

VOL. IV - Nº 1 - 1982

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Exceção em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora. Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1981, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

Assinaturas

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

ISSN 0100-7386

REVISTA

BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS

VOL. IV, nº 1, 1982



patrocinada pela

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM

Euclides de Carvalho Fernandes (Presidente); Pedro Carajilescov (Vice-Presidente); Arno Blass (1º Secretário); Raúl Antonino Feijóo (2º Secretário); Samir Nagi Yousri Jerjes (1º Tesoureiro); José de Mendonça Freire (2º Tesoureiro).

EDITOR RESPONSÁVEL

L. Bevilacqua

EDITOR EXECUTIVO

R. Sampaio

CONSELHO EDITORIAL

A. Blass

J.J. de Espíndola

R. A. Feijóo

G. A. Feldman

M. H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarini

F. E. M. Saboya

J. T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Editorial

III

Modelo da Difusão para Estudar a Secagem

Isa M. L. Northfleet

CIENTEC/RS

Adir M. Luiz

Instituto de Física/UFRJ

Rubens Sampaio Filho

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

Antonio S. Vargas

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

1

The Complementary Energy Principle for Multiple-Connected Domains

Luiz Bevilacqua

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

7

Convenção Natural entre Placas Planas Paralelas Inclinadas

Edson L. Zaparoli

Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica, ITA/CTA

Euclides C. Fernandes

Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica, ITA/CTA

15

Análise de Desempenho do Concentrador Assimétrico Ideal

Márcio Ziviani

Departamento de Engenharia Térmica, UFMG

21

Congressos

33

EDITORA CAMPUS

EDITORIAL

Após mais um bem sucedido COBEM onde tivemos a apresentação de 162 trabalhos e após a publicação do Volume III da RBCM vale a pena fazer uma avaliação da situação da RBCM para verificar em que graus foram cumpridos os objetivos da Revista expressos no editorial do Volume III. Para nós, membros da ABCM, isto é crucial, pois não acreditamos poder obter financiamento para a Revista a longo prazo. Se a Revista é importante para nós temos que, a médio prazo, passar a arcar com os seus custos.

Se for consenso que a Revista é fundamental à criação de uma memória nacional onde fique gravada a discussão técnica dos problemas tecnológicos e científicos nacionais e que sirva para motivar jovens pesquisadores e estudantes, temos que começar a lutar para dar-lhe autonomia. Essa luta coincide com a de descobrir e resolver os problemas tecnológicos nacionais importantes que signifiquem nossa independência tecnológica e cultural. Na palestra do Prof. Longo, apresentada no COBEM-81 e publicada nos Anais, vimos que isso não será tarefa fácil. Porém é necessário lutar.

Quais são, a esta altura, os problemas da RBCM?

A RBCM necessita, fundamentalmente, de dois tipos de apoio firme e constante:

1. financeiro, traduzido na compra de assinaturas, colocação de anúncios ou doações que lhe assegurem uma existência constante e independente.
2. contribuição técnica, traduzida em maior volume de artigos científicos, notas técnicas, resenhas de livros, cartas que discutam artigos apresentados na Revista etc.

Do ponto de vista financeiro a RBCM não teve em 1981 o êxito esperado e desejado. Foi escasso o número de assinaturas além das que a ABCM compra para distribuição a seus associados. Foram muitos, porém, os pedidos de doação que interpretamos como real interesse na Revista.

Estamos diante de um problema. Se queremos que a Revista tenha penetração entre estudantes e engenheiros e que sirva como meio de comunicação entre Empresa e Universidade, temos que fazer com que seja assinada pelas Universidades, Centros de Pesquisa, Empresas de Projeto etc. onde gere e multiplique o aprofundamento dos problemas abordados.

São os sócios que devem solicitar de suas empresas que assinem a Revista!

Simples doações não resolveriam o nosso problema e talvez acelerassem apenas o nosso fim. Vale a pena, a esse respeito, levantar algumas questões.

Por que muitas universidades que assinam revistas estrangeiras caríssimas e nem sempre de utilidade equivalente não apoiam uma iniciativa nacional que lhes oferece campo aberto a problemas e soluções em que talvez estejam envolvidas?

Por que companhias que desenvolvem ou procuram desenvolver Tecnologia Nacional e que tanto gastam em outros itens não podem assinar uma Revista e contribuir para torná-la seu próprio porta-voz?

Do ponto de vista de contribuições técnicas ficamos longe do desejável. Pensávamos que as contribuições fossem chover a borbotões mas na realidade apenas pingam. Será que não se cria nos diversos setores de impulso material suficiente para encher 200 páginas por ano?

O COBEM-81 mostra-nos que não é isso. O problema é, pois, de outra origem.

Tentamos analisar o que pode estar acontecendo. Não havendo competição entre o COBEM e a RBCM, é possível e desejável enviar trabalhos para os dois.

Porquê, então, o número de artigos enviados é tão reduzido em contraste com o número de trabalhos apresentados ao COBEM? Apenas porque o artigo exige uma elaboração mais cuidadosa? Talvez, mas quer nos parecer que mereceria a pena esse trabalho pela maior divulgação que o ar

tigo dá ao assunto e ao autor. Ou será que os Congressos exercem maior motivação por oferecer um pagamento imediato qual seja a participação o que, em geral, implica numa viagem? Pode ser, mas assim mesmo, o artigo, pela sua divulgação, significa uma dilatação da presença do autor. Será ainda que os artigos nacionais estão sendo canalizados para o exterior o que proporciona, no entender de muitos, um maior status: ter um artigo publicado numa revista estrangeira? Quando será que nós, cientistas brasileiros, vamos amadurecer e ser capazes de julgar nossos trabalhos nós mesmos sem necessidade do aval de estrangeiros? Por que será que a contribuição da indústria é praticamente nula? Será que não existem problemas ou será que uma possível contribuição de cientistas nacionais à solução desses problemas não interessa?

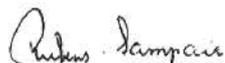
Apresso-me a esclarecer que não estou advogando que não se publique no estrangeiro. Acho importante que isso seja feito, mas não em detrimento de publicações nacionais. Enfim o cientista nacional tem que antes de tudo ser reconhecido no Brasil, e para atingir esse objetivo ele deve publicar uma revista nacional. Ou será que estou enganado?

Mas, apesar de tudo, estamos confiantes que em 82 as coisas vão melhorar. Pretendemos implementar nossa política editorial original visando dar maior acesso à Revista à engenheiros e pesquisadores da indústria. Cuidaremos, além de artigos de pesquisa, também de notas técnicas. Esta denominação englobará artigos que não sendo necessariamente originais, apresentam uma visão didática de algum tópico de interesse, a simples apresentação de um problema também será aceita como Nota Técnica.

Outras seções serão Resenha de Livros, e uma que chamaremos de Debate que servirá para discussão e crítica de artigos apresentados na Revista, estabeleceremos porém o prazo de 2 anos a partir da publicação do artigo discutido ou criticado.

Esperamos contar em 82 com uma maior participação dos associados da ABCM. Consigam novos assinantes, enviem contribuições.

Vamos tentar fazer da ABCM um sucesso pois se nós não o fizermos quem o fará?



Rubens Sampaio
Editor Executivo

MODELO DA DIFUSÃO PARA ESTUDAR A SECAGEM

ISA M. L. NORTHFLEET

CIENTEC/RS

ADIR M. LUIZ

INSTITUTO DE FÍSICA/UFRJ

RUBENS SAMPAIO FILHO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

ANTONIO S. VARGAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

SUMÁRIO

Um túnel de vento foi construído para pesquisar a secagem adiabática de meios porosos. Os testes foram realizados com os seguintes materiais: areia, esferas de vidro e serragem. Utilizando técnicas de atenuação de raios gama realizamos medidas de saturação e de porosidade para diversas alturas ao longo do eixo de simetria do meio poroso. Comparando os resultados das medidas de saturação com as previsões teóricas do modelo da difusão verificamos que a secagem da serragem é dominada pelo mecanismo da difusão. As previsões teóricas baseadas no modelo da difusão divergem dos resultados experimentais referentes à secagem da areia e das esferas de vidro.

INTRODUÇÃO

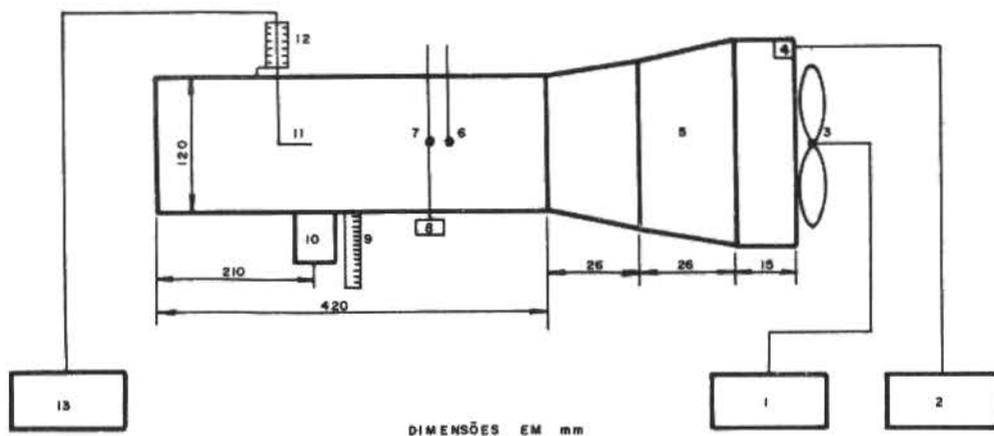
As pesquisas sobre secagem receberam recentemente um novo impulso provavelmente motivadas pelo encarecimento dos preços das fontes energéticas. De acordo com NONHEBEL e MOSS [1], ainda não existem modelos que conduzam a previsões suficientes para se determinar teoricamente a taxa de transferência de massa durante a secagem. Acreditamos, portanto, ser necessário estudar o mecanismo da transferência de massa a fim de poder fazer pesquisas visando a otimização dos processos de secagem.

Numa comunicação anterior [2] apresentamos um modelo para estudar o mecanismo da difusão durante a secagem de meios porosos. O presente trabalho possui dois objetivos básicos: (a) divulgar um método de medida de porosidade e de saturação de um meio poroso baseado em técnicas de atenuação de raios gama e (b) aplicar um modelo de difusão para estudar a secagem dos seguintes materiais: areia (mesh: 100-150), esferas de vidro (mesh: 100-200) e

serragem.

DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

O túnel de vento montado para a realização das experiências é indicado esquematicamente na Figura 1. O material usado na montagem deste secador foi Plexiglass com exceção da seção de aquecimento (5) que contém espirais de aquecimento. A velocidade do ar pode ser controlada com o reostato (1) indicado nesta figura. Durante as experiências a velocidade do ar foi mantida a 4 m/s. Para medir esta velocidade utilizamos um tubo de pitot estático (11) localizado num ponto central acima da amostra. As diferenças de pressão através do tubo de pitot foram medidas mediante um micromanômetro (13). O dispositivo (12) possibilita a movimentação vertical do tubo de pitot. A temperatura do ar foi mantida em torno de 70°C através do uso de um resistor variável (2), juntamente com o termostato (4). A umidade do ar pode ser medida pelo termômetro de bulbo molhado (7).



- | | |
|---|--|
| 1 - VARIADOR DE TENSÃO PARA O VENTILADOR | 8 - RESERVATÓRIO DE ÁGUA DESTILADA |
| 2 - VARIADOR DE TENSÃO PARA AS RESISTÊNCIAS | 9 - ESCALA DE ACRÍLICO |
| 3 - VENTILADOR | 10 - AMOSTRA |
| 4 - TERMOSTATO | 11 - TUBO DE PITOT |
| 5 - AQUECEDOR DE AR | 12 - SUPORTE COM ESCALA PARA DESLOCAMENTO DO TUBO DE PITOT |
| 6 - TERMÔMETRO DE BULBO SECO | 13 - MICROMANÔMETRO |
| 7 - TERMÔMETRO DE BULBO ÚMIDO | |

Figura 1. Esquema do túnel de vento

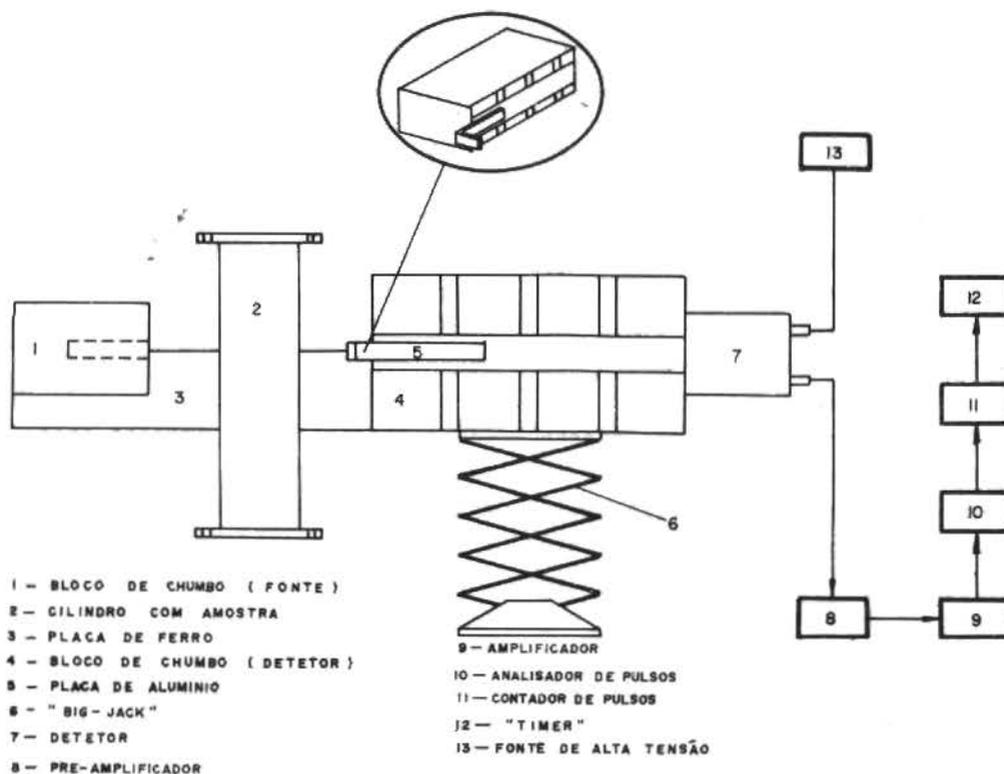


Figura 2. Esquema do sistema de medidas da saturação utilizando o método de atenuação de raios gama

A amostra (10), depois de ser previamente umidificada até uma saturação de 100%, era posteriormente colocada em um cilindro com 83 mm de altura e com 52 mm de diâmetro.

As medidas de porosidade e de saturação da amostra eram realizadas mediante técnicas de atenuação de raios gama. Utilizamos o isótopo Am^{241} que foi colocado numa caixa de chumbo com um pequeno orifício. Os fundamentos desta técnica experimental são descritos por GARDNER e ELY [3] e por CHASE e RABINOWITS [4]. Um diagrama esquemático deste sistema é apresentado na Figura 2.

Durante a secagem, em intervalos de 30 minutos, medimos a saturação em pontos equidistantes de 1 cm ao longo do eixo de simetria do cilindro. Utilizamos um dispositivo mecânico (indicado pelo número 6 da Figura 1) a fim de possibilitar o movimento do aparelho ao longo da direção vertical, para realizar as medidas de saturação em função da altura. A placa (5) indicada na Figura 2 se move verticalmente mantendo contato com a placa (9) indicada na Figura 1, a fim de fixar e indicar a posição da medida. Maiores detalhes sobre os métodos experimentais aqui resumidos podem ser encontrados na Tese de Mestrado de Northfleet [5].

MODELO DA DIFUSÃO

Queremos modelar a secagem de um cilindro poroso, inicialmente saturado e impermeável na superfície lateral e na superfície da base inferior. Ou seja, a secagem é feita apenas pela superfície da base superior.

Sendo assim, adotamos um modelo unidimensional o que equivale a supor que a saturação varia apenas com a altura do cilindro e com o tempo. Adotamos, também, por simplicidade, um modelo de uma fase. Levando em conta a equação da continuidade para a fase líquida podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} + \text{div}(\rho_\ell v_\ell) = 0 \quad (1)$$

onde ρ_ℓ é a densidade parcial do líquido (definida como a relação entre a massa do líquido e o volume da mistura) e v_ℓ é a velocidade do líquido. Suporemos condições isotérmicas e adotaremos a seguinte hipótese constitutiva:

$$\rho_\ell v_\ell = -D \text{grad} \rho_\ell \quad (2)$$

que expressa o fato do fluxo de massa da fase líquida depender apenas do gradiente de concentração, D é o fator de proporcionalidade desta equação e é conhecido pelo nome de difusividade de mássica. Substituindo (2) em (1), supondo D constante e particularizando para uma dimensão resulta:

$$\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho_\ell}{\partial x^2} \quad (3)$$

Definindo a porosidade ϵ como a relação entre o volume de vazios e o volume total do meio, a saturação S como a relação entre o volume dos poros ocupado pelo líquido e o volume total dos poros, é fácil ver que

$$\rho_\ell = \epsilon d_\ell S \quad (4)$$

onde d_ℓ é a densidade (real) do líquido. Supondo ϵ e d_ℓ constantes, temos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (5)$$

A fim de resolver a equação diferencial (5) precisamos de uma condição inicial e de duas condições de contorno. Inicialmente o meio poroso está completamente saturado pela fase líquida, ou seja:

$$S = 1 ; t = 0 \quad (6)$$

Vamos resolver a equação (5) usando dois tipos de condições de contorno. Vamos designar por C.C.A o seguinte conjunto de condições de contorno:

$$S = S_{eq} ; t > 0 ; x = \ell \quad (7)$$

$$S = S_{eq} ; t > 0 ; x = -\ell \quad (8)$$

onde S_{eq} é a saturação no equilíbrio termodinâmico e ℓ é a altura do meio poroso.

Vamos designar por C.C.B o seguinte conjunto de condições de contorno:

$$D(\partial S'/\partial x) = -\gamma S' ; t > 0 ; x = \ell \quad (9)$$

$$D(\partial S'/\partial x) = \gamma S' \quad ; \quad t > 0 \quad ; \quad x = -\ell \quad (10)$$

onde γ é uma constante e $S' = S - S_{eq}$. Embora a altura total do meio poroso seja igual a ℓ , para facilitar a solução matemática do problema, estamos supondo que o meio poroso possua uma profundidade total igual a 2ℓ e que ele está sendo secado nas faces $x = \ell$ e $x = -\ell$, considerando as mesmas condições externas.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

A solução da equação (5) com a condição inicial (6) e com as condições de contorno (7) e (8) é dada por:

$$\frac{S-S_{eq}}{1-S_{eq}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-bt)}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi(\ell-x)}{2\ell} \quad (11)$$

onde: $b = D\pi^2(2n+1)^2/4\ell^2$.

A equação (11) é análoga à solução obtida por SHERWOOD [6]. A solução da equação (5) com a condição inicial (6) e as condições de contorno (9) e (10) é dada por:

$$\frac{S-S_{eq}}{1-S_{eq}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L \cos(\beta_n x/\ell) \exp(-\beta_n^2 Dt/\ell^2)}{(\beta_n^2 + L^2 + L) \cos \beta_n} \quad (12)$$

onde $L = \ell\gamma/D$ e β_n são as raízes positivas da equação:

$$\beta \operatorname{tg} \beta = L$$

A equação (12) é análoga à equação obtida por CARSKAW e JAEGER [7]. A fim de poder comparar os resultados experimentais com as previsões teóricas do modelo da difusão é necessário calcular a constante D da equação (11) e as constantes D e γ da equação (12). A estimativa da constante D foi feita através do cálculo do valor médio de S . Fizemos também a estimativa das constantes D e γ mediante o método dos mínimos quadrados, isto é, procuramos ajustar estas constantes de modo a obter a melhor aproximação possível entre a curva teórica e a curva experimental.

Considerando a solução (11) obtivemos os seguintes valores pelo método do valor médio: $D_1 = 1,32 \text{ cm}^2/\text{h}$; $D_2 = 1,07 \text{ cm}^2/\text{h}$ e $D_3 = 0,47 \text{ cm}^2/\text{h}$. O índice 1 refere-se à areia, o índice 2 refere-se às esferas de vidro e o índice 3 refere-se à serragem.

Considerando a solução (11) e usando o método dos mínimos quadrados encontramos:

$D_1 = 0,94 \text{ cm}^2/\text{h}$; $D_2 = 0,85 \text{ cm}^2/\text{h}$ e $D_3 = 0,47 \text{ cm}^2/\text{h}$.

Considerando a solução (12) e utilizando o método dos mínimos quadrados obtivemos os seguintes valores: $D_1 = 0,88 \text{ cm}^2/\text{h}$; $\gamma_1 = 4,23 \text{ cm/h}$; $D_2 = 0,69 \text{ cm}^2/\text{h}$; $\gamma_2 = 3,32 \text{ cm/h}$; $D_3 = 0,76 \text{ cm}^2/\text{h}$; $\gamma_3 = 0,40 \text{ cm/h}$.

De acordo com HOUGEN et al. [8] para verificar se o modelo teórico é ou não é confirmado pelos dados experimentais é necessário comparar as previsões teóricas da saturação S em função do tempo t para cada ponto do meio poroso; além disso, é preciso também comparar os perfis teóricos da saturação em função da altura (para diversos tempos) com os respectivos perfis obtidos experimentalmente.

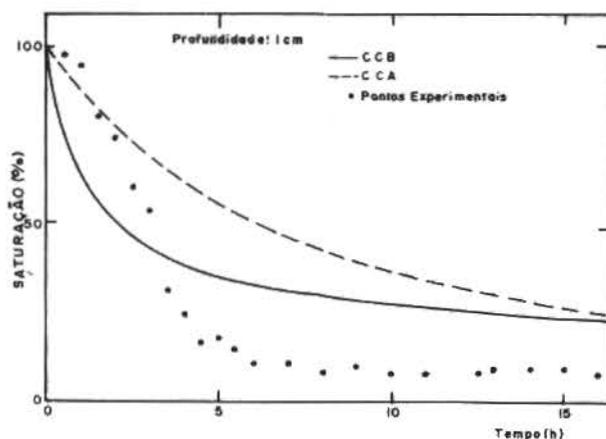


Figura 3. Saturação local em função do tempo para o meio M-1

Vamos designar por M-1 o leito de areia, por M-2 o leito de esferas de vidro e por M-3 o leito de serragem. Na Figura 3 comparamos os valores locais de S em função de t (para o meio M-1) com os valores de $S(t)$ previstos pelo modelo teórico; na Figura 4 fazemos esta comparação para o meio M-2 e na Figura 5 fazemos esta comparação para o meio M-3. Vemos que as previsões teóricas divergem bastante dos dados experimentais (com um desvio padrão da ordem de 300%) para os meios M-1 e M-2. No entanto, para o meio M-3 a concordância entre as previsões teóricas e os dados experimentais é

bastante razoável (com um desvio padrão da ordem de 5%).

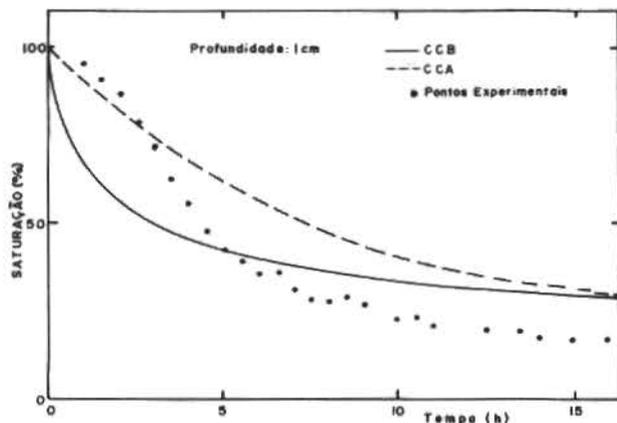


Figura 4. Saturação local em função do tempo para o meio M-2

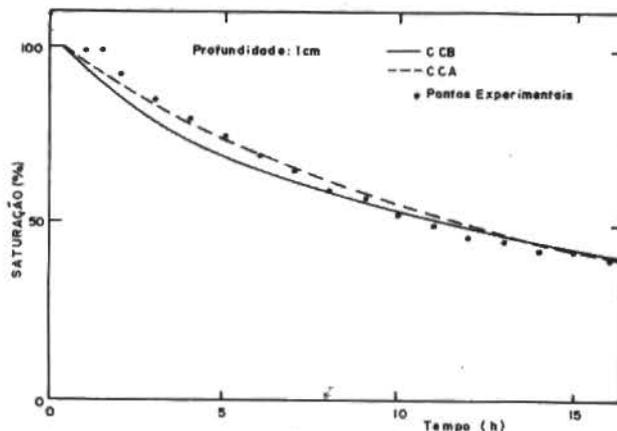


Figura 5. Saturação local em função do tempo para o meio M-3

Na Figura 6 comparamos os perfis teóricos de saturação em função da profundidade com os dados experimentais referentes a M-1 (para $t = 10$ h). Na Figura 7 comparamos os perfis teóricos de saturação em função da profundidade com os dados experimentais referentes ao meio M-2 (para $t = 15$ h). Nas Figuras 8 e 9 comparamos as curvas teóricas com os perfis experimentais de S em função da profundidade para o meio M-3. Verificamos, novamente, que as previsões do modelo da difusão divergem substancialmente (com desvio padrão da ordem de 200 a 300%) para os meios M-1 e M-2. No entanto, para o meio M-3 existe uma concordância ra-

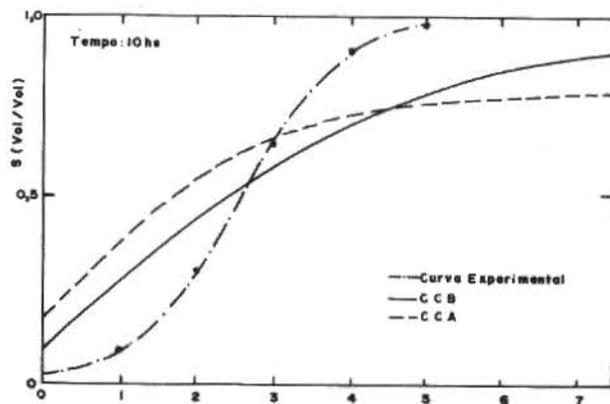


Figura 6. Saturação em função da profundidade para o meio M-1

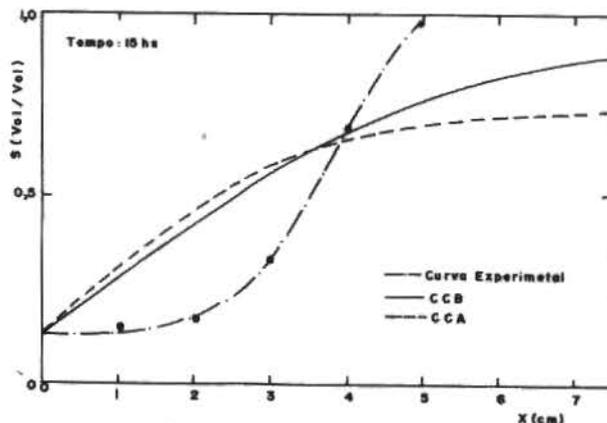


Figura 7. Saturação em função da profundidade para o meio M-2

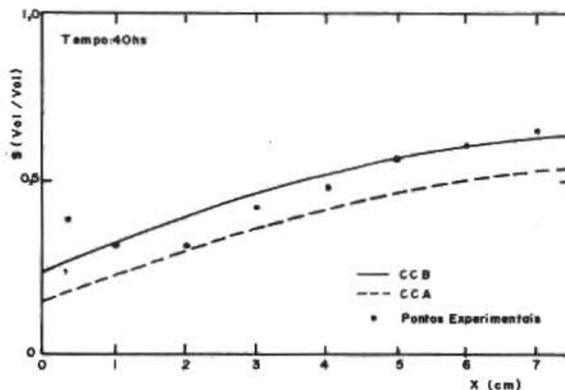


Figura 8. Saturação em função da profundidade para o meio M-3

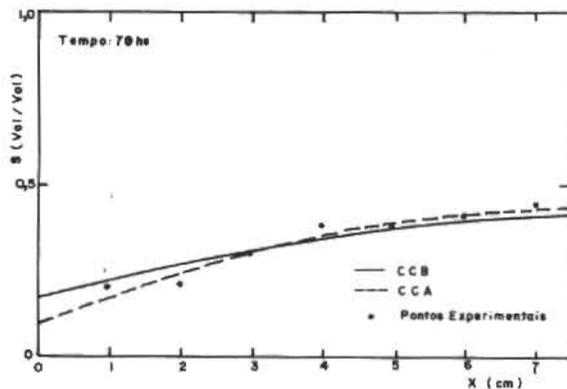


Figura 9. Saturação em função da profundidade para o meio M.3

zoável entre as previsões teóricas e os dados experimentais (com desvio padrão da ordem de 5 a 10%).

CONCLUSÕES

Acreditamos que a principal contribuição experimental deste trabalho tenha sido a técnica de medida de saturação usada para pesquisar a secagem de meios porosos. A saturação e a porosidade foram determinadas por técnicas de atenuação de raios gama, conforme descrito no início deste trabalho. Esta técnica fornece um modo rápido para a determinação da saturação local em qualquer ponto da amostra. Achamos que uma grande vantagem desta técnica (em relação às técnicas baseadas em pesagens) consiste na possibilidade de se determinar o valor local da saturação sem destruir a amostra nem alterar este valor durante a realização da experiência.

Embora o modelo da difusão aqui apresentado não seja original, acreditamos que a verificação experimental de modelos teóricos seja uma

contribuição válida, uma vez que testamos o modelo da difusão usando diversos materiais e aplicando uma técnica de medida sofisticada. Concluímos que os materiais granulares (como a areia e as esferas de vidro) não são governados pelo mecanismo da difusão durante a secagem. No entanto, verificamos que a secagem da serragem é dominada pelo mecanismo da difusão. Num próximo trabalho desenvolveremos um modelo teórico levando em conta o mecanismo da capilaridade para tentar explicar a cinética da secagem de materiais granulares.

REFERÊNCIAS

- [1] G. NONHEBEL, A.A.H. MOSS, "Drying of solids in the chemical industry", Butterworths, Londres, 1971.
- [2] ISA M.L. NORTHFLEET, ADIR M. LUIZ, RUBENS SAMPAIO Fº, ANTONIO S. VARGAS, "Modelo da difusão para o estudo da secagem de meios porosos", Anais do VIII Encontro Sobre Escocamento em Meios Porosos, Curitiba, Paraná, 1980.
- [3] R.P. GARDNER, R.L. ELY, Radioisotope measurement applications in Engineering. Reinhold Publ. Corp., N.Y., 1967.
- [4] G.D. CHASE, J.L. RABINOWITZ, "Principles of radioisotope methodology". Burgess Publ. Co., Menapolis, 1970.
- [5] ISA M.L. NORTHFLEET, "Estudo da secagem com raios gama", Tese de Mestrado, COPPE, UFRJ, 1980.
- [6] T.K. SHERWOOD, "The drying of solids, I", Ind. Eng. Chem., vol. 21, p. 12, 1929.
- [7] H.S. CARSLAW e J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", At the Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [8] O.A. HOUGEN, H.J. MCCAULEY, W.R. MARSHALL, "Limitations of diffusion equations in drying", Trans. Am. Inst. Chem. Eng., vol. 36, p. 183-206, 1940.

THE COMPLEMENTARY ENERGY PRINCIPLE FOR MULTIPLE-CONNECTED DOMAINS

LUIZ BEVILACQUA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, PUC/RJ

SUMMARY

Although an extensive literature can be found focusing the application of variational methods on the linear theory of elasticity, only the case of simple connected domains seems to be given the proper attention. This paper tries to cover part of this gap for plane strain problems, using an extended functional for the classical complementary energy principle. As can be anticipated the Volterra dislocations will come into play, since the displacement field does not need to be single-valued for multiple-connected domains. The necessary conditions for the extremum of the proposed functional will lead to certain restrictions on the stress function, depending on the boundary conditions and the discontinuities of the displacement field. The classical restrictions associated to the Volterra dislocations, are derived in a very clear way. Further informations about other kinds of dislocations are derived showing how they affect the stress function, for the cases with traction, or displacement prescribed on the boundary. It is discussed, under what conditions the dislocations can generate a regular or singular stress field. Similar results are derived for the Saint-Venant torsion problem.

INTRODUCTION

Most of the research reported during the last ten years in the field of variational methods have concentrated on direct methods [1], [2]. The reason is that they are more directly associated with computational techniques. On the other hand certain problems related to the classical theory were left aside. The variational principles for multiple connected domains are among those which have not deserved enough attention.

The main difficulty involving elastostatic problems for multiple connected domains relates to the definition of the field of admissible functions which must contain multi-valued functions in order to preserve the complete set of possible solutions. In this

paper we will show that the complementary energy principle [3], applied to multiple connected domains leads to interesting results. The analysis will be restricted to the torsion of prismatical bars and to the plane strain problem.

TORSION OF PRISMATICAL BARS

Consider a cylindrical bar with an axial hole whose cross section is shown in Figure 1. The material points are enclosed by two regular lateral surfaces, with projections C_1 and C_2 on the x_1x_2 plane and by two planes orthogonal to the x_3 -axis, located at $x_3 = 0$ and $x_3 = L$. Following Saint-Venant theory for the torsion problem, the stress tensor can be written as follows:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

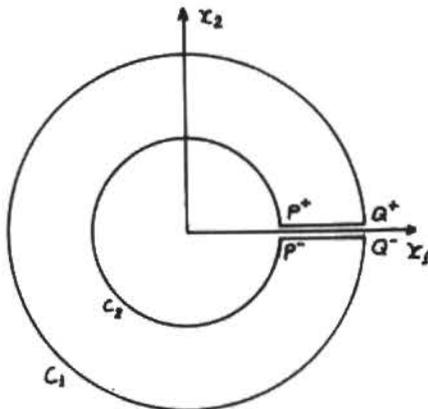


Fig. 1

The components of the displacement field parallel to the x_1x_2 plane located at a distance x_3 from the origin is given by:

$$\underline{u} = \theta \ x_3 \underline{e}_3 \wedge \underline{r} \quad (2)$$

where \underline{r} defines the position of an arbitrary point P on the cross section. The complementary energy principle applied to this geometry in terms of the stress function $\phi(x_1, x_2)$ gives:

$$\Psi = \frac{1}{2\mu} \int_V (\nabla\phi)^2 dv + \int_{S_u} \underline{t} \cdot \underline{\bar{u}} ds \quad (3)$$

where S_u is the surface where the displacement $\underline{\bar{u}}$ is prescribed. Recall that:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = T_{13} \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = -T_{23}$$

Since we are dealing with a multiple connected domain we can not discard initial dislocations that could be introduced by cutting the cylinder through the wall along its length L, if we do not want to miss a whole class of solutions. Keeping this in mind we can now define the boundary conditions with the functional (3):

i) Tractions are prescribed on the

lateral surfaces C_1 and C_2 , namely $\underline{t} = 0$.

ii) The displacement components $\underline{\bar{u}}_1$ and $\underline{\bar{u}}_2$ are prescribed on the cross sections $x_3 = 0(S_1)$ and $x_3 = L(S_2)$, namely:

$$S_1: \underline{\bar{u}} = 0$$

$$S_2: \underline{\bar{u}} = L \ x_3 \underline{e}_3 \wedge \underline{r}$$

The traction component t_3 is prescribed on S_1 and S_2 , namely $t_3 = 0$.

iii) The differential displacement $\Delta\bar{w}$ is prescribed along the x_3 direction. That is, the lateral surfaces P^+Q^+ and P^-Q^- move relatively to each other.

The functional (3) together with the above conditions, after integration with respect to x_3 gives:

$$\frac{1}{L} \Psi = \frac{1}{2\mu} \int_A (\nabla\phi)^2 da + \int_{P^+}^{Q^+} \Delta\bar{w} \text{rot}(\phi \underline{e}_3) \cdot \underline{n}^+ ds + \int_A \theta \text{rot}(\phi \underline{e}_3) \cdot (\underline{e}_3 \wedge \underline{r}) da \quad (4)$$

and the problem is reduced to a two dimensional case. Only regular solutions will be examined, that is, the stress tensor remains bounded in the closed domain $\bar{A} = AU\partial A$, where A is the open domain bounded by C_1 and C_2 and ∂A is $C_1 + C_2$. The displacement field may not be continuous but the stress field is continuous, that is $\phi_{,i}$ ($i=1,2$) is continuous. We will use the notation $\phi_{,i} = \partial\phi/\partial x_i$. Let us ask for the extremum of the functional (4) with respect to the field of statically admissible functions V_{adm} defined as the set of all functions satisfying the following conditions:

i) $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ continuous and single valued in \bar{A} , $\bar{A} = AU\partial A$

ii) $\nabla^2\phi$ continuous and single valued in A

iii) $\frac{\partial\phi}{\partial S} = 0$ ($\underline{t} = 0$) on C_1 and C_2

We note that ϕ may be a non-single valued function in A. The field of admissible variations V_{var} is a restriction over V_{adm} . Besides the conditions i) to, iii) an admissible variation $\hat{\phi}(x_1, x_2)$ must also satisfy the following conditions:

iv) $\hat{\phi}$ continuous and single valued on A

v) $\underline{\hat{t}} = 0$ on the surfaces where the traction is prescribed

Performing the variation of the functional (4) and making it equal zero we obtain[3],[4]:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \{ \Psi(\phi + \varepsilon \bar{\phi}) \} = 0$$

or:

$$\frac{1}{\mu} \int_A \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} \, da + \int_{P^+}^{Q^+} \Delta \bar{w} \operatorname{rot}(\bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot \underline{n}^+ \, ds + \int_A \theta \operatorname{rot}(\bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot (\underline{e}_3 \wedge \underline{r}) \, da = 0$$

Assuming $\bar{\phi}$, $\nabla \phi$ sufficiently regular and applying the divergence theorem for the domain bounded by the closed curve $P^+Q^+C_1$ $Q^-P^-C_2$ we obtain after rearranging the terms:

$$\int_A \left(-\frac{\nabla^2 \phi}{\mu} + 2\theta \right) \bar{\phi} \, da + \int_{C_1} \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} \bar{\phi} \, ds + \int_{C_2} \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} \bar{\phi} \, ds + \int_P^Q \Delta \bar{w} \frac{d\bar{\phi}}{ds} \, ds = 0 \quad (5)$$

Now add to expression (5):

$$-\int_{C_1} \frac{d}{ds}(\bar{\phi} w^*) \, ds - \int_{C_2} \frac{d}{ds}(\bar{\phi} w^*) \, ds - \int_{P^+}^{Q^+} \frac{d}{ds}(\bar{\phi} w^+) \, ds - \int_{Q^-}^{P^-} \frac{d}{ds}(\bar{\phi} w^-) \, ds = \oint \frac{d}{ds}(\bar{\phi} w) \, ds = 0 \quad (5.a)$$

where w^* stands for the actual displacement at the boundaries C_1 or C_2 . Note that w^* is not prescribed, but displacement resulting from the action of the external forces and displacements defined previously. The displacements \bar{w}^+ and \bar{w}^- imposed respectively on the lateral surfaces P^+Q^+ and P^-Q^- are clearly associate with $\Delta \bar{w}$. Indeed, $\Delta \bar{w} = \bar{w}^+ - \bar{w}^-$. Recalling that $\bar{\varepsilon} = \partial \bar{\phi} / \partial s = 0$ on C_1 and C_2 since traction is prescribed on C_1 and C_2 , we obtain from (5) and (5.a):

$$\int_A \bar{\phi} \left(-\frac{\nabla^2 \phi}{\mu} + 2\theta \right) da + \int_{C_1} \bar{\phi} \left\{ \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} - \frac{dw^*}{ds} \right\} ds + \int_C \bar{\phi} \left\{ \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} - \frac{dw^*}{ds} \right\} ds - \int_P^Q \bar{\phi} d(\Delta \bar{w}) = 0 \quad (6)$$

Take first $\bar{\phi} = 0$ on C_1 , C_2 and PQ , we have then the classical equation for the torsion problem:

$$\nabla^2 \phi = 2\mu\theta \quad (7)$$

The second condition for the extremum of the functional reads:

$$\int_{C_1} \bar{\phi} \left\{ \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} - \frac{dw^*}{ds} \right\} ds + \int_{C_2} \bar{\phi} \left\{ \left(\frac{\nabla \phi}{\mu} - \theta \underline{r} \right) \cdot \underline{n} - \frac{dw^*}{ds} \right\} ds - \int_P^Q \bar{\phi} d(\Delta \bar{w}) = 0 \quad (8)$$

Taking $\bar{\phi}$ identically zero successively in two out of the three integrands above we obtain:

$$[w^*] = \int_{C_i} \frac{dw^*}{ds} \, ds = \int_{C_i} \frac{1}{\mu} \frac{d\phi}{dn} \, ds - 2\theta A_i \quad i = 1,2 \quad (9.a)$$

where A_i is the area of the region enclosed by C_i , and

$$\Delta \bar{w} = \text{Constant} \quad (9.b)$$

where $[w^*]$ represents the jump of the vertical displacement across PQ . It is clear from the expressions above, that this jump is constant irrespectively of the curve defining the internal or external boundaries. This means that under the assumptions stated above, the jump in the displacement field must be constant along PQ . This conclusion is consistent with the result $\Delta \bar{w} = \text{constant}$. We have then:

$$\Delta \bar{w} = [w^*]$$

We see therefore, that with the theory of Saint-Venant for the torsion problem there is only one kind of dislocation that generates a regular stress field, for arbitrary boundaries C_1 and C_2 :

$$\Delta \bar{w} = \text{Constant}$$

which is called Volterra dislocation. We can state then the following proposition:

The necessary conditions for an extremum of the functional (4), under the assumption that the solution is regular and restricted to the set of statically admissible functions $\phi(x_1, x_2)$ defined previously, are:

- i) The displacement discontinuity across

a cut PQ through the torsion center is a step discontinuity:

$$\bar{w} = \text{const.}$$

ii) $\nabla^2 \phi = 2\mu\theta$
 iii) $\Delta \bar{w} = \int_{C_i} \frac{1}{\mu} \frac{d\phi}{dn} ds - 2\theta A_i \quad i = 1,2$

Other profiles of displacement discontinuities (Fig. 2), will not satisfy the complementary energy principle within the frame of Saint-Venant theory. This conclusion suggests that they will lead either to non-regular solutions or to more complex stress and strain fields which can not be described by the classical torsion approach.

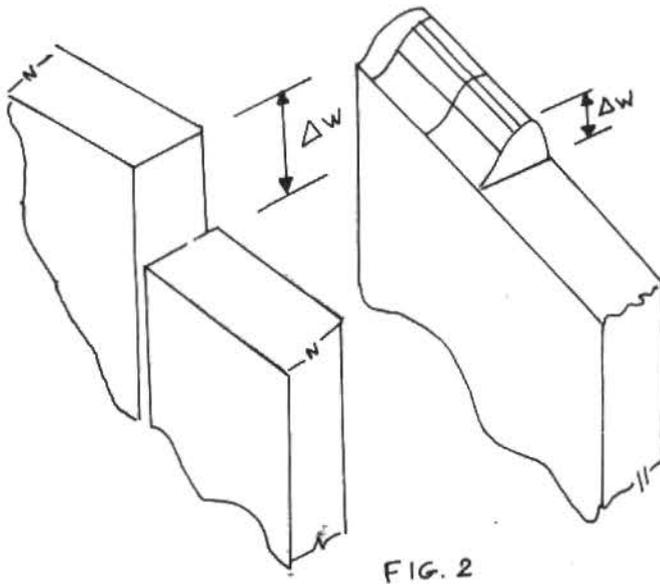


FIG. 2

PLANE STRAIN PROBLEM

Consider now the more complex case of a plane strain state defined on a double connected domain (Fig. 1). Assume that there are no body forces and let us introduce the Airy stress function $\phi(x_1, x_2)$. The non-vanishing components of the stress field derived from ϕ are:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad T_{12} = T_{21} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$T_{33} = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right)$$

It can be easily shown that the complementary energy has the following

expression:

$$\Psi = \int_A \frac{1+\nu}{2E} \{ (\phi_{,11}^2 + \phi_{,22}^2 + 2\phi_{,12} \phi_{,21}) - \nu (\phi_{,11}^2 + \phi_{,22}^2 + 2\phi_{,11} \phi_{,22}) \} da - \int_{C_u} \{ (\phi_{,22} n_1 - \phi_{,12} n_2) \bar{u}_1 + (-\phi_{,21} n_1 + \phi_{,11} n_2) \bar{u}_2 \} ds \quad (10)$$

where C_u is the portion of the boundary where the displacement $\bar{u} = \bar{u}_i e_i$ is prescribed. The exterior normal to the boundary is designated by $\underline{n} = n_i e_i$.

We want to find the variation of the functional (10) with respect to a field of statically admissible functions. Since the domain of definition A , of the admissible functions $\phi(x_1, x_2)$, is double-connected the regularity conditions for ϕ must be relaxed. In order to allow possible discontinuities in the displacement field whereas requiring continuity in the strain field we must include in the admissible field, functions which are not single valued in A and functions with a finite number of poles inside C_2 . The field of statically admissible functions $\phi(x_1, x_2)$ is then the collection of all functions defined on A satisfying the following requirements:

- i) $\phi_{,ijk1}, \phi_{,ijk}, \phi_{,ij}$ continuous in A
- ii) $\phi_{,ijk}, \phi_{,ij}$ continuous in $\bar{A} = A \cup C_1 \cup C_2, i, j, k = 1, 2$
- iii) $\phi_{,ij}$ and all its derivatives up to the second order single valued in $\bar{A}, i, j = 1, 2$
- iv) $T_{\underline{n}} = \bar{\underline{t}}$ or $(\phi_{,22} n_1 - \phi_{,12} n_2) e_1 + (-\phi_{,21} n_1 + \phi_{,11} n_2) e_2 = \bar{\underline{t}}$

on the portion of the boundary where the traction is prescribed.

The field of admissible variations is a restriction over the field of admissible functions. If $\bar{\phi}$ is an admissible variation then it satisfies the following conditions:

- i) $\bar{\phi} \in C^4$ in A
- ii) $\bar{\phi}_{,ijk}, \bar{\phi}_{,ij}$ continuous in \bar{A}
- iii) $\bar{\phi}$ and all its derivatives up to the fourth order single valued in \bar{A}

iv) $\bar{T}\bar{n} = 0$ on the portion of the boundary where the traction is prescribed.

The necessary condition for an extremum of the functional (10) n.r.t. the field of admissible functions defined above is:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\phi + \varepsilon\bar{\phi}) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Expanding this expression we arrive to:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E} \int_A \{ (1-\nu) \operatorname{div} \psi \operatorname{div} \bar{\psi} - \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\phi_{,22} \bar{\phi}_{,1} - \phi_{,12} \bar{\phi}_{,2}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi_{,11} \bar{\phi}_{,2} - \phi_{,12} \bar{\phi}_{,1}) \right] \} da + \\ & + \int_{C_u} \frac{d}{ds} (\operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot \bar{u} ds \end{aligned} \quad (11)$$

where $\psi = \phi_{,i} \underline{e}_i$.

Applying the divergence theorem twice and noting that $\phi_{,ij}$ and $\bar{\phi}$ are continuous across \overline{PQ} we obtain after some calculations:

$$\begin{aligned} & \int_A \bar{\phi} \nabla^2 \nabla^2 \phi da + \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \frac{1-\nu^2}{E} \bar{\phi} \frac{d}{dn} (\nabla^2 \phi) ds + \\ & + \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \phi \underline{e}_1 - \frac{1+\nu}{E} \operatorname{rot}(\phi_{,2} \underline{e}_3) \right\} \cdot \bar{n} \bar{\phi}_{,1} ds + \\ & + \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \phi \underline{e}_2 + \frac{1+\nu}{E} \operatorname{rot}(\phi_{,1} \underline{e}_3) \right\} \cdot \bar{n} \bar{\phi}_{,2} ds + \\ & + \int_{C_u} \frac{d}{ds} (\operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot \bar{u} ds = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Taking first $\phi_{,i} = 0$ on the boundaries, the resulting Euler-Lagrange equation gives the classical result:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } A$$

The other necessary conditions for the extremum are obtained from (12) using the fact that $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$. Before carrying on the analysis, it is useful to transform the last integral of (12). After some lengthy calculations it can be shown that the following identity holds:

$$\begin{aligned} & \int_{C_u} \frac{d}{ds} (\operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot \bar{u} = \int_{C_u} \left[\frac{d}{ds} \operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3 \cdot \bar{u} - \bar{\omega} \bar{\phi} \right] ds + \\ & + \int_{C_u} \left[\bar{\phi} \frac{d\bar{\omega}}{ds} + \left(\frac{d\bar{u}}{ds} - \bar{\omega} \bar{n} \right) \operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3 \right] ds \end{aligned} \quad (13)$$

where $\bar{\omega} = -\bar{u}_{2,1} + \bar{u}_{1,2}$ is the rotation.

Recall that on C_1 and C_2 the tractions are prescribed. Cut the solid along PQ and introduce independent displacement fields along $\overline{P^+Q^+}$ and $\overline{P^-Q^-}$. Clearly the boundaries C_1 and C_2 will also displace. Let u^* and ω^* stand for this compatible displacement field on C_1 and C_2 originated by the prescribed displacements along $\overline{P^+Q^+}$, $\overline{P^-Q^-}$ and the action of external forces prescribed on C_1, C_2 . Add and subtract the quantity:

$$\int_{C_i} \frac{d}{ds} (\operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3 \cdot u^* - \omega^* \bar{\phi}) ds \quad i = 1, 2$$

from (12). Using the relation $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$ and the identity (13) we arrive at:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

where:

$$\theta_1 = \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \left\{ \left[\frac{1-\nu^2}{E} \frac{d}{dn} (\nabla^2 \phi) \right] \bar{\phi} + \frac{d}{ds} (\omega^* \bar{\phi}) \right\} ds \quad (14.a)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \left\{ \left[\frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \phi \underline{e}_1 - \frac{1+\nu}{E} \operatorname{rot}(\phi_{,2} \underline{e}_3) \right] \cdot \right. \\ & \left. \bar{n} \bar{\phi}_{,1} + \frac{d}{ds} (-u_2^* \bar{\phi}_{,1}) \right\} ds \end{aligned} \quad (14.b)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = & \sum_{i=1,2} \int_{C_i} \left\{ \left[\frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \phi \underline{e}_2 + \frac{1+\nu}{E} \operatorname{rot}(\phi_{,1} \underline{e}_3) \right] \cdot \right. \\ & \left. \bar{n} \bar{\phi}_{,2} + \frac{d}{ds} (u_1^* \bar{\phi}_{,2}) \right\} ds \end{aligned} \quad (14.c)$$

$$\theta_4 = \int_C \frac{d}{ds} [\operatorname{rot}(\bar{\phi} \underline{e}_3) \cdot \bar{u} - \omega \bar{\phi}] ds = 0 \quad (14.d)$$

$$\theta_5 = \int_P^Q \left\{ \bar{\phi} \frac{d\bar{\omega}}{ds} + \left(\frac{d\bar{u}}{ds} - \Delta\bar{\omega} \bar{n} \right) \cdot \operatorname{rot} \bar{\phi} \underline{e}_3 \right\} ds \quad (14.e)$$

Since the solution is assumed to be regular, the term θ_4 that represents an integral along the closed curve $\overline{P^+Q^+C_1Q^-P^-C_2}$, is equal to zero. $\Delta\bar{\omega}$ and $\Delta\bar{u}$ in θ_5 represent the jump discontinuity of the displacement field prescribed across \overline{PQ} . The second necessary conditions for the extremum reads then:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0 \quad (15)$$

Recalling that $\bar{\epsilon} = 0$ on the portions of the boundary where the traction is prescribed we choose the variation $\bar{\phi}$ such that:

$$\bar{\phi}(x_1, x_2) = (a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2)g(x_1, x_2) + (a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2)h(x_1, x_2)$$

$g(x_1, x_2)$ and $h(x_1, x_2)$ sufficiently continuous in A and satisfying the conditions:

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x_1, x_2) \in C_1 \\ 0 & \text{for } (x_1, x_2) \in C_2 \end{cases}$$

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x_1, x_2) \in C_1 \\ 1 & \text{for } (x_1, x_2) \in C_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ for } (x_1, x_2) \in C_1 \text{ and } C_2$$

Clearly we have:

$$\bar{\epsilon} = (\bar{\phi}_{,22} n_1 - \bar{\phi}_{,12} n_2) e_1 + (-\bar{\phi}_{,21} n_1 + \bar{\phi}_{,11} n_2) e_2 = 0$$

on C_1 and C_2 .

Substituting this expression for $\bar{\phi}$ into (15) we obtain:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0$$

where:

$$\alpha_1 = \sum_{i=1,2} \int_{C_i} a_i \left[\frac{1-\nu^2}{E} \frac{d}{dn} (\nabla^2 \phi) + \frac{d\omega^*}{ds} \right] ds \quad (15.a)$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1,2} \int_{C_i} b_i \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \left[-x_1 \frac{d}{dn} - x_2 \frac{d}{ds} \right] \nabla^2 \phi - \frac{1+\nu}{E} \frac{d}{ds} (\phi_{,2}) - \frac{d}{ds} (u_2^* - \omega^* x_1) \right\} ds \quad (15.b)$$

$$\alpha_3 = \sum_{i=1,2} \int_{C_i} c_i \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \left[-x_2 \frac{d}{dn} + x_1 \frac{d}{ds} \right] \nabla^2 \phi - \frac{1+\nu}{E} \frac{d}{ds} (\phi_{,1}) + \frac{d}{ds} (u_1^* + \omega^* x_2) \right\} ds \quad (15.c)$$

$$\alpha_5 = \theta_5 \quad (15.d)$$

Since a_i, b_i, c_i are arbitrary constants, we

obtain then the following necessary conditions:

$$[\omega^*]_i = \int_{C_i} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{d}{dn} (\nabla^2 \phi) ds \quad (16.a)$$

$$[u_2^* - \omega^* x_1]_i = \frac{1-\nu^2}{E} \int_{C_i} \left(-x_1 \frac{d}{dn} - x_2 \frac{d}{ds} \right) \nabla^2 \phi ds - \frac{1+\nu}{E} \int_{C_i} \frac{d}{ds} (\phi_{,2}) ds \quad (16.b)$$

$$[u_1^* + \omega^* x_2]_i = \frac{1-\nu^2}{E} \int_{C_i} \left(+x_2 \frac{d}{dn} - x_1 \frac{d}{ds} \right) \nabla^2 \phi ds + \frac{1+\nu}{E} \int_{C_i} \frac{d}{ds} (\phi_{,1}) ds \quad (16.c)$$

$$\frac{d}{ds} \Delta \bar{\omega} = 0 \quad \text{on } PQ \quad (16.d)$$

$$\frac{d}{ds} \Delta \bar{u} - \Delta \bar{\omega} \underline{n} = 0 \quad \text{on } PQ \quad (16.e)$$

The quantities within brackets on the left hand side of (16.a-c) represent the jump discontinuities across C_i . From (16.d) and (16.e) we get:

$$\Delta \bar{\omega} = \text{const.} \quad (17.a)$$

$$\Delta \bar{u}_1 \Big|_P = \Delta \bar{u}_1 \Big|_Q + (x_{2P} - x_{2Q}) \Delta \bar{\omega} \quad (17.b)$$

$$\Delta \bar{u}_2 \Big|_P = \Delta \bar{u}_2 \Big|_Q + (x_{1P} - x_{1Q}) \Delta \bar{\omega} \quad (17.c)$$

The expressions (16.a-b-c) are consistent with (17.a-b-c). The necessary conditions for an extremum lead to the conclusion that the discontinuity of the displacement field across \overline{PQ} must be linear (Fig. 3a), for arbitrary boundaries C_1 and C_2 .

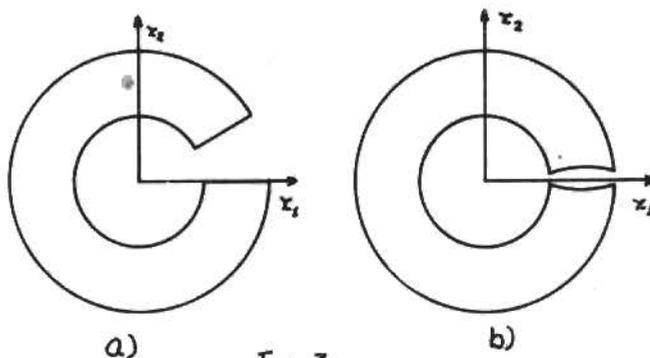


FIG. 3

Under these circumstances the jump discontinuities are associated with the stress function ϕ according to (16.a-b-c). The integrands in those expressions are independent of the characteristic parameters of the curve defining the boundary. We may then state the following proposition

The necessary conditions for an extremum of the complementary energy functional (10), assuming that only regular solutions are allowed, and with "contour independent" relations as explained above, are:

- i) The prescribed displacement discontinuity must be linear as given by (17.a-b-c)
- ii) The rotation jump across the cut \overline{PQ} must be given by (16.a)
- iii) The effective relative displacements parallel to the x_1 and x_2 axis across \overline{PQ} are given respectively by (16.b) and (16.c)
- iv) $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$
- v) $\text{rot } \phi \underline{e}_3 \cdot \underline{n} = \bar{\tau}$ on the portions of the boundary where tractions are prescribed.

The type of discontinuity studied above is called Volterra dislocation [5]. It remains to investigate what happens with other kinds of prescribed discontinuities as shown in Figure 3.b. The analysis developed up to this point suggests that for discontinuities other than the linear ones, it is not possible to have expressions of the type (16.a-b-c) independent of the curve defining the boundary. Unfortunately it was not possible up to now to establish clearly a theory for the dislocations shown in the Figures 3.a-b. If we try to keep more general expressions for the variation $\delta\phi$ than that defined previously it can be shown that the condition:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

can be transformed into:

$$\sum_{i=1,2} \int_{C_i} (A\delta\phi + B\delta\phi_{,s} + C\delta\phi_{,n}) ds + \theta_4 = 0 \quad (18)$$

where:

$$A = - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{d}{dn} \nabla^2 \phi + \frac{d\omega}{ds}$$

$$B = \phi_{,ns} - K \phi_{,s} + \omega + \frac{d}{ds} u_n - K u_s$$

$$C = -K \phi_{,n} - \phi_{,ss} - \frac{d}{ds} u_s + K u_n$$

where K is the curvature of C_i and u_n and u_s are the components of the displacement along the normal and tangent directions respectively. Apparently the only useful conclusion that we can derive from (18) is that

$$[\omega]_i = \int_{C_i} - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{d}{dn} \nabla^2 \phi ds$$

that is, the jump in the rotation is independent of the curve defining the contour.

CONCLUSION

The Volterra dislocations can be determined from the complementary energy principle in a very clear way, allowing a field of admissible functions that contains multi-valued functions. The Volterra dislocation is the only type of dislocation that admits the stress field associated with Saint-Venant theory for the torsion problem. Other kinds of dislocation need further investigation.

For the case of plane strain also the Volterra dislocation lead to a set of clear correlations between the displacements jumps and the stress function. Other types of dislocation need still further investigation. Preliminary results indicate that the curvature of the contour will come into play in some relations between the displacement jumps and the stress function.

Anyway, the complementary energy principle has shown to be an efficient tool to deal with multi-connected domains and should be explored further for other geometries and to generalize the Volterra type of dislocation.

REFERENCES

- [1] Oden J.T., Reddy J.N., Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, 1976.
- [2] Ciarlet P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland,

Amsterdam, 1978.

[3] Washizu K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, Oxford, 1968.

[4] Gurtin M., Handbuch der Physik, S.

Flugge Editor, Bd VI a/2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] Love A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, 1944.

CONVECÇÃO NATURAL ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS INCLINADAS

EDSON L. ZAPAROLI

DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA, ITA/CTA

EUCLIDES C. FERNANDES

DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA, ITA/CTA

SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se um modelo para convecção natural em um canal constituído de placas planas paralelas inclinadas com as hipóteses de escoamento laminar e propriedades constantes. Dos resultados obtidos pela solução, por diferenças finitas, do sistema de equações para Prandtl = 0,7, conclui-se que para as condições de contorno térmicas analisadas os resultados adimensionais para canal inclinado coincidem com os do canal vertical desde que na definição do número de Grashof entre o cosseno do ângulo de inclinação ($\cos\alpha$) e o parâmetro $(Gr/\cos\alpha)$ seja maior que 10^7 .

INTRODUÇÃO

O problema do escoamento de convecção natural entre placas planas paralelas é típico de aquecedores de ar que, funcionando segundo este princípio, visam o aproveitamento de energia solar.

Um modelo representativo de um tal dispositivo pode ser estabelecido considerando-se o escoamento de convecção natural na região de entrada de um canal assimiado a placas planas paralelas, inclinado com relação à vertical, conforme ilustra a figura 1. A placa superior é suposta a uma temperatura uniforme e a placa inferior é considerada como adiabática.

Macedo [1] analisou o problema de convecção natural em aquecedores de ar a partir dos resultados obtidos por Quintiere e Mueller [2] para canal vertical. Os dados para o canal inclinado são obtidos da solução para canal vertical admitindo-se que o número de Grashof para o canal inclinado é o do vertical multiplicado pelo cosseno do ângulo de inclinação. Concluiu que, para dimensões comuns destes dispositivos, tais como um comprimento de 7 ft e espaçamento entre placas maiores que 1/2 polegada, o fluxo está inteiramente na região de desenvolvimento bem como, para um dado comprimento de aquecedor há um espaçamento ótimo, para o qual o sistema

opera com eficiência máxima. Tais conclusões são válidas para certos valores de números de Grashof. Isto é, para outra faixa de valores, inferiores a um valor limite, há que se investigar a influência do ângulo de inclinação no escoamento de convecção natural.

Pelo visto, nenhuma análise deste tipo é feita na literatura corrente, tendo sido encontrados somente trabalhos relacionados com o método de análise do presente estudo, conforme revisão feita por Zaparoli [3]. Dentre estes cita-se o trabalho de Burbank [4] que estabeleceu as equações para convecção natural sobre o lado superior de uma placa plana inclinada, mantida a temperatura uniforme. Rederivou as equações diferenciais na forma adimensional a fim de analisar os efeitos de inclinação da placa. Finalmente, reduziu as equações às mesmas da placa plana vertical, isto é, tratando o gradiente de pressão do mesmo modo que para a placa vertical ($\nabla p=0$). Procedeu ainda a um estudo experimental, através de interferometria, observando que o número de Nusselt para a placa inclinada podia ser obtido dos resultados da placa vertical com o número de Grashof multiplicado pelo cosseno do ângulo entre a placa e a vertical.

Os dados para a placa inclinada divergem mais dos da placa vertical para pontos próximos da entrada. Para grandes ângulos de inclinação ($\alpha=40^\circ$) observou condições de fluxo tridimensional. Ostrach na discussão deste trabalho salienta a não consideração de uma variação de pressão na camada limite térmica, na direção y perpendicular a placa, contrariando a hipótese de Burbank [4] de $\vec{\nabla}p=0$. Segundo Ostrach, a equação do movimento na direção y , numa forma simplificada, há que ser considerada como $\partial p/\partial y = \rho g \text{ sen}\alpha(T-T_\infty)$, onde $\beta=1/T_\infty$ representa o coeficiente de expansão térmica para gases.

No presente trabalho tais considerações são extendidas para o caso do escoamento de convecção natural entre placas planas paralelas visando investigar a influência dos parâmetros, número de Grashof e ângulo de inclinação, fixadas as condições térmicas indicadas no modelo ilustrado pela figura 1. Nos aquecedores de ar para aproveitamento de energia solar o fluxo é laminar em uma certa região na entrada e se houver transição, o fluxo é turbulento na extensão restante do aquecedor. Este trabalho se restringe ao estudo de fluxo laminar com as hipóteses de escoamento permanente, incompressível, bidimensional, dissipação viscosa desprezível, propriedades do fluido como constante, exceto a densidade no termo devido a força de campo na equação do movimento. São determinadas as distribuições de velocidade e de temperatura pela resolução das equações básicas do problema na forma de diferenças finitas, para quatro ângulos de inclinação e três números de Grashof com o número de Prandtl fixado como 0,7. Destas são obtidos os parâmetros significativos do problema o que permite um confronto com a solução para placas planas paralelas verticais.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Observadas as hipóteses descritas no item anterior, o problema em questão é estabelecido pelas equações de continuidade, movimento e energia e mais as condições iniciais e de contorno referentes a figura 1. Entre estas condições há que se estabelecer as distribuições de pressão na entrada e na saída do canal, o que pode ser feito na forma da equação de equilíbrio estático dada por:

$$-\vec{\nabla}P_h - \rho g [\cos\alpha \vec{i} + \text{sen}\alpha \vec{j}] = 0 \quad (1)$$

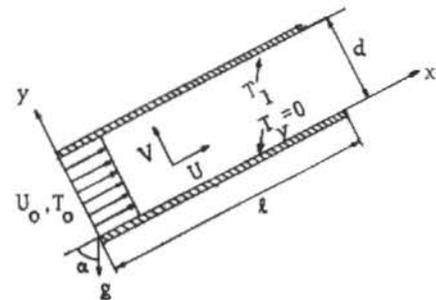


Figura 1 - Geometria, condições de contorno e condições iniciais.

Considerando-se nula a pressão hidrostática no ponto $x=l$ e $y=0$, como valor de referência, obtém-se por integração da equação (1) as distribuições de pressão na entrada e na saída do canal segundo:

$$P_{he} = \rho_0 g (l \cos\alpha - y \text{sen}\alpha) \text{ e } P_{hs} = - \int_0^y \rho g \text{ sen}\alpha \, dy \quad (2)$$

Por outro lado, o modelo de convecção natural baseia-se na hipótese de Boussinesq que considera o escoamento como incompressível porém com uma densidade do meio dependente da temperatura nos termos devidos às forças de campo nas equações do movimento. Para considerar esta hipótese, define-se uma pressão, designada como pressão de movimento, na forma de:

$$\vec{\nabla}P^* = \vec{\nabla}P - \rho_0 \vec{g} \quad (3)$$

As variações de densidade com a temperatura são consideradas como:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(T - T_0)]^{-1} \quad (4)$$

Com estas considerações pode-se finalmente escrever as equações do problema mais as condições iniciais e de contorno que o estabelecem de maneira completa. Entretanto o caráter elíptico destas equações dificultam a aplicação de técnicas numéricas que permitam determinar a solução. Neste sentido, pode-se prosseguir na análise admitindo-se algumas simplificações de camada limite, inerentes ao problema em questão. Para tal são consideradas as seguintes variáveis adimensionais:

$$\bar{x} = x/d \, Gr, \quad \bar{y} = y/d, \quad \bar{U} = Ud/\nu \, Gr, \quad \bar{V} = Vd/\nu,$$

$$\bar{P} = \rho_0 P^* d^2 / \mu^2 Gr^2$$

$$\theta = (T - T_0) / (T_1 - T_0), Gr = g \beta (T_1 - T_0) d^3 \cos \alpha / \nu^2 \quad (5)$$

Pode-se verificar que tais definições conduzem à condição de um número mínimo de parâmetros adimensionais envolvidos no problema [3], resultando as seguintes equações adimensionais:

$$\bar{U}_{\bar{x}} + \bar{V}_{\bar{y}} = 0 \quad (6)$$

$$\bar{U}\bar{U}_{\bar{x}} + \bar{V}\bar{U}_{\bar{y}} = -\bar{P}_{\bar{x}} + \theta + Gr^{-2} \bar{U}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{U}_{\bar{y}\bar{y}} \quad (7)$$

$$\bar{U}\bar{V}_{\bar{x}} + \bar{V}\bar{V}_{\bar{y}} = -Gr^2 \bar{P}_{\bar{y}} + Gr \operatorname{tg} \alpha \theta + Gr^{-2} \bar{V}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{V}_{\bar{y}\bar{y}} \quad (8)$$

$$\bar{U}\bar{\theta}_{\bar{x}} + \bar{V}\bar{\theta}_{\bar{y}} = Pr^{-1} (Gr^{-2} \theta_{\bar{x}\bar{x}} + \theta_{\bar{y}\bar{y}}) \quad (9)$$

onde $Pr = \nu / \alpha_t$ representa o número de Prandtl e os índices \bar{x} e \bar{y} indicam derivadas com relação a estas coordenadas. As condições iniciais e de contorno correspondentes são escritas como:

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{U} = \bar{U}_e \quad \bar{P} = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (10)$$

$$\bar{x} > 0; \quad \bar{y} = 0 \quad \bar{U} = \bar{V} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_{\bar{y}} = 0 \quad (11)$$

$$\bar{y} = 1 \quad \bar{U} = \bar{V} = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 1 \quad (12)$$

$$\bar{x} = L = l / d Gr; \quad \bar{P} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{Gr} \int_0^{\bar{y}} \theta \, d\bar{y} \quad (13)$$

Os parâmetros adimensionais envolvidos no problema são a inclinação do canal (α), o número de Grashof (Gr) o número de Prandtl e a velocidade \bar{U}_e , que exprime a vazão do escoamento para a qual se tem associado um comprimento L de canal. Isto é, da condição (13), para $\bar{y} = 0$ e $\bar{x} = L$, tem-se $\bar{P} = 0$, o que permite determinar o comprimento L que corresponde a uma determinada distribuição de velocidade uniforme \bar{U}_e admitida na entrada. A seguir procede-se uma estimativa das ordens de grandeza dos termos das equações do problema, conforme efetuado por Zapparoli [3]. Dividindo-se a equação (8) por Gr verifica-se que o sistema de equações pode ser simplificado eliminando-se os termos que estão divididos pelo número de Grashof, tanto nas equações do movimento como na equação da energia, uma vez que nesta o número de Prandtl a ser considerado é da ordem de um. Resultam

as seguintes equações simplificadas:

$$\bar{U}_{\bar{x}} + \bar{V}_{\bar{y}} = 0 \quad (14)$$

$$\bar{U}\bar{U}_{\bar{x}} + \bar{V}\bar{U}_{\bar{y}} = -\bar{P}_{\bar{x}} + \theta + \bar{U}_{\bar{y}\bar{y}} \quad (15)$$

$$-\bar{P}_{\bar{y}} + (\operatorname{tg} \alpha / Gr) \theta = 0 \quad (16)$$

$$\bar{U}\bar{\theta}_{\bar{x}} - \bar{V}\bar{\theta}_{\bar{y}} = Pr^{-1} \theta_{\bar{y}\bar{y}} \quad (17)$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno já estabelecidas pelas equações (10) a (13).

Observa-se que para $(\operatorname{tg} \alpha / Gr)$ tendendo a zero o sistema de equações (14) a (17) se reduz ao sistema de equações do canal vertical. Caso contrário a influência deste parâmetro tem que ser analisado na forma das equações estabelecidas para o problema.

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações do problema, nas formas (14) a (17), são equações diferenciais parabólicas em uma coordenada de posição, segundo Patankar e Spalding [5], com as seguintes características:

- a) existe uma direção predominante de fluxo e não há fluxo reverso nesta direção;
- b) difusão de momentum, calor, massa, etc., são desprezíveis nesta direção;
- c) o campo de pressão posterior tem pouca influência nas condições de fluxo anteriores.

Neste caso as condições anteriores, na coordenada da direção predominante do escoamento, determinam as condições posteriores, mas não o oposto, o que torna possível o emprego do método designado como Técnica de Progressão Numérica, conforme descrito por Hornbeck [6]. Tais considerações foram extendidas ao problema aqui analisado sendo que maiores detalhes são descritos na referência [3]. Basicamente, o método de solução consiste na discretização do domínio em diferenças finitas. As equações são montadas de tal forma que, tendo-se os valores de \bar{U} , \bar{V} , \bar{P} e θ numa linha j , correspondente a uma coordenada \bar{x} , se possa obter os valores destas variáveis na linha $j+1$ e assim sucessivamente, parando-se no presente caso, quando a condição (13) for satisfeita. Dificuldades numéricas são observadas na região muito próxima da entrada do canal. Uma destas é devida a hipótese de perfil de velocidade uniforme na entrada, o que

causa singularidades para $\bar{x}=0$ com $\bar{y}=0$ e/ou $\bar{y}=1$. Outras dificuldades são devidas aos fortes gradientes que se observam junto as placas para $\bar{x}>0$. Estes aspectos exigem um refinamento adequado da malha nestas regiões [3]. As equações do problema na forma de diferenças finitas podem ser escritas de maneira semelhante ao apresentado por Bodoia e Osterle [7] e Hornbeck [6], devendo-se modificar a equação de movimento para se considerar a variação de pressão na direção \bar{y} bem como acrescentar a equação (16) ao sistema [3].

PARÂMETROS

Os parâmetros mais significativos do problema em questão são a velocidade de entrada \bar{U}_e , que determina a vazão do escoamento, o fluxo de entalpia H na saída do canal e o número de Nusselt médio. Conforme já discutido, a velocidade \bar{U}_e é fixada na entrada determinando-se o comprimento L correspondente através da condição (13). Neste ponto, conhecidas as distribuições de velocidade e de temperatura através da solução por diferenças finitas, o fluxo de entalpia é calculado pela equação:

$$H = \int_0^1 \bar{U} \theta d\bar{y} \Big|_{\bar{x}=L} \quad (18)$$

Finalmente pode-se determinar o número de Nusselt médio verificando-se que, [3], este é dado por:

$$Nu_L = \frac{\bar{h}d}{k} = Pr H/L, \quad (19)$$

com:

$q_L = \bar{h}(T_1 - T_0) =$ fluxo de calor em toda extensão do canal

$h =$ coeficiente de filme médio,

$l =$ comprimento do canal.

Deve ser observado ainda que valores assintóticos destes parâmetros podem ser determinados considerando-se condições de desenvolvimento dos perfis de velocidade e de temperatura [3]. Têm-se neste caso que:

$$(\bar{U}_e)_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^1 \bar{U} d\bar{y} \Big|_{\bar{x}=L} = \frac{1}{12} \quad (20)$$

$$(H)_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^1 \bar{U} \theta d\bar{y} \Big|_{\bar{x}=L} = \frac{1}{12} \quad (21)$$

RESULTADOS

As soluções foram obtidas para a faixa de velocidades de entrada entre 0,0010 a 0,0750, com ângulos de inclinação de 0,30, 60 e 80°, para números de Grashof ($Gr^* = Gr/\cos\alpha$) 10^3 , 10^5 e 10^7 , sempre com $Pr=0,7$.

Com exceção do canal vertical, os resultados dependem dos parâmetros α , Gr^* , Pr e \bar{U}_e sendo que, fixando-se os três primeiros existe uma correspondência biunívoca entre \bar{U}_e e L de tal maneira que os resultados podem ser apresentados em função de um destes parâmetros.

Como Gr^* não depende da inclinação, nos diagramas 1, 2 e 3 observa-se claramente o efeito da inclinação do canal. Deve ser notado que em cada curva estão fixados Gr^* e α e assim a variação de L significa variação da relação l/d , razão de aspecto do canal. Observa-se ainda que todos os parâmetros tendem para os valores assintóticos.

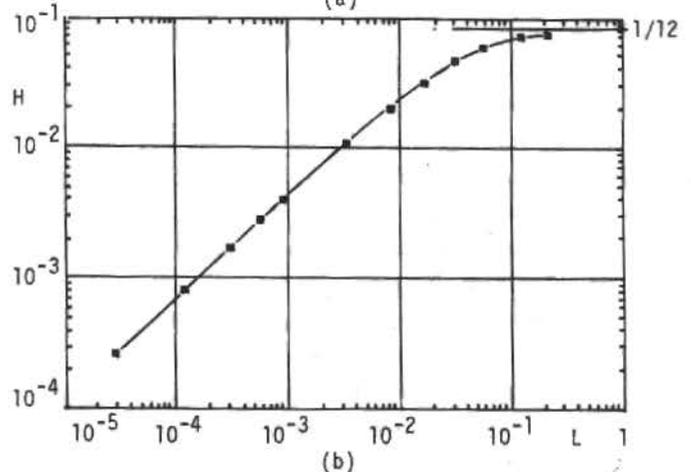
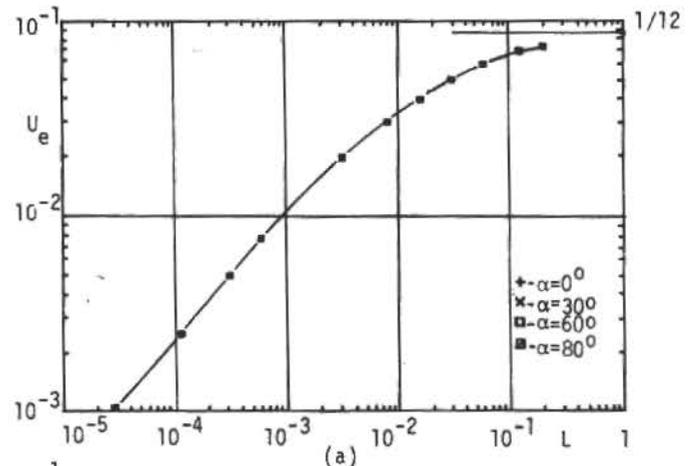


Diagrama 1: Velocidade de entrada (a) e fluxo de entalpia (b), com $Gr^*=10^7$.

Para $Gr^* \geq 10^7$, diagrama 1, todas as soluções, independentemente da inclinação, coincidem com a do canal vertical, confirmando que neste caso os resultados para canal inclinado podem ser obtidos da solução do canal bastando usar a definição de Gr que engloba a dependência com α .

Já para $Gr^* = 10^5$, diagrama 2, não ocorre as mesmas considerações anteriores, observando-se que a solução para $\alpha = 80^\circ$ não coincide com a do canal vertical, embora as soluções para $\alpha = 30^\circ$ e 60° praticamente coincidam. As diferenças são cada vez mais acentuadas para a faixa de velocidades de entrada menores ou, de forma equivalente, para comprimentos adimensionais de canal menores. Para velocidades de entrada maiores que $2,0 \times 10^{-2}$ (ou $L > 3,4 \times 10^{-3}$), os resultados coincidem com os do canal vertical.

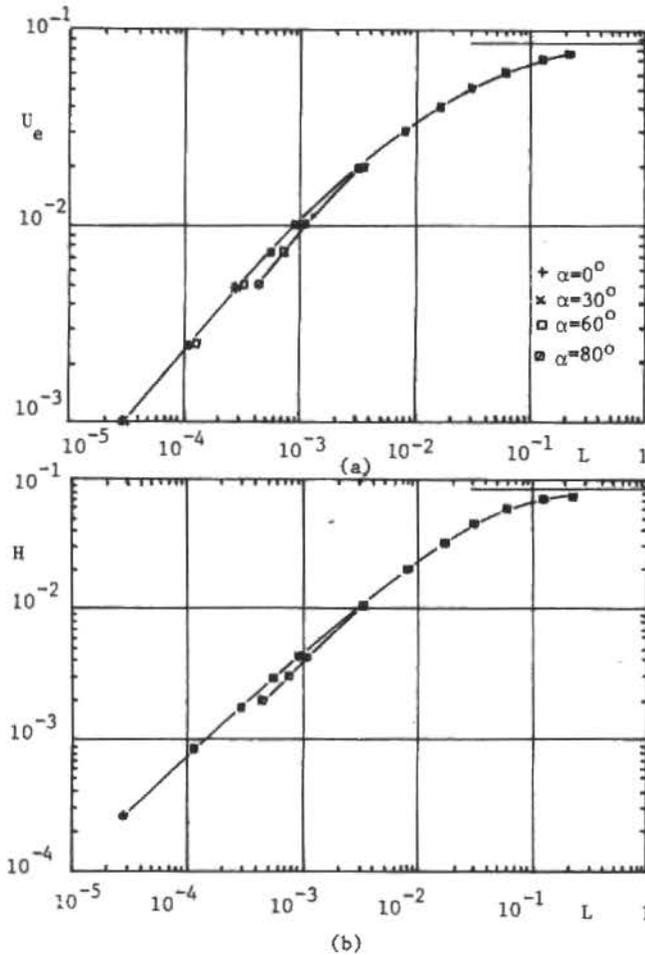


Diagrama 2: Velocidade de entrada (a) e fluxo de entalpia (b), com $Gr^* = 10^5$.

das velocidades \bar{U} negativas na direção predominante do fluxo. Nestes casos o processo numérico torna-se instável fornecendo resultados absurdos bem como não é válido o modelo de camada limite, parabólico, nestas regiões. Isto é, quando existe $\bar{U} < 0$ há fluxo de calor e de momentum no sentido $\bar{x} < 0$, situação que o modelo parabólico não simula, necessitando-se para a análise destas regiões de um modelo elíptico e de um processo numérico estável.

Finalmente para $Gr^* = 10^3$, diagrama 3, para toda a faixa de velocidades de entrada analisadas, com $\alpha = 80^\circ$ obteve-se $\bar{U} < 0$ e para $\alpha = 30^\circ$ e 60° a faixa de comprimentos adimensionais com fluxo reverso é maior que a de $Gr^* = 10^5$ conforme se infere do confronto dos diagramas 2 e 3.

Referindo-se às situações para as quais o modelo parabólico é válido observa-se que, com $Gr^* = 10^3$, existem diferenças perceptíveis entre todas as soluções ($\alpha = 30^\circ$

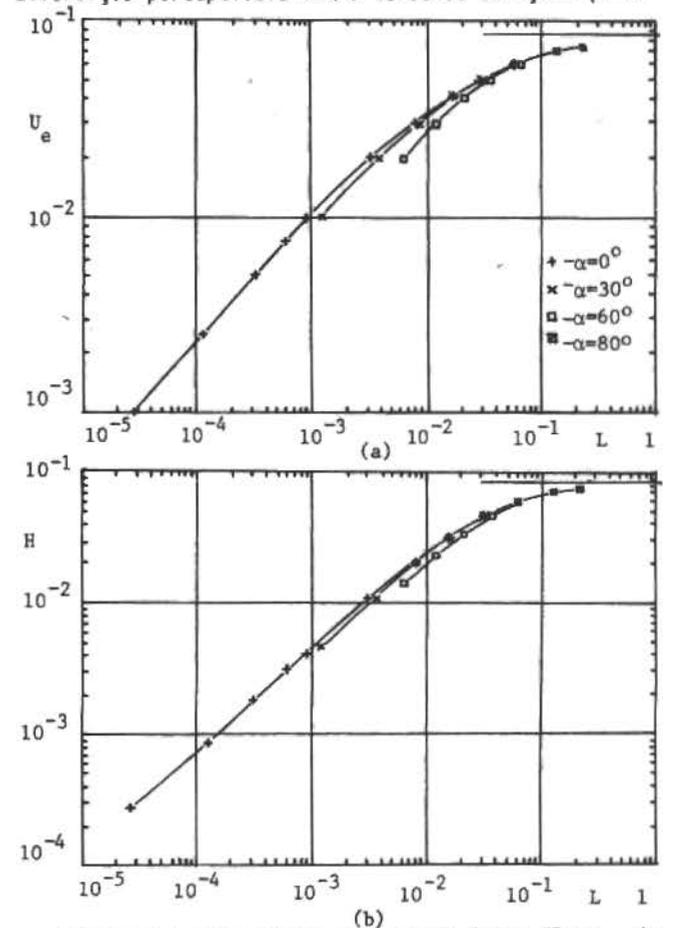


Diagrama 3: Velocidade de entrada (a) e fluxo de entalpia (b), com $Gr^* = 10^3$.

Para pares de valores de α e \bar{U}_e ; 60° e 10^{-3} , 80° e $2,5 \times 10^{-3}$ não se obtém resultados pois são observa

e 60°) e somente para situações próximas das do canal com fluxo completamente desenvolvido as soluções tendem a coincidir com a daquela do canal vertical.

CONCLUSÕES

Do que foi exposto conclui-se que para $Gr^* > 10^7$, e condições de contorno térmicas analisadas, pode-se obter os resultados para canais inclinados a partir da solução de canal vertical, notando-se que a inclinação máxima analisada foi de $\alpha = 80^\circ$. Para valores menores de Gr^* os resultados para canais inclinados são certamente diferentes daqueles para o canal vertical, acentuando-se diferenças a medida que a inclinação é aumentada.

No momento não há como afirmar que o modelo proposto e analisado, com a equação de quantidade de movimento na direção y simplificada como foi, seja válido para ângulos α maiores, como até mesmo no caso de $\alpha = 80^\circ$. Questões tais como de canais extremamente curtos que conduzem as condições de fluxo reverso tem que ser futuramente analisadas. Outro ponto a ser lembrado refere-se a condição de transição de regime laminar - turbulento, a qual deverá ocorrer para valores grandes de Gr^* . Estudos adicionais são necessários para se ter maiores esclarecimentos a respeito do problema descrito. Além disso, que seja inserido no todo a necessidade de experimentação para fins de teste das hipóteses do múltiplos modelos que caibam como representação deste problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] Macedo, I.C.; An Aproximate Analysis of Natural Convection Solar Air Heaters. Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Dez. 1975, Paper N° B-18, pp 503-512.
- [2] Quintiere, J. and Mueller, W.K.; An Analysis of Laminar Free and Forced Convection between Finite Vertical Parallel Plates. Jour. of Heat Transfer. Trans. ASME, 53-58, 1973.
- [3] Zaporoli, E.L.; Convecção Natural entre Placas Planas Paralelas Inclinadas T.Mestrado, ITA, 1981.
- [4] Burbank, B.R.; An Investifation of Heat Transfer From an Inclined Flat Plate in Free Convection. Trans. ASME, pp. 489, 1953.
- [5] Patankar, S.V. and Spalding, D.B.; A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. Int. Jour. Heat Mass Transfer, vol. 15, 1787-1806, 1972.
- [6] Hornbeck, R.W.; Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer, NASA-SP 297,1973.
- [7] Bodoia, J.R. and Osterle, J.F.; The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. Jour Heat Transfer, Trans. ASME, p. 41, 1962.

ANÁLISE DE DESEMPENHO DO CONCENTRADOR ASSIMÉTRICO IDEAL

MÁRCIO ZIVIANI

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA, UFMG

SUMÁRIO

Os concentradores assimétricos ideais (CAI) apresentam o rendimento máximo permitido pela 2a. lei da termodinâmica e podem ser mantidos fixos durante todo o ano. Este trabalho apresenta, além de considerações sobre a parte ótica e térmica, testes de campo sobre a eficiência do CAI. A eficiência do CAI foi testada sob condições variáveis de radiação incidente, vazão e temperatura de entrada do fluido. A eficiência do CAI construído, de razão de concentração máxima igual a 1,75, situou-se entre 40-57%, baseado em testes de regime permanente. Os resultados mostram que o CAI é altamente competitivo em relação aos coletores planos e concentradores, na sua faixa de utilização.

SIMBOLOGIA

A	: área	U	: coeficiente global de transmissão de calor
a	: ângulo azimutal	V	: velocidade
D	: diâmetro	α	: altura solar
E	: fração da energia total emitida pelo absorvedor	α	: absortância
F	: fração da radiação aceita pelo concentrador solar	γ	: perfil angular da radiação
H	: radiação solar	γ	: fração da radiação total incidente aceita pelo concentrador
h	: coeficiente convectivo	δ	: declinação
f	: distância focal	ω	: hora angular
k	: condutividade térmica	θ	: ângulo de aceitação
L	: latitude	ϵ	: emitância
l	: largura	τ	: transmitância
m	: declividade	ρ	: reflectância
m	: vazão mássica	λ	: ângulo da involuta
\bar{n}	: número médio de reflexões		
Q	: quantidade de calor		
q	: fluxo de calor		
RC	: razão de concentração		
R	: raio		
s	: inclinação da área de entrada		
T	: temperatura		
T*	: temperatura para fluxo de calor radiado		

INDICES

a	: absorvedor
b	: direta
c	: convectivo, cobertura
d	: difusa
e	: entrada
i	: involuta, incidente
k	: condução
p	: perdido

m	: reflector
n	: normal
r	: radiação
s	: saída, fonte
u	: útil
amb	: ambiente
max	: máximo

SIGLAS

CAI	: Concentrador assimétrico ideal
CPC	: Concentrador parabólico composto
CSP	: Concentrador semiparabólico
Re	: Número de Reynolds
Pr	: Número de Prandtl
Gr	: Número de Grashoff

1. INTRODUÇÃO

Na última década, importantes estudos foram realizados no sentido de viabilizar a energia solar como alternativa energética. Atualmente, a atenção está voltada para o aproveitamento direto da energia solar na indústria, através de coletores, tanto no preaquecimento de água como na produção de vapor, para secagem, destilação e refrigeração. Indiretamente, a energia solar é importante nos processos de bioconversão, eólicos e marítimos.

A utilização direta da energia solar apresenta uma grande vantagem sobre as fontes convencionais que é a eliminação do fator transporte podendo ser usada no local de captação.

A energia solar pode ser captada através de coletores planos e coletores concentradores. Os primeiros são de fácil construção, baixo custo e operam a temperaturas inferiores a 100°C. Como 95% dos processos industriais exigem temperaturas superiores a 100°C [1] faz-se necessário o uso de concentradores solares para fins industriais.

Revisões sobre os concentradores mais comuns são fornecidas pela literatura [2] [4] [5] [6] [7] [8] [10]. Neste trabalho são propostos diversos testes experimentais que permitem uma análise de desempenho prático do Concentrador Assimétrico Ideal (CAI).

Os objetivos específicos deste trabalho foram:

- : projetar e construir um protótipo do CAI;
- : analisar a eficiência do CAI sob condições variáveis de radiação incidente, vazão e temperatura de entrada do fluido.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Concentradores parabólicos ideais. Define-se

concentração ideal como a máxima concentração permitida pela segunda lei da Termodinâmica. Por esta razão denominam-se ideais os concentradores que permitem a máxima concentração para um determinado ângulo de aceitação (θ_{max}).

O Concentrador Parabólico Composto (CPC) é um concentrador ideal bidimensional idealizado por Winston [12] [13] em 1974. Um esquema básico do CPC é ilustrado na figura 1. A superfície refletora é composta de

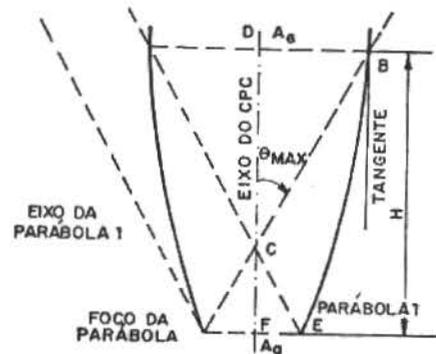


Fig. 1 - Esquema do CPC

dois segmentos de parábola, simétricas em relação ao plano axial do CPC. O foco de cada parábola situa-se na extremidade da parábola oposta.

O ângulo de aceitação da radiação solar (θ_{max}), é formado pelos eixos da parábola e do CPC e, em função deste, estabelece-se a razão de concentração máxima, RC_{max} (4):

$$RC_{max}(CPC) = \frac{1}{\sin \theta_{max}} \quad (1)$$

Por razões econômicas trunca-se a parábola do CPC. Consequentemente, o ângulo de aceitação (θ_{max}) aumenta e RC_{max} diminui. Entretanto a eficiência melhora devido à diminuição do número médio de reflexões (\bar{n}) reduzindo as perdas [5].

No CPC não-truncado a tangente na extremidade superior do refletor é paralela ao plano axial e a altura H do CPC pode ser calculada pela relação (4):

$$\frac{H}{A_a} = \frac{RC + 1}{2} RC^2 - 1 \quad (2)$$

A eficiência ótica do CPC é (4):

$$\eta_o = \tau \rho \bar{n} \gamma \alpha_a \quad (3)$$

onde:

$$\gamma = \frac{H_b}{H_t} + \frac{H_d}{H_t RC}$$

utilizada por Winston [13] para o concentrador simétrico não parabólico. De acordo com a equação [8] os raios incidentes dentro do ângulo de aceitação θ_{\max} são refletidos pelo refletor B'A' para a abertura BB' e chegam ao absorvedor. Para o absorvedor cilíndrico (fig. 5-c), a equação paramétrica da curva B'A' é [7]

$$\begin{aligned} x &= 2m(a \tan^{-1} m + b) + A \\ y &= (m^2 - 1)(a \tan^{-1} m + b) + am \end{aligned} \quad (9)$$

onde m é a inclinação da curva no ponto considerado, a é o raio do cilindro e b é a medida do segmento BB'.

A curva A'G é parabólica, tendo o foco em A e sua equação é:

$$y = \frac{x^2}{4f} \quad (10)$$

onde a distância focal f é calculada, em função do segmento AA' e do ângulo (fig. 5-c), como segue:

$$f = \frac{1}{2} AA' (1 + \sin \alpha) \quad (11)$$

Portanto, todos os raios de direção situada dentro do ângulo de aceitação θ_{\max} , alcançarão direta ou indiretamente o absorvedor.

A figura 3 mostra que o ângulo de aceitação do CPC é metade do ângulo de aceitação do CSP e, de forma análoga, do CAI. Por esta razão a equação (5) toma a forma:

$$RC_{\max}(\text{CAI}) = RC_{\max}(\text{CSP}) = \frac{2}{\tan\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)} \quad (12)$$

Não se conhece, da literatura, testes de desempenho do CAI. O objetivo primordial deste trabalho foi a realização de tais testes.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. Análise ótica do CAI. A principal característica do CAI é a de ser fixo, operando desde o solstício de inverno sem que haja necessidade de se corrigir sua posição. Na figura 6 a posição correta do protótipo durante a realização dos testes de campo.

No modelo construído eliminou-se a curva B'A' (fig. 5-b) de modo que a involuta concordasse diretamente com a parábola. Consequentemente, a abertura e RC_{CAI} diminuiram. Entretanto esta redução não afeta o desempenho do CAI.

A inclinação do concentrador (S), ou do sistema de coordenadas (x, y), figura 6; depende da latitude (L), da declinação solar (δ) e da hora angular (w).

O início de operação ocorre quando a radiação dire

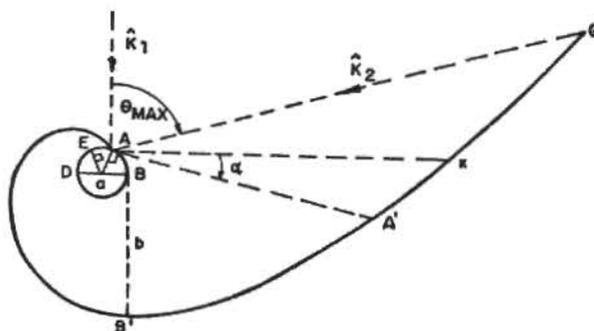


Fig.6 - Perfil do modelo construído e sua correta posição em relação ao plano horizontal. Orientação do eixo: leste-oeste. Latitude 209 Sul.

ta tem a direção do eixo y (eixo da parábola).

Estabeleceu-se um período mínimo de 6 horas de utilização para o dia "limite" em que ocorre o solstício de verão. Para isto calculou-se o ângulo do perfil solar (γ) às 9:00 (ou 15:00) horas.

Em função da equação (4):

$$\tan \gamma = \sec a \tan \alpha \quad (13)$$

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin w}{\cos \alpha} \quad (14)$$

$$\sin \alpha = \sin L \sin \delta + \cos L \cos \delta \cos w \quad (15)$$

e adotando os seguintes valores:

$$L = 19,99 \text{ Sul (Belo Horizonte - MG)}$$

$$\delta = -23,450^\circ \text{C (solstício de verão)}$$

$$w = 45^\circ \text{ (hora angular para 9:00 ou 15:00 hs.)}$$

obteve-se: $\gamma = 78,4^\circ$ ou seja: $S = 11,6^\circ$ sul.

Após a construção do protótipo foram medidas a largura da abertura e a circunferência do absorvedor registrando-se: $\ell_e = 329 \text{ mm}$ e $2\pi a = 188,5 \text{ mm}$. Desta forma:

$$RC_{(\text{CAI})} = \frac{A_e}{A_a} = \frac{\ell_e}{2\pi a} = 1,745$$

Este resultado corresponde com boa precisão ao valor da $RC_{\max}(\text{CAI})$ calculada em função de θ_{\max} . Na figura 6 $\theta_{\max}(\text{CAI}) = 97,5^\circ$ e

$$RC_{\max}(\text{CAI}) = \frac{2}{\tan\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)} = \frac{2}{\tan\left(\frac{97,5}{2}\right)} = 1,754$$

As propriedades óticas e físicas do CAI construído são mostradas no Quadro 1

QUADRO 1 - Propriedades óticas e físicas do CAI.

Descrição	Símbolo	Valor
Razão de concentração 10	RC	1,75
Transmitância da cobertura 1	τ	0,84
Reflectância da cobertura 1	ρ_e	0,16
Reflectância do refletor 3	ρ_m	0,90
Reflectância do absorvedor 4	ρ_4	0,10
Absortância do absorvedor 4	α_a	0,90
Emissividade da cobertura 3	ϵ_e	0,90
Emissividade do absorvedor 1	ϵ_a	0,98
Emissividade do refletor 3	ϵ_m	0,10
Número médio de reflexões 10	n	1,5
Eficiência ótica 11	η_o	0,59
Área de entrada 11	A_e	0,66m ²
Área do absorvedor 11	A_a	0,38m ²
Área do refletor 11	A_m	1,72m ²
Angulo da involuta 11	θ_i	330º
Angulo máximo de aceitação 11	θ_{max}	97,5º
Absorvedor:		
Diâmetro ext. do tubo de escoamento 11		25,4mm
Espessura da parede 11		1 mm
Nº de aletas p/polegada 11		6
Altura da aleta 11		17 mm
Espessura da aleta 11		0,3mm
Espessura da capa 11		0,4mm
Diâmetro do absorvedor 11		60mm
Comprimento do absorvedor 11		2000mm
Informações adicionais:		
Condutividade do cobre 3	k	384W/mºC
Condutividade do ar 3	k	0,0316W/mºC
Condutividade do estanho 3	k	60,5W/mºC

3.2. Análise Térmica do CAI. Kreith e Kreider (4) sugerem um modelo para a análise térmica do CPC. A literatura nada informa a respeito da análise térmica do CAI e o protótipo em questão é da família do CPC. Assim optou-se pelo modelo proposto por Kreith e Kreider 4.

O balanço térmico global do absorvedor, da cobertura e do fluido pode ser resumido como segue |11|

$$q_{b,a} + q_{d,a} = q_u + q_{r(c,amb)} + q_{cv(c,amb)} + q_k \quad (16)$$

$q_{b,a}$ é a radiação direta absorvida pelo absorvedor e é dada por:

$$q_{b,a} = H_b \tau \rho_m \alpha_a \frac{A_e}{A_a} \quad (17)$$

$q_{d,a}$ é a radiação difusa absorvida pelo absorvedor e é dada por:

$$q_{d,a} = H_d \tau \rho_m \alpha_a \quad (18)$$

($q_{d,a}$ em (18) já é dividido por $RC_{(CAI)}$);

$q_u = \dot{m} C_p (T_s - T_e)$ é a energia útil transportada pelo fluido; (19)

$$q_{r(c,amb)} = \epsilon_c \sigma (T_c^4 - T^*4) \frac{A_e}{A_a} \quad (20)$$

é a energia cedida ao ambiente pela cobertura, por radiação;

$$q_{cv(c,amb)} = h_{cv(c,amb)} (T_c - T_{amb}) \frac{A_e}{A_a} \quad (21)$$

é a energia cedida ao ambiente pela cobertura, por convecção;

$$q_k = U_k (T_a - T_{amb}) \quad (22)$$

é o fluxo de energia perdida pelo concentrador por condução. U_k é o coeficiente global de condução e, segundo Rabl |9| oscila entre 0,3 e 0,6 Wm⁻² ºC⁻¹ para um isolamento adequado. Na equação (2) T^* foi tomado igual a $T_{amb} - 6$ |3|.

A radiação global q_e que chega à cobertura do CAI é:

$$q_e = H_b + H_d/RC.$$

A equação

$$q_{r(c,amb)} + q_{cv(c,amb)} + q_k = q_p$$

representa o total de perdas. Assim a equação (16) pode ser reescrita como segue:

$$q_e \frac{A_e}{A_a} = q_u + q_p$$

Donde

$$\eta = \eta_o - \frac{q_p}{q_e RC} = \frac{\dot{m} C_p (T_s - T_e)}{A_c \cdot H_t} \quad (23)$$

O coeficiente convectivo $h_{c,v}$ calcula-se como função do número de Reynolds (Re) ou do número de Grashoff dependendo da velocidade do vento |9|

$$k_{cv} = \frac{K}{L} Nu \quad (24)$$

onde K é a condutividade do ar e L o comprimento da superfície varrida pelo vento. Para ventos com velocidade inferior a 0,23 m/s (escoamento laminar), torna-se |4|:

$$Nu = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (25)$$

e para velocidades acima de 0,23 m/s adota-se

$$Nu = 0,54 (Gr Pr)^{1/4} \quad (26)$$

caso em que o escoamento torna-se turbulento.

3.3. Estrutura do CAI. O concentrador assimétrico ideal consistiu de uma caixa (figura 7, 8a-b-c) de compensado (15mm) devidamente tratado para resistir à umidade, de um refletor de aço inoxidável brilhante (nº 28, liga 430) e de um absorvedor de cobre (figura 8-c).

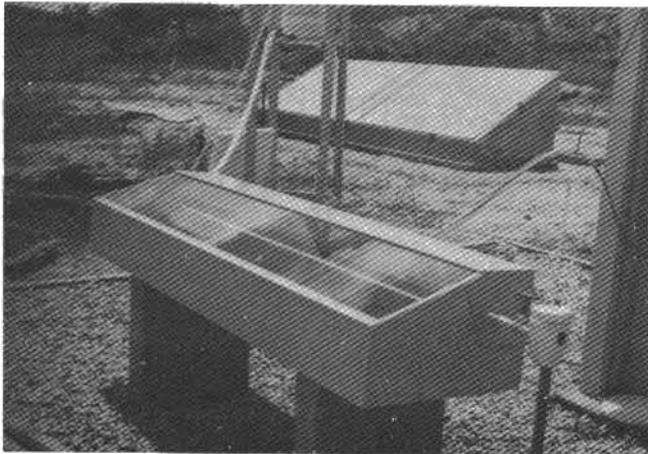


Fig. 7 - O CAI em regime de operação

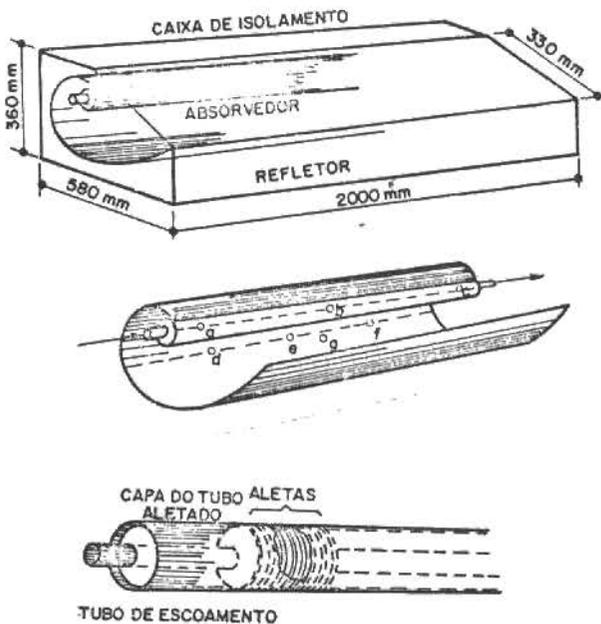


Fig. 8 - Construção e medidas de temperatura no CAI

Construiu-se o absorvedor a partir de um tubo de 1 polegada de diâmetro externo, envolvido por aletas helicoidais e por uma capa. Todo o conjunto foi cuidadosamente estanhado para garantir a melhor condução possí-

vel de calor para o fluido no interior do tubo. A superfície exterior recebeu uma fina camada de tinta preta fosca resistente às temperaturas elevadas.

3.4. Medidas de Vazão e Temperatura. A circulação da água no interior do CAI foi mantida devido a diferença de pressão criada pelo desnível entre um tanque de água e o tubo de escoamento. Um registro foi colocado na saída do tubo de escoamento para controlar a vazão. A medida foi realizada usando um cronômetro e uma prova graduada, cuja menor divisão era 2,5ml.

A análise de eficiência teórica para regime estacionário e transiente e a consequente interpretação da eficiência de campo, exigem dados sobre as temperaturas de entrada e saída do fluido, do ambiente, da superfície do absorvedor, do refletor, da cobertura e do ar confinado entre o refletor e a cobertura. Estes dados, referentes à temperatura, juntamente com os dados de vazão e de radiação aceita pelo concentrador, permitem dizer como se efetua a troca de energia no concentrador e dele para o ambiente. As temperaturas da água e do ar ambiente foram medidas com termômetros de mercúrio, com precisão de $\pm 0,05^\circ\text{C}$.

A medida da temperatura de saída foi feita por um termômetro colocado dentro do recipiente de isopor. A medida de temperatura ambiente foi obtida colocando um termômetro um pouco acima do concentrador. As temperaturas do absorvedor, do refletor e do ar confinado, foram registradas por termopares localizados em vários pontos no CAI. Os terminais dos termopares foram ligados a um multicanal instalado próximo ao concentrador.

A temperatura da cobertura foi medida com o auxílio de um "termistor", de marca Yokogawa Electric Works LTD(YEW) tipo 2673 - 5 VA com escala variando de 0°C a 300°C . Adotou-se a medida correspondente à média de três leituras efetuadas em pontos distintos da cobertura. Este dado foi usado no balanço térmico que permitiu calcular as perdas, por convecção e radiação, entre a cobertura e o ambiente.

Como última medida registrou-se a velocidade do vento. Este dado condiciona a perda de calor da cobertura por convecção em função do número de Reynolds. A velocidade do vento V foi medida com um anemômetro marca "Deuta Werke", com escala de 0 a 60 mph. Em média, a velocidade oscilava entre 1ms^{-1} e 2ms^{-1} .

3.5. Captação da Radiação Solar. O concentrador recebe a radiação direta e parte da difusa, isto é, a fração $1/RC$ da radiação difusa hemisférica. O cálculo da difusa foi obtido pela diferença entre a radiação total e a direta.

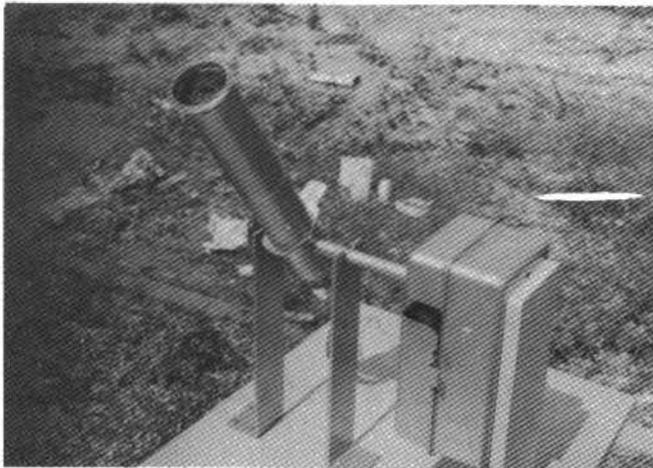


Fig. 9 - Vista do pireliômetro

A figura 9 mostra o pireliômetro destinado a medir a radiação direta. O pireliômetro constituiu-se de um tubo de plástico, enegrecido internamente, munido de uma fotocélula alojada na parte interna inferior. O tubo foi fixado no eixo de um relógio marca SERMAR, de movimento intermitente de quinze minutos, que acompanhava o Sol durante o dia. Tubo e relógio foram fixados sobre uma mesa móvel, em condições de acompanhar a declinação solar, cujo eixo estava alinhado na direção leste-oeste. A fotocélula, exposta constantemente à luz direta, enviava um impulso elétrico a um medidor de milivoltagem que registrava o valor em fita de papel.

O cálculo da radiação direta se fez:

a) convertendo a milivoltagem (V_f) do pireliômetro em Wm^{-2} mediante a função |2|:

$$H_b (Wm^{-2}) = 25,26 V_f (mV) + 4,61 \quad (27)$$

b) calculando a componente da radiação direta normal à área de entrada ($H_{b,n}$) por:

$$H_{b,n} = H_b \cos\theta_i \quad (28)$$

onde:

$$\cos\theta_i = \cos(L-s) \cos\delta \cos\omega + \sin(L-s) \sin\delta \quad (29)$$

A radiação total horizontal H_t foi medida com um piranômetro marca Theodor Friedhichs, tipo estrela 6010 nº 1553, colocado em posição horizontal, com os terminais acoplados ao registrador de milivoltagem: um multi canal de 30 pontos, marca YEW - JODAC T50, tipo 3851.

A conversão de mV do piranômetro V_p foi feita pela relação |2|:

$$H_t (Wm^{-2}) = 74,99 V_p (mV) \quad (30)$$

e, obteve-se a radiação difusa pela diferença:

$$H_d = H_t - H_{b,n} \quad (31)$$

sendo que o concentrador aceitará a fração: H_d/RC .

Assim: Radiação total aceita = Componente da radiação direta + $\frac{1}{RC}$ vezes a radiação difusa, ou

$$q_e = H_{b,n} + \frac{H_d}{RC} = \frac{H_t + (RC-1)H_b \cos\theta_i}{RC} \quad (32)$$

3.6. Testes Experimentais. Os testes de desempenho efetuados são descritos a seguir:

3.6.1. Análise da Eficiência Prática do CAI para um Dia Limpo. A importância deste experimento, está ligada ao número de horas diárias de funcionamento do CAI. Iniciou-se a tomada de medidas às 7:00 horas e foram concluídas às 17:00 horas. A cada 10 minutos foi registrada a radiação total e direta e fizeram-se as leituras das temperaturas de entrada e de saída do fluido, do ambiente, e mediu-se a vazão. A temperatura de entrada e a vazão foram mantidas constantes.

3.6.2. Eficiência Prática do CAI Como Função da Vazão. À partir da equação (23) pode-se prever como a eficiência está ligada à vazão mássica do fluido. Estudos análogos são apresentados para o CPC por Kreith e Kreider [4]. O objetivo deste experimento foi comparar os resultados dos CPCs com os resultados obtidos do CAI.

Para evitar acentuadas mudanças na radiação, o período de teste foi escolhido próximo ao meio dia. Durante todo o experimento a temperatura de entrada foi mantida constante.

O experimento foi dividido em vários testes independentes usando-se em cada um vazão fixa. Cada teste consistiu de sete leituras sucessivas, feitas de minuto em minuto, da radiação total e direta e das temperaturas de entrada e saída do fluido. Antes de iniciar o teste seguinte, com uma nova vazão, aguardou-se o restabelecimento do regime permanente. Ao todo foram feitos testes com nove vazões: 38,7; 33,0; 30,0; 24,8; 20,0; 17,0; 15,0; 12,6 e 10,2 Kg/h.

3.6.3. Eficiência do CAI como Função da Variação da Temperatura de Entrada do Fluido. O objetivo principal do experimento foi obter a curva da eficiência teórica baseada na equação 23. A água foi aquecida gradativamente antes da sua entrada no concentrador e manteve-se a vazão constante. As leituras foram feitas em intervalos de dois minutos.

3.6.4. Análise da Inércia Térmica do CAI. Este experimento visou mostrar um dado importante do CAI, ou

seja, o tempo necessário para que ele entre em operação em regime permanente.

Cobriu-se o concentrador com placas de isopor, quando a radiação era bem elevada, e aguardou-se que todo o sistema atingisse uma temperatura próxima da temperatura ambiente. Quando se verificou que a diferença de temperatura do fluido, entre a entrada e a saída estabilizou e era mínima, descobriu-se o concentrador e, de minuto em minuto, fez-se o registro da temperatura de entrada e saída do fluido e da vazão.

Suspendeu-se a medição quando se verificou que a temperatura da água era constante ao sair do concentrador.

3.6.5. Desempenho do CAI sob Condições Variáveis da Radiação Incidente no Concentrador. Este experimento objetivou analisar as condições reais de funcionamento do CAI, sujeito às frequentes mudanças da radiação incidente.

Durante os 67 minutos de teste em que se verificou uma contínua variação da radiação solar efetuaram-se, de minuto em minuto, leituras de temperaturas de entrada e saída e de vazão do fluido.

3.6.6. Estimativa do Coeficiente Global de Perdas,

U_k . Neste experimento procurou-se obter o coeficiente global de perda de calor por condução pelos lados do concentrador e testar a eficiência do isolamento.

Adotou-se U_k igual a $0,6 \text{ Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$, como recomenda Rabl [8] e este teste visa justificar a validade deste dado.

O concentrador foi coberto com placas de isopor de 2cm de espessura e fez-se circular nele água aquecida a uma temperatura fixa. Uma vez alcançado o regime permanente fez-se a leitura das temperaturas de entrada e saída da água, da temperatura do absorvedor (atuando como fonte quente), da temperatura ambiente (fonte fria) e da vazão. O balanço térmico para estas condições é:

$$m c_p (T_e - T_s) = U_k (T_a - T_{amb}) A_t \quad (33)$$

de onde pode-se obter o valor de U_k .

4. RESULTADOS

Os resultados de medição de eficiência e potência instantânea (figuras 10 e 11) mostram que o CAI pode operar por cerca de oito horas diárias. O período de operação geralmente citado é de sete horas diárias de funcionamento. O valor médio da eficiência, durante um período de sete horas, superou 45%, a eficiência teórica prevista estaria entre 40% e 60%

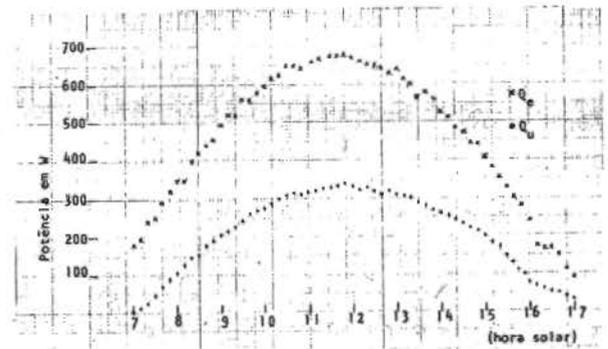


Fig. 10 - Variação da potência aceita e utilizada durante um dia de insolação.

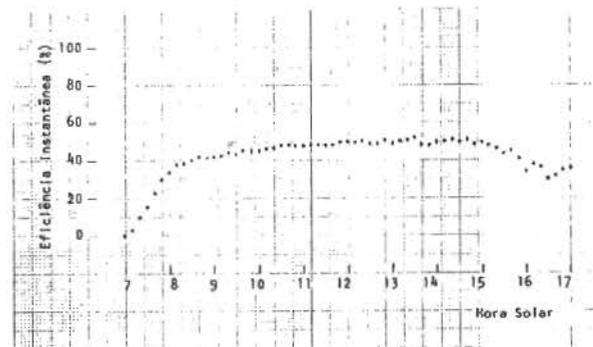


Fig. 11 - Eficiência instantânea registrada no dia 27. 10.80.

Os gráficos das figuras 12 e 13 mostram o efeito da variação de vazão. No primeiro gráfico são mostradas as curvas de eficiência do CPC (linha tracejada) e do CAI (linha contínua).

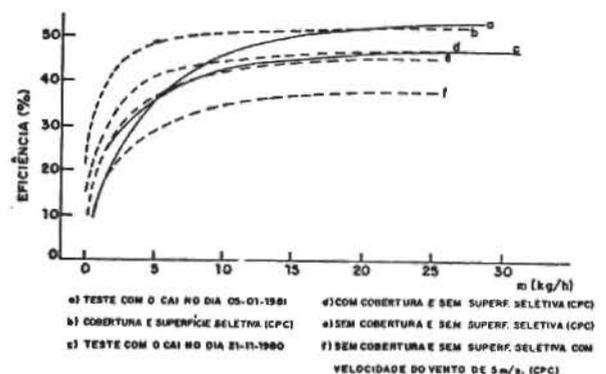


Fig. 12 - Variação da eficiência em função da vazão de CPCs e CAI.

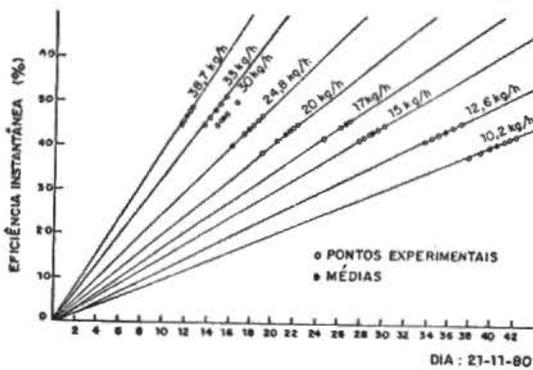


Fig. 13 - Gráfico da eficiência como função da vazão e da razão $(T_s - T_e)/Q_e$.

Na figura 13, nota-se que houve uma flutuação da radiação incidente durante o teste sendo necessária a tomada do valor médio indicado pelo círculo cheio. Os gráficos das figuras 12 e 13 mostram que a eficiência não é afetada sensivelmente quando a vazão for superior a 15 kg/h, um valor considerado baixo. A eficiência cai rapidamente para vazões inferiores a 10 kg/h. O experimento mostrou a semelhança de comportamento do CAI e do CPC quando se altera a vazão do fluido.

Variando a temperatura de entrada do fluido e registrando os dados para diferentes radiações incidentes obteve-se a curva de eficiência do CAI (figura 14).

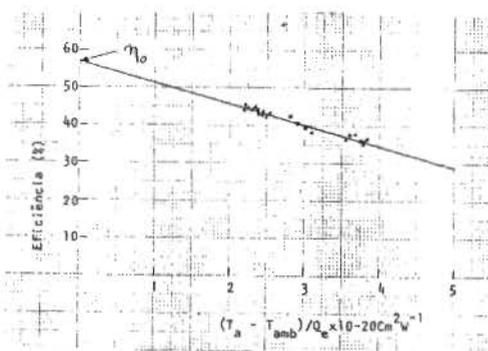


Fig. 14 - Curva da eficiência teórica em função da temperatura do absorvedor.

A comparação da eficiência ótica prática, 57% com o valor teórico de 59%, permite considerar que o CAI construído apresenta um rendimento excelente.

No segundo gráfico (figura 15) é mostrada a mesma curva de eficiência prática em função do "fator de re-

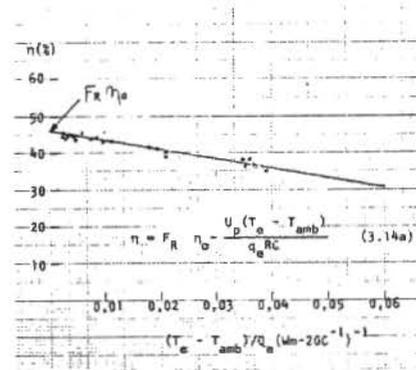


Fig. 15 - Curva da eficiência teórica, em função da temperatura de entrada, obtida dos dados do dia 14.11.80

moção de calor" F_R . Este fator tem grande importância sob o ponto de vista prático permitindo substituir a temperatura do absorvedor T_a , na equação (23), pela temperatura de entrada T_e facilmente conhecida. A equação (23) pode ser reescrita tomando a forma que aparece associada ao gráfico da figura 15. Se a temperatura de entrada for aumentada até que nenhuma energia incidente seja transferida para o fluido que escoar no absorvedor, isto é, $q_u = 0$, o sistema fluido-absorvedor estará em equilíbrio. Neste caso $T_e = T_s = T_a$. Esta temperatura pode ser obtida a partir da equação

$$\frac{q_u}{q_e} = \frac{F_R}{q_e RC} - \frac{U_p (T_e - T_{amb})}{q_e RC} \quad (34)$$

para $q_u = 0$, tem-se:

$$T_e = \frac{\eta_o q_e RC}{U_p} + T_{amb} \quad (35)$$

Utilizando na expressão (34) valores típicos para q_e , T_{amb} e u , obtem-se $T_e = T_s = T_a = 160^{\circ}C$, como limites.

A eficiência é muito reduzida quando a temperatura de entrada chega aos $70^{\circ}C$, não se justificando o uso do CAI para obtenção de temperaturas superiores a este valor.

A inércia térmica do CAI é mostrada no gráfico 16. O regime transiente, que acompanhou o experimento, durou aproximadamente 10 minutos. Este trabalho não discute o regime transiente, uma vez que todos os experimentos básicos foram realizados em regime quase-estacionário, simplificando a análise térmica do CAI. Espera-se que este experimento contribua para um estudo do re-

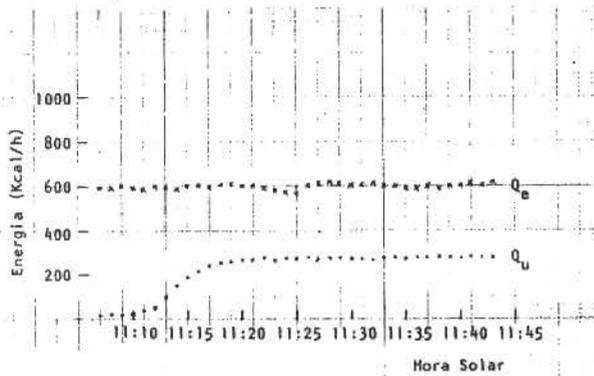


Fig. 16 - Gráfico da radiação aceita e utilizada pelo concentrador no teste de inércia do dia 27.11.80

gime transiente que caracteriza o funcionamento do concentrador.

Tomaram-se dados em dias de nebulosidade variável e obtiveram-se, assim, dados para uma futura análise de regime transiente. O resultado é mostrado na figura (17) onde estão registradas as flutuações da energia

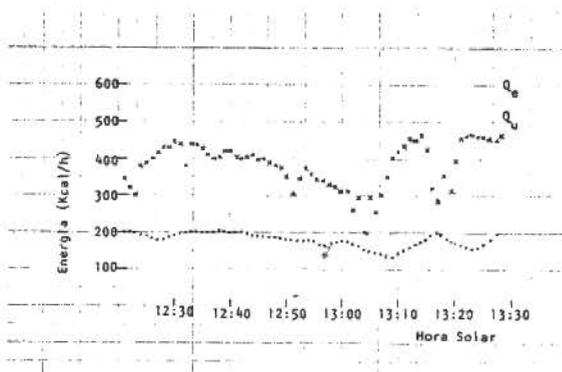


Fig. 17 - Variação da radiação incidente e flutuações da radiação utilizada no dia 19.11.1980 disponível q_e e da energia utilizada q_u . Com este experimento pretendeu-se avaliar o "tempo de resposta" do concentrador. O gráfico 17 acusa intervalos de cerca de 3 minutos. Considerando a elevada capacidade térmica da água, o intervalo de 3 minutos de defasagem, entre mínimos ou máximos, deve ser considerado um "tempo de resposta" pequeno, mostrando a facilidade do CAI em se "adaptar" às súbitas mudanças da radiação. Substituindo a água por óleo, cuja capacidade térmica é menor, presume-se que o "tempo de resposta" do CAI possa ser reduzido pela metade.

Usando a equação de balanço apresentada anterior

mente e tomado os valores médios obtidos nos experimentos, encontrou-se que $U_k = 0,97 \text{ Kcal h}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ou $1,10 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Este resultado está acima da faixa indicada por Rabl [8]. Explica-se esta diferença, considerando que a área do concentrador inclui partes isoladas precariamente. Assim a área da cobertura foi isolada com o vidro e com placas de isopor de 2cm de espessura. As partes laterais, esquerda e direita, não tinham isolamento a não ser a própria madeira da caixa protetora. Portanto, o resultado obtido pode ser considerado satisfatório.

Com relação às perdas globais do concentrador, o gráfico 15 fornece mais detalhes.

A declividade da reta é: $U_p/RC = 5,4 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.
 Onde $U_p = 9,45 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Comparando os resultados de $U_k = 1,10 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ e de $U_p = 9,45 \text{ Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ nota-se que é pela cobertura que o concentrador perde mais energia, com destaque especial para as perdas por radiação.

5. CONCLUSÕES

Os resultados deste trabalho mostram que:

- O desempenho do CAI não é prejudicado pela ausência de acompanhamento solar, considerando que o CAI permaneceu fixo durante quase 3 meses de testes de campo. Durante este período, a declividade solar variou de aproximadamente 23°. O CAI operando cerca de sete horas diárias, apresentou eficiências superiores a 45%.
- A eficiência do CAI cai consideravelmente para vazões mássicas inferiores a 10 Kg/h. Para vazões superiores a 15 Kg/h a eficiência se mantém quase constante.
- O CAI é um concentrador de baixa razão de concentração e a sua função deve limitar-se ao preaquecimento industrial, ao uso doméstico e a outras funções que utilizam baixas temperaturas.
- O CAI apresenta um "tempo de resposta" de cerca de 3 minutos.
- O CAI tem uma baixa inércia térmica. O experimento que a mediu tem uma importância relativa, pois esta característica depende mais dos critérios de construção e do material usado do que da natureza do concentrador.

REFERÊNCIAS

- [1] DUFFIE, J.A., and BECKMANN, W.A. Solar Energy Thermal Processes. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [2] JORIO, F.H.L. Correlações entre as radiações solares total, componentes direta e difusa e a coluna de água precipitável na atmosfera. Tese de Mestrado. EEUFG/CPGET, 1981

- [3] KREITH, F. 'Princípios da transmissão de calor'. Tradução da 3. ed. americana por YAMANE, E., SILVARES, O.M. e OLIVEIRA, V.R.L. São Paulo, Edgard Blücher, 1977.
- [4] KREITH, F. and KREIDER, J.F. Principles of solar engineering. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, D.C., 1978.
- [5] MEINEL, A.B., and MEINEL, M.P. Applied Solar Energy, An Introduction. Addison - Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, USA, 1977.
- [6] MILLS, D.R. The - lace of extreme non-focussing concentrators in solar energy utilization. Solar Energy, vol. 21, pp. 431-434, 1978.
- [7] MILLS, D.R. and GUITRONICH, J.E. Asymetrical non - imaging cylindrical solar Concentrators. Solar Energy, vol. 20, pp. 45-55, 1978.
- [8] RABL, A. Comparison of Solar Concentrators. Solar Energy, vol. 18, pp. 93-111, 1976.
- [9] RABL, A. Optical and thermal properties of Compound Parabolic Concentrators. Solar Energy vol. 18, pp. 497-511, 1976.
- [10] SMITH, R.H. Solergy collector concept. Proc.Int. Conf. on Heliostech nique and Development, pp. 251. Development Analysis Associates, Cambridge, Massachusetts, 1976.
- [11] TONEGUZZO, L. Análise do Concentrador Asolar Assimétrico e Avaliação de sua Eficiência. Tese de Mestrado, EEUFMG/CPGET, 1981.
- [12] WINSTON, R. Principles of Solar Concentrators of a Noveldesign. Solar Energy, vol. 16, pp. 89-95, 1974.
- [13] WINSTON, R. and HINTERBERGER, H. Principles of Cylindrical Concentrators for Solar Energy. Solar Energy, vol. 17, p. 253, 1975.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho de Pesquisa da UFMG pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desse trabalho. * * *

/ic

ABSTRACT

Assymetric ideal concentrators (AIC) show the maximum efficiency as allowed by the 2nd law of thermodynamics and can be kept fixed for the whole year around. This work presents consideration on some optical and thermal aspects and data on field testes of a designed AIC. The AIC efficiency was experimentally related to varying conditions of insolation, flow rate and inlet fluid temperature. The AIC efficiency (CR = 1,75) ranged from 40 to 57%, based on steady-state tests. The results show that the AIC is highly competitive with respect to flat-plate collectors and solar concentrator in its practical range of application.

CONGRESSOS

1. III Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais na Engenharia.

Data e Local:

10 a 12 de Maio de 1982

Buenos Aires, Argentina

Correspondência:

Ing. Agustin J. Ferrante

Congresso Metodos Computacionales

Avda. de Mayo 881, 1º Piso

(1084) Buenos Aires

Argentina

2. Escola sobre Teoria de Cascas e suas Aplicações em Engenharia. (a ser realizada em duas etapas).

Data e Local:

Módulo I : 5 a 30 de Julho de 1982

Módulo II: 3 de Janeiro a 11 de Fevereiro de 1983

Rio de Janeiro

Correspondência:

Dr. Raúl Feijóo

Laboratório de Computação Científica

Av. Wenceslau Brás, 71

22290 - Rio de Janeiro, RJ

Informações Adicionais:

O Módulo I constará de 6 cursos e de um seminário onde especialistas nas áreas de projeto e construção de cascas apresentarão problemas relevantes nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Aeronáutica e Nuclear. Os cursos são:

- Geometria Diferencial
- Mecânica do Contínuo
- Teoria das Cascas e Equações Constitutivas
- Princípios e Métodos Variacionais em Mecânica

- Dinâmica e Instabilidade Elástica
- Fundamentos Matemáticos do Método dos Elementos Finitos

O Módulo II será mais especializado e constará de 8 cursos e de um seminário.

3. Sixth IFTOMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms:

Data e Local:

15 a 20 de Dezembro de 1983

New Delhi

Correspondência:

Department of Mechanical Engineering,

Indian Institute of Technology

New Delhi 110016 (India)

4. Encontro sobre Escoamentos em Meios Porosos.

Data e Local:

20 a 22 de Dezembro de 1982

São Carlos

Correspondência:

Prof. José Carlos Gubulin

Secretaria do X ENEMP

Universidade Federal de São Carlos

Departamento de Engenharia Química

Caixa Postal 384

13560 - São Carlos, SP

5. II Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão.

Data e Local:

24 a 26 de Novembro de 1982

Salvador

Correspondência:

Secretaria do SIBRAT

Núcleo de Serviços Tecnológicos

Escola Politécnica da UFBA - 6º andar

Rua Aristides Novis 2, Federação

40000 - Salvador, Bahia

ERRATA do trabalho "Plane Buoyant Plumes" - de Chia-Shun Yih e A.S. Gupta, publicado no Vol. III, 1981, pp. 49-56.

1. p. 49, line 2. UIH should be YIH.
2. p. 49, line 16. 0.19 should be 0.019.
3. p. 50, Equation (5). $\partial\gamma$ should be $\Delta\gamma$.
4. p. 50, line above Equation (7), add) after viscosity.
5. p. 51, line 6. "1,2" should be (1,2).
6. p. 51, Equations (16) and (17). Move fraction up to line up with the rest of the equation.
7. p. 51, left column, last line. The subscript 2 should be attached to θ to form θ_2 .
8. p. 51, line 3 of right column. The subscript 1 should be attached to θ to form θ_1 .
9. p. 51, right column, line 6. Add period at the end.
10. p. 52, in Equation (23), the first parenthesis should be $(-\frac{20}{9\sigma^2} + \frac{4}{\sigma})\text{sech}^4B$, the second equality sign should be deleted, and a period should be put at the end.
11. p. 53, right column, line 12. "quntity" should be quantity.
12. p. 53, right column, line 5 from the bottom. Delete "of".
13. p. 53, right column, Equation (32). Add λ after equality sign.
14. pp. 54 and 55. The two figures should exchange their position while their captions should stay at the same place.
15. p. 55. The first term of Equation (47) should be $\frac{4B^4}{\sigma}(3 - \frac{2}{\sigma})\text{sech}^4B$.
16. p. 55. In Equation (50), "0.19" should be 0.019.
17. p. 55. In Equation (49), 156^3 should be $15\sigma^3$.
18. p. 56. Add comma after Equation (53).
19. p. 56. Add integral sign \int at the beginning of Equation (56), and the lower limit of integration should be $-\infty$.
20. p. 56. Right column, line 5. Add "the" before "solution".
21. p. 56. In Reference [1], "Teophy" should be Geophy.
22. p. 56. In Reference [4], "1952" should be (1952).
23. p. 56. In second line of Reference [6], "Applie" should be Applied, and the "t" at the end of the line should be deleted.
24. p. 49. Left column, second line from bottom, "Humphey" should be Humphrey.
25. p. 50. Left column, line 24, "4" should be [4].
26. p. 50. Line below Equation (3), "wich" should be which.
27. p. 50. Equation (6). The lower limit of integration should be $-\infty$.
28. p. 51. Third line below Equation (14), "presente" should be "present".
29. p. 53. Right column, line 16 from bottom, "filies" should be files.
30. p. 53. Right column, line 6 from bottom, delete "be".
31. p. 55. Equation (46), 3 is the exponent of λ .
32. p. 55. Right column, line 6, "vey" should be very.
33. p. 56. Equation (55), bring up the first α to line up with the equality sign.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US\$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280mm – with a letter containing title of the papers, name (s) of the institution (s) and author (s)' address (es).

Together with the letter, the author (s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author (s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1981 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means – electronic, mechanical, photographic, recording or any else – is allowed without written permission.

Subscriptions

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telefónico: CAMPUSRIO

