

VOL. IV - Nº 2 - 1982

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio  
Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea  
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

*Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.*

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora. Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1981, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

#### Assinaturas

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri 35 Rio Comprido  
Tel.: (021) 284 8443  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

ISSN 0100-7386

**REVISTA**

**BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS**

**VOL. IV, nº 2, 1982**



patrocinada pela

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM**

Euclides de Carvalho Fernandes (Presidente); Pedro Carajilescov (Vice-Presidente); Arno Blass (1º Secretário); Raúl Antonino Feijóo (2º Secretário); Samir Nagi Yousri Jerjes (1º Tesoureiro); José de Mendonça Freire (2º Tesoureiro).

**EDITOR RESPONSÁVEL**

**L. Bevilacqua**

**EDITOR EXECUTIVO**

**R. Sampaio**

**CONSELHO EDITORIAL**

**A. Blass**

**J.J. de Espíndola**

**R. A. Feijóo**

**G. A. Feldman**

**M. H. Hirata**

**L. Hsu**

**D. Mahrus**

**O. Maizza Neto**

**G. Massarini**

**F. E. M. Saboya**

**J. T. Sielawa**

**F. Venâncio Filho**

**História da Mecânica Clássica  
Parte I, até 1800**

**C. Truesdell**

The Johns Hopkins University

3

**Distribuição de Radiação na Região Focal de Concentradores  
Parabólicos Compostos**

**Carlos Lineu de Faria e Alves**

Departamento de Engenharia Mecânica, ITA

**Isaias C. Macedo**

Departamento de Engenharia Mecânica, FEC/UNICAMP

19

**Nuevos Resultados en el Analisis Limite Via Creep Secundario  
Modificado**

**Raúl A. Feijóo**

**Edgardo Taroco**

LCC/CNPq

**Nestor Zouain**

Departamento de Mecânica, PUC/RJ

25

**Levantamento Experimental de Parâmetros da Suspensão de um  
Veículo**

**Nelson Diógenes do Valle**

UFSC

**José Rubens Kretzer**

Eng. Mecânico

**Norberto de Souza**

Eng. Mecânico

35

**Congressos**

41

**EDITORA CAMPUS**



# HISTÓRIA DA MECÂNICA CLÁSSICA\*

## PARTE I, ATÉ 1800

C. TRUESDELL\*\*

PROFESSOR DE MECÂNICA RACIONAL  
THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY  
Baltimore, Maryland 21218, EUA

Este artigo delinea as principais descobertas da ciência matemática quantitativa da mecânica. A Parte I após referir-se às origens nas eras Grega e Medieval, traça o crescimento da ciência dos séculos dezessete e dezoito. Os sábios desses séculos, Euler acima de todos, deram à mecânica muitos de seus conceitos mais importantes, e formularam várias partes dela como disciplinas claras, suscintas e bastante definitivas, que retiveram suas identidades até hoje. A Parte II abordará a história da mecânica até o presente.

"Sei que muitos irão dizer que poderia ter sido mais agradável ao leitor, se houvesse escrito a História do meu próprio tempo; tendo sido permitido recolher água mais próximo do poço que outros. A isso respondo, que aquele que escreve somente a História moderna, seguirá a verdade tão de perto dos tacões que poderá facilmente perder os dentes. Não há Amante ou Guia que leve seus seguidores e servos a ma-

iores misérias. ... É o suficiente para mim (estando no estado que me encontro) escrever dos tempos mais antigos: onde, e porque não dizer, ao falar do passado, aponto para o presente, e condeno os vícios daqueles que ainda estão vivos, em suas personalidades que são de há muito mortas; porque me colocaram sob esta acusação?"

Sir Walter Raleigh, preso e condenado à pena de morte na Torre de Londres, 1614.

\* Publicação anteriormente em Die Naturwissenschaften 63, 1976, 53-62. © Springer-Verlag 1976. Tradução autorizada.

\*\* Clifford Ambrose Truesdell, III, Professor de Mecânica Racional da The Johns Hopkins University, é autor de mais de duzentos artigos científicos e históricos e de além de uma dezena de livros dos quais aqueles mais afins ao texto deste artigo são listados ao final da Parte II. Editou ou co-editou seis volumes da Opera omnia de L. Euler e sete volumes do Handbuch der Physik; fundou três periódicos internacionais de pesquisa científica e histórica e continua a editar dois deles: Arch. Rational Mech. Anal. e Arch. Hist. Ex. Sci., Springer-Verlag. Entre suas muitas honrarias o Professor Truesdell recebeu a medalha G.D. Birkhoff de 1978, é membro estrangeiro de sete Academias de Ciência européias e da Academia Brasileira de Ciências. (N.T.)

### Conteúdo

1. Fundamentos deste Esboço .....
2. Antigas Culturas .....
3. Origens no Ocidente .....
4. O Final da Renascença e o  
    Início do Barroco .....
5. A Idade da Razão e o Alto Barroco ...
6. O Iluminismo e o Rococó .....
7. Dominação por Formalismo Matemático..

### 1. Fundamentos deste Esboço

#### Mecânica

Em sequência à própria Matemática, a mecânica é a mais antiga das ciências lógicas. Enquanto a álgebra e a análise referem-se apenas a conjuntos e funções, independente de como possam ser sugeridos pela experiência, e enquanto a geometria reflete a experiência apenas através de relações entre posições, independentemente do que as ocupa ou de como o venha a ser feito, a mecânica enriquece o discurso fornecendo modelos lógicos para tempo, massa, força, energia, e, finalmente, calor e temperatura. Assim a mecânica possui vários aspectos. Em um extremo, ela é matemática - de fato, indistinguível ao homem comum, da álgebra, da análise, da geometria e de outras partes da chamada matemática "pura". No outro, tem-se a invenção de máquinas ou de processos a serem por elas desenvolvidos, descritos sugestivamente porém frouxamente em termos que alguns pensarão haver sido emprestados da ciência matemática, enquanto outros os interpretarão como provendo a base na experiência para os conceitos correspondentes da matemática. Entre esses dois extremos encontra-se o que os físicos chamam de mecânica.

#### A História Folclórica da Mecânica

Não importa quão "objetiva" possa ser a ciência, é ela um reconhecido repositório de um culto ou fraternidade zelosa e portanto possui o seu folclore. Este folclore é usualmente inculcado por notícias rotuladas de "história" nos livros textos. Como muito da ciência natural

desenvolvida hoje decorre de invenções do século passado, para que se produza uma história da ciência possuindo uma antiguidade respeitável é necessário fixar a atenção na mecânica, e, de modo a ajustar pré-concepções do que a ciência natural é ou pelo menos deve ser, essa "história" da mecânica é em grande parte inventada. Embora originalmente pulverizada em textos de física, é agora disseminada de modo até mais intenso em cursos introdutórios de ciências biológicas e psicologia.

Essa história folclórica pode ser resumida em umas poucas linhas. Não obstante o avanço temporário feito pelos gregos no sentido da liberação deística e portanto de um raciocínio "científico", a raça humana recaiu no pieguismo. A Idade Média repousa inerte sob uma mortalha de repetições escolásticas, apelando à ARISTOTELES em lugar de experimentação. COPÉRNICO disse que ARISTOTELES estava errado, e GALILEO jogou pesos da torre de Pisa de modo a estilhaçar o escolasticismo por meio de um baque simultâneo, irrefutável. A partir daí, apenas reacionários (não-cientistas) estabeleceram teorias sem primeiro coletar pilhas de dados. KEPLER demonstrou que COPÉRNICO estava certo a menos da excentricidade e estabeleceu leis empíricas do movimento planetário. DESCARTES e LEIBNIZ foram envergonhados por sua falha em aderir ao programa do século dezenove, porém NEWTON mostrou serem as leis de KEPLER consequências do fato de que cada corpo no universo atrai os demais por uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância correspondente. Para fazê-lo, teve que estabelecer (com base no experimento) três Leis do Movimento. Nas palavras que ERNST MACH (1838-1916) escreveu em sua famosa história da mecânica - o clássico reconhecido desse folclore - "NEWTON descobriu a gravitação universal e completou a enunciação dos princípios mecânicos hoje aceitos. Desde seu tempo, essencialmente nenhum novo princípio foi formulado. Tudo o que tem sido feito desde seus dias são desenvolvimentos dedutivos, formais e matemáticos com base nas leis de NEWTON". MACH refere-se, evidentemente, à mecânica "clássica", a história da qual engloba tudo exceto os últimos oitenta anos da história de

todos os tipos de mecânica.

Quase um século se passou desde a publicação do livro de MACH. Estudantes mais sérios, dispostos a ter o trabalho de aprender antes de generalizar, têm escrutinado, linha por linha, os trabalhos de descoberta, trouxeram nova luz e publicaram dúzias de volumes de fontes anteriormente desconhecidas. A representação de MACH do desenvolvimento da mecânica, embora permaneça com fôlego aceito, como história tem sido demonstrada tão falsa a ponto de confundir, mesmo com relação aos detalhes que ela descreve de forma mais ou menos justa.

### Presente Estado da Verdadeira História da Mecânica

Nenhum homem competente teria coragem hoje de escrever uma história geral da mecânica. Muito permanece morto nas prateleiras das bibliotecas, sepultado em impressos e ainda não lidos por qualquer um da inframinoria dos que conhecem suficiente ciência e suficiente história para seguir e entendê-los palavra por palavra e equação por equação - pois ciência sem detalhe preciso, é mera sociologia ou propaganda, neo-Mach-ismo. Os hoje numerosos e competentes estudos de vários tópicos especiais permanece não-digerida e desconexa. Os vazios entre eles são tão grandes quanto os períodos que abrangem. O estudante que busca a verdade histórica é bloqueado pelo vasto estercor de palavras sobre os quais aqueles sedentos de exaltar suas próprias incompetências na ciência de todos os períodos, convertidos em especialistas profissionais na história da ciência, levantam seus santuários cada vez mais alto, palavras que, embora raramente verídicas, não obstante não podem ser ignorados de plano.

### A Natureza deste Esboço

O texto que aqui apresento exprime meu ponto de vista acerca de alguns dos principais estágios da criação da mecânica clássica. Está repleto de falhas, falhas que refletem minha ignorância de certas partes da mecânica bem

como de muitas partes de sua história, porém eu prefiro revelar essa ignorância por silêncio que por papagaiada do fruto do trabalho ou descuido de outros. O leitor perceberá meus vies. Espero que perceba também que esse viés é o resultado não de preconceito mas de julgamento induzido de uma vida inteira de estudo na qual o passado e o presente da mecânica criativa se iluminaram mutuamente.

### 2. Antigas Culturas

ARQUIMEDES (287-212 a.C.)

A surpreendente perspicácia de ARQUIMEDES em processos matemáticos e os seus soberbos padrões de rigor matemático ao raciocinar acerca de problemas de mecânica inspiraram a todos os que puderam ler seus trabalhos. Mostrou-nos como utilizar a lei da alavanca, e desde seu tempo isto tem sido a pedra de toque da mecânica. Ele estruturou os axiomas para o equilíbrio de corpos flutuantes. Sua teoria não revelou muito acerca de fluidos mas foi construída especialmente para o problema particular que estudou: encontrar todas as posições em que um dado corpo, tal como um segmento de um parabolóide de revolução, pode flutuar, e determinar sua estabilidade ou instabilidade. Considerava uma posição como estável se o corpo quando deslocado da mesma e então obrigado a permanecer em repouso, sofria um torque tendendo a restaurá-lo àquela posição.

Embora a Grécia antiga haja produzido muitos outros excelentes matemáticos, não encontro evidência que qualquer deles haja dedicado atenção à teorias matemáticas da mecânica, ou de que as descobertas de ARQUIMEDES tenham sido ampliadas. A única cultura a desenvolver uma ciência matemática da mecânica - a mecânica racional - foi a da Europa Ocidental. Embora outras culturas, tanto as mais antigas quanto as mais novas, possuíssem escolas especializadas e algumas vezes até criativas em aritmética, álgebra, teoria dos números, geometria e cinemática celeste, do que delas regentei não encontrei qualquer evidência de até mesmo o mais especial ou primitivo pensamento

matemático original sobre mecânica. Para com provar que conquistas da perícia suprema e o sucesso na construção mecânica e na invenção não necessariamente conduzem a qualquer disciplina científica ou teoria quantitativa da mecânica, necessitamos considerar apenas aquele povo notoriamente anti-matemático, os antigos romanos. A idéia central da mecânica científica é a de força como uma quantidade matemática, e força é um conceito característico da Europa Ocidental.

### 3. Origens no Ocidente

#### A Idade Média

A natureza e as propriedades do movimento foram estudadas repetidamente na Idade Média. JORDANUS DE NEMORE (princ. Sec. XIII) afirmou que o peso de um corpo era diminuído quando ele caía seguindo uma direção oblíqua à vertical. Em seu raciocínio apelava para um caso especial do que muito depois veio a ser chamado de princípio do trabalho virtual. Selecionou para estudo e em alguns casos disse haver resolvido um certo número de problemas que viriam a tornar-se típicos da mecânica ocidental: a resistência oferecida pela água de um navio ou pelo ar a um projétil, a forma assumida por uma viga carregada de várias maneiras, a carga requerida para quebrar uma viga, etc. Nenhum antecedente a suas idéias foi até hoje encontrado.

WILLIAM HEYTESBURY (apogeu em 1330-1348), RICHARD SWINESHEAD (apogeu em 1344-1355), e JOHN OF DUMBLETON (apogeu em 1338-1348) distinguiram cinemática, a geometria do movimento, da dinâmica, a teoria dos agentes do movimento. Eles lograram formular um conceito bastante claro de velocidade instantânea, o que significa que renunciaram os conceitos centrais de função e de derivada, e demonstraram que o espaço percorrido por um corpo em movimento uniformemente acelerado num dado tempo é o mesmo que o percorrido por um corpo em movimento uniforme com uma velocidade igual a média entre a maior e a menor velocidade do movimento acelerado. A história foclórica a-

tribue este teorema e suas principais consequências a GALILEU, que trabalhou no problema trezentos anos depois, como veremos mais adiante. Em princípio, os estudos medievais substituíram as qualidades da física grega por quantidades numéricas que desde então reinam na ciência ocidental. Quase imediatamente GIOVANNI DI CASALE (apogeu em 1346-1375) e NICOLE ORESME (c.1325-1382) descobriram como representar os resultados por gráficos geométricos, introduzindo a ligação entre geometria e o mundo físico que tornou-se um segundo hábito característico do pensamento ocidental. JEAN BURIDAN (c. 1330-1357...) propôs um conceito de "impetus" que chega próximo ao que hoje é chamado de "momentum", mas não alcançou uma ciência formal da dinâmica mesmo no caso mais simples.

O trabalho medieval foi inteiramente matemático. Tendo sido inferido ou, pelo menos descrito, através da experiência comum, porém, se é que podemos julgar pelos documentos que foram preservados, não levou a experimentos.

A mecânica medieval foi tornada rapidamente parte da instrução universitária avançada no continente europeu; os trabalhos principais foram impressos no final do século XV, porém nessa época o modo de pensar bem como a linguagem utilizada estavam se tornando inaceitáveis, pois os humanistas literários da Renascença insistiam no estilo bem como na forma do latim clássico em reverência ao trabalho dos antigos.

#### LEONARDO DA VINCI (1452-1519)

Os cadernos de LEONARDO sugerem contato indireto com a moribunda tradição medieval, porém certamente ele não a absorveu. Foi um observador detalhista e discernidor de tudo o que podia ser visto, e o que viu registrou em desenhos esplêndidos. Máquinas e fenômenos mecânicos estavam entre seus assuntos favoritos. A partir de suas observações de escoamentos em canais e rios inferiu o princípio da descarga constante num escoamento uniforme e distinguiu precisamente entre o rodopio de vórtices e a rotação de uma roda. Formulou numerosas questões científicas, das quais usualmente demandava respostas em termos de quantidades e não

meramente qualidades, essas poucas respostas que produziu, são geralmente quantitativas porém desprovidas de suporte por raciocínio ou fato. Projetou muitos experimentos, porém não há uma evidência firme de que haja realizado qualquer deles. Quase todos os seus escritos podem ser interpretados como literatura, ou engenharia, ou pura observação da natureza, ou clarevidência e não como uma inquisição organizada que por si possa produzir ciência. O valor de seus numerosos pronunciamentos, sua originalidade no projeto das máquinas que desenhou, e a influência que seu trabalho possa haver exercido sobre estudantes subsequentes de ciências naturais e engenharia, permanecerá sempre em disputa.

#### 4. O Final da Renascença e o Início do Barroco

SIMON STEVIN (1548-1620)

STEVIN aparenta ter sido um discípulo dos matemáticos gregos, despreocupado com aspectos filosóficos e não influenciado seja pela tradição medieval ou pelas questões então correntes de astronomia. Seus escritos em mecânica, curtos e fáceis de ler, revelam uma habilidade consumada com o triângulo de forças e as leis da alavanca. Um leitor versado no conteúdo desses textos poderia resolver qualquer problema estaticamente determinado relativo a um sistema discreto de forças. STEVIN abordou a hidrostática a partir de um ponto de vista mais prático que o de ARQUIMEDES. Com base em axiomas explícitos concluiu que a pressão da água calma sobre o fundo de um recipiente é independente da forma dos lados do reservatório. Uma hipótese adicional permitiu-lhe calcular rigorosamente a força resultante da água sobre um plano de qualquer inclinação como o limite da soma das pressões sobre faixas estreitas. Assim, foi o primeiro a considerar com sucesso um sistema infinito de forças. Hoje expressamos esse raciocínio concisamente em termos de integrais. Em trabalho grandemente decorrente embora bastante posterior, BLAISE PASCAL (1623-1662)

asseverou que em um dado ponto de um fluido em repouso, a pressão sobre um plano é independente de sua inclinação. Esta conclusão, inerente à teoria de STEVIN, é uma das primeiras relativamente às forças que partes de um mesmo corpo exercem entre si.

GALILEU GALILEI (1564-1642)

O trabalho de GALILEU em mecânica está contido em seus Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attenenti alla mecanica & i movimenti locali (Leyden; Elsevirii 1638). A primeira ciência nova é a teoria da resistência dos materiais, na qual GALILEU fornece uma regra para comparar a carga que arreventará uma viga transversalmente com a carga que a quebrará por tração horizontal. Sua regra incorria seriamente em erro mas foi aceita posteriormente por engenheiros praticantes e julgada responsável por um desastre ferroviário duzentos anos após. Pelo contrário, os teóricos rejeitaram a regra logo que foi publicada, e um importante ramo da mecânica cresceu das tentativas de corrigi-la.

A segunda ciência nova é a do movimento local. Quanto GALILEU pode haver conhecido da tradição medieval com relação a movimentos uniformemente acelerados é obscuro, porém obteve em seu trajeto todos os velhos teoremas e muitos outros subsidiários. Empregou uma boa parcela de geometria em demonstrações rigorosas de detalhes menores mas ocultou suas hipóteses centrais por persuasão retórica e sarcasmo dirigido contra aqueles que não apreciaram suficientemente suas descobertas. Se levou ou não a cabo os experimentos que descreveu sobre corpos deslizando sobre planos inclinados, é também desconhecido, porém tem sido demonstrado que os meios e conceitos disponíveis eram suficientes para ele o haver feito, e o fracasso de MARIN MERSENNE (1588-1648) em confirmar seus resultados decorreu do uso de bolas rolantes em lugar de deslizantes.

GALILEU asseverou que movimentos de projéteis eram compostos de movimentos horizontal e vertical independentes. Concluiu assim que a tra



jetória de um projétil seria uma parábola. Esta regra extremamente inexata, que despreza o atrito, o vento e o giro, constituiu a base de tabelas balísticas por séculos subsequentes. GALILEU era fascinado pelo conceito de vibração. A idéia de que o som é um movimento vibratório de frequência definida era então corrente; isso havia sido enfatizado e publicado por MERSENNE. GALILEU tornou mais precisa uma das três leis das cordas vibrantes que MERSENNE havia inferido de experimentos; e bem pode haver descoberto essas leis independentemente, antes da aparição do livro de MERSENNE. Assim verava que o movimento de um pêndulo circular era absolutamente isocrona, e interpretava o som como sendo algo similar ao balanço de um tal pêndulo bem como ao movimento de ondas na superfície da água. De seu tratado brilhantemente escrito sobre movimento local, a única parte que é seguramente original é aquela em que tenta mostrar como a descida ao longo de um arco circular com um término horizontal é a mais rápida possível entre dois pontos quaisquer dados. A conclusão de GALILEU é falsa. Ele a apoia apenas tentando demonstrar que a descida segundo um arco circular é mais rápida que ao longo de qualquer polígono inscrito. Seu argumento se desmancha, mas o princípio no qual se apoia é profético, pois, com efeito, admite que um corpo deslizando sobre um arco circular possui em cada instante a aceleração tangencial que teria se estivesse deslizando ao longo da reta tangente em cada ponto.

ISAAC BEECKMAN (1570-1637)

Continuando a tradição de STEVIN, pelo uso dos princípios da estática, BEECKMAN analisou uma corda suspensa na qual pesos eram pendurados. Indicou então que se as distâncias horizontais entre os pesos são iguais, os pontos onde os pesos são fixados se situariam sobre uma parábola. Assim resolveu o problema da ponte suspensa. Este trabalho, realizado antes da aparição do livro de GALILEU, permaneceu sem publicação embora não mantido em sigilo. Através de argumentos totalmente en-

ganosos GALILEU concluiu que uma corda ao pendurar-se assumiria a forma de uma parábola. A partir dessa afirmação falsa iniciou-se o celebrado problema da "curva catenária". BEECKMAN reivindicou ter mostrado que a frequência de vibração de uma corda tensionada seria inversamente proporcional ao seu comprimento. Embora apenas correto para o primeiro instante do movimento, seu raciocínio dá lugar à primeira demonstração matemática em acústica.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

DESCARTES, que parece haver aprendido mecânica e física de BEECKMAN, tendo feito pouca, se alguma, contribuição específica a esses campos, porém deixou uma impressão poderosa sobre eles e sobre a ciência natural em geral. Primeiro, retratou a natureza como uma grande máquina, os trabalhos resultantes da qual eram sistemáticos e permanentes por conseguinte podendo ser descritos apenas pela razão: isto é, pela matemática. A ciência natural nesse sentido não era ímpia, nem, no contexto de suas declaradas limitações, fútil. Em segundo lugar, afirmou que a natureza operava de tal modo a manter constante a soma dos produtos das massas e velocidades de todos os corpos. Se houvesse tido o trabalho de desenvolver consequências específicas dessa idéia, haveria certamente de verificar que a soma particular que afirmava conservar-se em geral não o poderia ser, porém sua assertiva deu lugar a busca por princípios de conservação, que ainda continua no presente.

##### 5. A Idade da Razão e o Alto Barroco

CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695)

Em sua exigência por rigor e elegância matemática HUYGENS se assemelha a um novo ARQUIMEDES, porém trouxe também para a mecânica um balanço entre raciocínio puro e experiência da natureza dantes nunca alcançado e, raramente a partir de então. Adotando, ou talvez recriando, a idéia de GALILEU de que a aceleração tan-

gencial de um corpo vinculado ao cair deva ser a mesma que a desse corpo deslizando ao longo da reta tangente, demonstrou que o período de oscilação de um pêndulo era independente da amplitude de sua trajetória se e somente se a curva de restrição fosse uma cicloide. HUYGENS solucionou também o problema do centro de oscilação: Se vários corpos em um mesmo plano são ligados rigidamente, segundo que eixo perpendicular a esse plano o conjunto rígido poderá girar livremente? De modo equivalente, se essa montagem é deixada oscilar em torno de um eixo arbitrário perpendicular ao plano, qual o comprimento do pêndulo simples cujo período de vibração é a mesma função que a de sua amplitude de vibração? Para resolver este problema HUYGENS introduziu um princípio de conservação da energia: Em oscilações sujeitas à gravidade, o centro de gravidade se eleva a altura da qual caiu. Este resultado é expresso em termos do que posteriormente veio a ser chamado "o momento de inércia". Portanto uma medida da inércia completamente distinta do peso entrou na mecânica.

As soluções desses problemas por HUYGENS permanecem como pináculos da mecânica até hoje. Foi percebido de imediato, entretanto, que se repousam sobre princípios distintos, e que para determinar as órbitas dos planetas ou o movimento das marés seriam ainda requeridos outros princípios. A mecânica ao tornar-se mais precisa e matemática estava ao mesmo tempo dividindo-se em um grupo de ciências apenas levemente relacionadas entre si.

Em sua juventude HUYGENS havia discernido o erro de GALILEU com relação a catenária e descoberto por si só a solução de BEECKMAN para a ponte suspensa. Em seus últimos dias atacou o problema da catenária no mesmo espírito, considerando-a como um número de pesos discretos ligados por uma corda incorpórea. Seus métodos e conceitos foram dilatados ao limite para resolver este problema. Foi capaz de tratar qualquer caso particular dado porém não conseguiu sintetizar a descrição geral da curva assumida.

HUYGENS pode ser considerado como um cientista perfeito. Seu exemplo mostra que um e o mesmo homem pode criar resultados importantes

em matemática pura, pode desenvolver e aplicar teorias físicas com os mais elevados requisitos de rigor lógico, pode introduzir novos conceitos e proposições da física e correlacionar fenômenos físicos importantes previamente mal compreendidos, pode projetar e levar a efeito experimentos importantes, pode elaborar e patentear dispositivos úteis e fazê-los serem fabricados. A Mecânica foi apenas um de seus campos de atividade.

ISAAC NEWTON (1643-1727)

Os Philosophiae Naturalis Principia Mathematica de NEWTON, publicado em Londres em 1687, foi o primeiro tratado geral em mecânica racional. Atraiu grande atenção devido ao seu ambicioso plano de dedução. O leitor ganha a impressão de que tudo deve decorrer de três "Axiomas, ou Leis de Movimento". Esses axiomas eram fraseados em termos de "forças". Força era uma palavra comum, usada frouxamente em escritos científicos, porém nunca antes considerada fundamental. Leitores da época ficaram perplexos de encontrá-la como o que hoje chamaríamos de uma "variável primitiva" em matemática, e não como uma qualidade filosófica ou uma quantidade matematicamente definida em termos de movimentos. NEWTON mostrou como usar forças, mas nunca as explicou ou estabeleceu suas propriedades gerais. Seu axioma operativo é a Segunda Lei, que estabelece com efeito que para qualquer corpo sob quaisquer circunstâncias a aceleração é igual a força aplicada por massa unitária. Estudantes posteriores veriam que tal afirmação faria sentido apenas se o conceito de "corpo" fosse refinado: Tipicamente, porém não exclusivamente, o "corpo" ocupa apenas um ponto do espaço. Essa lei em si aparenta hoje em dia ser uma extensão natural dos princípios usados por GALILEU e HUYGENS, mas distintamente desses, refere-se não apenas à gravidade uniforme mas também a todos os tipos de forças, e não apenas a uma única componente da aceleração mas ao próprio vetor aceleração. O Livro I do grande tratado de NEWTON refere-se ao movimento de corpos sujeitos a forças que são função exclusiva das distâncias. Con-

tém também uma grande parcela de geometria e análise infinitesimal, explicada em notação e termos geométricos que deu por séculos a lei tores não críticos a idéia de que NEWTON ocul tou a utilização do que viria a ser chamado "cálculo integral e diferencial". O tratamento da mecânica é razoavelmente sistemático e permanece a grosso modo dentro do programa de NEWTON de dedução racional a partir de axiomas. Em grande parte o Livro I é um trabalho retrospectivo ao unificar e generalizar muitos resultados previamente conhecidos porém mais ou menos separados. Sua realização mais celebrada é a demonstração de que as regras do movimento planetário induzidas dolorosamente de dados celestes por JOHANN KEPLER (1571 - 1630) decorre de umas poucas linhas de matemática a partir da Segunda Lei de NEWTON e da hipótese de que o universo contém apenas dois corpos, que são pontos ou esferas homogêneas por camadas, que se atraem por forças centrais iguais e diretamente opostas inversamente proporcionalis ao quadrado da distância entre os centros.

O Livro II refere-se ao movimento de corpos em meios resistivos. Os meios são idealizados de várias formas: como agentes de denso atrito, como uma montagem de numerosas partículas estáticas, como fluídos incompressíveis destituídos de atrito interno, como pinhas de material elástico, dilatante ou condensante, como camadas deslizando umas sobre as outras. NEWTON clama determinar a resistência oferecida por meios densos ou rarefeitos a passagem de esferas ou cilindros; a oscilação da água em um tubo em U; a vazão de água de um recipiente com um furo no fundo; o progresso de ondas superficiais; a velocidade do som no ar; a resistência decorrente da tendência ao escorregamento em um fluido; e várias outras coisas.

Embora muitos que meramente olharam de relance o trabalho de NEWTON tenham sido persuadidos de que seu conteúdo realmente decorre matematicamente de suas Leis do Movimento; e ainda hoje muitas pessoas são assim persuadidas; no Livro II seu programa de dedução racional se esfacela completamente. Novas hi-

póteses são introduzidas, seja confessas ou tacitamente, a cada poucas páginas; as demonstrações são frequentemente retóricas ou mesmo circulares; e algumas páginas não são mais que blefe. Muitos dos problemas que NEWTON aborda em seu livro nuncadantes haviam sido sujeitas a qualquer tipo de tratamento matemático. Por engenhosidade e perspicácia, e, acima de tudo, por sentido dos problemas, o Livro II é o trabalho mais brilhante e fértil já escrito em mecânica; foi assim recebido pela dúzia de homens que poderiam compreendê-lo; e assim permanece. Por mais de cem anos os melhores geômetras devotaram-se à crítica, desenvolvimento e correção das idéias e argumentos nele delineados, a solução dos problemas que atacou sem sucesso, a exploração e conquista dos horizontes que abriu à mecânica.

O Livro III refere-se ao "Sistema do Mundo", que é o sol, os planetas e suas luas e certos cometas. Nele NEWTON tenta mostrar que sua lei da gravitação universal é suficiente para explicar em detalhe os fenômenos da mecânica celeste. Como a estrutura matemática apresentada no Livro I era insuficiente para tratar um universo consistindo de mais que dois corpos, NEWTON teve de recorrer no caso a aproximações de vários tipos. Aqui, também, ele mostrou ser um mestre consumado da matemática e da adivinhação engenhosa.

NEWTON publicou apenas uma pequena fração do que escreveu. Finalmente está se tornando possível seguir o curso de seu raciocínio, pois uma edição definitiva de todos os seus trabalhos matemáticos, editada soberbamente por D.T. WHITESIDE, começou a aparecer em 1967 tendo-se completado em 1982 com o oitavo volume. Muito do esforço de NEWTON foi colocado em álgebra, geometria e análise parcialmente mas de modo algum inteiramente em resposta a problemas surgidos em seu estudo da mecânica.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

A mecânica de LEIBNIZ foi desenvolvida quase ao mesmo tempo que a de NEWTON e o foi inteiramente independente desta. Após refutar o

princípio da conservação de DESCARTES, definiu a "força viva" de um corpo como sendo o produto de sua quantidade de matéria pelo quadrado de sua velocidade e afirmou que qualquer perda de força viva era compensada por um ganho igual de "força morta", e vice-versa. As idéias de energia potencial e cinética, a soma das quais é conservada em muitos casos importantes, decorre de seu princípio.

LEIBNIZ também propôs uma "lei da continuidade", em consequência da qual "tudo progride gradativamente na natureza e nada por saltos". Assim facilmente dispensou os modelos discretos e considerou diretamente corpos contínuos.

GASTON PARDIES (1636/8-1673) já havia tentado fazer tal, porém carecia da matemática necessária para expressar e resolver as condições que obteve. O cálculo diferencial e integral de LEIBNIZ proveu ferramentas lógicas perfeitamente aptas à análise de um universo concebido como sendo de variação infinitesimal e perpétua. Com eles, o próprio LEIBNIZ facilmente resolveu o problema da curva catenária com base no princípio mecânico de PARDIES. Também, corrigindo a regra de resistência de GALILEU, foi a primeira pessoa a calcular o efeito das tensões distribuídas desigualmente sobre a seção transversal de uma viga carregada.

Elegantes e definitivas como são as soluções de LEIBNIZ de uns poucos problemas específicos, sua importância para a mecânica decorre mais do fato que o tipo de cálculo diferencial e integral que permite o melhor uso em ciência natural desenvolveu-se com base em suas idéias em lugar das de NEWTON.

JACQUES BERNOULLI (1655-1705)

A mecânica de JACQUES BERNOULLI foi mais forte nos aspectos em que a de NEWTON foi mais fraca: problemas relacionados a sólidos rígidos ou elásticos. Ele uniu a teoria do centro de oscilação de HUYGENS aos princípios estáticos mostrando que decorriam da lei da alavanca se as acelerações reversas fossem tratadas como sendo forças. Esta é uma das várias idéias chamadas de "Princípio de D'ALEMBERT"

nos livros texto. A aplicação dele feita por JACQUES BERNOULLI fornece um primeiro exemplo da lei do momentum rotacional, que com o tempo tornou-se e permaneceu como sendo o segundo princípio fundamental de toda a dinâmica. A segunda obra prima de JACQUES BERNOULLI é sua teoria da cinta elástica fletida. Considerando a seção transversal como se gerasse uma mola, encontrou a equação diferencial do equilíbrio que a curva deve satisfazer e a resolveu em um caso importante. Explorando profundamente a natureza da elasticidade, viu que a resposta de um material deve ser descrita como uma relação entre força tensil por área unitária e alongação por unidade de comprimento, o que é hoje chamado de uma "relação tensão-deformação". Sua tentativa para determinar a fibra neutra em uma viga fletida resultou em fracasso.

De modo a resolver vários problemas particulares da mecânica concernentes a linhas flexíveis ou corpos deslizantes, criou o cálculo das variações, que tem permanecido desde então como uma ferramenta importante em todas as áreas da física matemática. Em particular, corrigindo GALILEU, demonstrou que a curva de descida mais rápida entre dois pontos é uma cicloide.

## 6. O Iluminismo e o Rococó

A Era de EULER (c.1730-c.1780)

Nenhum outro homem dominou a mecânica a tal ponto ou por tanto tempo como o fez LEONHARD EULER (1707-1783). A mecânica como é hoje ensinada a engenheiros e matemáticos é em grande parte criação sua. Abordou cada aspecto da mesma e cada problema especial importante então sob estudo. Tudo o que tocou ele transformou, clarificou, reformulou e enriqueceu. Seu trabalho em qualquer assunto dado sempre superou e tornou obsoleto todos os estudos prévios acerca do mesmo.

EULER foi um estudante de JEAN BERNOULLI (1667-1748) que havia sido treinado por seu irmão JACQUES. Assim EULER herdou não apenas a matemática de LEIBNIZ e dos BERNOULLI mas tam-



bém a tradição da estática terrestre como desenvolvida por STEVIN, HUYGENS e PIERRE VARI-GNON (1654-1722). Ao mesmo tempo dominou os métodos e os conceitos de NEWTON, com sua ênfase em dinâmica e em fenômenos celestiais, e nele juntaram-se as duas principais correntes de pensamento em mecânica e assim elas têm permanecido desde então. No segundo quarto do século dezoito uma atenção grande foi dada à sistemas sujeitos a pequenas oscilações. Foram considerados tanto sistemas discretos, como aqueles de muitas massas ou pesos ou de hastes rígidas articuladas e os contínuos, como cordas tensionadas ou pesadas e barras elásticas. Equações diferenciais do movimento para tais corpos eram ainda desconhecidas, pois os princípios da mecânica ainda não haviam sido formulados com suficiente generalidade para as obter. JEAN BERNOULLI, seu filho DANIEL (1700-1782) e EULER desenvolveram uma grande prática em utilizar hipóteses especiais suficientes para determinar as formas dos modos principais e calcular as frequências próprias correspondentes. Viram que esses modos podiam ser excitados simultaneamente, e DANIEL BERNOULLI finalmente enunciou que todo movimento vibratório pode ser obtido pela superposição de um número suficiente de vibrações simples. Considerou esta asserção como uma nova lei da física e não como um teorema demonstrável da mecânica.

NEWTON e outros haviam formulado através de relações diferenciais intrínsecas o problema da determinação do movimento de certos sistemas e que pode de fato ser reduzido a um único ponto massivo sujeito a uma força central. A famosa solução de NEWTON do problema de dois corpos gravitantes é desse tipo. Até 1743 todos os que haviam tratado sistemas mais complicados, tais como três corpos gravitantes ou dois corpos ligados, haviam recorrido a conjecturas ou confinado-se a movimentos especiais particularmente simples, tais como as vibrações simples mencionadas. Em 1743 as primeiras equações diferenciais típicas do movimento foram obtidas por JEAN BERNOULLI e JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783). O último foi o primeiro a estabelecer uma equação diferencial parcial como a lei do movimento de um sistema

mecânico, qual seja, de uma corda pesada em pequena oscilação horizontal. De modo a fazê-lo, formulou uma lei geral referente a sistemas vinculados que estabeleceu muito obscuramente. Esta equivale a uma proposição de que as acelerações causadas pelos vínculos constituem-se em um sistema equilibrado de forças por massa unitária. Como LAGRANGE viria a observar posteriormente, o princípio de D'ALEMBERT é de uso difícil. EULER imediatamente estendeu o método de JEAN BERNOULLI de modo a obter as equações que governam o movimento de sistemas ligados, e então, como por lembrança, viu que o movimento geral de n pontos mássicos sujeitos a quaisquer forças dadas podiam ser formulados da mesma forma em termos de um sistema de equações diferenciais referidas a um único sistema de coordenadas. Essas equações, nas quais praticamente todas as pesquisas subsequentes em mecânica celeste foram baseadas, são chamadas de "Newtonianas" no foco, embora nada como elas apareça em qualquer lugar no trabalho de NEWTON. Assim que as encontrou, EULER as usou repetidamente. Por exemplo, determinou o efeito de uma força harmônica excitadora sobre um oscilador harmônico; assim descobriu a teoria matemática da ressonância, um fenômeno que havia sido antes compreendido apenas de forma figurativa. A partir dessa época EULER sempre formulou problemas de mecânica em termos de definitivas equações diferenciais ordinárias parciais. D'ALEMBERT por sua vez obteve a equação que governa as pequenas vibrações transversais de uma corda esticada; embora percebesse a solução em termos de funções arbitrárias, representando ondas propagando-se em ambas direções com uma velocidade determinada, impôs outras restrições tão fortes a ponto de quase proibirem o uso de seus próprios resultados. EULER, negando as restrições, exibiu soluções explícitas para todos os casos de interesse: cordas distendidas segundo uma forma arbitrárias, a propagação e reflexão de pulsos, etc. Muitas dessas soluções possuíam derivadas descontínuas, e algumas eram elas mesmas descontínuas. Ao exibir descontinuidades que se propagam, EULER derrubou a "Lei da Continuidade" na forma estrita enunciada

por LEIBNIZ e sustentada por D'ALEMBERT. EULER não propôs substituta para a mesma, porém seu exemplo no tratamento da corda vibrante tem sido seguido desde então em toda a física matemática, pois até hoje são sempre buscadas soluções suaves no sentido de classe de derivabilidade, e a continuidade é abandonada em um problema particular apenas quando funções suaves fracassam em resolvê-lo.

Uma grande controvérsia acerca da corda vibrante surgiu entre D'ALEMBERT, EULER e DANIEL BERNOULLI, porém referia-se em grande parte a análise em lugar da mecânica. EULER obteve também a equação que governa as pequenas oscilações de membranas tensionadas e a resolveu para tambores circulares e retangulares.

DANIEL BERNOULLI havia usado artifícios especiais de modo a obter uma relação entre a velocidade da água em um tubo e a pressão que ela exerce sobre a parede desse mesmo tubo.

JEAN BERNOULLI mostrou que os resultados de seu filho podiam ser obtidos de forma mais simples e mais geral pela utilização direta dos "princípios ordinários" da mecânica, isto é, o princípio do momentum linear. De modo a fazê-lo teve de introduzir o conceito de pressão interna, a pressão exercida por qualquer parte do fluido sobre sua parte vizinha, e considerar o efeito da diferença das pressões sobre as duas faces de uma fatia estreita de fluido. Talvez aqui tivesse sido influenciado por um estudo anterior incompleto da corda vibrante feito por BROOK TAYLOR (1685-1731). Certamente fez uso de idéias e métodos que ele e seu irmão mais velho haviam utilizado em seu trabalho sobre a estática das linhas flexíveis por volta de 1690.

EULER viu de imediato que esta era a maneira de unificar muito da teoria mecânica existente. Foi levado a propor o que chamou de um novo princípio da mecânica, ou seja, o de que a aceleração de cada parte infinitesimal de qualquer corpo é igual a força resultante por unidade de massa atuando sobre ela. Este é o princípio geral do balanço do momentum linear, uma ampla extensão da Segunda Lei de NEWTON. Com base neste princípio EULER foi capaz de deduzir imediatamente as equações diferenciais

do movimento de um corpo rígido. Demonstrou então que cada um tal corpo possui um eixo de rotação livre; posteriormente JOHANN ANDREAS v. SEGNER (1704-1777) demonstrou que todo corpo possui pelo menos três eixos desse tipo mutuamente ortogonais. EULER foi levado a introduzir o tensor de inércia e assim separar a inércia rotacional da inércia translacional e distinguir ambas do conceito de peso. Mostrou que a Segunda Lei de NEWTON deve se referir estritamente ao centro de massa, que não é necessariamente o centro de gravidade.

EULER determinou vários movimentos especiais de um corpo em rotação. Por outra aplicação de seu princípio do momentum linear EULER obteve equações diferenciais para a determinação do movimento de fluidos ideais. Anteriormente, com base em princípios menos completos, havia estendido e aplicado a hidráulica dos BERNOULLI. Por exemplo introduzindo o que foi posteriormente chamado de "força de CORIOLIS" de terminou as pressões no interior de uma turbina girante e estabeleceu critérios de cavitação. Em um ensaio ainda mais antigo sobre balística havia mostrado que um corpo submerso em um fluido ideal num escoamento permanente uniforme não sofreria resistência, um fato hoje conhecido como "paradoxo de D'ALEMBERT." EULER também considerou a propagação do som no ar. Embebeu a teoria de DANIEL BERNOULLI, dos modos e frequências de tubos de órgão, no contexto da teoria geral dos pequenos movimentos de fluidos compressíveis. Aplicando suas equações gerais foi capaz de determinar a frequência dos agudos de uma corneta cônica. Obteve também as equações diferenciais parciais, hoje chamadas de "equações da onda", que governam a propagação de ondas cilíndricas e esféricas e, finalmente, ondas de qualquer forma, determinando algumas soluções particulares delas. Tentou muitas vezes corrigir o valor de NEWTON para a velocidade do som porém apenas obteve sucesso em mostrar que o engano não se devia no caso a erros matemáticos, a princípios mecânicos inexatos, a efeitos de grande amplitude ou ao fato de NEWTON haver considerado apenas ondas planas. EULER veio a perceber que havia se enganado em asseverar

que o princípio do momentum linear era a única lei fundamental da mecânica. Desde seus primeiros anos ele havia estudado a teoria de JACQUES BERNOULLI das cintas elásticas fletidas. Havia tido sucesso em classificar e determinar explicitamente todas as formas que uma cinta reta em estado natural pode assumir se carregada apenas em suas extremidades. Um produto desta pesquisa foi a "fórmula de EULER da flambagem", que fornece a carga longitudinal mínima suficiente para fazer uma coluna fletir. Estendendo o trabalho de DANIEL BERNOULLI, EULER havia determinado todos os modos e frequências próprias de barras retas sob pequenas oscilações transversais sujeitas a várias condições nas extremidades. Essa massa de excelente teoria repousa em parte sobre uma hipótese especial que não é consequência de qualquer lei geral da mecânica e em parte sobre o balanço de momentos, não o balanço de forças, de modo que o princípio do momentum linear não pode ser diretamente aplicado. Como puderam essas equações do movimento de barras elásticas ser obtidas?

Dois elementos estavam faltando. O primeiro desses era um conceito geral apropriado da força que uma parte de uma barra exerce sobre outra. A segunda era a extensão do princípio do balanço estático de torque de modo a incluir os efeitos do movimento. Para obter o segundo, EULER tinha o recurso do tratamento do centro de oscilação por JACQUES BERNOULLI. Dessa maneira chegou, posteriormente em sua vida, ao segundo dos dois princípios fundamentais que servem como fundamento de toda a mecânica: o princípio do balanço do momentum rotacional. EULER expressou os dois princípios como relações integrais: A taxa de variação temporal do momentum linear de um corpo é igual a força total que age sobre ele, e a taxa de variação temporal do momentum rotacional de um corpo é igual ao torque total que atua sobre o mesmo. Estas leis vem hoje sendo chamadas de "Leis de EULER para o Movimento". Em contraste com as Leis de NEWTON, são não ambíguas, explícitas e genéricas.

O primeiro elemento que faltava havia sido visto por ANTOINE PARENT (1666-1716), porém seu

trabalho não havia atraído atenção. Este era de que, no interior de uma viga carregada deviam existir forças transversas bem como longitudinais. Uma força cuja direção é paralela à superfície sobre a qual atua veio a ser chamada posteriormente de "força cizalhante". EULER, representando a viga por uma linha deformável, substituiu a ação de uma de suas partes sobre a sua vizinha por uma força atuando na junção. As componentes dessa tensão resultante, a longitudinal sendo a tração ou compressão e a transversa a força cizalhante, são as que entram no princípio do momentum linear; suplementando-as por acelerações reversas dando origem assim às equações do movimento. Desta maneira EULER finalmente obteve sucesso em separar os princípios genéricos da mecânica das relações constitutivas que definem corpos ou materiais particulares. O programa de JACQUES BERNOULLI foi assim alcançado, embora apenas para corpos planos uni-dimensionais. JACQUES BERNOULLI havia determinado as variáveis com as quais formular uma relação constitutiva para uma barra elástica, porém não havia aplicado sua idéia. Nos seus trabalhos, realmente iniciais, EULER havia tido sucesso em deduzir a lei da flexão de JACQUES BERNOULLI ao admitir que a barra era composta de fibras distendidas segundo a lei da extensão de HOOKE. De modo a fazê-lo, havia tido que integrar os momentos das tensões ao longo da seção transversal de uma viga, e a integração requer uma relação tensão-deformação independente do tamanho do elemento considerado. Se a relação é linear, como assumida por EULER, a constante de proporcionalidade é o módulo de elasticidade. EULER havia então sido forçado a introduzir este descritor material, que o foclore atribue a YOUNG. Em seu trabalho final em elasticidade EULER chegou a ver a importância central deste módulo, assim o definiu clara e expressamente fornecendo ainda estimativas numéricas dele para materiais comuns.

EULER merece ser considerado como o perfeito teórico. Dominou todas as teorias existentes, resolveu com finalidade destacados problemas centrais e encontrou novas aplicações. Apri-

morou, simplificou, consolidou e uniu o que hoje é conhecido; forjou novos conceitos e novas definições de modo a tornar frutíferos os princípios gerais que havia induzido pela eliminação de hipóteses especializantes. Em conteúdo seus artigos variam de coleções de regras simples para engenheiros, com tabelas para uso cego por eles, até a projeção e mesmo o projeto de máquinas e a sistemática exploração de idéias que mencionou como sendo em grande parte devida a outros, até a apresentação de princípios gerais puros e abstratos com pouca possibilidade de serem entendidos por quaisquer de seus contemporâneos. Não se envergonhava de publicar um artigo no qual a matemática não ultrapassava a aritmética elementar se os resultados fossem belos ou promettessem ser úteis; no outro extremo, criou novas ferramentas matemáticas e mesmo disciplinas completas da matemática de modo a resolver problemas de física, e não esquivava-se de escrever artigos nos quais tratava problemas de mecânica pelo uso da análise que poderia ser então compreendida por no máximo um punhado de homens. Escrevia com perfeita sinceridade; foi o primeiro autor científico a citar a obra de outros em reconhecimento a seus méritos em lugar de apontar erros e deficiências; quando podia avançar apenas parcialmente em um problema revelava seus resultados imperfeitos na esperança que outros pudessem usá-los; e em pelo menos um caso publicou um artigo que sabia ser parcialmente errôneo e então fez publicar nas páginas imediatamente subsequentes uma explicação de aonde se encontrava o erro, seguido por sua correção através do ajustamento das partes que permaneciam válidas em seu trabalho precedente. Finalmente, deixou atrás de si sugestões para novos conceitos e começos de novas soluções que não viveu para completar. Em adição à sua influência indireta através da tradição da mecânica, os artigos e livros de EULER têm continuado a inspirar pesquisas ocasionais sobre mecânica até os dias de hoje.

Se fazemos um levantamento dos escritos de EULER, verificamos neles todos os elementos necessários à construção de um sistema geral da mecânica, incluindo todos os tipos de ma-

terial e todas as variedades de corpos, porém fazê-lo, foi deixado para que seus sucessores o conseguissem.

## 7. Dominação por Formalismo Matemático

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

LAGRANGE fez seu nome em mecânica através da análise das vibrações de uma corda tensionada carregada por muitas massas. Determinou o movimento geral e então, por passagem ao limite conforme as massas tornam-se mais numerosas e sua separação se aproxime de zero, disse haver estabelecido a solução de EULER em funções arbitrárias para o movimento de uma corda contínua. Assim seu programa era afim ao de HUYGENS. Sua análise da corda discreta repousava grandemente em trabalho anterior de EULER, que entretanto não menciona; como D'ALEMBERT assinalou de imediato, a passagem ao limite utilizada por LAGRANGE é irremediavelmente errônea. Muito do restante da obra de LAGRANGE em mecânica apresenta simples extensões ou formas alternativas dos resultados de EULER. Disso, o que é original, grande parte é errônea. Parece ter sido despendido muito pouco estudo crítico por historiadores sobre isso. Uma excessão são as famosas "equações Lagrangeanas" que convertem as equações gerais de EULER para sistemas discretos em coordenadas cartesianas em uma expressão invariante, válida para todas as descrições do sistema. Outra excessão é a formulação geral e análise por LAGRANGE do princípio da mínima ação, que havia sido proposto de maneira imprecisa por PIERRE-LOUIS-MOREAU DE MAUPERTUIS (1698-1759); EULER havia corrigido os erros de MAUPERTUIS, porém somente para um único corpo. Essas duas realizações são suficientes para justificar o grande nome de LAGRANGE.

Em 1788 LAGRANGE publicou seu celebrado tratado, Méchanique Analytique, no qual clamava reduzir toda a mecânica a umas poucas fórmulas algébricas. Sua estática é baseada no princípio do trabalho virtual. Embora este princípio possa ser traçado desde a antiguidade através do trabalho de JORDANUS, e embora te-



nha sido revisto e estendido por JEAN BERNOULLI, LAGRANGE foi o primeiro a formulá-lo em generalidade. A dinâmica de LAGRANGE repousa neste mesmo princípio, estendido pela adição de acelerações reversas de acordo com a idéia de JACQUES BERNOULLI. Ao reclamar de modo justo este princípio para si, LAGRANGE usou expressões tão diplomáticas que o mesmo veio em lugar disso a ser denominado em honra de D'ALEMBERT. O livro de LAGRANGE é uma monografia sobre como deduzir equações diferenciais de equilíbrio e movimento por meio de seu método. Distintamente dos Principia de NEWTON, raramente contém quaisquer exemplos, aplicações, interpretações em contextos físicos ou novos resultados. Omite todos os problemas que não sejam facilmente abordáveis pelos métodos de LAGRANGE. Nos primórdios do século dezanove foi lido como a bíblia da mecânica, e seu uso do potencial escalar inspirou muitos bons trabalhos por aqueles que o estudaram. Seu efeito sobre concepções subsequentes da história da mecânica foi grandemente in feliz, primeiro porque se concentrava em uma álgebra fácil, deixava de mencionar o trabalho mais profundo feito no século dezoito, e em segundo lugar porque LAGRANGE incluiu resumos históricos que são tão caprichosamente cheios de lacunas a ponto de na verdade mentirem embora sem de fato o fazer. A influência da história de LAGRANGE pode ser facilmente traçada pelas repetições não críticas de seus erros por escritores posteriores, algumas das quais continuam a aparecer em catálogos hoje publicados por comerciantes de livros antigos.

#### Experimentalistas do Final do Século Dezoito

Os conceitos desenvolvidos pelos matemáticos do século dezoito eram insuficientes para construir teorias destinadas a explicar dois fenômenos centralmente importantes, embora especiais, da elasticidade: a resposta de vigas a torsão e as oscilações de placas.

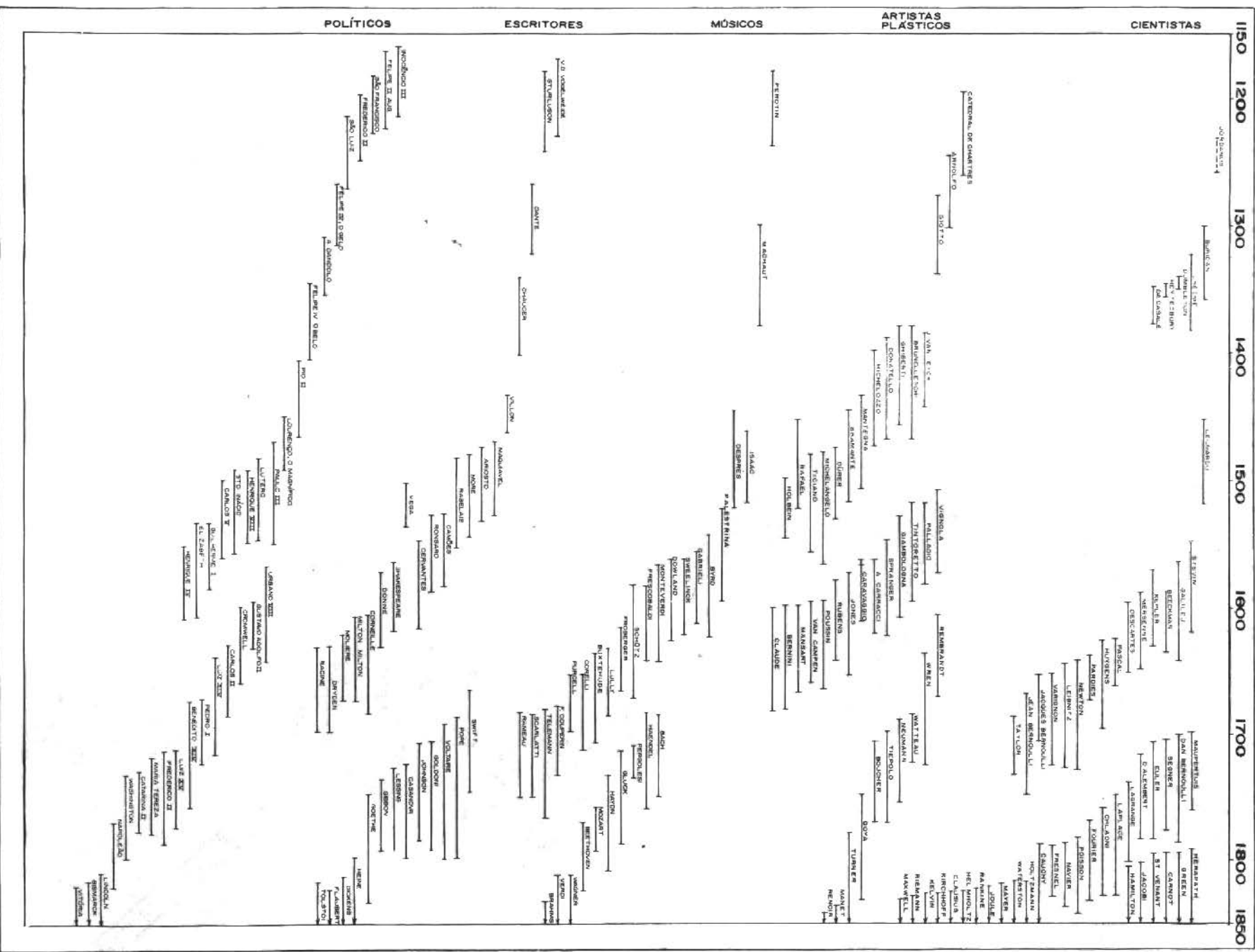
Ao reconsiderar o equilíbrio de uma viga engastada CHARLES AUGUSTIN COULOMB (1736-1806) reconheceu a importância de forças cizalhantes, como PARENT o havia feito. COULOMB desenvolveu a idéia mais além, pois considerou

a rutura de um cais de alvenaria como devido ao deslizamento de uma parte sobre a outra. Viu que planos diferentes passando por um mesmo ponto sofrem tensões distintas e mostrou que a tensão cizalhante é máxima em planos inclinados de  $45^\circ$  com a direção da carga compressiva. Estudando a torsão por meio de experimentos, encontrou que o giro era proporcional ao torque. Para explicar este fato a partir de uma teoria geral e calcular a constante de proporcionalidade correspondente a um dado formato da seção transversal, permaneceu a partir de então como um desafio aos teóricos. ERNST FLORENS FRIEDRICH CHLADNI (1756-1827) determinou experimentalmente as curvas nodais e as frequências próprias correspondentes para placas circulares e quadradas. Explicar isso por teoria permaneceu um problema em aberto desde então por meio século ou mais. Como o próprio CHLADNI observou, seu plano repousava sobre um completo conhecimento da teoria dos sistemas simples vibrantes inventada por DANIEL BERNOULLI e EULER. O trabalho de CHLADNI provê um exemplo raro do uso de uma boa teoria para casos simples de modo a guiar experimentos na exploração de fenômenos que estavam além do domínio dos princípios teóricos como então conhecidos.

Nota: À continuar como "História de Mecânica Clássica, Parte II, os Séculos XIX e XX".

GLP (LCC/CNPq e IM/UFRJ)

Junho, 1982



# IMPORTANTE LANÇAMENTO EM ENGENHARIA

## COLEÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

EDITORA CAMPUS / ELETROBRÁS



**Volume 2**  
Proteção de Sistemas  
Aéreos de Distribuição



**Volume 1**  
Planejamento de  
Sistemas de Distribuição



**Volume 3**  
Desempenho de  
Sistemas de Distribuição



**Volume 4**  
Manutenção e Operação de Sistemas  
de Distribuição

Resultado da soma de vários manuais técnicos, estes livros interessam, de maneiras global, a profissionais e a estudantes, vindo cobrir uma total inexistência de livros sobre o assunto.

À VENDA NAS BOAS LIVRARIAS OU NA



EDITORA CAMPUS LTDA.  
Rua Japeri 35  
20261 Rio de Janeiro RJ

# DISTRIBUIÇÃO DE RADIAÇÃO NA REGIÃO FOCAL DE CONCENTRADORES PARABÓLICOS COMPOSTOS

CARLOS LINEU DE FARIA E ALVES

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, ITA, SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, SP

ISAIAS C. MACEDO

PROF. TITULAR, DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, FEC, UNICAMP, SP

## SUMÁRIO

São apresentados os resultados obtidos no estudo da distribuição de radiação direta e total (não isotrópica) na região focal de concentradores parabólicos compostos. Neste estudo foi também considerada uma aproximação para o comportamento não especular das superfícies refletoras, sua refletividade e a influência do deslocamento vertical do absorvedor na distribuição da radiação.

## SUMMARY

Distribution for direct and total (non-isotropic) radiation on the focal plane of compound parabolic concentrators are showed, considering vertical displacement of the absorber plane, the reflectivity and non-specularity of side walls.

## SIMBOLOGIA

$\Theta_m$	: metade do ângulo de aceitação
$C$	: fator de concentração; relação entre área de abertura e área do absorvedor
$l$	: altura do concentrador
$\Theta$	: ângulo de incidência medido a partir da normal à abertura do concentrador
$\bar{l}$	: altura do concentrador truncado
$\tau_r$	: fator de truncamento; relação entre $\bar{l}$ e $l$
$a_2$	: altura de absorvedor em relação ao plano focal
$\rho$	: refletividade das paredes refletoras
$\sigma$	: desvio padrão da distribuição normal associada ao comportamento não especular
$d_1$	: largura da abertura
$d_2$	: largura do absorvedor

## INTRODUÇÃO

Os trabalhos de Winston [1] e [2], mostraram a possibilidade de concentrar a radiação solar com um fator de aproximadamente dez sem rastreamento diurno usando um novo princípio - o do coletor de luz ideal cilíndrico, mais comumente chamado de concentrador parabólico composto (CPC).

Para fatores de concentração de aproximadamente três não é necessário qualquer ajuste, mesmo sazonal, e a aceitação de luz difusa é muito maior do que a dos coletores focais. O concentrador é uma parede refletora não geradora de imagem que concentra um feixe de luz no valor máximo permitido pela conservação do espaço de fase [1]. Se a metade do ângulo máximo do feixe divergente é  $\Theta_m$  este valor de concentração máxima permitível (relação entre as áreas da abertura e do absorvedor dos concentrados)  $C$ , será segundo Winston [1]:

$$C = 1/\sin^2 \Theta_m \quad (1)$$



A geometria básica [4] tem a curva do cone como uma parábola com foco no lado oposto do absorvedor e eixo inclinado de um ângulo  $\theta_m$  com respeito ao eixo óptico. O comprimento do cone ( $l$ ) é o suficiente para transmitir raios diretos com ângulos  $\theta_m$  [1].

Toda a radiação com  $\theta$  maior que  $\theta_m$  é rejeitada; os raios chegando ao plano de abertura com  $\theta < \theta_m$  são aceitos e atingem o absorvedor.

Comparado com uma parábola simples, o CPC é muito profundo, exigindo maior área refletora para uma dada abertura. Na prática, grande parte do topo do concentrador pode ser cortada (truncada) com pequena perda na aceitação porque as superfícies cortadas são quase paralelas. O traçado de raio no CPC é facilitado com o uso de dois sistemas de coordenadas, figura 1. A equação da parábola do ramo direito dos concentrador parabólico composto é [6].

$$y = \frac{x^2}{2 d_1 (1 + \sin \theta_m)} \quad (2)$$

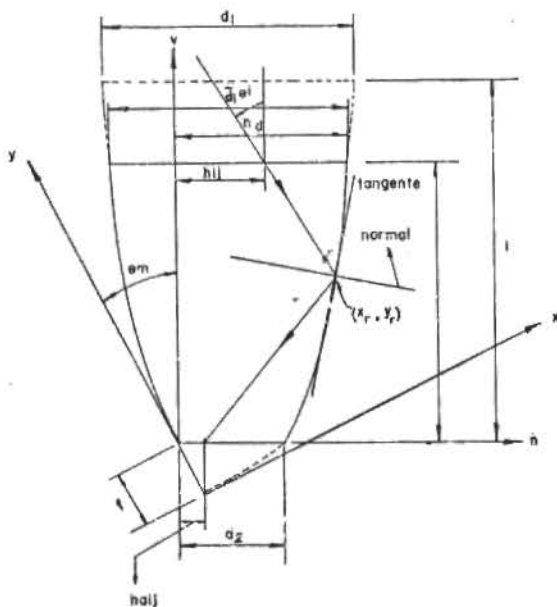


Figura 1. Raios incidente no ponto  $h_{ij}$  com ângulo de incidência  $\theta_i$  que reflete em  $(x_r, y_r)$  e atinge o absorvedor em  $h_{a_{ij}}$ .

Exemplos de concentradores parabólicos compostos com outros tipos de absorvedores são dados por Winstons, Hinterberger, Goodman e Rabl em [7] e [6]. Dentre as aplicações possíveis uma possibilidade é o

seu uso para baixas concentrações, menores que dez, em sistemas fotovoltaicos. Neste caso é essencial ter-se uma iluminação razoavelmente uniforme no absorvedor.

Trabalhos realizados por Alves e Macedo [5], [3] apresentam a técnica utilizada (traçado de raios) para a obtenção da distribuição de radiação na região focal de CPC como função de vários parâmetros: fator de concentração ( $C$ ), fator de truncamento ( $t_r$ ), ângulo de incidência, altura do absorvedor ( $a_2$ ), não especularidade e refletividade ( $\rho$ ) das superfícies refletoras.

As listagens dos programas utilizados podem ser encontrados na referência (3).

## RESULTADOS

a. Resultados da Distribuição de Radiação Direta como Função dos Parâmetros Geométricos ( $c, d_2, t_r$ ) do CPC e do ângulo de incidência ( $\theta$ ). Observando-se o gráfico 1, tem-se a influência do truncamento para o concentrador indicado para o ângulo de incidência variando desde  $\theta_m$  até zero. Os resultados para ângulos de incidência negativos (à direita da normal) são simétricos aos apresentados.

Nota-se que o truncamento não melhora necessariamente a distribuição no absorvedor, pois pode-se ver que sua influência depende do ângulo de incidência dos raios. Para um projeto em que se deseja melhorar a distribuição utilizando-se truncamento, deve-se plotar vários resultados, onde se combina fatores de truncamento e ângulo de incidência e observar que, quando bem próxima ao ângulo de incidência igual a  $\theta_m$ , a distribuição melhora com o aumento do truncamento e para incidência normal ocorre o contrário. Como os picos mais ocorrem justamente para  $\theta = \theta_m$ , pode haver interesse em etenuá-los com o truncamento; de qualquer forma, dificilmente utiliza-se um CPC sem truncamento.

Conforme o gráfico 2 tem-se a influência do fator de concentração de coletores truncados igualmente para vários ângulos de incidência.

Pode-se notar que, para qualquer ângulo de incidência, a distribuição de radiação torna-se mais uniforme à medida em que se aumenta o fator de concentração. Portanto, quando se deseja uniformizar a distribuição, variando o fator de concentração, deve-se optar pelo maior fator de concentração permitido no projeto. Nota-se que sempre é possível jogar com uma maior concentração final com maior homogeneidade.

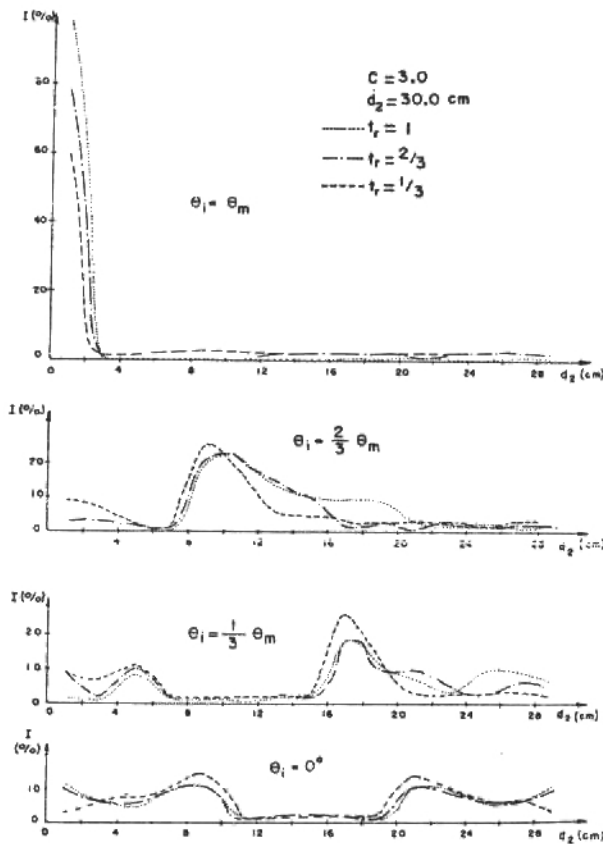


Gráfico 1. Influência do truncamento na distribuição de radiação no absorvedor do CPC para vários ângulos de incidência.

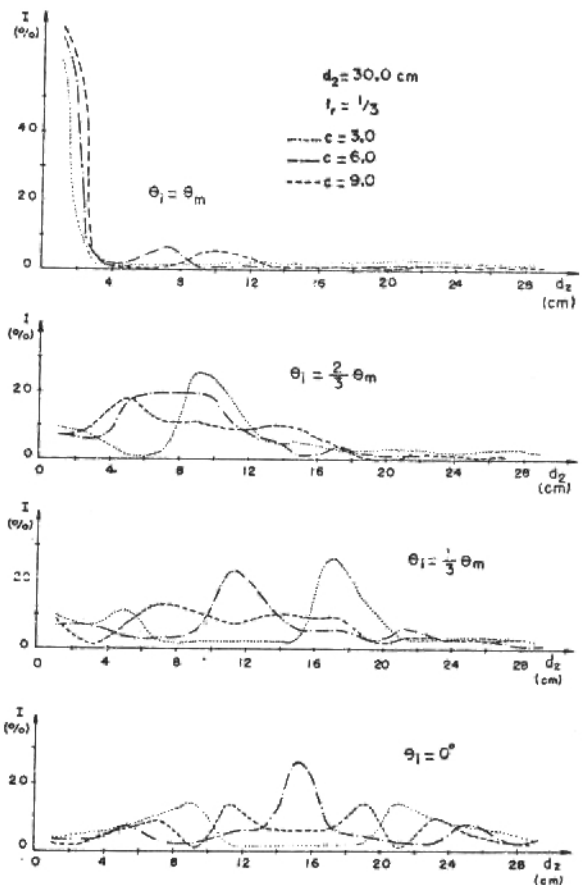


Gráfico 2. Influência no fator de concentração na distribuição de radiação no absorvedor de um CPC para vários ângulos de incidência.

**b. Resultados da Distribuição de Radiação Total**

Não-Isotrópica.

Para esta análise, tomou-se um exemplo de distribuição não isotrópica, onde foi dado peso 1 para a radiação com ângulo de incidência normal, peso 0,75 para radiações com ângulos de incidência iguais a  $\theta_m/3$  e  $-\theta_m/3$ , peso 0,5 para radiações com ângulos de incidência iguais a  $2\theta_m/3$  e  $-2\theta_m/3$  e peso 0,25 para radiações com ângulos de incidência  $\theta_m$  e  $-\theta_m$ .

Segundo o gráfico 3 tem-se a influência do fator de truncamento e do fator de concentração na distribuição de uma determinada radiação total não-isotrópica.

Observa-se que para o fator de truncamento igual a  $2/3$ , os picos das distribuições são em média menores que os respectivos picos para  $tr = 1$  e  $tr = 1/3$ . Isto mostra que existe um fator de concentração ideal quando se deseja uma distribuição mais uniforme, caindo com o truncamento.

Ve-se no Gráfico 3., que quanto maior o fator de

concentração, ocorre o mesmo que na distribuição de radiação direta, isto é, melhora-se a distribuição da radiação no absorvedor. É claro que conclusões definitivas sobre cada CPC poderão ser tiradas com mais segurança usando o mesmo modelo, mas com maior número de ângulos de incidência.

**c. Resultados da Distribuição de Radiação Direta com a Altura do Absorvedor Variável.**

Tem-se pelo gráfico 4 a influência do deslocamento vertical do absorvedor na distribuição de radiação para vários ângulos de incidência.

Observa-se que pequenos deslocamentos do absorvedor tendem a melhorar a distribuição de radiação direta para ângulos de incidência diferentes de zero. tem-se, também, que a influência do tamanho deste deslocamento varia conforme o ângulo de incidência da radiação

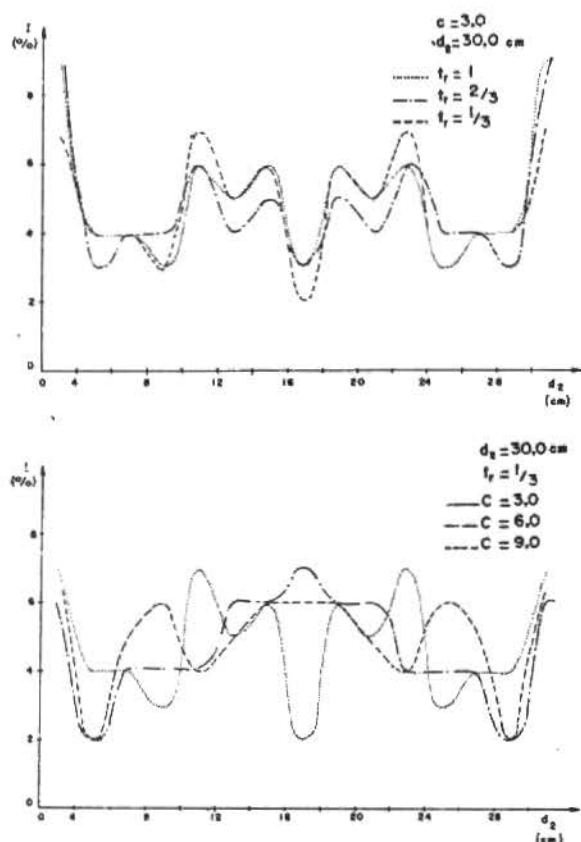


Gráfico 3. Distribuição de radiação global com determinada não isotropicidade, para vários truncamentos e para vários fatores de concentração.

ção direta.

d. Resultados da Distribuição de Radiação Direta com Superfície Refletora não-Especular e Refletividade menor que um. Com a ajuda do Gráfico

5 temos a influência da não-especularidade para refletividade igual a um, para vários ângulos de incidência.

Têm-se que para todo ângulo de incidência de radiação direta, quanto maior a não-especularidade da superfície refletora, melhor é a distribuição, isto é, os picos de máximos e os picos de mínimo são, em média menores. Portanto, para uma melhor uniformidade da radiação no absorvedor deve-se optar por uma superfície difusa, isto é, que se distancie do comportamento especular.

Têm-se no gráfico 6, a influência da refletividade

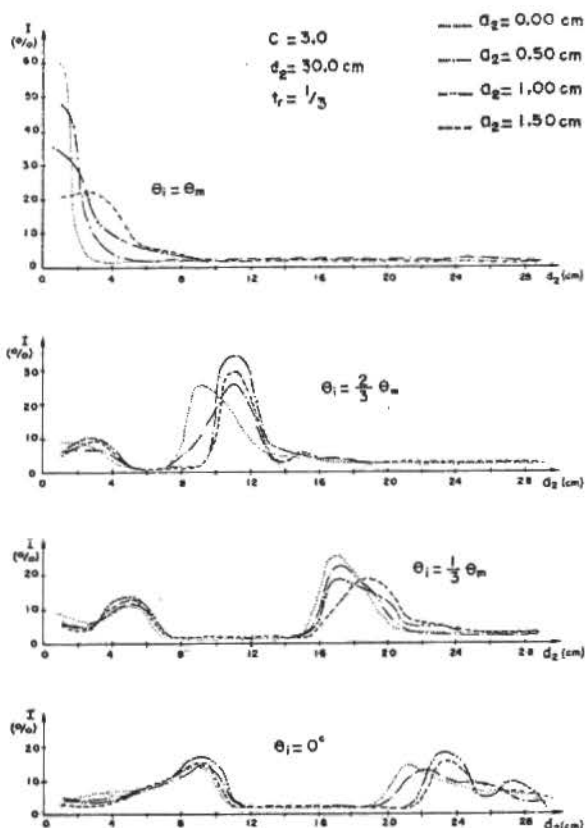


Gráfico 4. Influência do deslocamento do absorvedor na distribuição de radiação direta.

de para uma não-especularidade e para vários ângulos de incidência da radiação direta.

Observa-se que com a refletividade menor que um a distribuição de radiação no absorvedor não se altera apreciavelmente em termos de uniformização. O que se pode notar é uma menor quantidade de energia chegando no absorvedor devido à capacidade de absorção das superfícies refletoras. Portanto, a influência da refletividade na distribuição é conseguir uniformizá-la, diminuindo seus picos, mas à custa de uma perda de energia que irá aquecer as superfícies refletoras.

CONCLUSÕES

Na elaboração de projetos de concentradores parabólicos compostos, onde se deseja uma não uniformidade limitada na iluminação do absorvedor, deve-se atentar para as influências dos parâmetros construtivos do concentrador (fator de concentração, fator de truncamento,

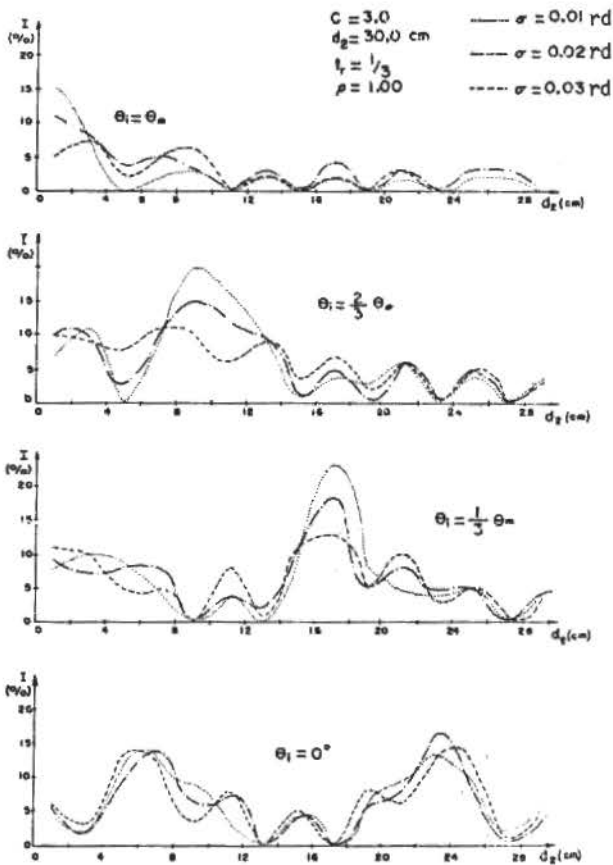


Gráfico 5. Influência da não especularidade para um dado  $\rho$ , CPC para vários ângulos de incidência.

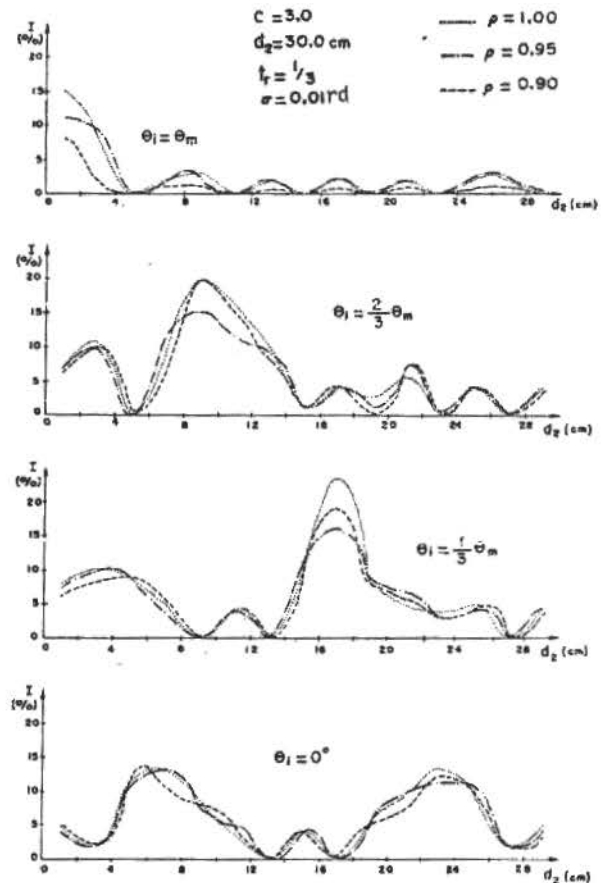


Gráfico 6. Influência da refletividade para uma não especularidade para um dado CPC para vários ângulos de incidência.

posição do absorvedor) e também para as influências da não-especularidade e da refletividade das superfícies refletoras. Deve-se também conhecer a distribuição da radiação total, caso seja necessário saber a influência desta não isotropicidade na distribuição.

Com este trabalho é possível realizar todas essas análises e com o modelo que simula a não-especularidade e que leva em conta a refletividade das superfícies refletoras, tem-se resultados significativos, podendo um projeto ser feito com base nestes resultados.

Devido ao fato da aproximação da não-especularidade de ser feita com uma geração de números aleatórios, pertencentes a uma distribuição normal, com desvio-padrão arbitrado, conforme a não-especularidade, é conveniente obter-se resultados com vários desvios-padrões, já que não se sabe qual deve ser utilizado para cada superfície refletora. Há procedimentos experimentais para avaliar este desvio.

Para estudos de outras influências na distribuição de radiação no absorvedor destes concentradores, além de problemas onde o método de solução seja o rastreamento de raios, tal como a obtenção de ângulos de incidência de radiação no absorvedor, pode-se utilizar como base os programas listados na referência [3].

Concluiu-se na referência [3] pela validade dos métodos analíticos utilizados na realização de projetos de concentradores parabólicos compostos, com interesse de conhecer ou prever a distribuição de radiação no absorvedor e como alterar este projeto para melhorar esta distribuição. Na forma atual, os programas são suficientes para prever a forma das curvas e estão sendo utilizados no projeto de sistemas com concentração 9, para uso com fotocélulas.

Adaptações podem ser feitas para absorvedores não-planos, especialmente os tubulares, de interesse em conversão térmica.



## REFERÊNCIAS

- [1] : Winston, R. - Light Collection Within the Frame of Geometrical Optics - Journal of the Optical Society of America, Vol. 60, Num, 2, Feb.1970.
- [2] : Winston, R. - Principles of Solar Concentrators of a Novel Design, Solar Energy, Vol. 16, 1974.
- [3] : Alves, C.L.F. - Distribuição de Intensidades de Radiação Focal de Coletores de Parábola Composta - Tese de Mestrado, Div. Eng. Mec.; ITA, 1979.
- [4] : Hinterberger, H. and Winston, R. - Efficient Light for - Threshold Cerenkov Counters - Rev. Scient. Instrum., Vol. 37, 1966.
- [5] : Macedo, I.C. e Alves, C.L.F. - Estudos da Distribuição de Intensidades de Radiação na Região Focal de Coletores de Parábola Composta - Anais do V COBEM 1979 - Campinas - Br.
- [6] : Rabl, A. - Optical and Thermal Properties of Compound Parabolic Concentrators - Solar Energy, Vol. 18, 1976.
- [7] : Winston, R. and Hinterberger, H. - Principles of Cylindrical Concentrators for Solar Energy - Solar Energy, Vol. 17, 1975.

# NUEVOS RESULTADOS EN EL ANALISIS LIMITE VIA CREEP SECUNDARIO MODIFICADO

RAÚL A. FEIJÓO

EDGARDO TAROCO

LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – CNPq

NESTOR ZOUAIN

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA, PUC/RJ

## RESUMEN

*Haciendo uso de ecuaciones constitutivas para el análisis de creep secundario, se presentan en este trabajo dos métodos para la determinación de una cota inferior y superior de las cargas de colapso correspondientes a una estructura de material rígido-plástico-ideal. Algunos ejemplos son analizados a efecto de mostrar la aplicabilidad de la metodología propuesta.*

## 1. INTRODUCCION

En trabajo anterior [1] los autores proponen para la determinación de las cargas de colapso, de una estructura formada por un material rígido-plástico-ideal, un método denominado de Creep Secundario Modificado.

Dada la ecuación constitutiva del material plástico original, en este método se establece la ecuación constitutiva a ella asociada dentro de la teoría de creep secundario correspondiente a la generalización de la ley de Norton para estados múltiples de tensiones. Esta nueva ecuación constitutiva tiene la propiedad de que en el límite para  $n \rightarrow \infty$  se convierte en la propia ecuación constitutiva para el material rígido-plástico-ideal original.

En este trabajo serán presentados dos métodos para la determinación de una cota inferior y superior de las cargas de colapso, similares a los Métodos Estático y Cinemático del Análisis Límite.

Por último se muestran algunos resultados numéricos donde se pone en evidencia la aplicabilidad del método propuesto.

## 2. CARGAS LIMITES EN UN SOLIDO DE MATERIAL RIGIDO-PLASTICO-IDEAL

En esta sección se presenta, en forma resumida,

los Métodos Estático y Cinemático del Análisis Límite para la determinación de las cargas de colapso en cuerpos de material idealmente plásticos.

Un material rígido-plástico-ideal se caracteriza a través de:

Un criterio de plasticidad que define cuáles son los estados de tensiones  $T$  soportables o admisibles para el punto material  $x$  del cuerpo. Para cada punto este criterio define en el espacio vectorial de los tensores simétricos una región convexa  $G(x)$  que contiene  $T=0$ , representada matemáticamente por:

$$F(T) \leq 0; T_1, T_2 \text{ tales que } F(T_1) \leq 0 \text{ y}$$

$$F(T_2) \leq 0 + F[\theta T_2 + (1-\theta)T_1] \leq 0, \theta \in (0,1)$$

En el caso de metales en general la función  $F(\cdot)$  en  $T$  depende solamente de la parte desviadora de  $T$ .

Un criterio de fluencia. Este criterio establece que si  $T \in \partial G(x)$  (frontera de  $G(x)$ ) el cuerpo puede fluir plásticamente. Si se designa con  $D$  a la tasa de deformación (plástica) asociada a  $T \in G(x)$ , la misma satisface:

$$(T-T^*).D \geq 0 \quad \forall T^* \in G(x)$$

La expresi3n anterior es equivalente a exigir que D sea proporcional a la normal saliente al convexo G(x) en el punto T de  $\partial G(x)$  (supuesta la frontera G suficientemente regular). Observe que la expresi3n anterior define D en funci3n de T ( $D = \lambda F_T(T), \lambda \geq 0$  indeterminada).

De la forma en que el material pl3stico es caracterizado, se sigue que el mismo no podr3 soportar cargas de valor indefinidamente creciente manteniendo su configuraci3n r3gida indeformada. Habr3 cargas para el cual el cuerpo se comporta como r3gido, ser3n llamadas de *soportables* por el cuerpo, otras llamadas de *no soportables* ser3n tales que el cuerpo (o parte de  $\bar{\Omega}$ ) fluye pl3sticamente. En la "frontera" entre ambas regiones se tiene las llamadas *cargas de colapso*.

Para definir lo anterior de una manera mas formal se supone a seguir que el cuerpo est3 sometido solamente a la acci3n de cargas en el contorno  $\partial\Omega_f$  de  $\Omega$ ,  $\Omega$  es la regi3n ocupada por el cuerpo en su configuraci3n inicial y se introducen los siguientes conjuntos:

$$Est_T = \{T; \text{div } T = 0 \text{ en } \Omega, Tn = \bar{a} \text{ en } \partial\Omega_f\},$$

llamado conjunto de *campos de tensiones est3ticamente admisibles* y donde  $\bar{a}$  es un elemento del conjunto de las cargas de superficie.

$$Kin = \{D; \text{ existe un campo de velocidades } v \text{ tal que } D = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S \text{ y } v = 0 \text{ en } \partial\Omega_v \text{ parte de } \partial\Omega \text{ donde los desplazamientos est3n impedidos}\},$$

llamado conjunto de *campos de tasas de deformaci3n cinem3ticamente admisibles*.

Luego, dado  $\forall T \in Est_T$  y  $\forall D \in Kin$  resulta:

$$\int_{\Omega} T.D \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_f} \bar{a}.v \, d\Omega$$

donde  $\bar{a}$  es la carga que equilibra el estado T de tensiones y  $D = (\nabla v)^S$ .

Ahora bien, dado una carga arbitraria  $\bar{a}$  se dir3 que es soportada por el cuerpo si:

- . Existe al menos un  $T \in Est_T$  que la equilibra
- . T es tal que  $T(x) \in G(x) \forall x \in \Omega$

Si se introduce el conjunto:

$$H = \{T; T \in Est_T, T(x) \in G(x) \forall x \in \Omega\},$$

llamado *dé conjunto de campo de tensiones est3ticamente y pl3sticamente admisibles*. Se tiene que:

- . una carga  $\bar{a}$  es soportada por el cuerpo si  $\exists$  (existe)  $T \in H$  que la equilibra.
- . una carga  $\bar{a}$  es no soportada por el cuerpo si  $\nexists$  (no existe)  $T \in H$ .

Como es f3cil apreciar por ser G(x) convexo, H tambi3n resulta convexo.

Por otra parte por ser *lineal* la aplicaci3n que relaciona el estado  $T \in Est_T$  con la carga por ella equilibrada, esta aplicaci3n actuando sobre el conjunto convexo H define en el dominio de cargas una regi3n, tambi3n convexa, K:

$$K = \{\bar{a}; \exists T \in H \text{ tal que } T \text{ equilibra } \bar{a}\}$$

Los puntos interiores a K son las cargas soportables y los puntos en la frontera corresponden a las cargas de colapso [2,3].

Existen diferentes t3cnicas para determinar K una de ellas, conocidas como *M3todo Est3tico*, consiste en (Figura 1):

Dado el sistema de carga, caracterizado por  $\bar{a}$ , maximizar  $\lambda \geq 0$  tal que exista  $T \in H$  en equilibrio con  $\lambda \bar{a}$ .

Como puede apreciarse, el problema anterior corresponde a un problema de programaci3n matem3tica: maximizar una funci3n objetivo lineal ( $\lambda$ ) con restricciones generalmente no lineales.

Conocido los  $\max \lambda_r$  asociados a cada direcci3n  $\bar{a}_r$ , la envolvente convexa de estos m3ximos permite definir una regi3n  $K_i$  que aproxima K por el interior (Figura 1).

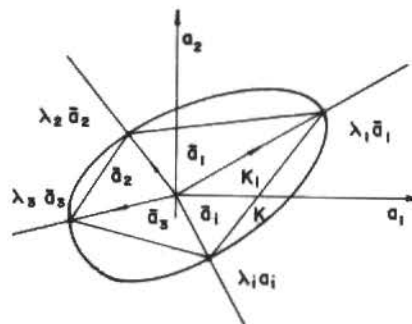
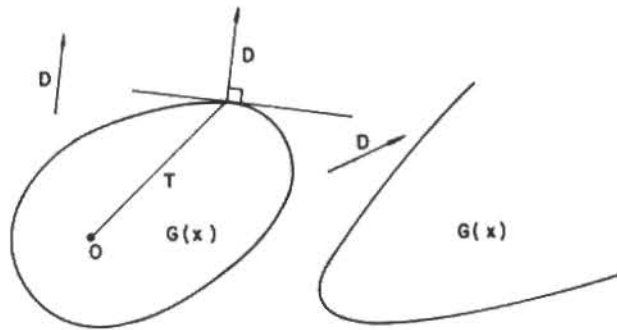


Figura 1

Para presentar el otro método, llamado de Método Cinemático, es conveniente introducir la función de disipación de energía por deformación plástica.

Esta función de disipación está definida en el dominio de las deformaciones por (Figura 2):

$$\pi(x, D) = \sup\{T \cdot D; T \in G(x)\}$$



- a)  $\pi(x, D) = T \cdot D$                       b)  $\pi(x, D) = +\infty$

Figura 2

obsérvese que esta ecuación define T en función de D y por tanto corresponde a la inversa de la ecuación constitutiva definida a través del criterio de fluencia. De la definición anterior se sigue también que:

- $\pi(x, D)$  es convexa ( $D = \theta D_1 + (1-\theta) D_2$ ,  $\pi(x, D) \leq \theta \pi(x, D_1) + (1-\theta) \pi(x, D_2)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ )
- $\pi(x, D)$  es homogénea positivamente de 1<sup>er</sup> grado en  $D$  ( $\pi(x, \alpha D) = \alpha \pi(x, D)$ ,  $\alpha \geq 0$ )

Desde el punto de vista práctico la definición anterior toma la forma:

- $\pi(x, D) = T \cdot D$  si  $\exists T \in \partial \Omega$ ,  $\|T\| < \infty$ , tal que D es colineal a la normal saliente a  $\partial G$  en T
- $\pi(x, D) = +\infty$  caso contrario
- $\pi(x, D) \geq 0$  ya que  $T=0 \in G(x)$

Por otro lado, de la propia definición se sigue que:

$$T \cdot D - \pi(x, D) \leq 0$$

define en el espacio de las tensiones un semi-espacio conteniendo  $G(x)$  (Figura 3). Luego el convexo de plasticidad  $G(x)$  podrá también ser definido como:

$$G(x) = \bigcap_{D \in \text{Kin}} \{T, T \cdot D - \pi(x, D) \leq 0\}$$

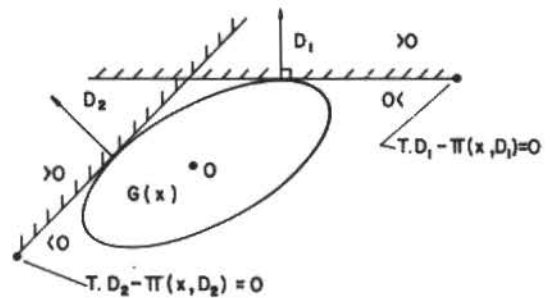


Figura 3

El Método Cinemático consiste en definir K de una manera similar a la utilizada para definir  $G(x)$ . Para ello, dado  $v \in \text{Kin}_v = \{v^*; v^* \text{ suficientemente regular, } v^* = 0 \text{ en } \partial \Omega_v\}$  defínase:

$$\Pi(v) = \sup \left\{ \int_{\partial \Omega_f} \bar{a} \cdot v \, d\Omega, \bar{a} \in K \right\}$$

que tiene propiedades idénticas a las de  $\pi(x, D)$ . Conocido  $\Pi(x)$ , el convexo K resulta definido a través de:

$$K = \bigcap_{v \in \text{Kin}_v} \left\{ \int_{\partial \Omega_f} \bar{a} \cdot v \, d\Omega - \Pi(x) \leq 0, \bar{a} \in \text{espacio de cargas} \right\}$$

Como puede apreciarse el problema radica en como definir  $\Pi(v)$  a partir de  $\pi(x, D)$ . Para ello, recordando el Principio de las Potencias Virtuales, se tiene:

$$\begin{aligned} \Pi(v) = & \sup \left\{ \int_{\Omega} T \cdot D \, d\Omega, T \in H \text{ equilibra } \bar{a} \text{ y don} \right. \\ & \text{de } D \in \text{Kin y estal que } D = (\nabla v)^S \left. \right\} \leq \\ & \leq \sup \left\{ \int_{\Omega} T \cdot D \, d\Omega, T \in G(x) \forall x \in \Omega, D \in \text{Kin} \right. \\ & \text{y } D = (\nabla v)^S \left. \right\} \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \sup(T \cdot D) \, d\Omega, T \in G(x) \forall x \in \Omega, D \in \text{Kin} \\ & \text{y } D = (\nabla v)^S = \int_{\Omega} \pi(x, D) \, d\Omega, D \in \text{Kin y } D = (\nabla v)^S \end{aligned}$$

Luego:

$$\Pi(v) \leq \inf \left\{ \int_{\Omega} \pi(x, D) \, d\Omega, D \in \text{Kin } D = (\nabla v)^S \right\}$$

y el convexo K resulta definido a través de (Figura 4):



$$K = \left\{ v \in \text{Kin}_v \mid \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot v \, d\Omega = \inf_{\substack{D \in \text{Kin} \\ D = (\nabla v)^S}} \int_{\Omega} \pi(x, D) \, d\Omega \leq 0 \right\}$$

$\bar{a} \in$  espacio de cargas)

En particular, caracterizada la carga a través de su dirección  $a^*$ , la carga de colapso  $\lambda_c a^*$ ,  $\lambda_c > 0$ , será tal que:

$$\lambda_c \leq \frac{\inf_{\substack{D \in \text{Kin} \\ D = (\nabla v)^S}} \int_{\Omega} \pi(x, D) \, d\Omega}{\int_{\partial\Omega_f} a^* \cdot v \, d\Omega}$$

y en virtud de que tanto el numerador como el denominador son homogéneos positivos con respecto a  $D$  y  $v$  respectivamente el problema anterior es equivalente a (Método Cinemático):

Dado el sistema de cargas caracterizado por la dirección  $a^*$  determinar  $\lambda^* = \inf \int_{\Omega} \pi(x, D) \, d\Omega$  con  $D \in \text{Kin}$  y tal que  $\int_{\partial\Omega_f} a^* \cdot v \, d\Omega = 1$  donde  $v \in \text{Kin}_v$  y  $D = (\nabla v)^S$ .

Conocidos los  $\lambda_r$  asociados a cada dirección  $a_r$ , la envolvente convexa (Figura 4) define una región  $K_e$  que aproxima  $K$  por el exterior.

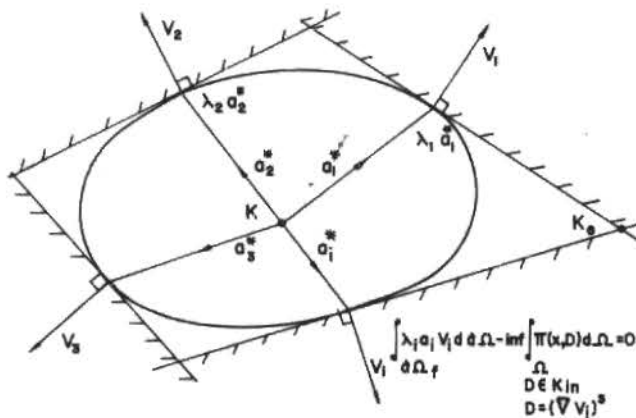


Figura 4

Como puede apreciarse, el problema anterior nuevamente corresponde a un problema de programación matemática: minimizar una función objetivo generalmente no lineal con restricciones lineales.

### 3. METODO CINEMATICO Y ESTATICO VIA CREEP SECUNDARIO

Según ya fue presentado, dado el material rígido-plástico-ideal se conoce el convexo de plasticidad  $G(x)$  y la función de disipación plástica  $\pi(x, D)$ . Para facilitar la presentación en esta sección se introduce la función calibre,  $C_{G(x)}(T)$ , asociada al convexo  $G(x)$ :

$$C_{G(x)}(T) = \inf\{\mu; \mu > 0 \mid T \in \mu G(x)\}$$

donde  $G(x)$  es la expansión (o contracción) isotrópica del convexo  $G(x)$ .

**Ejemplo.** Supóngase que  $G(x)$  está definida por  $f(T^D) - f_0 \leq 0$ , donde  $T^D$  es la parte desviadora de  $T$ . Luego:

$T \in \mu G(x)$  corresponde a decir  $f(T^D) - \mu f_0 \leq 0$  de donde  $\mu \geq f(T^D)/f_0$  y el mínimo será  $C_{G(x)}(T) = f(T^D)/f_0$ .

De la definición de la función calibre se sigue que:

si  $T \in \overset{\circ}{G}(x)$  (interior al convexo) se tiene  $C_{G(x)}(T) < 1$

si  $T \in \partial G(x)$  se tiene  $C_{G(x)}(T) = 1$

si  $T \notin G(x)$  se tiene  $C_{G(x)}(T) > 1$

$T/C_{G(x)}(T) \in \partial G(x)$

Considere ahora, un nuevo cuerpo constituido por un material ficticio cuya región, sistema de cargas y restricciones en los desplazamientos son iguales a las del cuerpo idealmente plástico original analizado anteriormente. La ecuación constitutiva de este nuevo material corresponde a la ley de Norton [4] y está dada por la función potencial:

$$\psi(T) = \frac{1}{n+1} (C_{G(x)}(T))^{n+1}$$

Desde el punto de vista práctico lo anterior equivale a decir, supuesto la función calibre regular, que:

$$D = \frac{\partial \psi(T)}{\partial T} = \psi_T(T) = (C_{G(x)}(T))^n \frac{\partial C_{G(x)}(T)}{\partial T}$$

Puede observarse también que:

$$\text{si } T \in G(x) \quad \psi(T) \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

$$\text{si } T \notin G(x) \quad \psi(T) \rightarrow +\infty \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

Conocida la función potencial en términos de T para todo n finito es posible calcular la función potencial inversa, esto es en función de D, haciendo uso de la transformada de Legendre [5,6]:

$$\Phi(D) = \sup\{T \cdot D - \psi(T)\}$$

De la definición anterior puede apreciarse que  $\Phi(D)$  en el límite para  $n \rightarrow \infty$  es idéntica a la función de disipación  $\pi(x, D)$  del material plástico original.

Puede demostrarse que [7]:

$$\Phi(D) = \frac{n}{n+1} (\pi(x, D))^{(n+1)/n}$$

Algunos ejemplos de la determinación de la ecuación constitutiva inversa fueron presentados por los autores en [8,9]. En la sección siguiente serán también presentados algunos ejemplos de aplicación.

Ahora bien, para este cuerpo de material ficticio el problema de valor de contorno correspondiente a cargas de superficie  $\bar{a}$  en  $\partial\Omega_f$  y de desplazamientos nulos en  $\partial\Omega_v$  ( $\partial\Omega_v \cup \partial\Omega_f = \Phi$ ) es equivalente a los siguientes problemas variacionales [8,9,10,11].

. Modelo en velocidades. Determinar  $\bar{v} \in \text{Kin}_v$  tal que haga que el funcional:

$$F(v) = \int_{\Omega} \Phi(D(v)) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot v \, d\Omega, \quad v \in \text{Kin}_v$$

alcance el valor mínimo. En lo que sigue la solución será caracterizada por:

$$P_n^*(\bar{a}) = \min_{v \in \text{Kin}_v} \left\{ \int_{\Omega} \Phi(D(v)) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot v \, d\Omega \right\}$$

. Modelo en tensiones. Determinar  $T \in \text{Est}_T$  tal que haga que el funcional:

$$J(T) = \int_{\Omega} \psi(T) d\Omega, \quad T \in \text{Est}_T$$

alcance el valor mínimo. La solución será caracterizada por:

$$P_n^*(\bar{a}) = \min_{T \in \text{Est}_T} \left\{ \int_{\Omega} \psi(T) d\Omega \right\}$$

Donde con el subíndice n se pone en evidencia que la solución depende también del

exponente n de la ecuación constitutiva. Sea  $T, \bar{v}, \bar{D} = \nabla(\bar{v})^S$  la solución correspondiente al sistema de cargas  $\bar{a}$ . Luego:

$$\Phi(\bar{D}) + \psi(T) = T \cdot \bar{D}$$

y:

$$P_n(\bar{a}) = \int_{\Omega} \Phi(\bar{D}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot \bar{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} T \cdot \bar{D} \, d\Omega - \int_{\Omega} \psi(T) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot \bar{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \psi(T) d\Omega = -P_n^*(\bar{a})$$

De todo lo anteriormente expuesto se sigue que:

$$P_n^*(\bar{a}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si la carga } \bar{a} \text{ es soportada por} \\ & \text{el cuerpo plástico original} \\ +\infty & \text{si la carga } \bar{a} \text{ no es soportada} \\ & \text{por el cuerpo original} \end{cases}$$

$$P_n(\bar{a}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si la carga } \bar{a} \text{ es soportada por} \\ & \text{el cuerpo plástico original} \\ -\infty & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Si tienen así los siguientes métodos alternativos para la determinación de las cargas de colapso:

I. Método Cinemático via creep secundario asociado al material rígido plástico original.

Caracterizada la carga por la dirección  $\bar{a}_r$ , la carga de colapso en esa dirección, dada por  $\lambda_r \bar{a}_r$ , está definida por:

$$\lambda_r = \inf\{\lambda > 0; P_n(\lambda \bar{a}_r) \rightarrow -\infty \text{ para } n \rightarrow \infty\}$$

II. Método Estático via creep secundario asociado al material rígido plástico original.

Caracterizada la carga por la dirección  $\bar{a}_r$ , la carga de colapso en esa dirección  $\lambda_r^* \bar{a}_r$  está definida por:

$$\lambda_r^* = \sup\{\lambda > 0; P_n^*(\lambda \bar{a}_r) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty\}$$

Como puede apreciarse los Métodos Cinemáticos y Estático via Creep corresponden ahora a un problema clásico (supuesta la diferenciabilidad de los funcionales) del Cálculo Variacional.

#### 4. EJEMPLOS DE APLICACION

Ejemplo 1. Esfera hueca sometida a presión interna de material rígido-plástico ideal caracterizado por el criterio

de von Mises.

Este es un ejemplo clásico de la literatura y puede demostrarse [12] que la presión que provoca el colapso está dada por:

$$p_c = 2Y \ln \frac{r_e}{r_i}$$

donde  $r_e$  y  $r_i$  son los radios externos e internos respectivamente.

Para el material von Mises el convexo  $G(x)$  está definido por:

$$T_e - Y \leq 0, \quad T_e = \left(\frac{3}{2} S.S\right)^{1/2}, \quad S = T^D,$$

$Y$  es la tensión de fluencia en un ensayo de tracción pura.

La función calibre  $C_{G(x)}(T)$  para el convexo de von Mises será:

$$C_{G(x)}(T) = \inf\{\mu; \mu > 0 \quad T_e - \mu Y \leq 0\} = \frac{T_e}{Y}$$

Luego la ecuación constitutiva para el material ficticio en términos de la tensión será:

$$\psi(T) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1}$$

A su vez

$$\phi(D) = \sup\{T.D - \psi(T)\}$$

Si  $D$  es tal que  $\text{tr } D \neq 0$  se tiene  $\phi(D) = +\infty$  y si  $D$  es tal que  $\text{tr } D = 0$  (material incompresible) resulta:

$$\phi(D) = \sup\left\{S.D - \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1}\right\}$$

de donde se sigue que el máximo ocurre para:

$$D = \left(\frac{T_e}{Y}\right)^n \frac{1}{Y} \frac{1}{2} \frac{3S}{T_e}$$

$$D.D = \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{2n} \left(\frac{1}{Y}\right)^2 \frac{3}{2}$$

por lo que:

$$\frac{T_e}{Y} = Y^{1/n} \left(\frac{2}{3} D.D\right)^{1/2n} = Y^{1/n} D_e^{1/n}, \quad D_e = \sqrt{\frac{2}{3}} D.D$$

de donde:

$$\begin{aligned} \phi(D) &= \left(\frac{T_e}{Y}\right)^n \frac{1}{Y} \frac{3}{2} \frac{S.S}{T_e} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} = \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} - \\ &- \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} = \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left[Y^{1/n} D_e^{1/n}\right]^{n+1} = \frac{n}{n+1} (Y D_e)^{(n+1)/n} \end{aligned}$$

A este mismo resultado se podría haber llegado recordando la definición de  $\pi(x, D)$  para el material plástico dado. En efecto:

$$\pi(x, D) = \sup\{T.D, T \in G(x)\} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \text{tr } D \neq 0 \\ S.D, \quad D = \lambda \frac{3}{2} \frac{S}{T_e}, \quad \lambda > 0 \text{ de donde } \lambda = D_e \text{ y por tanto} \\ S.D = \lambda T_e = Y D_e, \quad \text{si } \text{Tr } D = 0 \end{cases}$$

Se tiene así que para todo  $D$  tal que  $\text{Tr } D = 0$  resulta:

$$\pi(x, D) = Y D_e$$

y:

$$\phi(D) = \frac{n}{n+1} (Y D_e)^{(n+1)/n}$$

resultado al que ya se arribó anteriormente.

Ahorabi en, el Método Cinemático via Creep corresponde en este caso a:

$$\lambda_c = \inf\{\lambda > 0; \min_{v \in \text{Kin}_v} \left[ \int_{\Omega} \frac{n}{n+1} (Y D_e)^{(n+1)/n} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \lambda \bar{a} \cdot v \, d\Omega \right] \rightarrow -\infty \text{ para } n \rightarrow \infty\}$$

donde  $\text{Kin}_v = \{v; v \text{ regular y tal que } \text{div } v = \text{tr}(\nabla v)^S = 0, v = 0 \text{ en } \partial\Omega_v\}$ .

Para el ejemplo presente, utilizando coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$ , designando con  $v$  la componente radial de la velocidad y de la simetría del problema se sigue que las únicas componentes no nulas de  $D$  corresponden a:

$$D_r = \frac{dv}{dr}, \quad D_\phi = D_\theta = \frac{v}{r}$$

y de la condición  $\text{tr } D = 0$  resulta la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dr} + 2 \frac{v}{r} = 0$$

cuya solución definirá  $\text{Kin}_v$  y que en este caso estará dado por todo campo de velocidades  $v$  tales que:

$$v = Cr^{-2}, \quad C = \text{constante arbitraria}$$

Luego:

$$D_r = -2Cr^{-3}, \quad D_\phi = D_\theta = Cr^{-3}$$

$$D_e = \sqrt{\frac{2}{3}} D.D = 2Cr^{-3}$$

Introduciendo este resultado en el funcional

se tiene

$$\begin{aligned}
 F(C) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{n}{n+1} \left( Y \frac{2C}{r^{3/n}} \right)^{(n+1)/n} r^2 d\phi d\theta dr - \\
 &- \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda C r_i^{-2} r_i^2 d\phi d\theta = \\
 &= -\frac{4}{3} \pi^2 \frac{n^2}{n+1} (Y 2C)^{(n+1)/n} (r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n}) - \\
 &- 4\pi^2 \lambda C
 \end{aligned}$$

El mínimo de este funcional (ahora una función del parámetro C) corresponde a:

$$C = \frac{1}{2Y} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^n$$

Sustituyendo este valor de C en F(C) resulta:

$$\begin{aligned}
 P_n(\lambda) &= -4\pi^2 \left\{ \frac{1}{3} \frac{n^2}{n+1} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^{n+1} (r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n}) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\lambda}{2Y} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^n \right\} = \\
 &= -4\pi^2 \frac{\lambda}{2Y} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^n \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) = \\
 &= -4\pi^2 \frac{\lambda}{2Y} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^n \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

El término entre corchetes es positivo y

$P_n(\lambda) \rightarrow -\infty$  para  $n \rightarrow \infty$  si:

$$\lambda > \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2Yn}{3} (r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n}) \right] = 2Y \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right)$$

Luego su ínfimo corresponde a:

$$\inf \lambda = 2Y \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right)$$

A continuación se analizar  el Método Estático *via Creep*. En este caso el funcional que entra en juego es:

$$\begin{aligned}
 J(T) &= \int_{\Omega} \frac{1}{n+1} \left( \frac{T}{Y} \right)^{n+1} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{n+1} \left( \frac{T}{Y} \right)^{n+1} r^2 dr d\theta d\phi = \\
 &= 4\pi^2 \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{Y} \right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} (T_e)^{n+1} r^2 dr
 \end{aligned}$$

definido en:

$$\text{Est}_T = \left\{ T; \frac{dT_r}{dr} + 2 \frac{T_r - T_\phi}{r} = 0, T_r = -\lambda \text{ en } r=r_i \text{ y } T_r=0 \text{ en } r=r_e \right\}$$

Dada la simetría del problema, puede mostrarse [12] que:

$$T_\phi - T_r = T_e$$

Luego:

$$T_e = \frac{1}{2} r \frac{dT_r}{dr}$$

y sustituyendo en el funcional:

$$J(T) = 4\pi^2 \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{2Y} \right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} \left( \frac{dT_r}{dr} \right)^{n+1} r^{n+3} dr$$

El mínimo de J(T) corresponde a aquel campo T que satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange del funcional, luego:

$$\frac{d}{dr} \left[ (n+1) \left( \frac{dT_r}{dr} \right)^n r^{n+3} \right] = 0$$

de donde:

$$(n+1) \left( \frac{dT_r}{dr} \right)^n r^{n+3} = \text{Cte}$$

Integrando esta ecuación y haciendo uso de las condiciones de contorno se obtiene:

$$T_r = -\frac{\lambda}{(r_i^{-3/n} - r_e^{-3/n})} (r^{-3/n} - r_e^{-3/n})$$

por lo que:

$$\frac{dT_r}{dr} = -\frac{3}{n} \frac{\lambda}{(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} r^{-(3+n)/n}$$

Sustituyendo esto en el funcional se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_n^*(\lambda) &= 4\pi^2 \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{2Y} \right)^{n+1} \left[ -\frac{3}{n} \frac{\lambda}{(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^{n+1} \\
 &\int_{r_i}^{r_e} r^{-(3+n)(n+1)/n+(n+3)} dr = \\
 &= 4\pi^2 \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{2Y} \right)^{n+1} \left[ -\frac{3}{n} \frac{\lambda}{(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^{n+1} \left( -\frac{n}{3} \right) (r_e^{-3/n} - \\
 &- r_i^{-3/n}) = 4\pi^2 \frac{1}{n+1} \frac{\lambda}{2Y} \left[ -\frac{3\lambda}{2Yn(r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n})} \right]^n
 \end{aligned}$$

En particular

$$P_n^*(\lambda) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \text{ si } \lambda < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2Yn}{3} (r_e^{-3/n} - r_i^{-3/n}) \right]$$

por lo que:

$$\lambda \leq 2Y \operatorname{Ln}\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

y su supremo (en este caso máximo) corresponde a:

$$\sup \lambda = 2Y \operatorname{Ln}\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Comparando los resultados vemos que la carga última alcanzada con esta nueva técnica es la propia carga de colapso de la esfera.

**Ejemplo 2.** Cilindro infinito hueco de material tipo von Mises sometido a presión interna.

Como el material es el mismo se tiene:

$$\psi(T) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1}, \quad \phi(D) = \frac{n}{n+1} (YD_e)^{(n+1)/n},$$

$$\operatorname{tr} D = 0$$

**Método Cinemático.** Trabajando en coordenadas cilíndricas, las únicas componentes no nulas de D son:

$$D_r = \frac{dv}{dr}, \quad D_\theta = \frac{v}{r}$$

luego:

$$\operatorname{tr} D = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0$$

de donde:

$$v = C r^{-1}, \quad C = \text{cte}^{\text{arbitraria}}$$

$$D_e = 2C r^{-2}/\sqrt{3}$$

Con esto resulta definido  $\operatorname{Kin}_v$  y el funcional:

$$\int_{\Omega} \phi(D) d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \bar{a} \cdot v d\Omega = -\pi \frac{n^2}{n+1} \left(\frac{2YC}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)/n} (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}) - 2\pi\lambda C = F(C)$$

De la condición de mínimo se obtiene:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2Y} \left[ \frac{\sqrt{3} \lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]$$

Luego

$$P_n(\lambda) = -\pi \frac{n^2}{n+1} \left[ -\frac{\sqrt{3} \lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^{n+1} (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}) - \pi\lambda \frac{\sqrt{3}}{Y} \left[ -\frac{\sqrt{3} \lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^n =$$

$$= -\pi\lambda \frac{\sqrt{3}}{Y} \left[ -\frac{\sqrt{3} \lambda}{2Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= -\sqrt{3}\pi \frac{\lambda}{Y} \left[ -\frac{\sqrt{3} \lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^n \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

El término entre corchetes es positivo y:

$$P_n(\lambda) \rightarrow -\infty \text{ si } \lambda > \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}{\sqrt{3}} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \operatorname{Ln}\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Luego el ínfimo de los  $\lambda$  corresponde a:

$$\inf \lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \operatorname{Ln}\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

**Método Estático.** De una manera similar a la ya presentada en el Ejemplo 1 se tiene el funcional:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_e}{Y}\right)^{n+1} d\Omega = 2\pi \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} (T_e)^{n+1} r dr = J(T)$$

definido en:

$$\operatorname{Est}_T = \{T; \frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = 0, \quad \frac{dT_z}{dz} = 0, \quad T_r = -\lambda \text{ en } r=r_i \text{ y}$$

$$T_r = 0 \text{ en } r=r_e\}$$

Dado que el problema es tal que se tiene un estado de deformación plana ( $D_z = 0$ ) resulta:

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (T_\theta - T_r)$$

De la expresión anterior se sigue que:

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dT_r}{dr} r$$

que sustituida en el funcional conduce a:

$$2\pi \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} \left(\frac{dT_r}{dr}\right)^{n+1} r^{n+2} dr$$

Nuevamente, la función  $T_r$  que minimiza el funcional satisface la ecuación de Euler-Lagrange asociada:

$$\frac{d}{dr} \left[ (n+1) \left(\frac{dT_r}{dr}\right)^n r^{n+2} \right] = 0$$

Integrando y haciendo uso de las condiciones de contorno resulta:



$$T_r = \lambda \frac{(r^{-2/n} - r_e^{-2/n})}{(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}$$

De donde

$$\frac{dT_r}{dr} = -\frac{2}{n} \lambda \frac{r^{-(2+n)/n}}{(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}$$

y que substituida en el funcional conduce a:

$$P_n^*(\lambda) = 2\pi \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \left[-\frac{2}{n} \frac{\lambda}{r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}}\right]^{n+1} \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}) = \pi \frac{\sqrt{3}}{n+1} \left[-\frac{\sqrt{3} \lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^n \frac{\lambda}{Y}$$

En particular:

$$P_n^*(\lambda) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty \text{ si } \lambda < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Luego su supremo (en este caso máximo) corresponde a:

$$\sup \lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Comparando los resultados obtenidos por ambos métodos se concluye que la presión interna que provoca el colapso del cilindro corresponde a:

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

**Ejemplo 3.** Cilindro infinito hueco de material tipo Tresca sometido a presión interna.

Para este material los autores mostraron en [12] que la presión de colapso corresponde a:

$$\lambda_c = Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Para el caso del ejemplo puede mostrarse que la parte del convexo que interesa está caracterizado por:

$$T_\theta - T_r \leq Y$$

Expresión esta que permite definir:

$$C_G(x)(T) = \frac{T_\theta - T_r}{Y}$$

$$\pi(x, D) = \sup\{T \cdot D, T \in G(x)\} = YD_\theta \text{ si}$$

$$\text{tr } D = 0 \text{ y } D_r = -D_\theta, D_z = 0$$

Luego:

$$\psi(T) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{T_\theta - T_r}{Y}\right)^{n+1}$$

$$\phi(D) = \frac{n}{n+1} (YD_\theta)^{n+1/n} \text{ para tr } D = 0, D_r = -D_\theta, D_z = 0$$

**Método Cinemático.** Del Ejemplo 2 se sigue que:

$$Kin_v = \{v; v = C r^{-1}, C = \text{cte arbitraria}\}$$

y para este espacio resulta:

$$D_\theta = C r^{-2}$$

y el funcional toma la forma:

$$-\pi \frac{n^2}{n+1} (YC)^{(n+1)/n} (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}) - 2\pi \lambda C = F(C)$$

La expresión anterior alcanza el mínimo para:

$$C = \frac{1}{Y} \left[-\frac{2\lambda}{nY(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^n$$

que substituido en el funcional conduce a su valor mínimo:

$$P_n(\lambda) = -\pi \frac{n^2}{n+1} \left[-\frac{2\lambda}{nY(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^{n+1} (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n}) -$$

$$-2\pi \frac{\lambda}{Y} \left[-\frac{2\lambda}{nY(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^n =$$

$$= -2\pi \frac{\lambda}{Y} \left[-\frac{2\lambda}{nY(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= -2\pi \frac{\lambda}{Y} \left[-\frac{2\lambda}{nY(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}\right]^n \frac{1}{n+1}$$

El término entre corchetes es positivo y:

$$P_n(\lambda) \rightarrow -\infty \text{ si } \lambda > \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}{2}\right] = Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

de donde:

$$\inf \lambda = Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

Método Estático. El funcional a considerar corresponde a:

$$2\pi \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} (T_\theta - T_r) r \, dr = J(T)$$

definido en:

$$\text{Est}_T = \left\{ T; \frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = 0, \frac{dT_\theta}{dz} = 0, T_r = -\lambda \text{ en } r=r_i \text{ y} \right.$$

$$\left. T_r = 0 \text{ en } r=r_e \right\}$$

Por estar definido en este espacio, el funcional puede reescribirse como:

$$2\pi \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \int_{r_i}^{r_e} \left(\frac{dT_r}{dr}\right)^{n+1} r^{n+2} \, dr$$

Expresión que salvo una constante es idéntica a la del funcional del Ejemplo 2, por lo que un razonamiento similar al allí presentado conduce a:

$$P_n^*(\lambda) = -\pi \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{Y}\right)^{n+1} \left[ -\frac{2\lambda}{n(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^{n+1} (r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})$$

$$= -2\pi \frac{1}{n+1} \frac{\lambda}{Y} \left[ -\frac{2\lambda}{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})} \right]^n$$

Luego:

$$P_n^*(\lambda) \rightarrow 0 \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{Yn(r_e^{-2/n} - r_i^{-2/n})}{-2} \right]^n = Y \ln(r_e/r_i)$$

Nuevamente, comparando los resultados obtenidos con ambos métodos se tiene:

$$\lambda_c = Y \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

#### AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al IEN (Instituto de Engenharia Nuclear-RJ), a CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear) y a FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos) por el apoyo financiero.

#### BIBLIOGRAFIA

[1] Taroco, E.; Feijóo, R.; "Análisis Límite

via Creep", VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Dic., pp. 165-176, vol. B, 1981.

- [2] Del Piero, G.; "Variational Methods in Limit Analysis", II Escola de Mat. Aplic., vol. 3, pp. 1-48, 1980.
- [3] Salençon, J.; "Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics", John Wiley, 1977.
- [4] Norton, F.H.; "Creep of Steel at High Temperatures", McGraw Hill, N.Y., 1929.
- [5] Lanczos, C.; "The Variational Principles of Mechanics", The Univ. of Toronto Press, Toronto, 1964.
- [6] Courant, R.; Hilbert, D.; "Methods of Mathematical Physics", vol. I, Interscience, N.Y., 1953.
- [7] Friaa, A.; "La Loi de Norton-Hoff Généralisée en Plasticité et Viscoplasticité". Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1979.
- [8] Taroco, E.; Feijóo, R.; "Viscoplasticidad y su Formulación Variacional", II Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, vol. 2, pp. 157-337, enero 1980.
- [9] Feijóo, R.; Taroco, E.; "Algunos Principios Variacionales en Elastoplasticidad, Creep y su Formulación unificada a través de la Elasto/Viscoplasticidad", SIGMA, revista de Matemáticas Aplicadas, publicada por el Dpto de Mat. de la Univ. de Chile, vol. 5, nº 3-4, 1979.
- [10] Feijóo, R.; Taroco, E.; "Formulación Variacional del Problema de Creep Secundario", XX Jornadas Sud Americanas de Ing. Estructural, vol. 3, trabajo A-10, pp. 1-17, Córdoba, Argentina, 1979.
- [11] Feijóo, R.; Taroco, E.; "Algoritmos Numéricos en Creep Secundario", II Cong. Latino Americano sobre Métodos Computacionales en Ingeniería, Curitiba, Brasil, vol. 1, pp. 113-130, Dic. 1980.
- [12] Feijóo, R.; Taroco, E.; "Plasticidad y su Formulación Variacional", II Escola de Matemática Aplicada, vol. 2, pp. 1-156, Rio de Janeiro, enero de 1980.

# LEVANTAMENTO EXPERIMENTAL DE PARÂMETROS DA SUSPENSÃO DE UM VEÍCULO

NELSON DIÓGENES DO VALLE, Dr. Ing.

PROF. TITULAR – UFSC

JOSÉ RUBENS KRETZER, Eng. Mec.

NORBERTO DE SOUZA, Eng. Mec.

## SUMÁRIO

*É apresentada uma metodologia simples para o levantamento dos parâmetros de um veículo (massa, mola, amortecedor) sem fazer uso de equipamentos sofisticados.*

## INTRODUÇÃO

Na suspensão de um veículo existem dois fatores importantes a serem considerados:

- conforto dos ocupantes;
- segurança na estrada.

Como indicativo de conforto dos ocupantes é utilizado as acelerações que atuam sobre os mesmos [2]. A segurança é indicada pelo valor de força de contato entre pneu e solo [2].

Tais fatores são em geral contraditórios sendo necessária uma solução de compromisso entre os mesmos.

Conhecidas as características de um veículo existente pode-se simulá-lo em um computador analógico afim de serem verificados os referidos fatores. O computador permite ainda, com relativa facilidade, otimizar o sistema com vistas a melhor atender os dois fatores.

É então muito importante, o conhecimento das características do veículo. O presente trabalho se propõe a apresentar um roteiro para o levantamento de algumas destas características.

## MODELO MATEMÁTICO SIMPLIFICADO DO VEÍCULO

O veículo inicialmente de uma maneira bastante simplificada, será representado conforme a figura 1 [1].

O modelo apresentado tem 2 graus de liber-

dade,  $x$  e  $\theta$ .

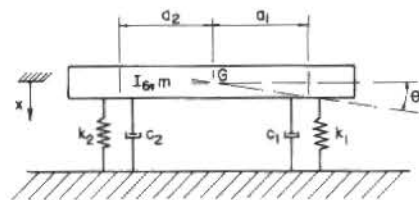


Fig. 1. Modelo simplificado do veículo

Foi ensaiado um automóvel Chevrolet Caravan, 4 cilindros em linha, 3 marchas, ano 1975 sem sistema de ar refrigerado. A seguir serão determinados seus parâmetros de acordo com o modelo apresentado na figura 1.

## PARÂMETROS DO SISTEMA

**Massa do veículo.** O automóvel encontrava-se com o tanque de combustível em sua capacidade máxima, ou seja, 54 litros, livre de carga, sem nenhum ocupante, conservando as demais características originais.

Pesou-se o automóvel primeiramente com as quatro rodas, depois com duas rodas dianteiras e finalmente com as duas rodas traseiras apoiadas sobre uma balança.

Destas pesagens obteve-se os valores:

$$m^*g = 1140 \text{ kgf}; P_1 = 570 \text{ kgf}; P_2 = 570 \text{ kgf} \quad (1)$$

onde:

$m \cdot g$  - peso total do veículo

$p_1$  - peso nas rodas dianteiras

$p_2$  - peso nas rodas traseiras

Das duas últimas expressões (1) conclui-se que o centro de gravidade estará localizado no ponto médio da distância entre os eixos.

**Massas de Suspensão.** As cadeias cinemáticas simplificadas para cada roda da suspensão estão apresentadas na figura (2).

Foi inicialmente pesado cada componente da suspensão e determinado um peso parcial equivalente no ponto central das rodas (R). Somando estes pesos parciais e considerando as duas rodas de cada suspensão obtém-se os pesos equivalentes dianteiro e traseiro que são respectivamente.

$$g \cdot m_{SD} = 86 \text{ kgf} \quad g \cdot m_{ST} = 122 \text{ kgf} \quad (2)$$

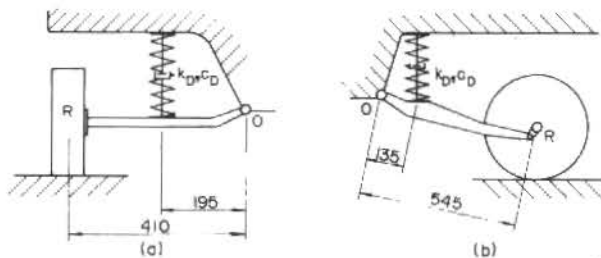


Fig. 2. Cadeias cinemáticas simplificadas  
a) suspensão dianteira  
b) suspensão traseira

**Característica Elástica da Suspensão.** Inicialmente ensaiou-se em uma prensa as molas espirais usadas na suspensão dianteira e traseira do veículo. Aplicou-se diferentes cargas sobre as molas e mediu-se os respectivos deslocamentos.

Com os valores obtidos, foram construídos os gráficos apresentados nas figuras 3a e 3b.

De acordo com as figuras 3a e 3b obtém-se as constantes de mola dianteira e traseira respectivamente:

$$K_D = 3 \text{ kgf/mm} \quad K_T = 4,25 \text{ kgf/mm} \quad (3)$$

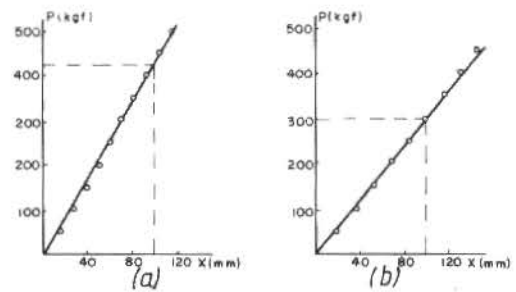


Fig. 3. Curvas características das molas,  
a. dianteira; b. traseira.

As constantes de mola equivalente da suspensão relativas ao ponto R (meio da roda) diferem daqueles valores obtidos ensaiando as molas espirais isoladamente (expressões (3)), devido as cadeias cinemáticas da figura 3. Além disso uma série de tensores, borrachas e o sistema de direção aumentam a rigidez do sistema.

Foi utilizada a montagem conforme figura (4) para obter estas constantes experimentalmente.

Para várias alturas dos "macacos" (MC) conforme figuras 4a e 4b foi medida a distância  $x$  e o peso na balança B onde descontado o peso da suspensão correspondente podia ser obtida a força sobre a mola. Cargas maiores do que o peso próprio também foram ensaiadas usando pesos adicionais sobre o veículo.

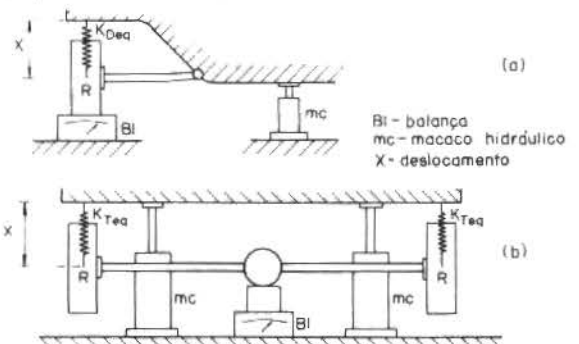


Fig. 4. Esquemas para ensaio das características das molas. a) dianteira b) traseira.

Com os valores assim obtidos constroem-se os gráficos apresentados na figura 5 onde o deslocamento de referência corresponde a posição de equilíbrio estático do veículo.

A mola equivalente traseira é praticamente linear (veja figura 5 (b)) e a mola equivalente dianteira é não linear (veja figura 5 (a)). Da figura 5 (b) obtém-se valor da constante de mo la traseira:

$$K_{Teq} = 2,86 \text{ kgf.mm}^{-1} \quad (4)$$

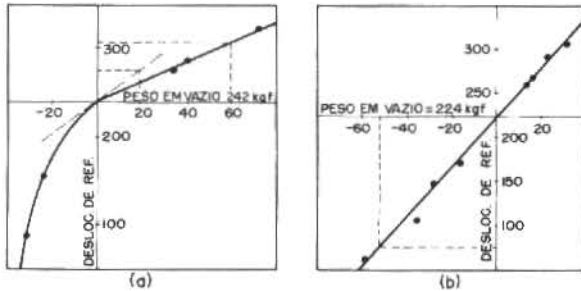


Fig. 5. Características das molas  
a) dianteira b) traseira

Momento de inércia. Apoiando o veículo no ponto B conforme a figura 6a, tem-se um sistema com um grau de liberdade |1|, |3| cuja equação diferencial de movimento é:

$$I_B^* \ddot{\theta} + 2K_{Teq} L_2^2 \theta = 0 \quad (5)$$

onde:

$I_B^*$  - momento de inércia de massa em relação ao ponto B (ver figura 6a).

A partir da equação (5) pode-se determinar o momento de inércia do sistema em função de seus parâmetros e do período de vibração ( $T_{nB}$ ) |1|, |3|.

$$I_B^* = \frac{2 K_{Teq} L_2^2}{4\pi^2} T_{nB}^2 \quad (6)$$

A vibração natural do veículo foi excitada manualmente comprimindo e soltando a carroceria contra a mola. As oscilações foram medidas por um acelerômetro fixo na carroceria e ligado a um trocador x-y.

Substituindo na equação (6) os valores lidos nas figuras 6a e 6b e da expressão (4) segue

$$I_B^* = 2,42 \cdot 10^5 \text{ kgf.mm.s}^2 \quad (7)$$

Neste valor está incluído o momento de inércia da suspensão dianteira em torno de B.

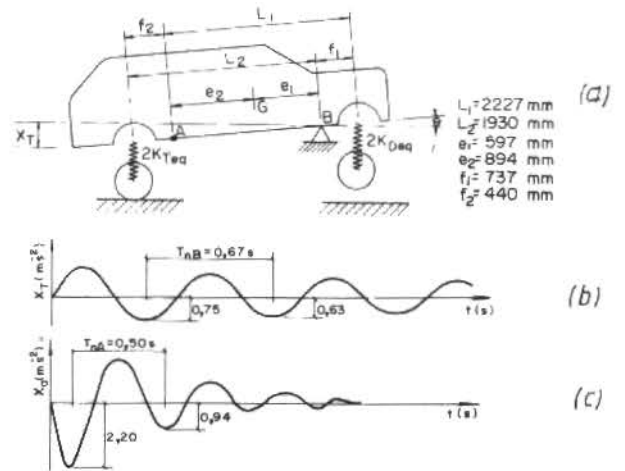


Fig. 6. Determinação do momento de inércia  
a) sistema ensaiado  
b) oscilação em torno de B  
c) oscilação em torno de A

O momento de inércia somente da carroceria em torno do ponto B será aproximadamente (ver figura 6a).

$$I_B = I_B^* - m_{SD} f_1^2 \quad (8)$$

$$I_B = 2,37 \cdot 10^5 \text{ kgf.mm.s}^2 \quad (9)$$

A massa da carroceria será calculada descontando da massa total do veículo (expressão (1)), as massas equivalentes das suspensões concentradas em R (ver expressões (2)) obtendo-se:

$$m = 0,095 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \text{ s}^2 \quad (11)$$

O momento de inércia em torno do centro de gravidade G será conforme figura 6a.

$$I_G = I_B - m e_1^2 \quad (10)$$

$$I_G = 2,03 \cdot 10^5 \text{ kgf.mm.s}^2 \quad (12)$$

De forma análoga ter-se-ia para o momento de inércia da carroceria em relação ao ponto A.

$$I_A = I_G + m e_2^2 \quad (13)$$



Substituindo-se os valores na equação (13) tem-se:

$$I_A = 2,78 \cdot 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}^2 \quad (14)$$

O momento de inércia ( $I_A^*$ ) da carroceria mais a suspensão traseira ao ponto A será

$$I_A^* = I_A + m_{ST} f_2^2 \quad (15)$$

Da equação (15) obtém-se:

$$I_A^* = 2,80 \cdot 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}^2 \quad (16)$$

Notas: a) Para o cálculo das inércias deu-se preferência ao estudo das oscilações em torno de B, por este sistema ter constante de mola linear. (ver figura 5 (b))

b) Na equação (5) correspondente à figura 6 (a) não aparece o termo de amortecimento. O mesmo foi desmontado para que o sistema oscilasse um número maior de vezes e propiciasse uma maior precisão na medida do período natural.

Constante de Mola Dianteira Equivalente Linearizada. Para o veículo apoiado no ponto A (ver figura 6) tem-se uma equação diferencial linearizada análoga a equação (5). Onde pode se determinar a constante de mola dianteira equivalente linearizada.

$$K_{Deq} = \frac{2\pi^2 I_A^*}{L_1^2 T_n^2 A} \quad (17)$$

Das figuras 6 (a), 6 (c) e equação 6 obtém-se:

$$K_{Deq} = 4,45 \text{ kgf/m} \quad (18)$$

Característica do Amortecimento da Suspensão. Os amortecedores foram novamente montados no veículo. Consequentemente no modelo da figura 6 (a) deve-se considerar amortecedores em paralelo com as molas. As equações diferenciais do movimento oscilatório amortecido em

torno dos pontos A e B são respectivamente:

$$I_A^* \ddot{\theta} + 2c_{Deq} L_1^2 \dot{\theta} + 2k_{Deq} L_1^2 \theta = 0 \quad (19)$$

$$I_B^* \ddot{\theta} + 2c_{Teq} L_2^2 \dot{\theta} + 2K_{Teq} L_2^2 \theta = 0$$

As oscilações correspondentes às equações (19), estão apresentadas na figura 7.

Em um sistema amortecido a constante de amortecimento por ser calculada em função da relação entre as amplitudes de dois ciclos consecutivos |1| e |3|. Onde se obtêm as constantes de amortecimento:

$$c_{Deq} = 0,083 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \text{ s} \quad c_{Teq} = 0,174 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \text{ s} \quad (20)$$

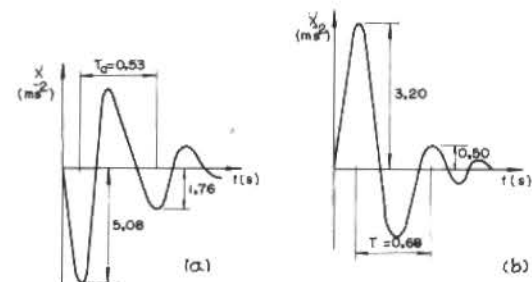


Fig. 7. Oscilação amortecida

- a) em torno de A  
b) em torno de B

Analisando os gráficos da figura 6b e 6c, verifica-se que os mesmos sem os amortecedores montados, existe dissipação de energia. Os amortecedores equivalentes a esta dissipação poderiam ser calculados de maneira análoga.

$$c_D' = 0,067 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \text{ s} \quad c_T' = 0,017 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \text{ s} \quad (21)$$

INFLUÊNCIA DA MOLA E DO AMORTECEDOR NA SUSPENSÃO

Influência da Mola. Considera-se as suspensões simplificadas (ver figuras 3a e 3b) e os valores das constantes de mola  $K_D$  e  $K_T$  (ver expressões (2)). As constantes de mola equivalentes destas molas relativas ao ponto R (centro da roda) seriam

$$K_{DR} = 0,679 \text{ kgf/mm} \quad K_{TR} = 0,261 \text{ kgf/mm} \quad (22)$$

Das expressões (4), (18) e (22) pode ser calculado o fator de influência das molas na constante de mola da suspensão:

$$F_{MD} = \frac{K_{DR}}{K_{Deq}} = 0,15 \quad F_{MT} = \frac{K_{TR}}{K_{Teq}} = 0,09 \quad (23)$$

Como se pode ver das expressões (23) as molas dianteira e traseira contribuem respectivamente somente com os valores de 15% e 9% no valor do molejamento da suspensão. O valor restante se deve aos tensores, borrachas e mesmo ao sistema de direção.

Influência do Amortecedor. Para o cálculo da influência do amortecedor usa-se as expressões

$$F_{AD} = \frac{C_{Deq} - C_D'}{C_{Deq}} = 0,19 \quad F_{AT} = \frac{C_{Teq} - C_T'}{C_{Teq}} = 0,90 \quad (24)$$

Das expressões (24) conclui-se que os amortecedores dianteiro e traseiro contribuem respectivamente com 19% e 90% no amortecimento da suspensão. O valor restante se deve aos outros elementos da suspensão.

#### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas expressões (4), (11), (12), (18), (20) e figura 6 (a) estão determinados todos os parâmetros da figura 6 (a).

Tais parâmetros permitiriam de uma forma aproximada, analisar as acelerações sobre os ocupantes que é o indicativo do conforto dos veículos (2).

Para se estudar a estabilidade é necessário um modelo conforme a figura 8, para se poder calcular as forças entre pneu e solo.

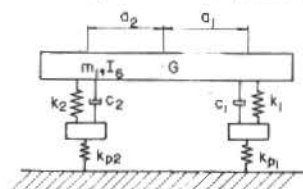


Fig. 8. Modelo mais realista do automóvel.

As massas de suspensão podem ser obtidas a partir das expressões (3).

As constantes de mola dos pneus  $K_{p1}$  e  $K_{p2}$  deverão ser obtidas experimentalmente.

Numa fase inicial simular o sistema consi-

derando linearizada a mola dianteira na posição de equilíbrio estático. O estudo pode prosseguir considerando a não linearidade das molas.

O modelo apresentado na figura 8 pode ser substituído por outros, caso pretenda-se obter outros tipos de vibração do veículo.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] THOMSON, W.T., Vibration theory and applications, Prentice Hall, N.J., 1965
- [2] MITSCHKE, M., Dynamik der Kraftfahrzeuge, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg N.Y., 1971.
- [3] DEN HARTOG, J.P., Mecanica de las vibraciones, Compania Editorial Continental, México, 1964.
- [4] Catálogo de peças e acessórios CHEVROLET, General Motors do Brasil S/A, Julho 1975.

## CONGRESSOS

1. Sixth IFTOMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms:  
Data e Local:  
15 a 20 de Dezembro de 1983  
New Delhi  
Correspondência:  
Department of Mechanical Engineering,  
Indian Institute of Technology  
New Delhi 110016 (India)
2. Encontro sobre Escoamentos em Meios Porosos.  
Data e Local:  
20 a 22 de Outubro de 1982.  
São Carlos  
Correspondência:  
Prof. José Carlos Gubulin  
Secretaria do X ENEMP  
Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia Química  
Caixa Postal 384  
13560 - São Carlos, SP
3. II Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão.  
Data e Local:  
24 a 26 de Novembro de 1982  
Salvador  
Correspondência:  
Secretaria do SIBRAT  
Núcleo de Serviços Tecnológicos  
Escola Politécnica da UFBA - 6º andar  
Rua Aristides Novis 2, Federação  
40000 - Salvador, Bahia

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio  
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea  
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280mm – with a letter containing title of the papers, name (s) of the institution (s) and author (s)' address (es).

Together with the letter, the author (s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

*Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.*

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author (s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1981 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means – electronic, mechanical, photographic, recording or any else – is allowed without written permission.

#### Subscriptions

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telefónico: CAMPUSRIO

