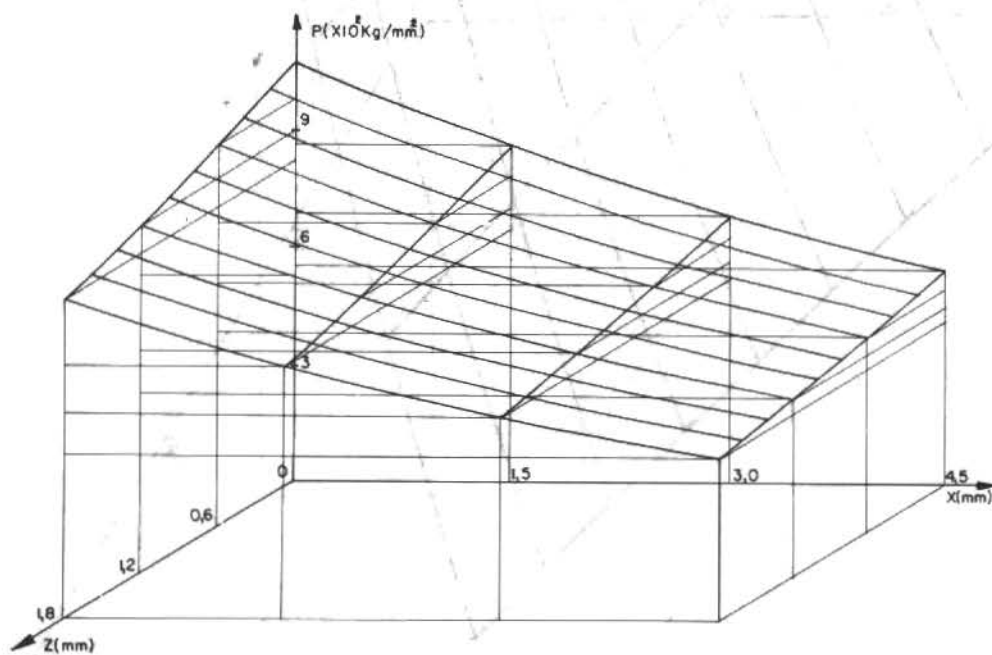


Fig. 4 - P. vs. x. vs. z para $h/a = 3.6/0.0$

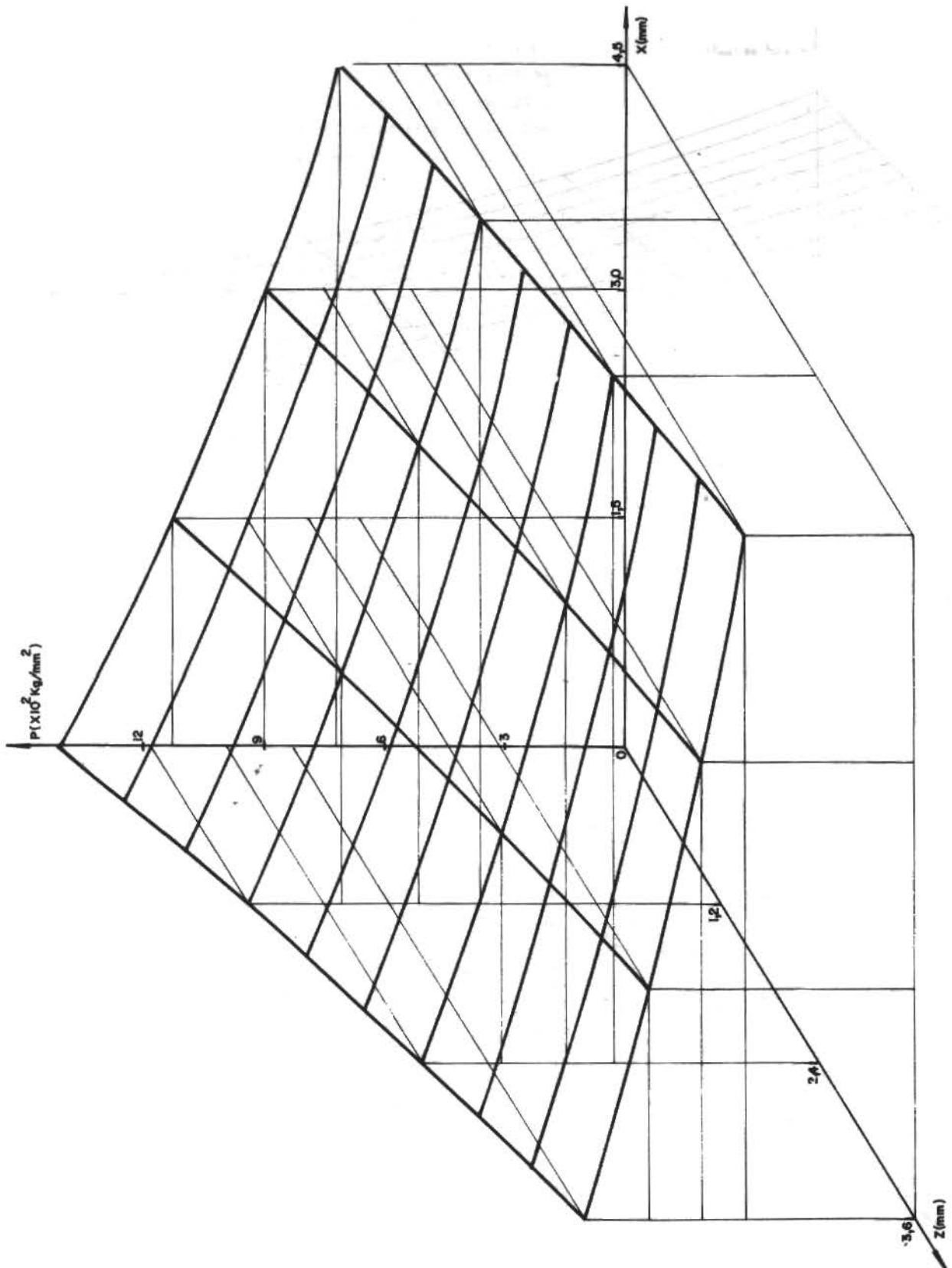


Fig. 5 - P . vs. x . vs. z . para $b/a = 7.2/9.0$

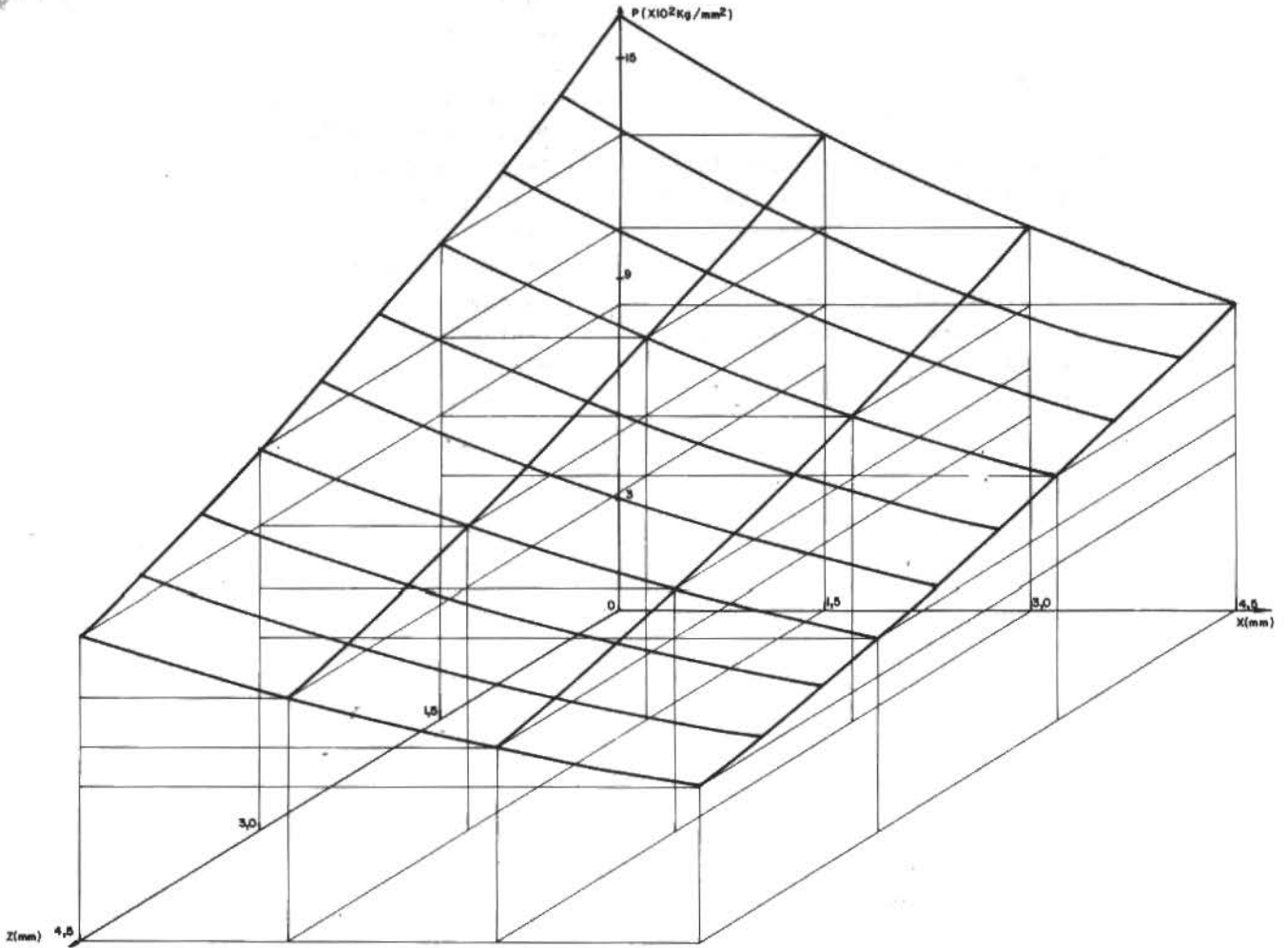


Fig. 6 - P. vs. x. vs. z. para $b/a = 1/1$

CONGRESSOS

1. III Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais na Engenharia.

Data e Local:

10 a 12 de Maio de 1982

Buenos Aires, Argentina

Correspondência:

Ing. Agustin J. Ferrante

Congreso Metodos Computacionales

Avda. de Mayo 881, 19 Piso

(1084) Buenos Aires

Argentina

2. Escola sobre Teoria de Cascas e suas Aplicações em Engenharia. (a ser realizada em duas etapas).

Data e Local:

Módulo I : 5 a 30 de Julho de 1982

Módulo II: 3 de Janeiro a 11 de Fevereiro
de 1983

Rio de Janeiro

Correspondência:

Dr. Raúl Feijóo

Laboratório de Computação Científica

Av. Wenceslau Bráz, 71

22290 - Rio de Janeiro, RJ

Informações Adicionais:

O Módulo I constará de 6 cursos e de um seminário onde especialistas nas áreas de projeto e construção de cascas apresentarão problemas relevantes nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Aeronáutica e Nuclear. Os cursos são:

- Geometria Diferencial
- Mecânica do Contínuo
- Teoria das Cascas e Equações Constitutivas
- Princípios e Métodos Variacionais em Mecânica
- Dinâmica e Instabilidade Elástica
- Fundamentos Matemáticos do Método dos Elementos Finitos

O Módulo II será mais especializado e constará de 8 cursos e de um seminário.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US\$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280mm – with a letter containing title of the papers, name (s) of the institution (s) and author (s)' address (es).

Together with the letter, the author (s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author (s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1981 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means – electronic, mechanical, photographic, recording or any else – is allowed without written permission.

Subscriptions

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

