VOL. IV - Nº 4 - 1982

ISSN 0100-7386

PATROCINADA PELA
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITORA CAMPUS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 x 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

Assinaturas

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443 PABX
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.

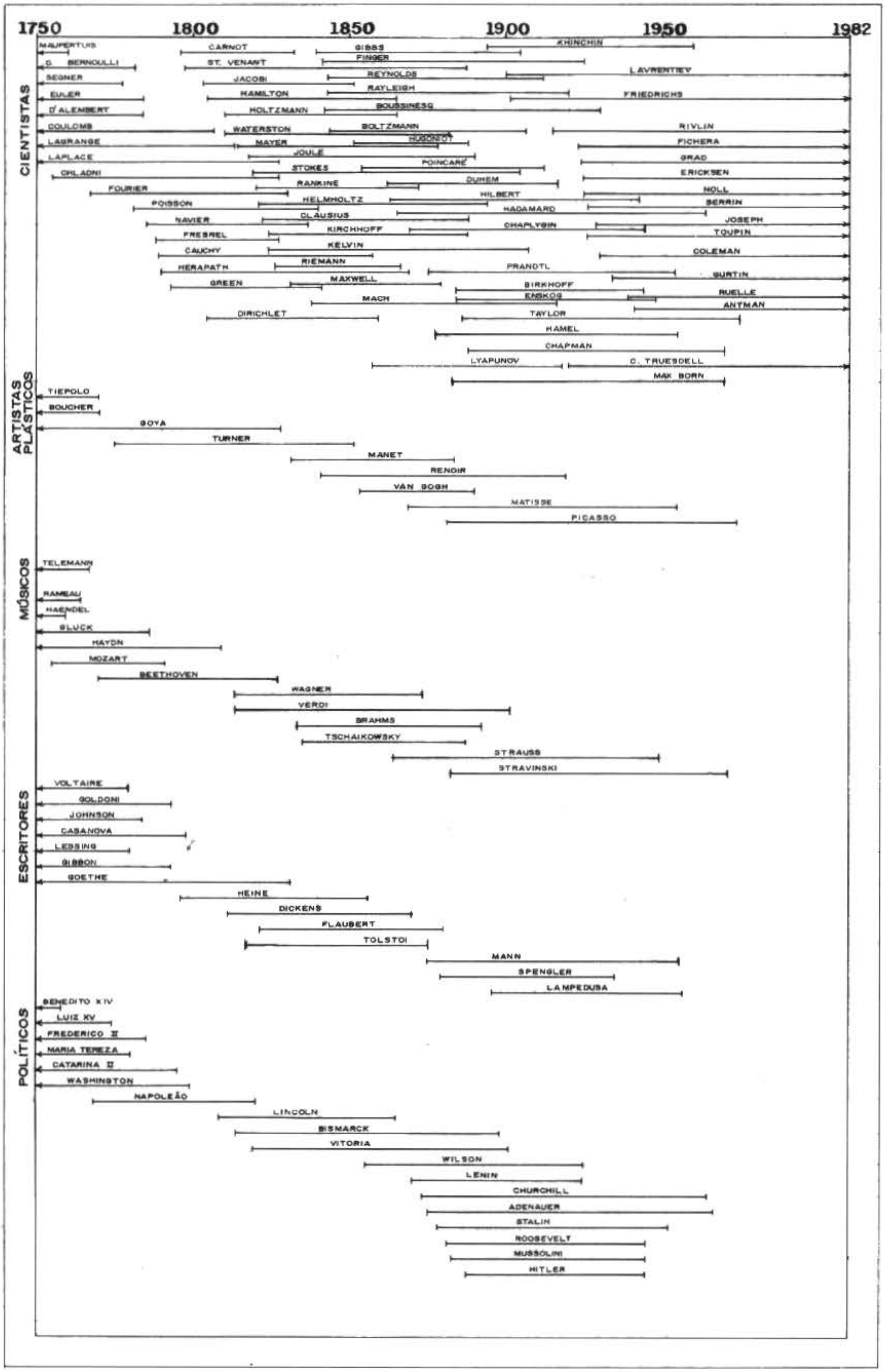
ISSN 0100-7386

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

VOL. IV, nº 4, 1982

EDITORA CAMPUS

Este gráfico completa o artigo **História da Mecânica Clássica – Parte II, Os Séculos XIX e XX** de C. Truesdell publicado no Vol. IV, nº 3, 1982, pp. 3 a 21.



POTENCIAL DE UMA FONTE DENTRO DE UM DUTO CÔNICO, NA PRESENÇA DE ESCOAMENTO RADIAL

MARIA DA CONCEIÇÃO IANINO FORTES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – UFV – MG
MAURI FORTES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – UFV – MG
JERZY TADEUZ SIELAWA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA – ITA – SP

SUMÁRIO

Apresenta-se, neste trabalho, um estudo detalhado do potencial de velocidade e função de corrente em regiões cônicas. Obteve-se uma solução analítica fechada para o problema de escoamento em dutos cônicos, na presença de fonte (ou sumidouro) colocada no eixo do cone. Utilizou-se um potencial de "correção", expresso em termos de função cônica, tal que a condição de contorno na superfície e equação de Laplace fossem satisfeitas.

INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos potenciais envolvendo corpos axialmente simétricos é essencial ao projeto de turbopropulsores e ventiladores, à análise de difusores, de desempenho aerodinâmico em túneis de vento e ao estudo de quaisquer comportamentos fluidodinâmicos de corpos em dutos.

O desenvolvimento analítico das soluções propostas para os potenciais de velocidade ou funções de corrente tem geralmente utilizado o conceito de fontes puntuais, fontes de disco e anéis, dipolos e vórtices de anéis, colocados em dutos. Uma disposição adequada de fontes gerará um potencial de velocidade equivalente àquele obtido quando se tem um corpo rígido no duto [3, 7, 10, 11].

As soluções teóricas encontradas normalmente envolvem equações integrais de Fredholm ou elípticas [3, 7, 8], funções de Bessel [1, 9] ou expansões das perturbações em potências [7].

Pouco se conhece sobre as propriedades de funções cônicas [1,2] e, mais especificamente, sobre o potencial de corpos axissimétricos em dutos cônicos [2, 6, 10]. Recentemente, IANINO FORTES et alii [5] apresentaram um estudo sobre algumas propriedades das funções cônicas e obtiveram a solução da Equação de Laplace em coordenadas cônicas.

Propõe-se, neste trabalho, apresentar as propriedades de funções cônicas essenciais ao estudo de potenciais (Apêndice) e o estudo do potencial e função de corrente de uma fonte (ou sumidouro) colocada dentro de um duto cônico, na presença de um escoamento radial.

O POTENCIAL DE VELOCIDADE (ϕ_0) E A FUNÇÃO DE CORRENTE (ψ_0) DE UMA FONTE NA AUSÊNCIA DE ESCOAMENTO

Para uma maior simplicidade matemática, é conveniente utilizar os sistemas de coordenadas esféricas e cilíndricas, quando se estudam os potenciais de velocidade e funções de corrente.

Para um fluido ideal, as condições de irrotacionalidade e continuidade podem ser descritas, respectivamente, por:

$$\nabla \times V = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \qquad (2)$$

 RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. IV, nº 4, 1982

A solução do sistema de equações (1) e (2) é, por vezes complexa. Para uma maior facilidade de trabalho, definem-se os potenciais de velocidade (ϕ) e funções de corrente (ψ), através das expressões abaixo, válidas para escoamento axissimétricos (4):

A- Sistema de coordenadas esféricas com $v_\phi = 0$ e nenhuma dependência na coordenada ϕ:

I- Potencial de velocidade:

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (3)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad (4)$$

II- Função de corrente:

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \text{ sen } \theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad (5)$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r \text{ sen } \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (6)$$

B- Sistema de coordenadas cilíndricas com $v_\theta = 0$ e nenhuma dependência em θ:

I- Potencial de velocidade:

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (7)$$

$$v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (8)$$

II- Função de corrente:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (9)$$

$$v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (10)$$

Adotou-se, neste trabalho, a nomenclatura de BIRD et alii [4] para os sistemas de coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) e cilíndricas (r,θ,z), mostrados na Figura 1. A utilização tanto do potencial de velocidade, ϕ, quanto da função de corrente, ψ, satisfaz às equações (1) e (2). Para um escoamento tridimensional.

$$\vec{v} = -\nabla\phi \qquad (11)$$

e, da equação (2):

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (12)$$

Similarmente:

$$\nabla^2\psi = 0 \qquad (13)$$

Portanto, o problema do escoamento reduz-se à solução das equações de Laplace, (12) ou (13). A solução destas equações, em coordenadas cônicas, é apresentada por IANINO FORTES et alii [5].

Supondo uma fonte $(m > 0)$ ou sumidouro $(m < 0)$ localizada na origem $(r = 0)$, pode-se afirmar, devido à continuidade de massa, que (Figura 2):

$$v_r = \frac{\dot{m}}{4\pi r^2 \rho} \qquad (14)$$

sendo:

$\dot{m}$ = vazão mássica da fonte (ou sumidouro) em 0.

ρ = massa específica do fluido

O escoamento devido à fonte é radial. Utilizando o sistema de coordenadas esféricas, sabendo-se que $v_\theta = v_\phi = 0$ e igualando as equações (3) e (14), obtem-se:

$$\phi = \frac{I}{r} \text{ (coordenadas esféricas)} \qquad (15)$$

onde

$$I = \frac{\dot{m}}{4\pi\rho} = \text{intensidade da fonte} \qquad (16)$$

Uma simples mudança de coordenadas leva a (Figura 1):

$$\phi = \frac{I}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ (coordenadas cilíndricas)} \qquad (17)$$

Considerando uma fonte localizada em $z = r_1$ (Figura 3), o potencial em um ponto P pode ser obtido como segue.

$$D^2 = r^2 - 2rr_1 \cos\theta + r_1^2 \qquad (18)$$

Portanto, o potencial em (r,θ) devido à fonte em $(r_1,0)$ é:

$$\phi_o(r,\theta \; ; \; r_1,0) = \frac{I}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos\theta + r_1^2}} \qquad (19)$$

(coordenadas esféricas)

O subscrito em ϕ indica o potencial da fonte na ausência de escoamento.

A função de corrente pode ser obtida a partir do potencial de velocidade. O trabalho torna-se mais simples se utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas. Neste caso (Figura 3):

$$\phi_o = \frac{I}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \qquad (20)$$

(coordenadas cilíndricas)

Das equações (7 a 10) e (20) resulta:

$$\frac{\partial\psi_o}{\partial z} = - r \frac{\partial\phi_o}{\partial r} = + \frac{Ir^2}{\left(r^2 + (z - z_1)^2\right)^{3/2}} \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\psi_o}{\partial r} = + r \frac{\partial\phi_o}{\partial z} = - \frac{Ir(z - z_1)}{\left(r^2 + (z - z_1)^2\right)^{3/2}} \qquad (22)$$

A integração das equações (21) e (22) leva a:

$$\psi_o = \frac{I(z - z_1)}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \qquad (23)$$

(coordenadas cilíndricas)

A constante de integração foi eliminada, por ser imaterial. Uma mudança de coordenadas leva a:

$$\psi_o(r,\theta\ ;\ r_1,0) = \frac{I(r\ \cos\ \theta - r_1)}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\ \cos\ \theta + r_1^2}} \qquad (24)$$

(coordenadas esféricas)

ou:

$$\psi_o(r,\theta\ ;\ r,0) = \frac{I(\frac{r}{r_1}\ \cos\ \theta - 1)}{\sqrt{1 + (\frac{r}{r_1})^2 - 2\ \frac{r}{r_1}\ \cos\ \theta}} \qquad (25)$$

CORREÇÕES AO POTENCIAL DE VELOCIDADE (ϕ_c) E FUNÇÃO DE CORRENTE (ψ_c) DE UMA FONTE, NUMA REGIÃO CÔNICA, NA AUSÊNCIA DE ESCOAMENTO

Se uma fonte for colocada em uma região cônica, definida por:

$$\theta \leq \alpha \qquad (26)$$

em coordenadas esféricas, o potencial de velocidade deverá satisfazer, além da equação de Laplace, à condição de escoamento paralelo à superfície cônica; matematicamente:

$$(\frac{\partial\phi}{\partial n})_{\theta=\alpha} = 0 \qquad (27)$$

O potencial definido pela equação (19) não satisfaz à condição (27). Postula-se que o novo potencial seja:

$$\phi(r,\theta\ ;\ r_1,0) = \phi_o(r,\theta\ ;\ r_1,0) + \phi_c(r,\theta) \qquad (28)$$

tal que:

a) $$\left.\frac{\partial\phi(r,\theta\ ;\ r_1,0)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0 \qquad (29)$$

b) $$\left.\frac{\partial\phi_c(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = - \left.\frac{\partial\phi_o}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} \qquad (30)$$

c) ϕ_c, a correção ao potencial ϕ_o, deve ser harmônica.

ϕ_c pode ser obtida através da equação (30). Para tal, ϕ_o (equação 19), será expresso em termos de funções cônicas, que são mais "naturais" para satisfazer à condição da equação (27). Lançando mão da equação (A28) do Apêndice, tem-se:

$$\phi_o(r,\theta\ ;\ r_1,0) = \frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C_k(-\cos\ \theta)}{ch(\pi k)}\ \cos\left(k\ \ln\ \frac{r}{r_1}\right) dk \qquad (31)$$

De (30) e (31):

$$\left.\frac{\partial\phi_c(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = \frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\ \alpha)}{ch(\pi k)}\ \text{sen}\,\alpha \cos\left(k\ \ln\ \frac{r}{r_1}\right) dk \qquad (32)$$

cuja solução é:

$$\phi_c(r,\theta) = \frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\ \alpha)C_k(\cos\ \theta)}{C'_k(\cos\ \alpha)\ ch(\pi k)}\ \cos\left(k\ \ln\ \frac{r}{r_1}\right) \qquad (33)$$

onde

$$C'_k(\cos\ \alpha) = \frac{dC_k(\cos\ \alpha)}{d(\cos\ \alpha)} \qquad (34)$$

Substituindo ϕ_c pela sua expressão (33) na equação de Laplace, em coordenadas cônicas, como expressa por IANINO FORTES et alii [5] conclui-se que ϕ_c é harmônica.

A função de corrente, ψ_c, pode ser obtida através das relações (3) a (6) e (33):

$$\frac{\partial\psi_c}{\partial r} = \text{sen}\alpha\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\alpha)C_k(\cos\theta)}{C'_k(\cos\alpha)\ ch(\pi k)}\ \cos\left(k\ln\ \frac{r}{r_1}\right)dk\right\} \qquad (35)$$

$$\frac{\partial\psi_c}{\partial\phi} = r^2\text{sen}\theta\ \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\alpha)C_k(\cos\theta)}{C'_k(\cos\alpha)\ ch(\pi k)} \cos\left(k\ln\ \frac{r}{r_1}\right)dk\right\} \qquad (36)$$

Integrando (35) e (36), obtem-se:

$$\psi_c = 4I\sqrt{\frac{r}{r_1}}\,\mathrm{sen}^2\theta\int_\infty^0 \frac{C'_k(-\cos\alpha)C'_k(\cos\theta)}{C'_k(\cos\alpha)\,\mathrm{ch}(\pi k)}\left[\frac{1}{2}\cos\left(k\ln\frac{r}{r_1}\right) + \right.$$

$$\left. + k\,\mathrm{sen}\left(k\ln\frac{r}{r_1}\right)\right]\frac{dk}{1-4k^2} \qquad (37)$$

O POTENCIAL DE VELOCIDADE (ϕ_∞) E FUNÇÃO DE CORRENTE (ψ_∞) DE ESCOAMENTO NÃO-PERTURBADO, NUMA REGIÃO CÔNICA

Supondo a existência de um escoamento não-perturbado, ou seja, um escoamento radial sem a presença de fontes ou sumidouros, numa região cônica, pode-se escrever a equação de Laplace em coordenadas cônicas, na forma:

$$r^2\frac{d^2\phi_\infty}{dr^2} + 2r\frac{d\phi_\infty}{dr} = 0 \qquad (38)$$

cuja solução é:

$$\phi_\infty = \frac{A}{r} \qquad (39)$$

A constante de integração foi igualada a zero pois é irrelevante, visto que $\vec{v} = \nabla\phi$. Conclui-se, das equações (15) e (39) que o escoamento radial não-perturbado corresponde ao escoamento devido a uma fonte de intensidade, A, colocada no vértice do duto cônico. Assim, a partir da equação (24) conclui-se, também, que, para $r_1 = 0$.

$$\psi_\infty = A\cos\theta \qquad (40)$$

O POTENCIAL DE VELOCIDADE (ϕ) E FUNÇÃO DE CORRENTE (ψ) DE UMA FONTE DENTRO DE UM DUTO CÔNICO, NA PRESENÇA DE UM ESCOAMENTO RADIAL

O potencial em um ponto (r,θ), dentro de um cone de semi-ângulo α, pode ser estabelecido pelo princípio da superposição, que se aplica às funções harmônicas. No presente estudo, o potencial de velocidade é definido pela superposição de dois escoamentos:

- escoamento radial não perturbado, devido a uma fonte de intensidade A, colocada no vértice do duto cônico;
- escoamento devido a uma fonte (ou sumidouro), colocada no eixo de simetria do cone.

Portanto:

$$\phi(r,\theta) = \phi_\infty + \phi_o + \phi_c \qquad (41)$$

e

$$\psi(r,\theta) = \psi_\infty + \psi_o + \psi_c \qquad (42)$$

onde os valores dos termos do lado direito são expressos pelas equações (19), (33), (39) e (25), (37), (40), respectivamente.

REFERÊNCIAS

[1] Abramowitz, H. & Stegun, I.A. (Ed.) - Handbook of Mathematical Functions, New York, Dover Publications, 1972, 1046p.

[2] Arfken, G. - Mathematical Methods for Physicists, 2^{nd}, ed., New York, Academic Press, 1970, 815p.

[3] Argyris, J.H. & Scharpf, D.W. - Two and three-dimensional potential flow by the method of singularities, Aeron. Journal, 73:959-961, 1969.

[4] Bird, R.B.; Stewart, W.E. & Lighifoot, E.N. - Transport Phenomena, New York, John Wiley and Sons, 1960, 780p.

[5] Ianino Fortes, M.C.; Fortes, M. & Von Rückert, E. - Estudo e solução da equação de Laplace em coordenadas cônicas. Experientiae, 28(7), 1982.

[6] Kellog, O.D. - Foundations of Potential Theory, New York, John Wiley and Sons, 1975, 848p.

[7] Klein, A. & Mathew, J. - Incompressible potential flow solution for axisymmetric body-duct configurations, Z. Flugwiss, 20(6): 221-228, 1972.

[8] Levine, P. - Incompressible potential flow about axially symmetric bodies in ducts, J. Aeron. Sci., 25:33-36, 1958.

[9] Morse, P.M. & Feshbach, H. - Methods of Theoretical Physics, New York, McGraw-Hill, 1953, 1978p.

[10] Smythe, W.R. - Flow around a sphere in a circular tube, Phys. of Fluids, 4:756-759, 1961.

[11] Weinstein - On axially symmetric flows, Quart. of Appl. Math., 4:429-444, 1948.

APÊNDICE

Desenvolvem-se, neste apêndice, propriedades, de funções cônicas, essenciais ao estudo de potenciais.

EXPRESSÕES INTEGRAIS DE FUNÇÕES CÔNICAS

A função de Legendre $P_n(\cos\theta)$ pode ser expressa na forma de Mehler (1,2):

$$C_k(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(n+\frac{1}{2})z}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,dz \tag{A1}$$

onde:

$$n = \frac{1}{2} + ki \tag{A2}$$

como:

$$\cos(i\alpha) = \mathrm{ch}\,\alpha\ , \tag{A3}$$

tem-se:

$$C_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(kz)}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,dz \tag{A4}$$

Outra expressão útil é (1,2):

$$C_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\mathrm{ch}(k\pi)\int_0^\infty \frac{\cos(kz)}{\sqrt{\mathrm{ch}z + \cos\theta}}\,dz \tag{A5}$$

O integrando na equação (A4) apresenta uma singularidade aparente para $\theta = z$. O valor da integral é, entretanto, finito, como se mostrará a seguir.

A equação (A4) pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$C_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{ch}(k\theta)\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(kz) - \mathrm{ch}(k\theta)}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,dz \tag{A6}$$

A primeira integral do lado direito pode ser apresentada em termos da integral elíptica completa:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\mathrm{sen}^2 t}}\ , \tag{A7}$$

pela introdução da variável t, definida por:

$$\mathrm{sen}t\ \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \mathrm{sen}\,\frac{z}{2} \tag{A8}$$

Logo:

$$\int_0^\theta \frac{dz}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} = \int_0^\pi \frac{\dfrac{2\cos t\ \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos(z/2)}\,dt}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 t\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} - \cos\theta}} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\mathrm{sen}^2 t}} \tag{A9}$$

onde

$$k = \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \tag{A10}$$

Portanto:

$$\int_0^\theta \frac{dz}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} = 2\ k(\text{sen}\ \frac{\theta}{2}) \qquad (A11)$$

Aplicando a regra de L'Hospital ao segundo membro, para $z \to \theta$, este anula-se. Pode-se desta maneira, escrever:

$$C_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\ ch(k\theta)\ K(\text{sen}\ \frac{\theta}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{ch(kz) - ch(k\theta)}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\ dz \qquad (A12)$$

RECÍPROCA DA DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS EXPRESSO EM TERMOS DE FUNÇÕES CÔNICAS

Da figura 4, conclui-se que:

$$D^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\ \cos\psi \qquad (A13)$$

onde:

$$\cos\psi = \cos\theta_1\ \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\ \text{sen}\theta_2\ \cos\Delta w \qquad (A14)$$

Definindo:

$$R_1 = e^{\sigma_1} \qquad e \qquad R_2 = e^{\sigma_2}\ , \qquad (A15)$$

Obtém-se de (A13) e (A15):

$$D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ e^{-1/2(\sigma_1 + \sigma_2)} \left\{ ch(\sigma_1 - \sigma_2) - \cos\psi \right\}^{-1/2} \qquad (A16)$$

Afim de se expressar D^{-1} em termos de funções cônicas, recorre-se à transformada de Fourier de cossenos e à sua inversa (1):

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx)\ f(x)\ dx \qquad (A17)$$

e

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx)\ F(k)\ dk \qquad (A18)$$

Substituindo (A18) em (A17), obtém-se:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx)\ dk \int_0^\infty \cos(kz)\ f(z)\ dz \qquad (A19)$$

Tomando:

$$f(x) = (chx - \cos\psi)^{-1/2} \qquad (A20)$$

e chamando:

$$x = \sigma_1 - \sigma_2\ , \qquad (A21)$$

pode-se escrever (A19) na forma:

$$\frac{1}{\sqrt{ch(\sigma_1 - \sigma_2) - \cos\psi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\cos\left[k(\sigma_1 - \sigma_2)\right]\int_0^\infty \frac{\cos(kz)}{\sqrt{chz - \cos\psi}}\,dz \qquad (A22)$$

A equação (A5) pode ser escrita na forma:

$$C_k(-\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,ch(k\pi)\int_0^\infty \frac{\cos(kz)}{\sqrt{chz - \cos\theta}}\,dz \qquad (A23)$$

Mutatis mutandis, as equações (A22) e (A23) levam a:

$$\frac{1}{ch(\sigma_1 - \sigma_2) - \cos\psi} = \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\cos(k(\sigma_1 - \sigma_2))}{ch(k\pi)}\,C_k(-\cos\psi)\,dk \qquad (A24)$$

Substituindo (A24) em (A16), resulta:

$$D^{-1} = e^{-1/2(\sigma_1 + \sigma_2)}\int_0^\infty \frac{ck(-\cos\psi)}{ch(k\pi)}\cos(k(\sigma_1 - \sigma_2))\,dk \qquad (A25)$$

Usando as relações (A15), obtém-se:

$$e^{-1/2(\sigma_1 + \sigma_2)} = (R_1 R_2)^{-1/2} \qquad (A26)$$

$$\cos(k(\sigma_1 - \sigma_2)) = \cos(k\ln\frac{R_1}{R_2}) \qquad (A27)$$

As equações (A25-A27) levam ã expressão final para D^{-1} em termos da função cônica $C_k(-\cos\ )$:

$$D^{-1} = \frac{1}{R_1 R_2}\int_0^\infty \frac{C_k(-\cos\psi)}{ch(k\pi)}\cos(k\ln\frac{R_1}{R_2}\,dk) \qquad (A28)$$

ABSTRACT

A detailed study of the velocity potential and stream function in conical regions is presented. A closed analytical solution was obtained for the problem of flow in conical ducts, in the presence of a source (or sink) placed axially within the cone. A "correction" potential, expressed in terms of conical functions, was postulated so that the boundary condition at the conical surface and Laplace's equation could be satisfied.

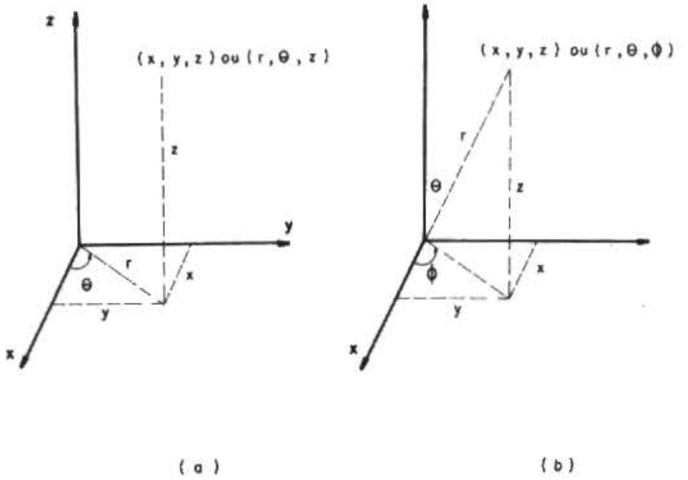


Figura 1. (a) Coordenadas cilīndricas;
(b) Coordenadas esfēricas. A coordenada ϕ não deve ser confundida com o potencial de velocidade

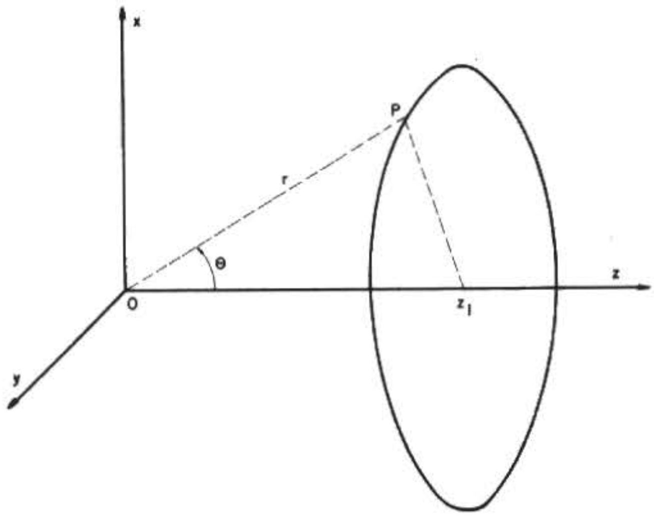


Figura 2. Sistemas de coordenadas esfērocas com uma fonte em 0

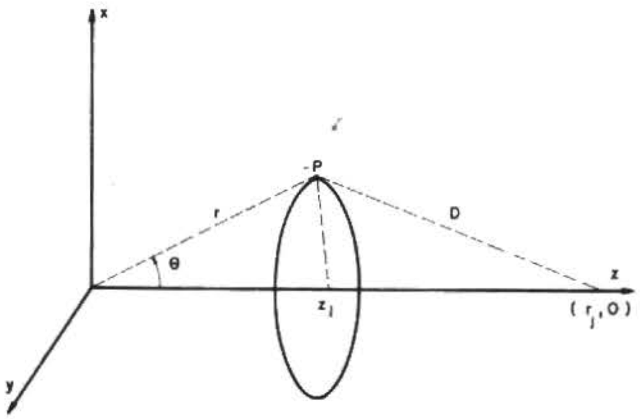


Figura 3. Sistema de coordenadas esfēricas com uma fonte em $z = r_1$

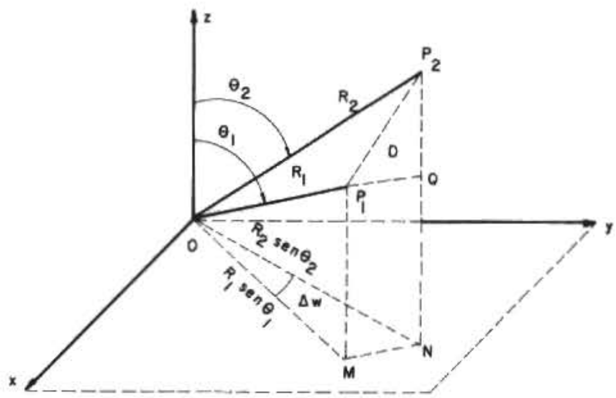


Figura 4. Visualização dos pontos $P_1(R_1, \theta_1, \omega_1)$ e $P_2(R_2, \theta_2, \omega_2)$

ESCOAMENTO POTENCIAL EM UM DUTO CÔNICO NA PRESENÇA DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE FONTES E SUMIDOUROS

MARIA DA CONCEIÇÃO IANINO FORTES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA — UFV — MG
MAURI FORTES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA — UFV — MG
JERZY TADEUZ SIELAWA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA — ITA — SP

SUMÁRIO

Apresentam-se as equações que descrevem o escoamento potencial em um duto cônico, na presença de uma distribuição contínua de fontes e sumidouros. A partir destas equações, obteve-se a equação de Fredholm de primeira espécie que, se resolvida, fornecerá o potencial devido ao escoamento radial em um duto cônico, na presença de uma superfície qualquer de revolução. A solução numérica para o problema de escoamento potencial, devido a uma distribuição discreta de fontes e sumidouros, é apresentada. A solução numérica exige o desenvolvimento das funções cônicas em séries de potências. O desenvolvimento é discutido no Apêndice.

INTRODUÇÃO

A abordagem do problema de escoamento potencial de fluidos ao longo de corpos de revolução (axissimétricos) pode ser feita por dois métodos. O primeiro método, também chamado de direito, envolve a resolução da equação de Laplace sujeita às condições de escoamentos tangenciais às paredes dos dutos e ao corpo de revolução, especificado por uma expressão analítica. Este método, na maior parte das vezes, gera soluções complexas que requerem técnicas numéricas sofisticadas.

O método indireto, ou das singularidades, consiste em substituir o corpo por uma distribuição de fontes e sumidouros [3,6,7]. No caso axissimétrico, aparece o problema de as velocidades induzidas pelas fontes puntuais, nos seus eixos, tornarem-se infinitas. Os métodos de solução são classificados de acordo com o modo de evitar esta dificuldade [6]. Alguns destes métodos tornaram-se clássicos e são, brevemente, descritos, a seguir.

Uma vez que as soluções exatas dos problemas envolvendo o método de singularidade só são possíveis em casos simples, Munk, citados por MORAN [8], desenvolveu a teoria de corpos finos, em 1924. Esta teoria postula que o escoamento ao longo de qualquer seção transversal é aproximadamente independente do escoamento ao longo de qualquer outra seção transversal existente. MORAN [8] aplicou esta teoria a corpos cujas extremidades sejam parabólicas e cuja distribuição de área transversal seja possível de expansão em séries de potência ao redor do ponto de estagnação.

Os outros métodos de singularidade consistem em representar o corpo por fontes (ou sumidouros) puntuais ou em forma de anéis, discos e dipolos, colocados, não no eixo de simetria, mas, ao longo do contorno dos corpos [6].

O presente trabalho teve como objetivo a análise do escoamento potencial de fluidos incompressíveis em dutos cônicos. Em trabalhos anteriores os autores apresentaram algumas proprie dades de funções cônicas, a solução da equação de Laplace em coordenadas cônicas [4] e a solução analítica para o problema do potencial devido a uma fonte (ou sumidouro) colocada axialmente em um duto cônico, na presença de um escoamento radial [5].

Especificamente, este trabalho visa:

- apresentar a solução numérica para o escoamento potencial em um duto cônico, na presença de fontes e sumidouros.
- analisar o escoamento potencial em um duto cônico, na presença de uma distribuição contínua de fontes e sumidouros.
- apresentar a equação de Fredholm, cuja solução reproduz a superfície de um corpo axissimétrico.
- apresentar as expressões para a expansão em série de funções cônicas.

<u>O potencial de velocidade e função de corrente para o escoamento radial na presença de uma distribuição contínua de fontes e sumidouros</u>

IANINO FORTES et alii [5] desenvolveram as seguintes expressões para o potencial de velocidade, ϕ, e função de corrente, ψ, para escoamento radial em um duto cônico, na presença de uma fonte ou sumidouro.

$$\phi(r,\theta) = \phi_\infty + \sigma_o + \phi_c \tag{1}$$

sendo

$$\phi_\infty = \frac{A}{r} \tag{2}$$

$$\phi_o = \frac{I}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\cos + r_1^2}} \tag{3}$$

$$\phi_c = \frac{I}{\sqrt{rr_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(\cos\alpha)C_k(\cos\theta)}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \cos(k\ln\frac{r}{r_1})dk \tag{4}$$

$$\psi(r,\theta) = \psi_\infty + \psi_o + \psi_c \tag{5}$$

sendo

$$\psi_\infty = A\cos\theta \tag{6}$$

$$\psi_o = \frac{I(\frac{r}{r_1}\cos\theta - 1)}{\sqrt{1 + (\frac{r}{r_1})^2 - 2\frac{r}{r_1}\cos\theta}} \tag{7}$$

$$\psi_c = 4I\sqrt{\frac{r}{r_1}}\,sen^2\theta \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\alpha)C'_k(\cos\theta)}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \left[\frac{1}{2}\cos(k\ln\frac{r}{r_1}) + k\,sen\,(k\ln\frac{r}{r})\right]\frac{dk}{1+4k^2} \tag{8}$$

As equações acima estão expressas em coordenadas esféricas. O potencial de velocidade resultante ϕ em um ponto (r,θ) é composto do potencial (ϕ_∞) devido a uma fonte de intensidade A, colocada no vértice do cone; do potencial (ϕ_o) devido a uma fonte de intensidade I, colocada no espaço livre numa posição (r,ϕ) e de uma "correção" de potencial (ϕ_c) que faz com que a soma $\phi_o + \phi_c$ satisfaça à condição de escoamento tangencial na parede do cone. As funções cônicas $C_k(\cos\alpha)$ e $C'_k(\cos\alpha)$ são definidas no apêndice. Analogamente, definem-se os termos que constituem ψ.

O tratamento matemático do escoamento devido a uma distribuição contínua de fontes e sumidouros, ao longo do eixo de um duto cônico, é simplificado se se utilizarem coordenadas cilíndricas. Neste caso, os potenciais de velocidade e funções de corrente tornam-se:

$$\phi_\infty = \frac{A}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{9}$$

$$\phi_o = \frac{I}{\sqrt{r^2 + (a - z_1)^2}} \tag{10}$$

$$\phi_c = \frac{I}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\alpha)C_k(z(r^2+r^2)^{-1/2})}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \cdot \cos(k\ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{z_1})\,dk \tag{11}$$

$$\psi_\infty = \frac{Az}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{12}$$

$$\psi_o = \frac{I(z - z_1)}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \tag{13}$$

$$\psi_c = 4I\frac{r^2}{(r^2+r^2)^{3/4}\sqrt{z_1}} \int_o^\infty \frac{C'_k(-\cos\alpha)C'_k\left[z(r^2+r^2)^{-1/2}\right]}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \cdot \left\{\frac{1}{2}\cos(k\ln\frac{\sqrt{r^2+r^2}}{z_1}) + k\ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{z_1}\right\}\frac{dk}{1+4k^2} \tag{14}$$

Se, no lugar de uma única fonte (ou sumidouro existir uma distribuição contínua de fontes e sumidouros, ao longo do eixo z, de intensidade de $I(x)$, na região entre $z = s_1$ e $z = s_2$, será possível obter, por superposição, o potencial resultante, dada a linearidade da equação de Laplace. As equações correspondentes às expressões (9-14) serão:

$$\phi_\infty = \frac{A}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{15}$$

$$\phi_o = \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(z_1)dz_1}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \tag{16}$$

$$\phi_c = \frac{1}{\sqrt{r^2+r^2}}\int_o^\infty dk \left\{ \frac{C'_k(-\cos\alpha)C_k(z(r^2 + r^2)^{-1/2})}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(z_1)}{\sqrt{z_1}} \cos(k\ln \frac{\sqrt{r^2 + r^2}}{z_1})\, dz_1 \right\} \tag{17}$$

$$\psi_\infty = \frac{Az}{\sqrt{r^2 + r^2}} \tag{18}$$

$$\psi_o = \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(z_1)(z - z_1)}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}}\, dz \tag{19}$$

$$\psi_c = \frac{4r^2}{(r^2 + r^2)^{3/4}}\int_o^\infty \frac{dk}{1 + 4k^2} \left\{ \frac{C'_k(-\cos\alpha)C'_k\left[z(r^2 + r^2)^{-1/2}\right]}{C'_k(\cos\alpha)ch(\pi k)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(z_1)}{\sqrt{z_1}} \left\{\frac{1}{2} \cos k\ln(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z_1})\right\} + k\mathrm{sen}\left[k\ln(\frac{r^2 + z^2}{z_1})\right] dz_1 \right\} \tag{20}$$

<u>Distribuição da intensidade de fontes equivalentes a um determinado corpo de revolução, numa região cônica</u>

Por definição, uma linha de corrente é uma curva traçada de modo que a velocidade de uma partícula é tangente a ela. Não há, portanto, escoamento através e sim ao longo da linha de corrente, sob condições de regime estacionário. A expressão analítica para a linha de corrente é dada pela função de corrente (ψ).

No caso de um corpo colocado em um escoamento potencial incompressível, a velocidade do fluido deve ser tangencial à superfície do corpo. Logo, uma linha de corrente, se fechada, pode ser considerada como um corpo.

O presente problema pode, portanto, ser posicionado da seguinte maneira: - É dado um corpo sólido, através de sua expressão analítica e deseja-se obter uma distribuição de fontes e sumidouros, tal que o contorno das linhas de corrente produzidas por estas fontes e sumidouros reproduza o corpo sólido.

Uma linha de corrente origina-se em uma fonte e termina em um sumidouro. Dadas n fontes e sumidouros, de intensidade I_K, a condição

$$\sum_{K=1}^{n} I_K = 0 \quad , \tag{21}$$

ou, no caso de distribuição contínua de fontes e sumidouros, $I(x)$, contidos em $s_1 \leq x \leq s_2$, a condição

$$\int_{s_1}^{s_2} I(x)dx = 0 \tag{22}$$

garantirá a existência de uma linha de corrente fechada e, portanto, a existência de um corpo sólido finito, gerado pela distribuição das fontes e sumidouros.

O ponto de estagnação, ou seja, o ponto onde a velocidade do fluido é zero, fornece o valor da função de corrente que determinará, após o traçado da linna de corrente, o contorno do corpo (Figura 1). Devido ao fato de o escoamento, na ausência de fontes e sumidouros, ser radial e devido à simetria do corpo de revolução, pode-se dizer que o valor da linha de corrente coincidente com o eixo do duto cônico coincide com a linha de corrente que gera o corpo. Desta maneira, para $\theta = 0$, as expressões (6, 8) fornecem:

$$\psi = A - \sum_{k=1}^{n} I_K \quad , \tag{23}$$

no caso de distribuição discreta de fontes e,

$$\psi = A - \int_{s_1}^{s_2} I(x)dx \tag{24}$$

no caso de distribuição contínua.

Se o corpo for fechado, as equações (23,24) levam à seguinte expressão para a função de corrente.

$$\psi = A \tag{25}$$

Admitindo que a equação de contorno do corpo seja:

$$r = f(z) \qquad z_a \leq z \leq z_b \quad , \tag{26}$$

obtém-se, das expressões (18-20,25,26), a equação integral de Fredholm:

$$F(z) + \int_{s_1}^{s_2} M(z,z_1)\ I(z_1)dz_1 = 0 \qquad (27)$$

onde

$$F(z) = \frac{Az}{\sqrt{f^2(z) + z^2}} - A \qquad (28)$$

$$M(z,z_1) = \frac{z - z_1}{\sqrt{f^2(z) + (z - z_1)^2}} + \frac{rf^2(z)}{(f^2(z) + z^2)^{3/4}} \qquad (29)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{C'_k(-\cos\alpha)C'_k\left[z(f^2(z) + z^2)^{-1/2}\right]}{\sqrt{z_1}\ C'_k(\cos\alpha)\ ch(\pi k)} \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{1}{2} \cos\left[k\ln \frac{\sqrt{f^2(z) + z^2}}{z_1}\right] + \right.$$

$$\left. + k\ \mathrm{sen}\left[k\ln \frac{\sqrt{f^2(z) + z^2}}{z_1}\right]\right\} \frac{dk}{1 + 4k^2} \qquad (30)$$

A expressão para $M(z_1,z_1)$, equação (29), é chamada de Kernel da equação integral de Fredholm de primeira espécie.

A solução da equação (27), fornecerá o valor da distribuição $I(x)$ de fontes e sumidouros. O potencial de velocidade e a função de corrente podem ser obtidas utilizando as equações (9-14). Não se objetivou, neste trabalho, a solução da Equação de Fredholm, dada a sua complexidade.

Solução numérica para a função de corrente em um escoamento potencial em um duto cônico, na presença de uma fonte e um sumidouro

A solução numérica das equações (12-14) foi obtida, para o caso da presença de uma única fonte, de intensidade unitária ($I = 1$), colocada dentro de um duto cônico de semi-ângulo $\alpha = 45^o$, à distância $r_1 = 1$, do vértice do cone. A fonte correspondente ao escoamento não-perturbado, foi também tomada como unitária ($A = 1$).

Os valores escolhidos para θ variaram de 5^o a 45^o, em intervalos de 5^o; os valores da relação r/r_1, variaram de 0 a 2,5, em intervalos de 0,1. Os valores de ψ escolhidos foram: -0,1; -0,06; -0,02; 0,00; 0,10; 0,50; 1,00 e 1,60.

A integral da equação (14) foi obtida numericamente pelo método adaptado de quadradura de Simpson, rotina SQUANK (disponível no I.T.A., São José dos Campos, S.P.). Este integrador robusto ou equivalente deve ser utilizado dado que o integrando do lado direito da equação (14) é uma função oscilatória de k e que os fatores $C_k(\cos\theta)$ crescem exponencialmente com k.

Uma vez que, a cada razão r/r_1, não corresponde o valor exato de ψ desejado, utilizaram-se interpolações. O quadro 1 relaciona os valores de r/r_1, com os valores de θ e ψ.

A Figura 2 mostra o gráfico de ψ como função de r/r_1, para $\theta = 10^o, 20^o, 30^o$ e 40^o. Na Figura 3, tem-se as linhas de corrente para a metade do cone.

De acordo com a equação (25), a linha de corrente correspondente a:

$$\psi = A - I = 1 - 1 = 0 \qquad (31)$$

fornece a linha divisória entre os escoamentos "externo" e "interno", ou seja, a superfície do corpo "gerado" pela fonte. Os valores negativos de ψ (Figura 3) correspondem às linhas de corrente do escoamento externo ao corpo; os valores positivos, ao escoamento interno. O escoamento interno pode ser descartado, pois é fictício, se se considerar a parte em negrito da Figura 3, para $\psi = 0$, como sendo a superfície de um corpo sólido.

É possível obter o valor exato de ψ na superfície do cone, afim de compará-lo com os dados numéricos. Para $\theta = \alpha = 45^o$ e sabendo-se que ψ, na superfície do cone, não depende da relação r/r_1, obtém-se, para $r/r_1 \to 0$, das equações (6, 7,8):

$$\psi_\infty = A\cos\alpha = A\cos 45^o \qquad (32)$$

$$\psi_o = -I = 1 \qquad (33)$$

$$\psi_c = 0 \qquad (34)$$

ou

$$\psi = \psi_\infty + \psi_o + \psi_c = -0{,}2929 \qquad (35)$$

O valor numérico obtido foi 0,2930, indicando uma precisão adequada.

A metodologia utilizada para a análise de uma fonte e de um sumidouro, superposto a um escoamento radial não perturbado, é análoga à descrita para o caso de apenas uma fonte. A tabela 2 fornece valores de r/r_1 para θ e ψ dados. A Figura 4 mostra os gráficos de ψ versus r/r_1, para diferentes valores de θ. Tem-se, na Figura 5, as linhas de corrente dos escoamentos externo e interno. Como na Figura 5, apenas uma metade do cone é mostrada; as linhas são simétricas em relação ao eixo.

A equação (25) mostra que:

$$\psi = A - I_1 - I_2 = 1 \qquad (36)$$

corresponde à linha divisória entre os escoamentos externo e interno. Além disso, como $\Sigma I_n = 0$, a linha divisória $\psi = 1$ deve ser fechada. Os valores de $\psi < 1$ correspondem às linhas de corrente do escoamento externo. Todas as linhas de escoamento interno originam-se na fonte e acabam no sumidouro, de acordo com a intuição física. O valor exato obtido para ψ na superfície cônica é 0,7071.

TABELA 1 - Valores de r/r_1 para diversos valores de θ e de ψ

ψ \ θ	5^o	10^o	15^o	20^o	25^o	30^o	35^o	40^o
-0,20	–	–	–	–	–	–	–	–
-0,06	–	–	–	0,00	0,54	0,65	0,76	1,01
-0,02	–	–	0,52	0,58	0,64	0,70	0,81	1,10
0,00	0,55	0,56	0,58	0,62	0,66	0,73	0,84	1,15
0,10	0,86	0,78	0,74	0,74	0,76	0,82	0,95	1,53
0,50	0,96	0,95	0,93	0,95	1,00	1,13	1,70	–
1,00	1,01	1,03	1,07	1,14	1,36	–	–	–
1,60	1,08	1,20	1,45	–	–	–	–	–

TABELA 2 - Valores de r/r_1 para diversos valores de θ e de ψ

ψ \ θ	5^o	10^o	15^o	20^o	25^o	30^o	35^o	40^o
0,85	–	–	–	–	–	–	0,56	0,81
	–	–	–	–	–	–	3,66	2,81
0,91	–	–	–	–	–	0,58	0,71	0,96
	–	–	–	–	–	3,98	3,25	2,34
0,96	–	–	–	0,12	0,60	0,68	0,79	1,09
	–	–	–		4,00	3,41	2,90	2,10
1,00	0,60	0,60	0,61	0,63	0,67	0,73	0,84	1,25
	3,95	3,90	3,79	3,64	3,41	3,11	2,69	1,82
1,10	0,84	0,78	0,73	0,73	0,77	0,83	0,97	–
	2,40	2,73	2,91	2,98	2,90	2,70	2,32	–
1,30	9,93	0,88	0,86	0,87	0,90	0,99	1,26	–
	2,18	2,35	2,53	2,55	2,42	2,21	1,73	–
2,10	1,02	1,04	1,11	1,27	–	–	–	–
	1,98	1,97	1,89	1,70	–	–	–	–
2,70	1,10	1,36	–	–	–	–	–	–
	1,88	1,56	–	–	–	–	–	–

REFERÊNCIAS

[1] Abramowitz, H. & Stegun, I.A. (Ed.). – Handbook of Mathematical Functions, New York, Dover Publications, 1972

[2] Arfken, G. – Mathematical Methods for Pgysicists, 2^{nd}. ed., New York, Academic Press, 1970, 815p.

[3] Argyris, J.H. & Scharpf, D.W. – Two and three-dimensional potential flow by the method of singularities, Aeron. Journal, 73:959-961, 1969.

[4] Ianino Fortes, M.C.; Fortes, M. & Von Rückert, E. – Estudo e solução da equação de Laplace em coordenadas cônicas, Experientiae, 28(7), 1982.

[5] Ianino Fortes, M.C.; Fortes, M. e Sielawa, J.T. – Potencial de uma fonte dentro de um duto cônico na presença de escoamento radial. A publicar.

[6] Klein, A. & Mathen, J. – Incompressible potential flow solution for axisymmetric body-duct configurations, Z. Flugwiss, 20(6):221-228, 1972.

[7] Levine, P. – Incompressible potential flow about axually symmetric bodies in ducts, J. Aeron. Sci., 25:33-36, 1958.

[8] Moran, J.P. – Line source distributions and slender-body theory, J. of Fluid Mech., 17:285-304, 1963.

APÊNDICE

Desenvolvem-se, neste apêndice, as funções cônicas, em séries de potências. As expansões facilitam enormemente a solução numérica da equação (8).

1. Expansão em série de funções cônicas

A função de Legendre (1,2):

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(n+1/2)z}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,dz \tag{A1}$$

pode ser escrita na forma (5):

$$C_k(\cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(ikz)}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,dz \tag{A2}$$

sendo

$$C_k(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) \tag{A3}$$

$$n = -\frac{1}{2} + ki \tag{A4}$$

A função de Legendre pode ser expressa em termos da seguinte série hipergeométrica (1):

$$P_\nu(x) = F\left[-\nu;\ \nu+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right] \tag{A5}$$

Portanto,

$$C_k(\cos\theta) = P_{-\frac{1}{2}+ki}(\cos\theta) = F\left[\frac{1}{2} - ki;\ \frac{1}{2} + ki;\ 1;\ \frac{1-\cos\theta}{2}\right] \tag{A6}$$

Da identidade trigonométrica:

$$\frac{1-\cos\theta}{2} = \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} \tag{A7}$$

Obtêm-se:

$$C_k(\cos\theta) = F\left[\frac{1}{2} - ki;\ \frac{1}{2} + ki;\ k;\ \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{A8}$$

A expansão em série da série hipergeométrica leva a (2):

$$F(A;B;C;\zeta) = 1 + \frac{AB}{C}\zeta + \frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)}\zeta^2 + \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{C(C+1)(C+2)}\zeta^3 + \ldots \tag{A9}$$

Das equações (A8) e (A9), tem-se:

$$C_k(\cos\theta) = 1 + \frac{(1/2)^2 + k^2}{1!}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{[(1/2)^2 + k^2][(3/2)^2 + k^2]}{2!}\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{4} + \frac{[(1/2)^2 + k^2][(3/2)^2 + k^2][(5/2)^2 + k^2]}{3!}\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{2} + \ldots \tag{A10}$$

ou

$$C_k(\cos\theta) = 1 + \frac{4k^2+1}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)(4k^2+5^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{2} + \ldots \tag{A11}$$

A seguinte expressão também é útil:

$$C_k(-\cos\theta) = 1 + \frac{4k^2+1}{2^2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3)}{2^2\cdot 4^2}\cos^4\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k\ +3^2)(4k\ +5^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cos^6\frac{\theta}{2} + \ldots \tag{A12}$$

Das equações (A11) e (A12), conclui-se que:

$$C_k(\cos 0) = C_k(-\cos\pi) = 1 \tag{A13}$$

e

$$C_k(\cos\pi) = C_k(-\cos 0) = \infty \tag{A14}$$

2. <u>Derivadas das funções cônicas</u>

Por definição

$$C'_k(\cos\theta) = \frac{dC_k(\cos\theta)}{d\cos\theta} \tag{A15}$$

Portanto, da equação (A11):

$$C'_k(\cos\theta) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{4k^2+1}{2^2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\,2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)(4k^2+5^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\,3\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\,4\ \ldots\right\} \tag{A16}$$

Em particular,

$$C'_k(\cos 0) = -\frac{1}{8}(4k^2+1) \tag{A17}$$

Analogamente:

$$C'_k(-\cos\theta) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{4k^2+1}{2^2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\,2\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{(4k^2+1)(4k^2+3^2)(4k^2+5^2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\,3\cos^4\frac{\theta}{2} + \ldots\right\}, \tag{A18}$$

As derivadas $C'_k(\cos\theta)$ e $C'_k(-\cos\theta)$ podem, também, ser apresentadas na forma integral. Fazendo uso da fórmula de recorrência para funções de Legendre (1,2):

$$(2n+1)(\zeta^2-1)\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} = n(n+1)\left[P_{n+1}(\zeta) - P_{h-1}(\zeta)\right] \tag{A19}$$

onde n é um número complexo arbitrário e, recorrendo à equação (A1), substituindo ζ por $\cos\theta$, tem-se:

$$(2n+1)(\cos\theta-1)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = n(n+1)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{\int_0^\theta \frac{\cos\left[(n+3/2)z\right]}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz - \int_0^\theta \frac{\cos\left[n-1/2)z\right]}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz\right\} =$$

$$= n(n+1)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left[(n+3/2)z\right]-\cos\left[(n-1/2)z\right]}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz \tag{A20}$$

ou

$$(2n+1)\text{sen}^2\theta\,\frac{dP_n\cos\theta}{d(\cos\theta)} = 2n(n+1)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\text{sen}\left[(n+1/2)z\right]\text{sen}z}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz \tag{A21}$$

Lançando mão das equações (A4) e (A21), tem-se:

$$2ki\ \text{sen}^2\theta\,\frac{dC_k(\cos\alpha)}{d\cos\theta} = -2\left[k^2+\frac{1}{4}\right]\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\text{sen}(kiz)\text{sen}z}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz \tag{A22}$$

Utilizando a identidade:

$$\text{sen}(i\alpha) = i\,\text{sh}\alpha\ , \tag{A23}$$

Obtém-se:

$$\frac{dC_k(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = -\frac{\sqrt{2(4k^2+1)}}{4\ \text{sen}^2\theta}\int_0^\theta \frac{\text{sh}(kz)\text{sen}z}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}dz \tag{A24}$$

Como a integral acima possui uma singularidade aparente em $z=\theta$, pode-se efetuar um desenvolvimento análogo ao apresentado por IANINO FORTES et alii [5], levando à expressão:

$$\frac{dC_k(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = -\frac{\sqrt{2(4k^2+1)}}{4\pi k^2\text{sen}\ \theta}\left\{\sqrt{2}\ \text{sh}(k\theta)\text{sen}\ \ K(\text{sen}\ \frac{\theta}{2}) + \int_0^\theta \frac{\text{sh}(kz)\text{sen}z - \text{sh}(k\theta)\text{sen}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}\right\} \tag{A25}$$

sendo K, a integral elíptica completa, definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k\ \text{sen}\ t}} \tag{A26}$$

Substituindo θ por $\pi-\theta$, nas equações (A24) e (A25), obtém-se as expressões para

$$\frac{dC_k(-\cos\theta)}{d(-\cos\theta)}$$

ABSTRACT

The potential flow in a conical duct, in the presence of a continuous or discrete distribution of sources and sinks is analysed. From the derived equations, Fredholm's integral equation of the first kind was obtained. If solved, Fredholm's equation will give the radial flow potential in a conical duct, in the presence of any given revolution surface. The numerical solution of the potential flow problem due to a discrete distribution of sources and sinks is presented. The numerical solution required the development of conical functions in power series. This development is discussed in the Appendix.

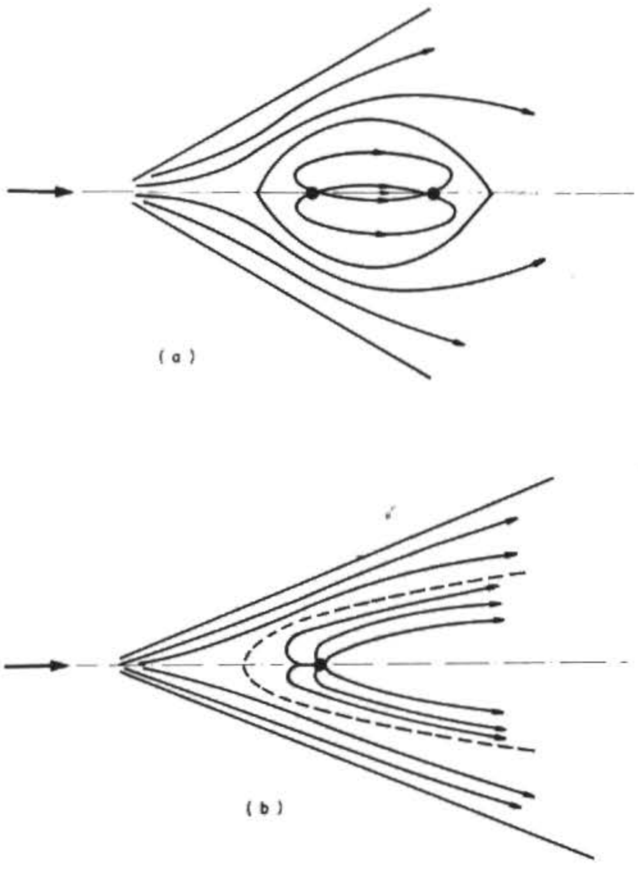


Figura 1. a) Linhas do escoamento de uma fonte, superposta ao escoamento não-perturbado cônico; b) Fonte e sumidouto de igual intensidade

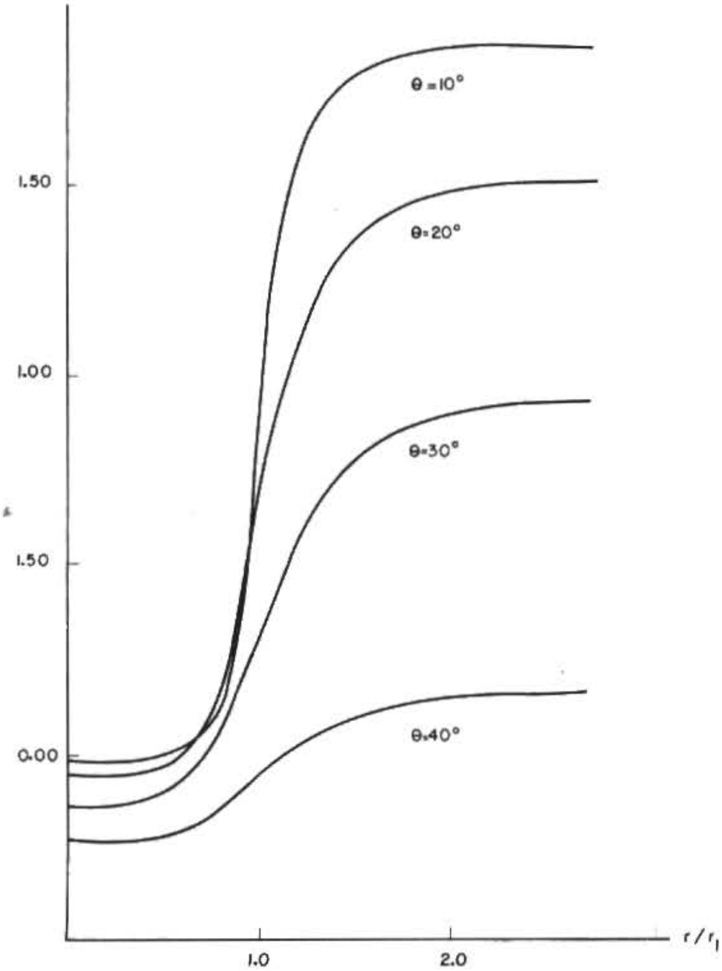


Figura 2. Gráfico de ψ vs. r/r_1 para valores fixos de θ = 10^0, 20^0, 30^0, 40^0

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. IV, nº 4, 1982

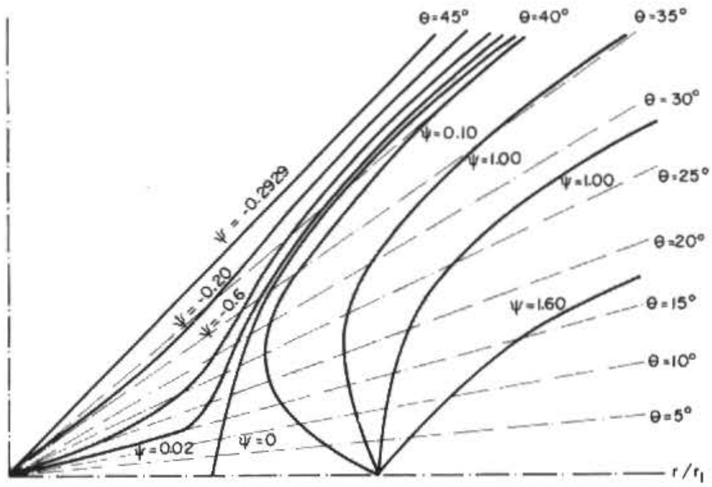


Figura 3. Escoamento no semi-cone do exemplo 1

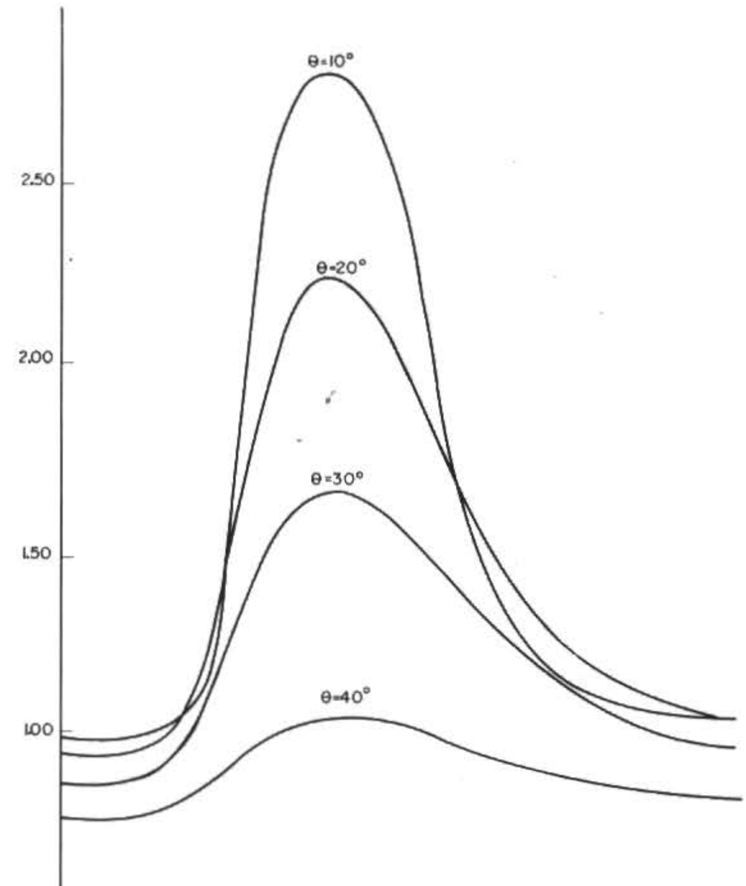


Figura 4. Gráfico de ψ vs. r/r_1 para valores fixos de θ = 10°, 20°, 30°, 40°

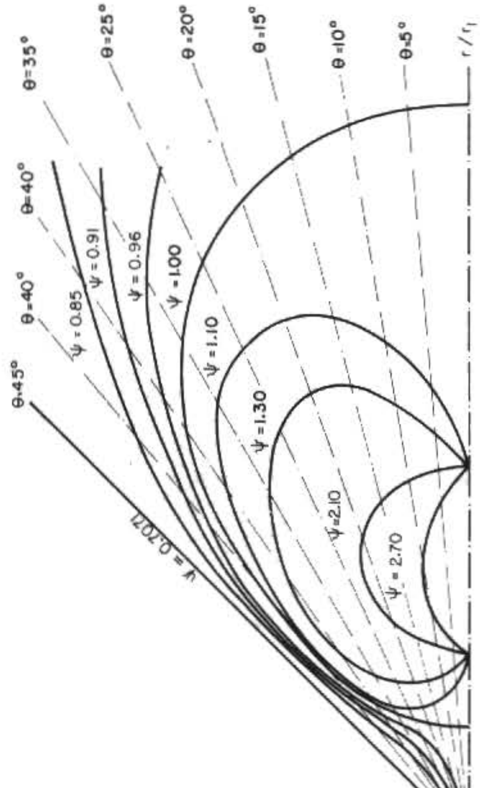


Figura 5. Escoamento no semi-cone do exemplo 2

MODELO MULTIFLUÍDICO PARA OS ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

ANTONIO MAC DOWELL DE FIGUEIREDO
PROGRAMA DE ENGENHARIA MECÂNICA — COPPE/UFRJ

SUMÁRIO

Desenvolveu-se um modelo para descrição analítica dos escoamentos multifásicos, que constitui uma generalização do "Modelo Bifluídico" para os escoamento bifásicos. O modelo representa o campo discontínuo de escoamento como uma superposição virtual de campos contínuos para cada fase, associados à uma distribuição de probabilidade. É sugerida uma dupla representação das interfaces: uma interface virtual para cada par de fases e uma interface virtual entre uma fase e todas as outras.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem sido estimulado, com ênfase crescente, o desenvolvimento de modelos matemáticos que permitam uma descrição rigorosa do comportamento dos escoamentos multifásicos. Esta tendência decorre da necessidade generalizada de otimização do uso de energia nos processos térmicos e fluidomecânicos, mas, sobretudo, da evidente importância da análise termohidráulica de situações de acidentes em centrais nucleares.

Na verdade, tem-se presenciado uma certa proliferação de modelos analíticos para os escoamentos bifásicos. Apreciações críticas destes modelos foram feitas, entre outros, por Kocamustafaogullari [13], Ishii [12], Lee e Lyczkowski [14] e Sha e Soo [15]. A formulação de alguns destes modelos é baseada em idealizações bastante simplificadoras da condição real do escoamento; frequentemente, são extrapolados conceitos e correlações estabelecidos para os escoamentos monofásicos, sem que se atende para o fato de que a característica marcante dos escoamentos multifásicos é a presença de interfaces com movimento aleatório. Aparentemente, a dificuldade encontrada na aplicação destes modelos reside na inconsistência de algumas das idealizações e aproximações introduzidas. Comuns a todos os modelos para os escoamentos multifásicos são, por outro lado, as dificuldades inerentes ao estabelecimento dos modelos constitutivos auxiliares, necessários à completa descrição dos fenômenos envolvidos, e à hipóteses concernentes ao tratamento das interações interfaciais Drew e Lahey [8].

O objetivo do presente trabalho é apresentar um "Modelo Multifluídico", que sugere uma descrição analítica, formal e geral, dos escoamentos multifásicos. O desenvolvimento do modelo é baseado na equação geral de balanço, válida instantaneamente em cada ponto de uma região monofásica contínua, e na condição geral de compatibilidade, válida na interface entre regiões monofásicas vizinhas. O movimento aleatório das interfaces provoca uma intermitência local de fase no campo de escoamento; a presença de cada fase em um dado ponto é representado por uma função de intermitência, cuja média temporal é interpretada como a probabilidade de ocorrência da fase no ponto considerado.

O "Modelo Multifluídico", como exposto, constitui uma generalização do "Modelo Bifluídico" para escoamentos bifásicos Delhaye e Achard [4]; Delhaye [5]; Ishii [12]. A construção das "médias zonais" torna-se, porém, mais direta, devido à introdução da função de intermitência. A generalização citada se refere, sobretudo, à representação das ocorrências interfaciais. A construção de valores médios para as interações interfaciais é facilitada mediante o emprego de elementos da teoria das distribuições; é sugerida uma representação dupla das interfaces: uma interface virtual "média" correspondente a um par determinado de fases e uma interface virtual "média" para cada uma das fases. Os modelos constitutivos para o acoplamento entre as fases devem ser estabelecidos para estas representações.

FUNDAMENTOS

Seja $P(\mathbf{r})$ um ponto fixo no campo de escoamento; $\mathbf{r}$ denota o seu vetor posição. Se, no instante t, o ponto $P(\mathbf{r})$ estiver contido numa região monofásica, a formulação local e instantânea dos princípios de conservação tem a forma, Truesdell e Toupin [17]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v}\,\psi + \phi) - \rho\dot{\psi} = 0 \quad , \qquad (1)$$

onde t representa o tempo, ρ a massa específica do material da fase presente no ponto $P(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}$ o vetor velocidade, ψ a intensidade de campo, ϕ a densidade de fluxo e $\dot{\psi}$ o suprimento do campo.

Se o ponto $P(\mathbf{r})$ estiver na interface entre as fases k e j, os princípios de conservação são expressos como condições de compatibilidade, com forma generalizada

$$\rho_k\psi_k(\mathbf{v}_k-\mathbf{v}_{s_{kj}})\cdot\mathbf{n}_k+\mathbf{n}_k\cdot\phi_k+\rho_j\psi_j(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_{s_{kj}})\cdot\mathbf{n}_j+\mathbf{n}_j\cdot\phi_j=\Omega_{kj} \ ,(2)$$

onde $\mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_j$ são vetores unitários à interface S_{kj}, com sentido para fora da região monofásica correspondente e $\mathbf{v}_{s_{kj}}$ representa o vetor velocidade desta interface.

Supondo que o efeito da interface sobre o escoamento pode ser atribuído a propriedades e variáveis de campos específicas dela, o termo da direita da eq.(2) torna a forma, Deemer e Slattery [2]

$$\Omega_{kj} = \frac{d_s}{dt}\rho_s\psi_s + \rho_s\psi_s\nabla_s\cdot\mathbf{v}_s + \nabla_s\cdot\phi_s - \rho_s\dot{\psi}_s \ (3)$$

Aqui

$$\frac{d_s}{dt}\rho_s\psi_s = \frac{\partial}{\partial t}\rho_s\psi_s + \nabla_s\rho_s\psi_s\cdot(\mathbf{v}_s-\mathbf{u}_s) \qquad (4)$$

assinala a derivada material na superfície, onde $\mathbf{u}_s$ é a velocidade de um ponto fixo na interface e ∇_s o operador Nabla na superfície, Hopke e Slattery [11]. Outras formas da eq. (3) são encontradas nos trabalhos de Bouré e Delhaye [1], Delhaye [3], Drew [7], Ishii [12], Slattery [16] e outros.

As grandezas ψ, ϕ, $\dot{\psi}$, ψ_s, ϕ_s e $\dot{\psi}_s$ são tensores de ordem arbitrária, identificados de acordo com a Tabela 1, onde $\mathbf{v}$ representa o vetor velocidade, $\mathbf{b}$ o vetor aceleração induzido por um campo externo, $\boldsymbol{\Pi}$ o tensor tensão, p a pressão, $\boldsymbol{\delta}$ o tensor unitário, $\boldsymbol{\tau}$ o tensor de cizalhamento, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão superficial, $\mathbf{r}$ o vetor posição, $\mathbf{R}$ o tensor antisimétrico correspondente a $\mathbf{r}$, u a energia interna específica, $\mathbf{q}$ o vetor fluxo de calor, s a entropia específica, $\Delta(\geq 0)$ a fonte local de entropia por unidade de tempo e T a temperatura. O subscrito s assinala as grandezas referentes à interface.

A relação entre os tensores densidade de fluxo intensidade de campo deve ser expressa por leis constitutivas, $\phi = \psi(\psi, \ldots.)$ e $\phi_s = \psi_s(\psi_s, \ldots.)$, submetidas às restrições imposta pela segunda lei da termodinâmica.

INTERMITÊNCIA E IDENTIFICAÇÃO DE FASE

Para constatar a presença de uma fase k e o seu tempo de permanência em um ponto $P(\mathbf{r})$ do campo de escoamento, introduz-se uma função de intermitência I_k. Num sistema com K fases em escoamento, a função de intermitência I_k $(\mathbf{r},t)$, $k = 1,2,\ldots,K$, é definida como

$$I_k(\mathbf{r},t) = \begin{cases} 1, \text{ se a fase está sobre o ponto } P(\mathbf{r}), \\ 0, \text{ se a fase não está sobre o ponto } P(\mathbf{r}). \end{cases} \ (5)$$

As interfaces são consideradas superfícies de discontinuidade, ou seja, têm espessura nula. A primeira derivada, em relação ao tempo, da função de intermitência indica, então, quan do uma interface entre a fase e qualquer outra fase está sobre o ponto $P(\underset{\sim}{r})$, Figueiredo [9]:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} I_k(\underset{\sim}{r},t)\right| = \delta(t - t_{i_k}) \quad \begin{cases} \to \infty, \text{ se a interface da fase } k \text{ está sobre } P(\underset{\sim}{r}), \\ = 0, \text{ se a interface da fase } k \text{ não está sobre } P(\underset{\sim}{r}). \end{cases} \tag{6}$$

Na eq.(6), $\delta(t - t_{i_k})$ denota função δ de Dirac e t_{i_k} indica os instantes nos quais uma interface de fase k está sobre o ponto $P(\underset{\sim}{r})$. O comportamento das funções $I_k(\underset{\sim}{r},t)$ e $\delta(t - t_{i_k})$ estão representados na Figura 1.

A velocidade da interface da fase k, $\underset{\sim}{v}_{s_k}$, está relacionada com a função de intermitência I_r por Figueiredo [9]

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = \underset{\sim}{v}_{s_k} \cdot \nabla I_k \tag{7}$$

A aplicação da equação (1) à fase k está condicionada pela intermitência de fase, ou seja, só tem sentido quando $I_k = 1$. Esta condição é incorporada à formulação com a multiplicação da eq.(1) pela função de intermitência I_k. Assim procedendo e fazendo uso da eq.(7), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} I_k \rho\psi + \nabla\cdot[I_k(\rho \underset{\sim}{v}\psi + \phi)] - I_k \rho\dot{\psi} + \nabla I_k\cdot[\rho(\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{v}_s)\psi + \phi] = 0 \tag{8}$$

A interpretação da eq.(8) é, à luz das equações precedentes, bastante direta; como se trata de uma representação instantânea, os três primeiros termos e o quarto termo não podem ser, simultaneamente, diferentes de zero.

MÉDIA TEMPORAL - SUPERPOSIÇÃO DAS FASES

Para obtenção de uma representação do escoamento em termos de médias temporais, submetem-se os termos da eq.(8) aos operadores de média abaixo especificados (definições e deduções, ver Figueiredo [9]).

Define-se o valor médio em relação ao tempo total de observação, T, de uma variável F condicionada pela função de intermitência I_k, como

$$\overline{I_k F} \triangleq \frac{1}{T}\int_T I_k F\, dt = \alpha_k \overline{F_k}^k \tag{9}$$

onde

$$\overline{F_k}^k \triangleq \frac{1}{T_k}\int_{T_k} F_k\, dt \tag{10}$$

é o valor médio de fase da variável F, T_k o tempo de permanência da fase no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ e

$$\alpha_k \triangleq \frac{T_k}{T} \tag{11}$$

representa a fração do termo total correspondente à permanência de fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$. Esta variável pode ser interpretada como a probabilidade de ocorrência de fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$.

O valor médio, em relação ao tempo de observação T, das ocorrências interfaciais da variável F é, a luz da teoria das distribuições Gel'fand e Shilov [10], dado por

$$\overline{\nabla I_k\, F} = \frac{1}{T}\sum_{i_k=1}^{N_k}\left[\frac{\underset{\sim}{n}_k \cdot F}{|\underset{\sim}{n}_k \cdot \underset{\sim}{v}_{s_k}|}\right]_{t_{i_k}} \tag{12}$$

onde N_k representa o número de passagens das interfaces da fase k sobre o ponto $P(\underset{\sim}{r})$ e t_{i_k} os instantes correspondentes, Figura 1. Delhaye e Achard [4] analisam as condições limites para fixação do tempo total de observação T.

Pode ser demonstrado, Figueiredo [9], ainda, que os operadores diferencial e de média temporal são comutativos, isto é,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} I_k F} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{I_k F} = \frac{\partial}{\partial t}\alpha_k \overline{F_k}^k \tag{13}$$

e

$$\overline{\nabla\cdot(I_k F)} = \nabla\cdot(\overline{I_k F}) = \nabla\cdot(\alpha_k \overline{F_k}^k) \tag{14}$$

A turbulência de Reynolds e a turbulência de deformação, causada pelo movimento das interfaces, são representadas como flutuações das variáveis de campo, superpostas aos seus valores médios, Dopazo [6]; Ishii [12]. Define-se, então,

$$F'_k \triangleq F_k - \overline{F}_k^k = I_k F - \overline{F}_k^k \quad ; \tag{15}$$

consequentemente Figueiredo [9]

$$\overline{F'_k} = 0 \tag{16}$$

e, para o produto de duas variáveis aleatórias,

$$\overline{E_k\,F_k}^{\,k} = \bar{E}_k^{\,k}\,\bar{F}_k^{\,k} + \overline{E'_k\,F'_k}^{\,k} \qquad (17)$$

Considerando as equações (9) - (16), obtém-se por fim, a equação geral de balanço, em termos de valores médios no tempo, para o escoamento incompressível ($\rho_k = \text{cte}$) e turbulento de fase k:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_k\,\rho_k\,\bar{\psi}_k^{\,k} + \nabla\cdot\left[\alpha_k\left(\rho_k\,\bar{\underset{\sim}{v}}_k^{\,k}\,\bar{\psi}_k^{\,k} + \rho_k\,\overline{v'_k\,\psi'_k}^{\,k} + \bar{\phi}_k^{\,k}\right)\right] - \alpha_k\,\rho_k\,\bar{\dot{\psi}}_k^{\,k} - \Lambda_k = 0 \qquad (18)$$

onde foram introduzidos

$$\Lambda_k \triangleq -\frac{1}{T}\sum_{i_k=1}^{N_k}\left[\frac{1}{|\underset{\sim}{n}_k\cdot \underset{\sim}{v}_{s_k}|}\left(\dot{m}_k\,\psi_k + \underset{\sim}{n}_k\cdot\phi_k\right)\right]_{t_{i_k}} \qquad (19)$$

e

$$\dot{m}_k \triangleq \rho_k\,(\underset{\sim}{v}_k - \underset{\sim}{v}_{s_k})\cdot \underset{\sim}{n}_k \qquad (20)$$

Os três membros da eq.(18) representam médias das variáveis de campo condicionados pela probabilidade de ocorrência da fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$. O parâmetro Λ_k, chamado "suprimento interfacial da fase k", representa o valor médio no tempo das interações da fase k com todas as outras fases, com as quais a fase k tenham uma interface comum. O fluxo de massa por unidade de área interfacial, $\dot{m}_k$, é diferente de zero, no caso de haver mudança de fase.

MÉDIA TEMPORAL DA CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE

Seja um escoamento multifásico com K fases. Uma fase k pode ter uma interface comum com cada uma das fases $j = 1,2,\ldots,K\ (j \neq k)$. A ocorrência desta interface comum no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ pode ser identificada por meio de uma função δ. Define-se, com este fim Figueiredo [9].

$$\delta(t - t_{i_{kj}}) = \begin{cases} \delta(t - t_{i_k}), & \text{quando } \delta(t - t_{i_j}) \to \infty, \\ 0, & \text{quando } \delta(t - t_{i_j}) = 0, \end{cases} \qquad (21)$$

onde $\delta(t - t_{i_k})$ e $\delta(t - t_{i_j})$ são definidos pela eq.(6), t_{i_k} assinala os instantes de ocorrência da fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$, t_{i_j}, os instantes de ocorrência da fase j no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ e $t_{i_{kj}}$ os instantes de ocorrência da interface comum às fases k e j no ponto $P(\underset{\sim}{r})$, ou seja, quando $t_{i_k} = t_{i_j}$. A construção função $\delta(t - t_{i_{kj}})$ está ilustrada na Figura 2.

Por indução, segue

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{K} \delta(t - t_{i_{kj}}) = \delta(t - t_{i_k}) \quad . \qquad (22)$$

Por outro lado, para a interface comum às fases k e j, tem-se

$$\underset{\sim}{n}_k = -\underset{\sim}{n}_j \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{v}_{s_k} = \underset{\sim}{v}_{s_j} \quad ; \qquad (23)$$

portanto

$$|\underset{\sim}{n}_k\cdot\underset{\sim}{v}_{s_k}| = |\underset{\sim}{n}_j\cdot\underset{\sim}{v}_{s_j}| = |v_{kj}| \quad . \qquad (24)$$

Multiplicando-se a condição de compatibilidade, eq.(2), por $\delta(t - t_{i_{kj}}) / |v_{kj}|$ e integrando o produto em relação ao tempo, obtém-se, à luz da teoria das distribuições, o valor médio das interações interfaciais entre as fases k e j:

$$\frac{1}{T}\sum_{i_{kj}=1}^{N_{kj}}\left[\frac{1}{|v_{kj}|}\left(\dot{m}_k\,\psi_k + \underset{\sim}{n}_k\cdot\psi_k + \dot{m}_j\,\psi_j + \underset{\sim}{n}_j\cdot\phi_j\right)\right] = \frac{1}{T}\sum_{i_{kj}=1}^{N_{kj}}\left[\frac{\Omega_{kj}}{|v_{kj}|}\right]_{t_{i_{kj}}} , \qquad (25)$$

onde N_{kj} assinala o número de instantes $t_{i_{kj}}$ e $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{K} N_{kj} = N_k$.

Se cada fase $k = 1,2,\ldots,K-1$ apresenta interface comum com todas as outras fases, tem-se $j = k+1,\ldots,K$. Há, portanto, um máximo de (k_2) condições de compatibilidade como a eq.(25).

O suprimento interfacial de fase k, Λ_k, pode agora, ser expresso como o somatório das interações interfaciais da fase k com cada uma das outras fases presentes no escoamento, ou seja,

$$\Lambda_k = -\frac{1}{T}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{K}\sum_{i_{kj}=1}^{N_{kj}}\left[\frac{1}{|v_{kj}|}\left(\dot{m}_k\,\psi_k + \underset{\sim}{n}_k\cdot\phi_k\right)\right]_{t_{i_{kj}}} \qquad (26)$$

O efeito resultante das interações interfaciais sobre o escoamento vale, considerando as equações (25) e (26),

$$\sum_{k=1}^{K} \Lambda_k = -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=k+1}^{K} \sum_{i_{kj}=1}^{N_{kj}} \left[\frac{\Omega_{kj}}{|v_{kj}|}\right] = \Lambda_m \quad . \quad (27)$$

Observa-se, portanto, que as interações entre as fases, tomadas globalmente, não se anulam, à menos que os efeitos específicos das propriedades interfaciais sejam desprezíveis, isto é, $\Omega_{kj} \simeq 0$.

Quando, num instante $t_{i_{kj}}$, a componente normal da velocidade da interface é nula, $v_{kj} = 0$, há uma singularidade no processo de média. Considerando, porém, que o movimento da interface é, geralmente, aleatória, esta singularidade é momentânea e pouco frequente, podendo ser ignorada, Drew e Lahey [8].

INTERFACES VIRTUAIS

Caracterizadas a possibilidade de identificação das ocorrências, no ponto $P(\underset{\sim}{r})$, das interfaces comuns às fases k e j e a regra para construção dos valores médios das interações interfaciais correspondentes, a representação analítica dos valores médios, na interface, das variáveis de campo requer a introdução de relações constitutivas apropriadas. Com este fim, define-se

$$\frac{1}{T} \sum_{i_{kj}=1}^{N_{kj}} \left[\frac{1}{|v_{kj}|} (\dot{m}_k \, \psi_k + \underset{\sim}{n}_k \cdot \phi_k)\right] \overset{\Delta}{=} \frac{1}{\lambda_{kj}} (\overline{\dot{m}}_k^{kj} \, \overline{\psi}_k^{kj} + \overline{\underset{\sim}{n}}_k^{kj} \cdot \overline{\phi}_k^{kj}) \quad (28)$$

onde o superscrito $^{-kj}$ assinala os valores interfaciais médios das variáveis de campo da fase k associados à interface S_{kj}. O parâmetro $1/\lambda_{kj}$ é interpretado como uma densidade local de superfície interfacial, isto é, uma medida da área interfacial entre as fases k e j por unidade de volume.

A eq.(25) assume, então, a forma

$$\Gamma_{kj} \, \overline{\psi}_k^{kj} + \Gamma_{jk} \, \overline{\psi}_j^{kj} - \frac{1}{\lambda_{kj}} \overline{\underset{\sim}{n}}_k^{kj} \cdot (\overline{\phi}_k^{kj} - \overline{\phi}_j^{kj}) = \frac{\overline{\Omega}_{kj}^{kj}}{\lambda_{kj}} \quad , (29)$$

onde

$$\Gamma_{kj} \overset{\Delta}{=} -\frac{\overline{\dot{m}}_k^{kj}}{\lambda_{kj}} \quad , \quad \Gamma_{jk} \overset{\Delta}{=} -\frac{\overline{\dot{m}}_j^{kj}}{\lambda_{kj}} \quad e \quad \overline{\underset{\sim}{n}}_j^{kj} = -\overline{\underset{\sim}{n}}_k^{kj} \quad . (30)$$

A eq.(29) representa a condição geral de compatibilidade na interface entre as fases k e j, em termos de médias no tempo. O efeito global das interações interfaciais entre a fase k e todas as outras é obtido pela substituição da eq.(28) na eq.(26). Resulta

$$\Gamma_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{K} (\Gamma_{kj} \, \overline{\psi}_k^{kj} - \frac{1}{\lambda_{kj}} \overline{\underset{\sim}{n}}_k^{kj} \cdot \overline{\phi}_k^{kj}) \quad . \quad (31)$$

Por outro lado, da comparação da eq.(12) com a eq.(19), tem-se

$$\Gamma_k = \overline{|\nabla I_k| \, (\dot{m}_k \, \psi_k + \underset{\sim}{n}_k \cdot \phi_k)} \quad , \quad (32)$$

onde, da definição da função de intermitência, $|\nabla I_k = -\underset{\sim}{n}_k |\nabla I_k|$, Figueiredo [9]. Ainda, um modelo constitutivo para representação do suprimento interfacial Λ_k deve satisfazer as seguintes condições:

se $I_k = 0$, sempre: $\nabla I_k = 0$, $\alpha_k = 0$, $\nabla\alpha_k = 0$;

se $I_k = 1$, sempre: $\nabla I_k = 0$, $\alpha_k = 1$, $\nabla\alpha_k = 0$;

se $I_k = 0$ ou $I_k = 1$: $\nabla I_k = 0$ ou $\nabla I_k \neq 0$, $0 < \alpha_k < 1$, $\nabla\alpha_k \neq 0$.

A condição $\nabla I_k \neq 0$ ocorre, apenas, na passagem da interface sobre o ponto considerado. Assim, o produto $|\nabla I_k|(\dot{m}_k \, \psi_k + \underset{\sim}{n}_k \cdot \phi_k)$ representa uma variável aleatória, discreta e intermitente, cujo valor médio é construído com os valores das variáveis $\dot{m}_k$, ψ_k e ϕ_k correspondentes às interfaces da fase k correspondentes às interfaces da fase k (não só a interface comum às fases k e j). Estas considerações sugerem a introdução de valores interfaciais médios para as variáveis de campo de fase k e assinaladas pelo superscrito -s, definidos de tal forma que

$$\Lambda_k = \Gamma_k \, \overline{\psi}_k^s + \nabla\alpha_k \cdot \overline{\phi}_k^s \quad , \quad (33)$$

onde

$$\Gamma_k \overset{\Delta}{=} - |\nabla\alpha_k| \, \overline{\dot{m}}_k^s \quad e \quad \overline{n}_k^s \overset{\Delta}{=} -\frac{\nabla\alpha_k}{|\nabla\alpha_k|} \quad (34)$$

representam, respectivamente, o fluxo de massa por unidade de volume devido à mudança de fase e o vetor unitário normal à configuração (virtual) média da interface de fase k.

Comparando as equações (31) e (33), tem-se

$$\Gamma_k \overline{\psi}_k^s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{K} \Gamma_{kj} \overline{\psi}_k^{kj} \tag{35}$$

e

$$\nabla\alpha_k \cdot \overline{\phi}_k^s = - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{K} \frac{1}{\lambda_{kj}} \overline{n}_k^{kj} \cdot \overline{\phi}_k^{kj} \quad , \tag{36}$$

que expressam relações entre as representações médias dos efeitos interfaciais entre as fases k e j e os efeitos interfaciais globais concernentes à fase k.

CONCLUSÕES

De acordo com a formulação desenvolvida, o escoamento da fase k é representado como o de um campo contínuo. Os valores das variáveis na eq.(18) têm o significado de expectativas estatísticas, condicionadas pela função de probabilidade, $\alpha_k(\underset{\sim}{r},t)$, de ocorrência da fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$. O campo multifásico discontínuo aparece, então, como uma superposição virtual de campos contínuos monofásicos, que interagem através dos suprimentos interfaciais, Λ_k, k=1,=,..K.

As interfaces entre duas fases k e j são representadas, em termos de média no tempo, como uma interface virtual, definida pelo seu vetor normal unitário, $\overline{n}^{kj}$, e por uma densidade local de superfície interfacial, $1/\lambda_{kj}$. As interfaces entre a fase k e todas as fases j = 1,2 , ...,K, j ≠ k, com as quais a fase k tenha interface comum, são representadas, ainda em termos de média temporal, como uma interface virtual, definida por um vetor normal unitário, $\overline{n}_k^s$. Este vetor é, por sua vez, função de distribuição de probabilidades, α_k. Há, portanto, uma dupla construção de interfaces virtuais.

Para as variáveis $\overline{\psi}_k^{kj}$, $\overline{\phi}_k^{kj}$, Γ_{kj} e $1/\lambda_{kj}$ e/ou $\overline{\psi}_k^s$, $\overline{\phi}_k^s$, Γ_k e α_k devem ser introduzidas relações constitutivas baseadas em modelos apropriados. De uma forma geral, elas dependem da topologia e do estado termomecânico das interfaces, assim como da configuração e das condições iniciais e de contorno do escoamento. Estabelecidos os modelos constitutivos para cada um dos pares de fases, k e j, o segundo grupo das variáveis assinaladas acima está automaticamente definido, de acordo com as equações (35) e (36).

A eq.(27) determina uma relação entre os suprimentos interfaciais, Λ_k, de cada uma das fases e o seu efeito global, Λ_m, sobre o escoamento multifásico. Obviamente, se este efeito fôr conhecido a priori, apenas K-1 dos suprimentos interfaciais devem ser dados por relações constitutivas. Em particular, se a influência das propriedades interfaciais sobre cada par de fases é despresível, $\Omega_{kj} \to 0$ e $\Lambda_m = 0$, obtendo-se as condições de compatibilidade clássicas, estabelecidos pela mecânica do contínuo. Deve-se assinalar, por outro lado, que o processo de média indicada no lado direito da eq. (25) ainda não está desenvolvido a um ponto satisfatório.

A formulação apresentada pode, finalmente, ser particularizada para cada um dos princípios de conservação; para isso, é suficiente associar, nas equações (3), (18), (29) e (33), as variáveis de campo às grandezas assinaladas na Tabela 1.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho que foi parte da tese de Dr. Ing. do autor dirigida pelo Prof. K. Stephan e desenvolvida no Institut für Technische Thermodynamik und Thermische Verfahrenstechnik, Universitat Stuttgart, teve o apoio financeiro do CNPq e do DAAD(R.F.A.).

REFERÊNCIAS

[1] Bouré, J.A. e Dalhaye, J.M. – General Equations and Two-Phase Flow Modeling, in Handbook of Multiphase Systems, Ed. G. Hetsroni, Hemisphere Publishing Corporation, 1981.

[2] Deemer, A.R. e Slattery, J.C. – Balance Equations and Structural Models for a Phase Interface, Int. J. Multiphase Flow, 4, 171-192, 1978.

[3] Dalhaye, J.M. – Jump Conditions and Entropy Sources in Two-Phase Systems, Local Instant Formulation, Int. J. Multiphase Flow, 1, 395-405, 1974.

[4] Delhaye, J.M. e Achard, J.L. – On the Averaged Operations Introduced in Two-Phase Flow Modeling, OECD/NEA Specialist's Meeting on Transiente Two-Phase Flow, Toronto, 1976.

[5] Delhaye, J.M. – Space/Time and Time/Space Averaged Equations, in Two-Phase Flows and Heat Transfer, Vol.1, Ed. S. Kakaç e

T.N. Veziroglu, Hemisphere Publishing Corporation, 1976.

[6] Dopazo, C. – On Conditioned Averages for Intermittent Turbulent Flows, J. Fluid Mech., 81, 433-438, 1977.

[7] Drew, D.A. – Averaged Field Equations for Two-Phase Media, Stud., In Applied Mathematics, L., 133-166, 1971.

[8] Drew, D.A. e Lahey, R.T. – Application of General Constitutive Principles to the Derivation of Multidimensional Two-Phase Elow Equations, Int. J. Multiphase Flow, 5, 243-264, 1979.

[9] Figueiredo, A.M.D. – Beitrag zur Allgemeinen Fluid und Thermomechanischen Beschreiburg der Mehrphasenströmungen , Dissertation, Universitat Stuttgart, 1980.

[10] Gel'fand, I.M. e Shilov, G.E. – Generalized Functions, Vol. 1, Academic Press, 1964.

[11] Hopke, S.W. e Slattery, J.C. – Bounding Principles for Two-Phase Flow Systems, Int. J. Multiphase Flow, 1, 727-742, 1975.

[12] Ishii, M. – Thermo-fluid Dunamic Theory of Two-Phase Flow, Eyrolles, 1975.

[13] Kocamustafaogullari, G. – Thermo-fluid Dynamics of Separate Two-Phase Flow, Ph. D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1971.

[14] Lee, W.H. e Lyczkowski, R.W. – The Basic Character of Five Two-Phase Flow Model Equations Sets, Joint ANS/ENS Int. Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, Vol. 1, 489-511, 1981.

[15] Sha, W.T. e Soo, S.L. – Multidomain Multiphase Fluid Dynamics, Int. J. Heat Transfer, 21, 1581-1595.

[16] Slattery, J.C. – General Balance Equation for a Phase Interface, IEC-Fundamentals, 6, 108-115, 1967.

[17] Truesdell, C. e Toupin, R.A. – Field Theory, in Handbuch der Physik, Vol.III/1, Ed. Flügge, Springer Verleg, 1960.

ABSTRACT

It is proposed a generalization of the "Two-fluid model" for two-phase flows. The discontinuous flow field is represented as a superposition of virtual continuous fields, for each phase, in which the field variables are conditioned by a probability distribution. It is sugested a double representation, of the phase interfaces: a virtual interface for each two phases that are in contact, and a virtual interface between each phase and all other phases.

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. IV, nº 4, 1982

TABELA 1: Identificaçao das variáveis de campo com os princípios de conservação

	ψ	$\dot{\psi}$	ϕ	ψ_s	$\dot{\psi}$	ϕ_s
Massa	1	0	0	1	0	0
Quantidade de Movimento Linear	$\underset{\sim}{v}$	$\underset{\sim}{b}$	$-\underset{\approx}{\Pi} = p\,\underset{\approx}{\delta} - \underset{\approx}{T}$	$\underset{\sim}{v}_s$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{\sigma}$
Quantidade de Movimento Angular	$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v}$	$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{b}$	$-\underset{\approx}{\Pi} \cdot \underset{\approx}{R}$	$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{v}_s$	$\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{b}$	$\underset{\approx}{\sigma} \cdot \underset{\approx}{R}$
Energia	$u + \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{u}$	$\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}$	$\underset{\approx}{q} - \underset{\approx}{\Pi} \cdot \underset{\approx}{v}$	$u_s + \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{v}_s \cdot \underset{\sim}{v}_s$	$\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}_s$	$\underset{\sim}{q}_s + \underset{\approx}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{v}_s$
Entropia	s	Δ	$\frac{1}{T}\,\underset{\sim}{q}$	s_s	Δ_s	$\frac{1}{T_s}\,\underset{\sim}{q}_s$.

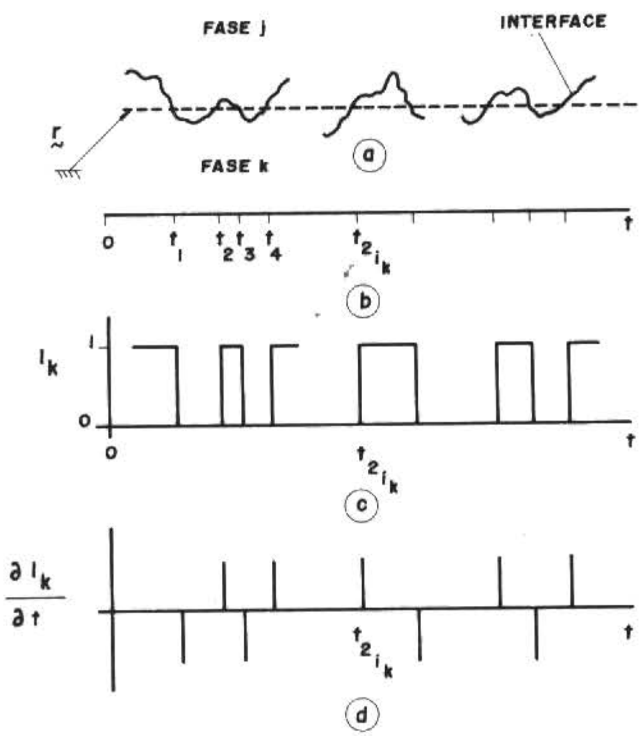


Figura 1:
(a) ocorrência das interfaces entre as fases κ e j (j = 1,2,...,K ; j ≠ k) no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ em função do tempo;
(b) função de intermitência $I_k(\underset{\sim}{r},t)$ no ponto $P(\underset{\sim}{r})$;
(c) representação da ocorrência das interfaces da fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ como derivada de função de intermitência

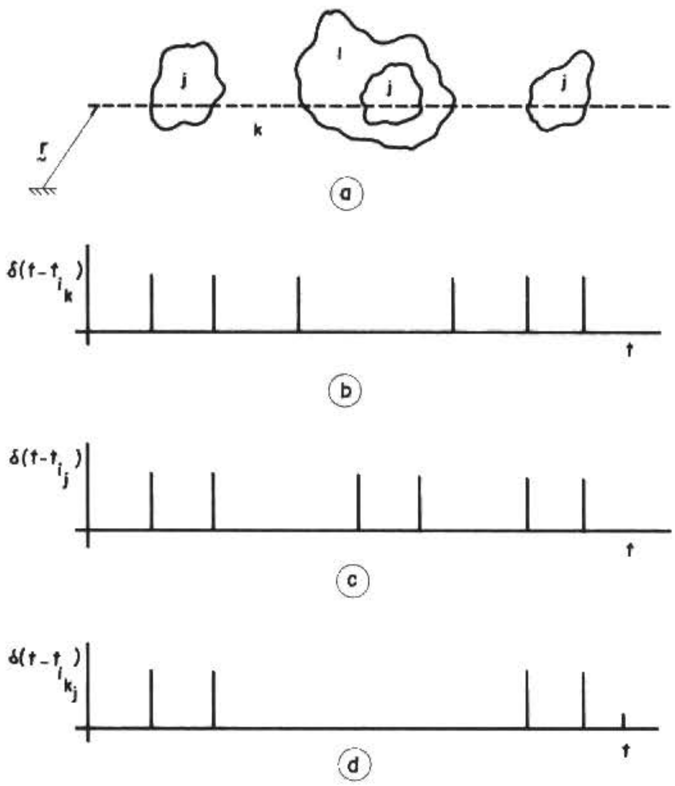


Figura 2:
(a) escoamento multifásico (fases k,j,ℓ): ocorrência das interfaces no ponto $P(\underset{\sim}{r})$ em função do tempo;
(b) representação da ocorrência das interfaces da fase k no ponto $P(\underset{\sim}{r})$;
(c) representação da ocorrência das interfaces da fase j no ponto $P(\underset{\sim}{r})$·
(d) representação da ocorrência das interfaces comuns às fases k e j no ponto $P(\underset{\sim}{r})$.

ROTAÇÃO CRÍTICA DE SISTEMAS ÁRVORE-DISCO PELO MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

MÁRCIO TADEU DE ALMEIDA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS — EFEI
Itajubá — MG
SÉRGIO JOÃO CRNKOVIC
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA — UNESP
Guaratinguetá — SP

SUMÁRIO

Sistemas Rotativos, Árvore-Disco, montados com interferência estão sujeitos a deformações radiais que levam a falha do sistema na rotação de trabalho. O objetivo é determinar a rotação em que se inicia o desacoplamento árvore-disco, para adotar uma ajustagem segura no projeto desses sistemas.

INTRODUÇÃO

Volantes, polias, rotores e outros são discos rotativos que se deformam, devendo-se portanto na fase de projeto estudar o tipo adequado de ajuste, para que não ocorram falhas no conjunto árvore-disco.

No acoplamento do sistema árvore-disco, podem ocorrer duas situações: acoplamento por chaveta com pequena interferência ou acoplamento por ajuste forçado.

No acoplamento por chaveta, durante a rotação a carga será aplicada totalmente sobre esta, enquanto no ajuste forçado o sistema se comportará como um único sólido.

OBJETIVO

O objetivo é determinar a rotação para a qual o disco desacoplará da árvore, fazendo com que o sistema falhe, no caso do ajuste forçado.

A rotação em que o sistema falha é denominada "rotação crítica". Esta velocidade angular deve ser menor que a de trabalho, dando desta forma segurança ao sistema.

Para determinar a rotação crítica utiliza-se o método da Matriz de Transferência. Nesse processo modela-se a árvore como um disco de perfil constante, cuja espessura é igual a do cubo do elemento acoplado.

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

A Fig. 1 mostra um sistema árvore-disco antes da montagem (a) em repouso após a montagem (b) e em rotação (c). Analisando-se as interferências do sistema nos três casos, tem-se que:

$$\delta = r_S - r_D \quad \text{antes da montagem} \tag{1}$$

$$\delta = \bar{U}_0 - \bar{U}_S \quad \text{em repouso, após montagem} \tag{2}$$

$$\delta = U_0 - U_S \quad \text{em rotação} \tag{3}$$

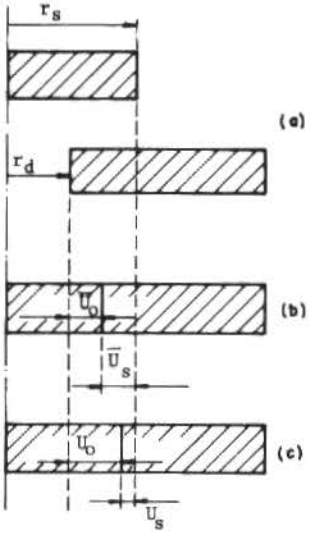


Fig. 1

Observando a expressão (3) conclui-se que o limite de segurança do sistema se dã para uma deformação nula da ãrvore, ou seja, quando toda interferência adotada ao sistema passa a ser a deformação do disco.

A Fig. 3 representa a ãrvore isolada da Fig. 2. Os efeitos atuantes sobre a ãrvore são os da pressão de contato devido ao ajuste, da rotação e o efeito térmico. Para simplificar o equacionamento, considera-se os efeitos separadamente, e em seguida aplica-se o princípio da superposição dos efeitos isolados.

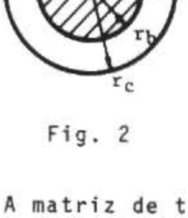


Fig. 2

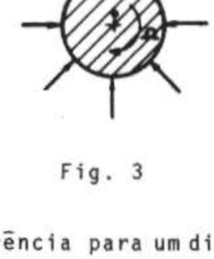


Fig. 3

A matriz de transferência para um disco de perfil constante sem furo central, é dada por [1]:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & UUP & FU \\ 0 & 1 & FP \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Sendo:

$$UUP = (1-\mu)\,\frac{r}{bE} \qquad (5)$$

$$FU = -\,\frac{(1-\mu^2)}{8\,E}\,\rho\,\Omega^2\,r^3 + \frac{(1+\mu)}{r}\,\alpha \int_0^r r\theta(r)\,dr \qquad (6)$$

e

$$FP = -\,\frac{(3+\mu)}{8}\,\rho\,\Omega^2\,b\,r^2 - \frac{b\,E\,\alpha}{r^2}\int_0^r r\theta(r)\,dr \qquad (7)$$

Para o sistema em repouso, somente sob o efeito da pressão externa, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(1)} = T_1 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(1)}$$

Onde:

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(1)}$ = vetor de estado da estação externa do disco (ãrvore), devido ao efeito da pressão externa.

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(1)}$ = vetor de estado do centro do disco (ãrvore), devido ao efeito da pressão externa.

T_1 = matriz de transferência global para o disco (ãrvore) em repouso.

Onde:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & UUP & FU \\ 0 & 1 & FP \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(1)} = \begin{bmatrix} 0 & UUP_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(1)}$$

Das condições de contorno, conclui-se que:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P_c \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(1)} = \begin{bmatrix} 0 & UUP_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(1)}$$

Desenvolvendo o sistema matricial, vem:

$$P_c = P_{0(1)}$$

$$U_{n(1)} = UUP_1 \cdot P_{0(1)} \quad \text{ou}$$

$$U_{n(1)} = UUP_1 \cdot P_c \qquad (8)$$

Para o sistema em rotação mais o efeito da temperatura, tem-se que [2, 3]:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(2)} = T_2 \begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(2)}$$

Onde:

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(2)}$ = vetor de estado da estação externa do disco (árvore), devido ao efeito da rotação mais temperatura.

$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(2)}$ = vetor de estado do centro do disco (árvore), devido ao efeito da rotação mais temperatura.

T_2 = matriz de transferência global para o disco (árvore) em rotação mais temperatura.

Onde:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & UUP_2 & FU_2 \\ 0 & 1 & FP_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{Bmatrix} U \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(2)} = \begin{bmatrix} 0 & UUP_2 & FU_2 \\ 0 & 1 & FP_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando as condições de contorno, chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} U \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{n(2)} = \begin{bmatrix} 0 & UUP_2 & FU_2 \\ 0 & 1 & FP_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 1 \end{Bmatrix}_{0(2)}$$

Desenvolvendo-se o sistema, matricial vem:

$$0 = P_{0(2)} + FP_2$$

$$U_{n(2)} = P_{0(2)} \cdot UUP_2 + FU_2 \quad \text{ou}$$

$$U_{n(2)} = UUP_2 \cdot FP_2 + FU_2 \qquad (9)$$

A deformação total do disco (árvore) pela superposição dos efeitos isolados é dada por:

$$U_S = U_{n(1)} + U_{n(2)} \qquad (10)$$

Conforme expressão (3), tem-se que a interferência do sistema em rotação é dada por:

$$\delta = U_0 - U_S$$

Para o início da falha do sistema, a árvore deverá ter deformação nula, sendo que toda interferência se transforma em deformação do disco (elemento).

Dessa maneira:

$$U_S = 0 = U_{n(1)} + U_{n(2)} \quad \text{portanto:}$$

$$UUP_1 \cdot P_c - UUP_2 \cdot FP_2 + FU_2 = 0 \qquad (11)$$

mas: $UUP_1 = UUP_2 = (1-\mu)\dfrac{r}{b\ E}$

$$FU_1 = -\frac{(1-\mu^2)}{8\ E}\rho\,\Omega^2 r^3 + \frac{(1+\mu)}{r}\alpha\int_0^r r\theta(r)dr$$

e

$$FP_1 = -\frac{(3+\mu)}{8}\rho\,\Omega^2 b\ r^2 - \frac{b\ E\alpha}{r^2}\int_0^r r\theta(r)dr$$

Para compactar o equacionamento faz-se

$$A = (1-\mu)\frac{r}{b\ E}$$

$$B = -\frac{(1-\mu^2)}{8\ E}\rho r^3$$

$$C = \frac{(1+\mu)}{r}\alpha\int_0^r r\theta(r)dr$$

$$D = -\frac{(3+\mu)}{8}\rho\, b\ r^2$$

$$E = -\frac{b\ E\alpha}{b^2}\int_0^r r\theta(r)dr$$

Usando agora a notação compacta

$$UUP_1 = UUP_2 = A \qquad (12)$$

$$FU_1 = B\,\Omega_c^2 + C \qquad (13)$$

$$FP_1 = D\,\Omega_c^2 + F \qquad (14)$$

Substituindo-se as expressões (12), (13), (14) em (11), vem:

$$- A(D\,\Omega_c^2 + F) + B\,\Omega_c^2 + C - AP_c = 0$$

Finalmente, a rotação crítica será:

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{AF + AP_c - C}{B - AD}} \qquad (15)$$

Onde:

P_c = pressão de contato

$$P_c = \frac{E\,\rho}{r_b}\left[\frac{r_c^2 - r_b^2}{2\,r_c^2}\right] \qquad (16)$$

APLICAÇÃO PRÁTICA

Para o rotor de uma turbina a vapor esquematizado na Fig. 4, determinar as rotações críticas (intervalos críticos) para os diversos tipos de ajustagens.

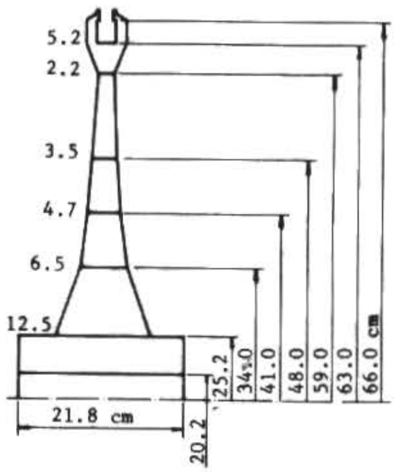


Fig. 4

Dados:

$E = 2{,}16.10^5$ [MPa]

$\rho = 8000$ [kg/m^3]

$\alpha = 14{,}0.10^{-6}$ [$^oC^{-1}$]

$\mu = 0{,}3$

$\theta(r) = 0$ (dist. nula da temperatura)

Ajustagens:

a) H_8/r_4 $\quad d^0_{+72}$ $\quad d^{+94}_{+80}$

$46{,}6$ [rad/s] $\leq \Omega_c \leq 159{,}5$ [rad/s]

b) H_6/v_5 $\quad d^0_{+29}$ $\quad d^{+330}_{+310}$

$276{,}1$ [rad/s] $\leq \Omega_c \leq 299{,}2$ [rad/s]

c) H_6/x_5 $\quad d^0_{+29}$ $\quad d^{+405}_{+385}$

$310{,}7$ [rad/s] $\leq \Omega_c \leq 331{,}4$ [rad/s]

d) H_7/z_6 $\quad d^0_{+46}$ $\quad d^{+604}_{+575}$

$378{,}8$ [rad/s] $\leq \Omega_c \leq 404{,}7$ [rad/s]

e) H_7/R_6 $\quad d^0_{+29}$ $\quad d^{+51}_{+31}$

$0 < \Omega_c \leq 94{,}6$ [rad/s]

f) H_6/n_5 $\quad d^0_{+29}$ $\quad d^{+51}_{+31}$

$23{,}3$ [rad/s] $\leq \Omega_c \leq 117{,}6$ [rad/s]

Os resultados foram calculados através de um programa computacional [4].

CONCLUSÕES

Conclui-se que dependendo do ajuste adotado, calcula-se previamente o intervalo em que ocorrerá o desacoplamento árvore disco. É evidente que a rotação de trabalho deverá fugir dessa faixa crítica.

NOMENCLATURA

b	- espessura do perfil constante
E	- módulo de elasticidade
P	- tensão radial por unidade circunferencial de comprimento
P_c	- pressão de contato
r	- raio
T	- matriz de transferência
U	- deformação radial
UUP, FU, FP	- termo da matriz de transferência
δ	- interferência
μ	- coeficiente de Poisson
α	- coeficiente de dilatação térmica
ρ	- massa específica
$\theta(r)$	- função escedente de temperatura
Ω	- rotação

BIBLIOGRAFIA

[1] Pestel, E.C. & Leckie, F.A. — "Matrix Methods in Elastomechanics" - New York, McGraw Hill, 1963.

[2] Pilkey, Walter D., Chang, Pin Yu - "Modern Fórmulas Statics and Dynamics", New York, McGraw Hill Book, 1978.

[3] Sovinall, Robert C. - "Stress, strain and Strenght" - New York, McGraw Hill, 1967.

[4] Crnkovic, Sergio João - Análise de Tensões em discos rotativos pelo método da Matriz de Transferência - Dissertação de Mestrado-EFEI-1981.

RevBrCMec, Rio de Janeiro, V. IV, nº 4, 1982, pp. 35 a 43

ANÁLISE TERMO-HIDRÁULICA DE GERADORES DE VAPOR TÍPICOS DE USINAS PWR

CARLOS VALOIS MACIEL BRAGA
DEPTº DE ENGENHARIA MECÂNICA — PUC/RJ
Rio de Janeiro — RJ
PEDRO CARAJILESCOV
DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA
São José dos Campos — SP

SUMÁRIO

Centrais-nucleares PWR utilizam, geralmente, geradores de vapor do tipo tubos "U" invertido, com recirculação interna natural. No presente trabalho desenvolve-se um modelo de simulação termohidráulica, para regime permanente, de tais geradores de vapor. Divide-se o escoamento secundário em duas partes individualmente homogêneas, com troca de calor e massa entre as mesmas. A pressão do secundário é determinada em função do título do vapor que alimenta a turbina. Aplicações são feitas ao gerador de vapor da usina Angra II, operando em condições nominal e com tubos parcialmente obstruídos.

SIMBOLOGIA

- A : área de escoamento
- g : aceleração da gravidade
- h : entalpia específica
- K : fator de perda de carga
- $\dot{m}$: vazão em massa
- N : número de divisões da altura da tubulação em "U"
- P : pressão
- $\dot{Q}$: taxa de transferência de calor
- R_r : razão de recirculação
- S : razão de escorregamento
- T : temperatura
- X : título
- v : volume específico do fluido
- V : velocidade do escoamento
- y : indica a direção do escoamento
- z : altura
- z_t : altura média da tubulação em "U"
- α : fração de vazios
- ΔP : queda de pressão
- Δz : altura do volume de controle
- ρ : densidade do fluido

ÍNDICES

- b : ebulição
- cr : canal de recirculação
- f : lado da perna fria
- g : vapor saturado
- i : entrada
- ℓ : líquido saturado
- o : saída
- p : primário
- q : lado da perna quente
- r : água de recirculação
- s : secundário
- v : vapor

INTRODUÇÃO

As empresas projetistas de usinas nucleares do tipo PWR (Pressurized Water Reactor) têm, nos últimos anos optado por geradores de vapor do tipo "U" invertido, com recirculação interna natural. A Fig. 1 mostra, esquematicamente, tal modelo de gerador de vapor.

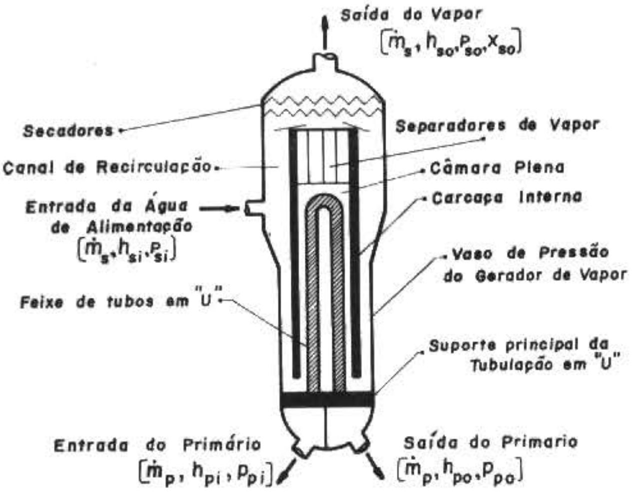


Fig.1 - Gerador de vapor do tipo tubos em "U" invertido

Neste modelo de gerador de vapor, o fluido primário entra através de um bocal localizado na base do vaso de pressão, atravessa uma câmara plena, penetrando, em seguida, na tubulação em "U", fabricada com Inconel. Após percorrer o feixe de tubos, o fluido primário passa por outra câmara plena e deixa o gerador de vapor por um bocal simétrico ao de entrada. O lado de subida dos tubos em "U" é denominado perna quente, enquanto o de descina, perna fria.

Quanto ao lado do ciclo secundário, a água de alimentação entra através de um bocal posicionado no vaso do gerador de vapor em uma altura ligeiramente acima do topo da tubulação em "U". Esta água, após misturar-se com a água de recirculação, proveniente dos separadores e secadores de vapor, escoa para baixo, através da região anular formada pelo vaso de pressão e a carcaça interna. Esta carcaça possui uma abertura junto ao suporte principal da tubulação em "U", que permite a entrada do fluido secundário na região dos tubos, escoando para cima. Nesta região, a água atinge a temperatura de saturação e a mistura bifásica, de baixo título, que deixa a região dos tubos, passa por separadores de vapor do tipo "ciclones" e secadores, de tal forma a reduzir a valores mínimos a umidade do vapor que é conduzido as turbinas. A fase líquida recircula no gerador de vapor misturando-se com a água de alimentação.

Diversos trabalhos de simulação de geradores de vapor tem sido propostos, variando em grau de complexidade, de acordo com os objetivos dos autores. Hargrove [1] analisa somente o aspecto térmico do gerador de vapor. Murrell [2] e Cudlin [3] apresentam modelos de simulação termohidráulica para geradores de vapor do tipo tubos retos. Land e Steitler [4] e Christensen [5] modelaram geradores de vapor do tipo tubos em "U" invertido, com recirculação interna. Em ambos os trabalhos é assumido que o escoamento do fluido secundário, através do feixe de tubos, é completamente homogeneizado. Esta hipótese não é realística, pois as condições de troca de calor entre o fluido secundário e as pernas quente e fria da tubulação em "U" são bastante diferentes, assim como as condições de queda de pressão. Desta forma, espera-se a ocorrência de escoamento transversal ("*cross-flow*") de fluido secundário entre as regiões compreendidas pelas pernas quente e fria. Uma descrição mais detalhada dos diversos tipos de geradores de vapor pode ser encontrada na referência [6].

Por outro lado, levantamento realizado por Willians e Green [7] aponta diversos problemas apresentados por geradores de vapor em operação, tais como vibração dos tubos e ocorrência de corrosão, erosão e queima da parte externa dos tubos. Uma solução alternativa, de forma a manter a usina em operação, no caso de ocorrência de alguma falha na tubulação em "U", é simplesmente obstruir os tubos que apresentarem tais problemas. Naturalmente, esta obstrução parcial da tubulação em "U" provocará alterações no comportamento termohidráulico do gerador de vapor.

O presente trabalho apresenta um modelo de simulação termohidráulica de geradores de vapor do tipo tubos em "U" invertido, com recirculação natural, operando em regime permanente. O modelo de simulação desenvolvido considera a existência de escoamento transversal entre as regiões das pernas quente e fria, do lado do secundário. Aplicações deste modelo são feitas para o gerador de vapor da usina nuclear Angra II, considerando-se frações variáveis de obstrução da tubulação em "U". Também foram efetuados testes modificando-se, individualmente, as condições de entrada dos fluidos primário e secundário no gerador de vapor.

MODELO TEÓRICO

Os principais aspectos do modelo proposto são:

(1) o escoamento secundário é dividido em duas partes individualmente homogêneas, escoando paralelamente, sendo uma associada à perna fria e outra, à perna quente;

(2) o escoamento transversal entre estas partes é obtido, impondo-se que, em uma determinada seção transversal ao escoamento principal, a pressão seja a mesma nas duas partes;

(3) as condições de entrada no gerador de vapor dos fluidos primário e secundário são consideradas conhecidas, com exceção da pressão da água de alimentação, a qual é determinada em função do título da mistura bifásica que alimenta a turbina;

(4) as diversas regiões dos escoamentos primário e secundário são divididas em volumes de controle, sobre os quais são aplicadas as leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia.

O modelo físico de simulação é apresentado na Fig. 2.

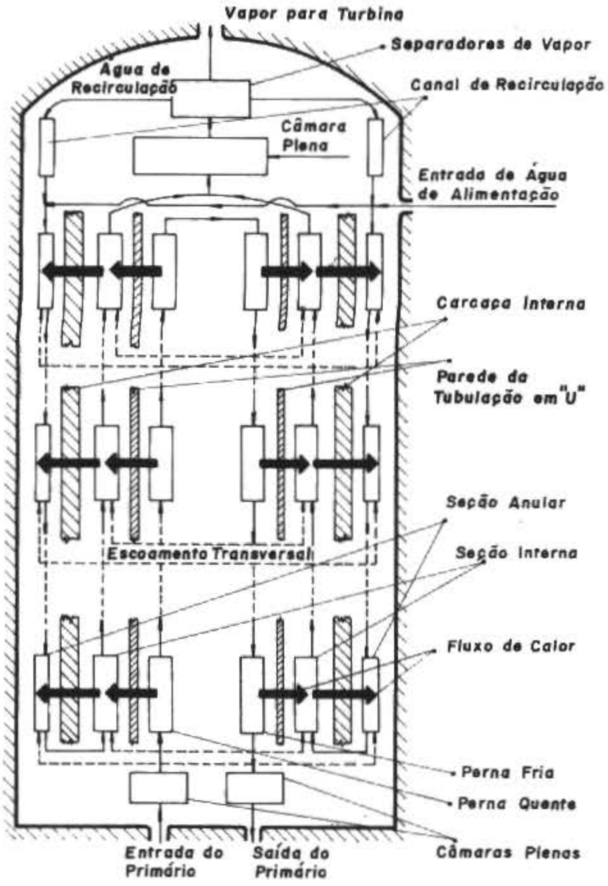
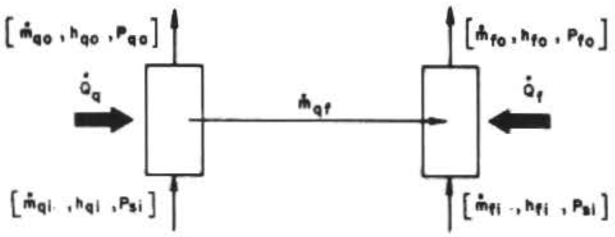


Fig. 2. Modelo físico para simulação do gerador de vapor

O equacionamento do secundário é feito considerando-se pares simétricos de volumes de controle, conforme o esquema:



onde: $\dot{m}$ = vazão em massa;

h = entalpia específica;

$\dot{Q}$ = taxa de transferência de calor;

P = pressão.

Os índices "q" e "f" referem-se a perna quente e perna fria, respectivamente, e os índices "i" e "o" referem-se à entrada e saída dos volumes de controle.

As equações apresentadas a seguir foram desenvolvidas para um volume de controle do lado da perna quente.

A conservação de massa impõe:

$$\dot{m}_{qo} = \dot{m}_{qi} - \dot{m}_{qf} \,, \qquad (1)$$

O balanço térmico, nos volumes de controle, fornece:

$$h_{qo} = \frac{\dot{m}_{qi}\, h_{qi} + \dot{Q}_q - \frac{1}{2}\dot{m}_{qf}\, h_{qi}}{\dot{m}_{qo} + \frac{1}{2}\dot{m}_{qf}}, \text{ para } \dot{m}_{qf} \geq 0; \qquad (2)$$

$$h_{qo} = \frac{\dot{m}_{qi}\, h_{qi} + \dot{Q}_q - \frac{1}{2}\dot{m}_{qf}\left(h_{fi} + h_{fo}\right)}{\dot{m}_{qo}}, \text{ para } \dot{m}_{qf} < 0. \qquad (3)$$

A pressão, na saída dos volumes de controle, é determinada pela equação da conservação da quantidade de movimento:

$$P_{qo} = P_{si} + \frac{\dot{m}_{qi}\, V_{qi} - \dot{m}_{qf}\, \overline{V}^{*} - \dot{m}_{qo}\, V_{qo} - \frac{1}{2} K\, A\, \overline{V}_q - y\, \overline{\rho}_q\, g\, A\, \Delta z}{A} \qquad (4)$$

onde: A = área transversal ao escoamento principal;

Δz = altura do volume de controle;

V = velocidade do escoamento (a barra indica valores médios no volume de controle);

K = fator de perda de carga, incluindo atrito e acidentes localizados.

O valor de $\overline{V}^*$ é determinado pela direção do escoamento transversal:

$$\overline{V}^* = \begin{cases} \overline{V}_q \ , & \text{para } \dot{m}_{qf} \geq 0 \ ; \\ \overline{V}_f \ , & \text{para } \dot{m}_{qf} < 0 \ . \end{cases}$$

O parâmetro y é um indicador da direção do escoamento:

$$y = \begin{cases} 1 \ , & \text{escoamento para cima (seção interna) ;} \\ -1 \ , & \text{escoamento para baixo (seção anular) .} \end{cases}$$

Equações análogas são obtidas para o volume de controle da perna fria, assim como para o escoamento do fluido primário, embora, neste caso, as equações sejam simplificadas pela inexistência de escoamento transversal.

Naturalmente, para os volumes de controle do lado do secundário pertencentes à seção interna, há necessidade de considerar-se a ocorrência de escoamento bifásico. Desta forma, define-se "altura de ebulição", como sendo a altura (a partir do suporte principal da tubulação em "U") em que a entalpia do fluido secundário (para cada uma das pernas) iguala-se à entalpia de líquido saturado correspondente à pressão média no volume de controle.

O título do escoamento bifásico, na saída de um volume de controle do lado da perna quente, é dado por

$$X_{qo} = \frac{(\dot{m}_v)_{qo}}{\dot{m}_{qo}} \ , \tag{5}$$

onde $(\dot{m}_v)_{qo}$ é a vazão em massa de vapor. Com esta definição, obtém-se

$$X_{qo} = \frac{h_{qo} - h_\ell}{h_g - h_\ell} \ , \tag{6}$$

sendo h_ℓ e h_g as entalpias de líquido e vapor saturados, respectivamente, determinadas à pressão P_{qo}.

A fração de vazios é dada por [8]:

$$\alpha_{qo} = \left[1 + \frac{1 - X_{qo}}{X_{qo}} \cdot \frac{v_\ell}{v_g} S \right]^{-1} \tag{7}$$

onde v_ℓ e v_g são os volumes específicos do líquido e do vapor saturados à pressão P_{qo} e S é a razão de escorregamento, determinada em função da pressão [9].

O valor da vazão, $\dot{m}_{qf}$, do escoamento transversal é obtida iterativamente, impondo-se

$$P_{qo} = P_{fo} \tag{8}$$

Fazendo-se

$$\Delta P_q = P_{qi} - P_{qo} \sim (\bar{\dot{m}}_q)^n \ , \tag{9}$$

obtém-se

$$\dot{m}_{qf} \sim \frac{(\Delta P_q)^{\frac{1}{n}}}{2 \ \dot{m}_{qi}} \tag{10}$$

Esta expressão é usada para o refinamento de $\dot{m}_{qf}$. A constante n foi determinada experimentalmente, tendo seu valor compreendido entre 2 e 3.

A taxa de transferência de calor, $\dot{Q}_q$, entre dois volumes de controle adjacentes, é determinada através da diferença logarítmica média de temperatura e do coeficiente global de troca calor. No cálculo deste coeficiente global, é levado em consideração o regime de troca de calor, sendo admitidos quatro mecanismos: convecção forçada, ebulição subresfriada, ebulição em massa, e vaporização por convecção forçada, conforme esquematizado na Fig. 3.

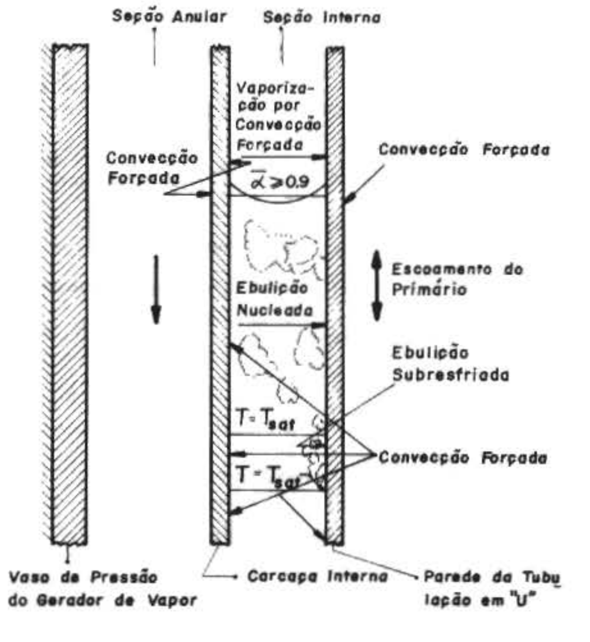


Fig. 3 - Representação esquemática dos regimes de troca de calor no gerador de vapor

No caso de convecção forçada utiliza-se a correlação de Dittus Boelter [10] para a determinação do coeficiente de filme. Ocorrendo ebulição (subresfriada ou nucleada), a temperatura externa da tubulação em "U" é calculada pela correlação de Thom [9], sendo o coeficiente de troca de calor determinado através desta temperatura. Para elevadas frações de vazios($\alpha > 0,9$), assume-se que o mecanismo de troca de calor passa a ser o de vaporização por convecção forçada, utilizando-se a correlação de Schrock e Grossman, mencionada por Tong [11].

O nível d'água do gerador de vapor é definido como sendo a altura na qual a fração de vazios do secundário atinge 90%, conforme procedimento de Land e Steitler [5].

A razão de recirculação, R_r, é dada por

$$R_r = \frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_s} \tag{11}$$

onde

$$\dot{m}_r = A_{cr} \left[\frac{2}{K_{cr}} \rho_r (P_{so} - P_{si}) + z_{cr} \rho_r^3 g \right]^{\frac{1}{2}} , \tag{12}$$

com os índices r e cr referindo-se à água de recirculação e ao canal de recirculação, respectivamente.

Baseado neste modelo, foi desenvolvido o programa GEVAP em linguagem Fortran.. Maiores detalhes sobre o modelo desenvolvido e o programa GEVAP podem ser encontrados na referência [6].

RESULTADOS

Aplicações foram feitas para os geradores de vapor projetados pela KWU, da Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto, Unidade II, em construção em Angra dos Reis, Brasil, cujos dados principais são apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1. Dados Geométricos do Gerador de Vapor

Altura total da tubulação em "U", ft	34,203
Número total de tubos da tubulação em "U"	4086
Diâmetro interno dos tubos, ft	0,0643
Diâmetro externo dos tubos, ft	0,0722
Diâmetro interno da curvatura em "U", ft	0,689
Diâmetro externo da curvatura em "U", ft	9,795
Diâmetro interno da carcaça interna, ft	10,335
Diâmetro externo da carcaça interna, ft	10,466
Diâmetro do vaso de contenção, ft	11,375

Tabela 2. Condições dos Fluidos Primário e Secundário

PARÂMETRO	PRIMÁRIO	SECUNDÁRIO
Vazão em massa (lb/s)	10365,5	1136,2
Pressão na entrada (psia)	2273,6	981,7
Entalpia na entrada (Btu/lb)	640,0	402,0
Temperatura na entrada (ºF)	619,0	424,4
Título na saída (%)	–	99,1

Alguns testes preliminares com o programa GEVAP foram realizados para verificar-se a influência do número de divisões, N, na altura da tubulação em "U", nos principais parâmetros do gerador de vapor. Esta influência, na entalpia de saída do primário, na pressão da água de alimentação e na razão de recirculação, é apresentada nas Figs. 4, 5 e 6, respectivamente.

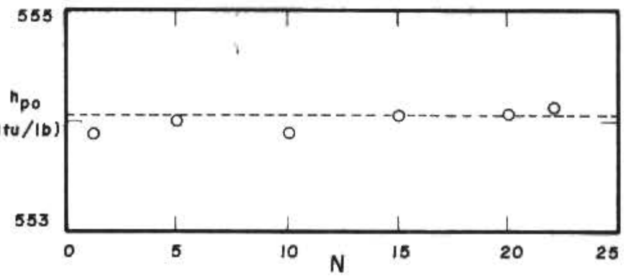


Fig. 4 - Influência de N na entalpia de saída do primário

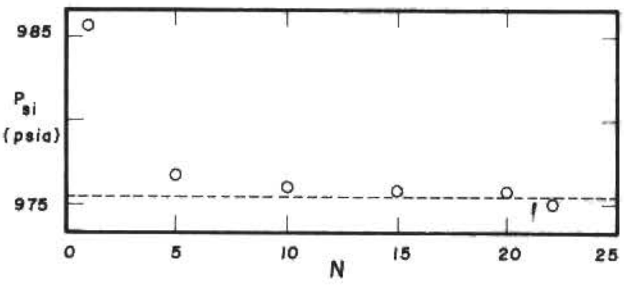


Fig. 5 - Influência de N na pressão da água de alimentação

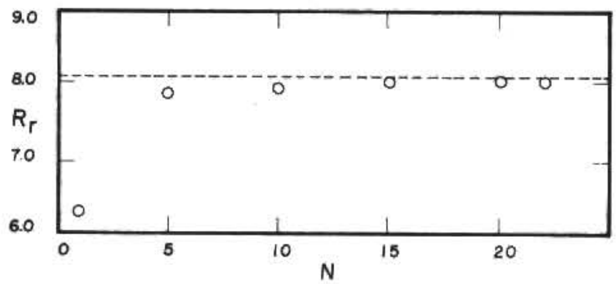


Fig. 6 - Influência de N na razão de recirculação

Considerando-se que o tempo de CPU cresce de forma linear com N e que a divisão, a partir de 10 volumes de controle apresenta resultados praticamente invariantes, recomenda-se N = 10, para os usuários do GEVAP.

A Tabela 3 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com os dados fornecidos pela KWU, para condições nominais de operação, com N = 10.

Tabela 3. Resultados Obtidos e Comparação com Dados da KWU

	KWU	Presente Trabalho	Diferença Percentual
Queda de pressão total (psia)	33,35	24,42	-26,8%
Entalpia na saída do gerador de vapor (Btu/lb)	553,90	553,92	0,00%
Temperatura na saída do gerador de vapor (ºF)	555,98	555,09	0,02%
Pressão da água de alimentação (psia)	981,65	976,19	-0,56%
Queda da pressão total (psia)	-13,15	2,46	+118%
Entalpia da mistura que alimenta a turbina (Btu/lb)	1187,34	1187,12	-0,02%
Temperatura da mistura que alimenta a turbina (ºF)	544,10	541,53	-0,47%
Taxa total de calor transferida secundário (Btu/s)	892305,0	892049,0	-0,03%
Razão de recirculação	—	7,90	—

As diferenças observadas nas quedas de pressão foram causadas devido à necessidade de estimar-se os fatores de perda de carga localizada, não fornecidos pelo fabricante.

Diversos testes foram realizados com o intuito de observar-se a influência das condições de entrada dos fluidos primário e secundário, individualmente. Variando-se a entalpia específica do fluido primário na entrada do gerador de vapor, h_{pi}, pode-se verificar através da Figura 7, que a taxa de calor total transferida no gerador de vapor, $\dot{Q}$, varia relativamente pouco, para a faixa de entalpias de 610 a 670 Btu/lb. Assim, deve-se esperar que a diferença de temperatura média entre os fluidos primário e secundário mantenha-se aproximadamente constante. Este fato, entretanto, provoca grandes variações na pressão da água de alimentação, conforme apresentado na Fig. 8, assim como modificações sensíveis nas alturas de ebulição, mostradas na Fig. 9.

O aumento da temperatura do secundário com o acréscimo de h_{pi}, provoca uma diminuição na densidade da água de recirculação, o que acarreta, por sua vez, num decréscimo da razão de recirculação, fato este mostrado na Fig. 10.

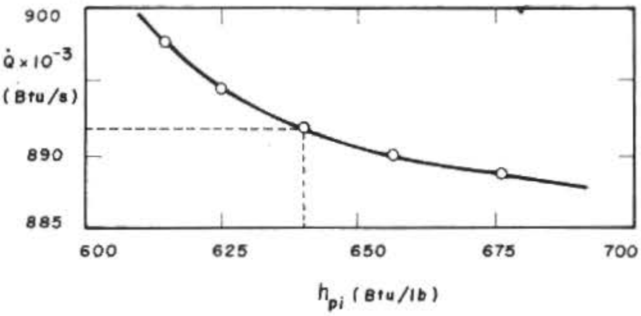


Fig. 7 - Influência de h_{pi} na taxa de calor total transferida no gerador de vapor

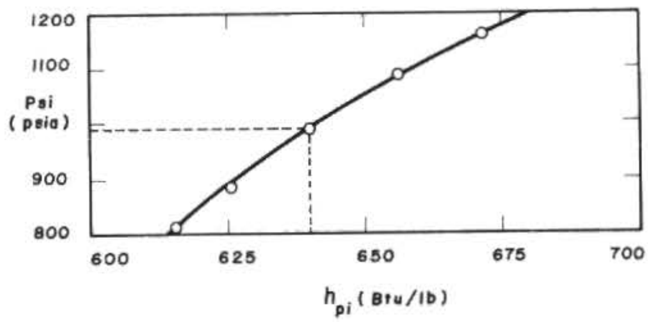


Fig.8 - Influência de h_{pi} na pressão da água de alimentação

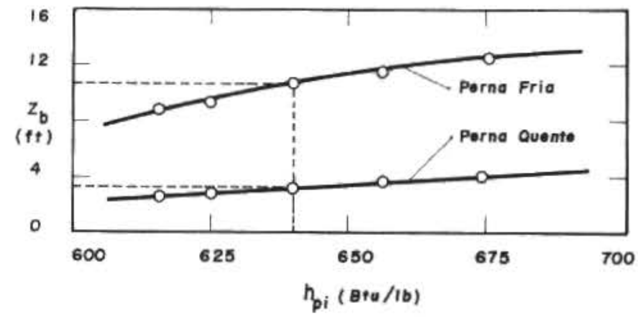


Fig. 9 - Influência de h_{pi} nas alturas de ebulição

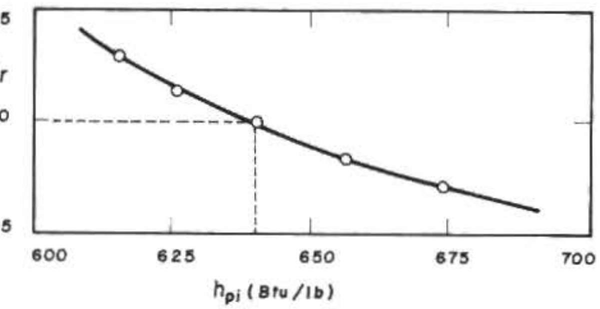


Fig. 10 - Influência de h_{pi} na razão de recirculação

Variando-se a vazão da água de alimentação, $\dot{m}_{si}$ observa-se, na Fig. 11, o comportamento da taxa total de calor transferida no gerador de vapor, $\dot{Q}$. Este comportamento, obviamente, conduz a um decréscimo da entalpia do fluido primário na saída do gerador de vapor, h_{po}, com o aumento de $\dot{m}_{si}$, conforme mostrado na Fig. 12. Constata-se, ainda, através das Figs. 13 e 14, que, tanto a pressão da água de alimentação, P_{si}, quanto a razão de recirculação, R_r, diminuem quando $\dot{m}_{si}$ cresce.

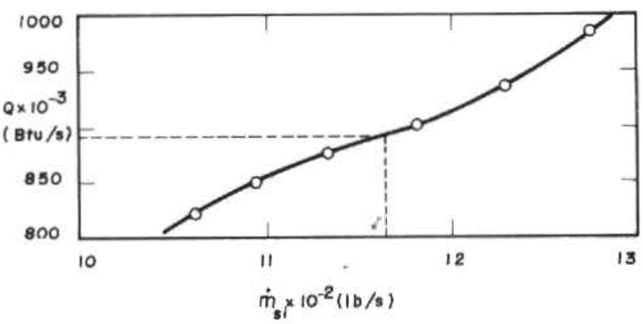


Fig. 11 - Influência de $\dot{m}_{si}$ na taxa de calor total transferida no gerador de vapor

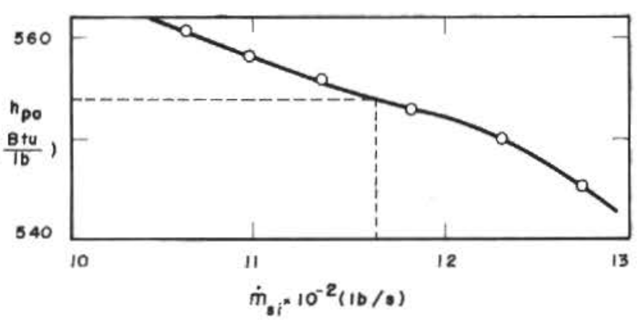


Fig. 12 - Influência de $\dot{m}_{si}$ na entalpia de saída do primário

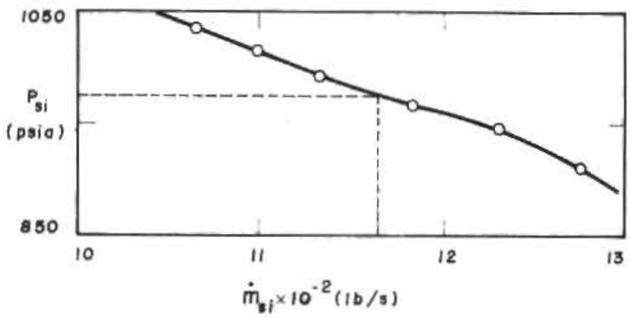


Fig. 13 - Influência de $\dot{m}_{si}$ na pressão da água de alimentação

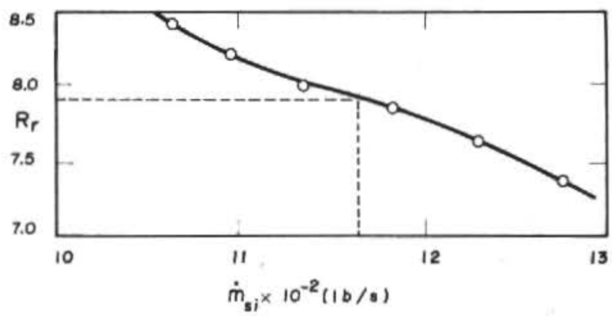


Fig. 14 - Influência de $\dot{m}_{si}$ na razão de recirculação

A influência da obstrução parcial da tubulação em "U" nos principais parâmetros termohidráulicos do gerador de vapor é de fundamental importância para a operação da usina ao longo de sua vida útil. Desta forma, mantendo-se o título de 99,1% do vapor que alimenta a turbina e bloqueios parciais variáveis da tubulação, observou-se que a taxa total de troca de calor en

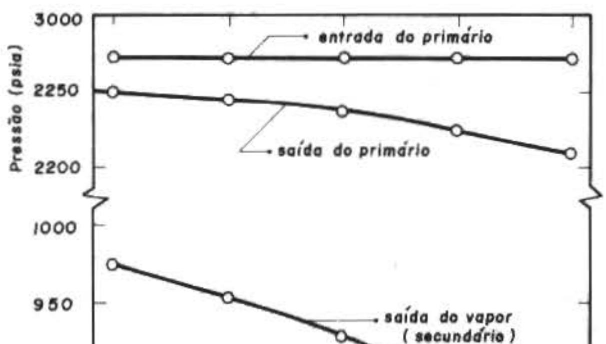


Fig. 15 - Efeito da obstrução dos tubos nas pressões do sistema

tre primário e secundário permaneceu inalterada. No entanto, verificaram-se grandes reduções na pressão do vapor que alimenta a turbina assim como maior queda de pressão no primário, uma vez que ocorre uma aceleração no escoamento, devido à menor área de escoamento disponível. Estes efeitos podem ser observados na Fig. 15.

As quedas de pressão do secundário decorreram da necessidade de aumentar-se a diferença da temperatura entre os fluidos primário e secundário, uma vez que a área de troca de calor sofreu uma redução e a taxa total de troca de calor deve permanecer constante. As distribuições de temperatura do primário e do secundário, para os casos de operação nominal e com 40% de tubos obstruidos, são mostradas na Fig. 16.

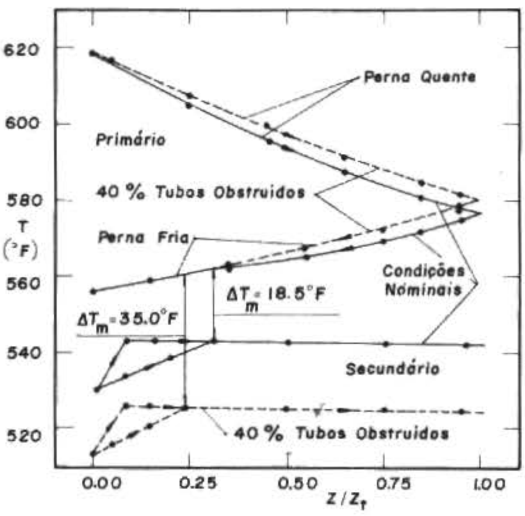


Fig. 16 - Distribuição de temperatura dos fluidos primário e secundário

São observadas apenas pequenas variações, ao longo do escoamento, nas condições do primário, mantendo-se, no entanto, a mesma condição de saída. Quanto ao secundário, as variações são bastante acentuadas, observando-se uma diminuição da temperatura com o aumento da fração de obstrução, ocorrendo assim, um aumento da diferença mínima de temperatura entre os fluidos primário e secundário, ΔT_m, denominado de "*pinch-point*".

A Fig. 17 apresenta a variação da vazão de fluido secundário pelo lado da perna quente, ao longo da altura da tubulação em "U". Constata-se que tal vazão é sempre maior que a do lado da perna fria. No entanto, com o aumento da fração de tubos obstruidos, há uma tendência a diminuir esta vazão.

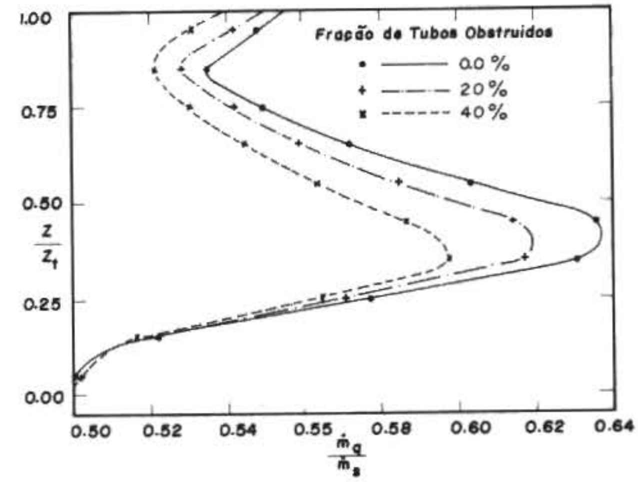


Fig. 17 - Distribuição da vazão do secundário pelo lado da perna quente

COMENTÁRIOS

O desenvolvimento de modelos numéricos para simulação de equipamentos e componentes, nucleares representa uma etapa indispensável no estabelecimento de ferramentas de projeto a serem utilizados pela indústria nuclear. Com respeito ao gerador de vapor, o modelo desenvolvido demonstra que a existência de escoamento transversal afeta sensivelmente as vazões do secundário nos dois ramos dos tubos em "U", impondo, assim, restrições aos modelos que adotam escoamento completamente homogeneizado no secundário.

Deve-se ressaltar, ainda, que o programa GEVAP pode se constituir em útil instrumento para a determinação da área de troca de calor necessária para se obter condições de entrada e saída dos fluidos primário e secundário, previamente estabelecidos.

Nenhum esforço foi empreendido no sentido de se simular o comportamento dos separadores e secadores de vapor.

REFERÊNCIAS

[1] H.G. Hargrove, "MARVEL - A Digital Computer Code for Transient Analysis of a Multiloop PWR System", Westinghouse Nuclear Energy System, WCAP-7909, 1972.

[2] M.D. Murrell, Boiler Simulation, "PWR Station Dynamics", BNDC, Whetstone.

[3] J.J. Cuddin e P.W. Daggett, "TRAP-2- Fortran Program for Digital Simulation of the Transient Behavior of the Once-Throught Steam Generator and Associated Reactor Coolant System", Babcock e Wilcox - Power Generation Group, Nuclear Power Generation Division, 1976.

[4] R.E. Land e R.W. Steitler, "Modeling the Effect of Inventory Loss on Steam Generator Heat Transfer", American Society of Mechanical Engineers (ASME), 1976.

[5] P.C. Christensen, "Description of a Model of a U - Tube Steam Generator", Eletronics Department, Danish Atomic Energy Comission, Research Establishment Riso, 1972.

[6] C.V.M. Braga, "Modelo Termohidráulico para Gerador de Vapor Típico de Usinas PWR". Tese de Mestrado, Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1980.

[7] C.L. Willians e S.J. Green, "Thermal Hydraulic Aspects of PWR Steam Generators", Steam Generator Project Office, Eletric Power Research Institute, 1980.

[8] M.M. El-Wakil, Nuclear Heat Transport, International Textbook Company, 1971.

[9] W.M. Rohsenow e J.P. Hartnett, Handbook of Heat Transfer, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[10] S. Glasstone e A. Sesonshe, Ingineria de Reactores Nucleares, Editorial Reverté S/A.

[11] L.S. Tong, Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1975.

SUMMARY

Generally, "U" tube steam generators with natural internal recirculation are used in PWR power stations. In the present work, a thermalhydraulic model is developed for simulation of such components, in steady state. The flow of the secondary cycle fluid is divided in two parts individually homogeneous, allowing for heat and mass exchange between them. The secondary pressure is determined by defining the moisture of the of the vapor that feeds the turbine. This model is applied to the Angra II steam generator, operating in nominal conditions and with tubing partially plugged.

RENDIMENTO DE MÁQUINAS TÉRMICAS ALIMENTADAS POR FONTES DE CAPACIDADE CALORÍFICA FINITA

BORISAS CIMBLERIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA – UFMG
PAULO CÉSAR DA COSTA PINHEIRO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA – UFMG

SUMÁRIO

A hipótese de reservatório de calor infinito não é realística em condições terrestres e para os ciclos comuns. Entretanto a literatura tem negligenciado tal fato, admitindo que o rendimento de máquinas operando com fonte finita, reversível, é o de Carnot. A verdade é que tal rendimento não é alcançado, conforme demonstraremos

SIMBOLOGIA

- C : capacidade calorífica
- K : constante politrópica $K = \dfrac{C_p}{C_v}$
- Q : calor
- R : constante
- T_{11} : temperatura máxima do fluido operante (K) num sistema mono-cíclico
- T_{1N} : temperatura máxima do fluido operante (K) num sistema policiclico (com N ciclos)
- T_f : temperatura da fonte fria (K)
- T_q : temperatura da fonte quente (K)
- W : trabalho
- η_c : rendimento de Carnot
- $\eta_{(N)}$: rendimento do policiclo
- η_{vol} : rendimento volumétrico

INTRODUÇÃO

A base clássica da discussão do rendimento das máquinas térmicas é o ciclo de Carnot, cujo rendimento é máximo. Entretanto, a máquina de Carnot, irrealizável já pela sua natureza reversível, não admite nem aproximações viáveis no mundo real, por mais de um motivo.

O ramo adiabático do ciclo de Carnot implica em uso de volumes enormes na expansão. Se definirmos a <u>razão dos trabalhos</u> como trabalho líquido por ciclo dividido pelo trabalho realizado na expansão, esta razão terá um valor muito baixo para o ciclo em questão.

Os processos de expansão da máquina de Carnot são a isotérmica de absorção de calor (isotérmica quente) mais o processo de expansão adiabática. Nesta máquina ideal, o trabalho de compressão adiabática é igual ao de expansão adiabática, portanto se cancelam. O trabalho líquido é o da expansão isotérmica, que é pequeno em relação ao de expansão adiabática. Se considerarmos a máquina real de Carnot, a sua razão dos trabalhos é diminuída ainda mais devido às irreversibilidades, notadamente ao atrito mecânico.

Presentes as irreversibilidades, elas podem ser obviadas utilizando processos infinitamente lentos, e o rendimento máximo pode ser alcançado no ciclo assim tornado reversível. Pesquisas recentes sobre o rendimento ótimo de máquinas térmicas operando em tempo finito mostram que o ciclo de Carnot, neste caso, não é otimo.[1,2]

Entretanto, não abordaremos aqui a Novel Termodinâmica do tempo finito, deixando este importante desenvolvimento para um outro trabalho. O nosso tema é o uso de fontes de capacidade calorífica finita, que também necessita de revisão, tendo sido tratado até agora um tanto perfunctoriamente na literatura. Tem sido admitido tacitamente que o rendimento de máquinas operando com fonte finita, reversíveis, é o de Carnot. A verdade é que tal rendimento não é alcançado neste caso, conforme demonstraremos. Outras consequências importantes resultam de uma análise mais detalhada.

FONTES FINITAS

Consideremos uma máquina de Carnot operando entre dois reservatórios com as temperaturas, respectivamente,

T_q e T_f (alta e baixa). O rendimento térmico, no caso de operação reversível é o de Carnot.

$$\eta_c = \frac{T_q - T_f}{T_q} \qquad (1)$$

Neste contexto, a fórmula (1) é impecável.

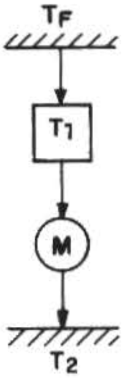


Fig. 1

Entretanto, na interpretação comum, as temperaturas dos reservatórios identificam-se com as temperaturas máxima e mínima de um fluido operante, a temperatura mínima é praticamente igual à do reservatório frio, ou à temperatura ambiente, que pode ser suposta fixa. O que realmente importa é definir a fonte de calor.

No caso de uma chama, caso das fornalhas de caldeiras, a temperatura do reservatório ou fonte é muito mais alta do que a do fluido operante. É porisso que o rendimento teórico baseado na temperatura da chama é muito superior àquele baseado na temperatura máxima de água. Distingamos, pois, a temperatura da fonte T_q.

$$T_q > T_1 > T_f$$

A fonte transfere calor ao fluido operante, no seu ponto de temperatura máxima, T_1. A hipótese de fonte finita, ou reservatório de calor, que se faz na literatura corrente, obviamente não é realística em condições terrestres e para os ciclos comuns. Suponhamos, portanto, a fonte finita. Neste caso a sua temperatura cai ao ceder calor, de T_q para T_1. Cessando a fase de transferência de calor, afasta-se a fonte do fluido. Sendo C a capacidade calorífica constante da fonte, o calor transferido é $C(T_q - T_1)$.

Esta é a quantidade de calor que pode ser transformada em trabalho, com um rendimento η:

$$\eta = \frac{T_1 - T_f}{T_1}$$

Seja T_1 bem próxima de T_q. A quantidade de calor transferida à máquina será pequena ($T_q - T_1$ pequena), mas a sua conversão em trabalho dar-se-á com alto rendimento. Se, ao contrário, T_1 for baixa (próxima a T_f), haverá maior transferência de calor à máquina, mas a conversão se fará com rendimento baixo.

Pode-se subdividir o ciclo em ciclos infinitesimais ou finitos de Carnot, implicando em uma sequência de reservatórios. O rendimento, no caso da subdivisão, não é igual ao do ciclo de Carnot único. Antes de abordar este caso, é necessário analisar o ciclo indiviso.

CICLO DE MÁQUINA ÚNICA

Num ciclo de máquina de Carnot única, o trabalho efetuado é

$$W = C(T_q - T_1)\,\frac{T_1 - T_f}{T_1} \qquad (2),$$

ou

$$W = C\left(T_q + T_f - T_1 - \frac{T_q \cdot T_f}{T_1}\right) \qquad (3)$$

T_q poderia ser a temperatura da chama e T_f a temperatura ambiente; é razoável considerá-las como fixas. A variável será T_1, a temperatura "quente" do ciclo. Vamos maximizar o trabalho em relação a T_1. A equação a resolver é

$$\frac{dW}{dT_1} = C\left[\left(\frac{T_q\,T_f}{T_1}\right)^2 - 1\right] = 0 \qquad (4)$$

Donde o valor ótimo de T_1:

$$\text{opt } T_{11} = \sqrt{T_q T_f} \qquad (5)$$

onde a segunda unidade do subscrito indica "uma máquina única". A solução da média geométrica, obtida acima, não é nova.

No caso de máquina única, é rejeitada a quantidade de calor $C(T_1 - T_f)$, que poderia servir de fonte a um processo externo "mais baixo". Se este processo incorporar várias máquinas, e estas apresentam rendimento ótimo, o aproveitamento deste calor será o melhor possível.

Calculando o trabalho produzido por um número arbitrário de máquinas otimizadas, o trabalho máximo possível corresponde a um número infinito de ciclos de Carnot ($N \to \infty$).

Concluimos que não é possível obter o rendimento de Carnot para uma fonte de calor finita, mesmo usando um número infinito de máquinas de Carnot sequenciais.

A seguir, demonstrados os resultados acima, definimos o ciclo reversível que obtém o rendimento máximo a partir de um reservatório quente finito.

SEQUÊNCIA DE CICLOS DE CARNOT

Sejam N ciclos de Carnot superpostos, ou seja, cada um servindo de fonte para o seguinte, até chegar na temperatura ambiente, conforme fig. 2.

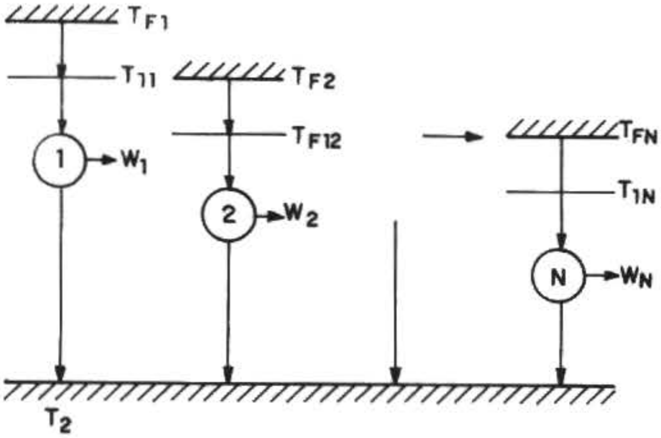


Fig. 2

Fonte inicial a T_q, suprindo calor da máquina 1 a T_{1N}. Esta fonte é desligada da i-ma máquina a T_{iN}, tornando-se então a fonte da máquina (i + 1)-ma.

Assim, a temperatura alta do primeiro ciclo (fig. 2)T_1 torna-se a temperatura de fonte do segundo ciclo, T_{q2}.

$$T_i = T_{q(i+1)} \tag{6}$$

para $1 \leq i \leq (N-1)$, N sendo o número total de ciclos na sequência. O trabalho produzido pelo i-mo ciclo é, usando a equação (3).

$$W_i = C\left[T_{qi} + T_f - T_i - \frac{T_{qi}\ T_f}{T_i}\right] \tag{7}$$

O trabalho total da sequência de N ciclos é

$$W(N) = \sum_{i=1}^{N} W_i \tag{8}$$

Usando (6), (7), vem

$$W(N) = C\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{T_{qi}\ T_f}{T_i}\right) + CT_fN + CT_q - CT_N \tag{9}$$

Interessa-nos o conjunto $\{T_1, T_2 \ldots T_N\}$ das temperaturas "altas", que maximiza o trabalho total W(N). Notemos que a única variável independente é a primeira temperatura T_1. A última; T_N é otimizável pelo problema da máquina única; T_2, pelo problema do (N - 1)-mo ciclo e assim por diante; ou seja, T_i pode ser otimizada independentemente das máquinas de índice inferior a i.

Como caso mais simples, consideremos o de dois ciclos.

Teremos

$$W(2) = -C\frac{T_qT_f}{T_1} - C\frac{T_1T_f}{T_2} + 2CT_f + CT_q - CT_2 \tag{10}$$

Ora, o valor ótimo já foi obtido para T_2

$$\text{opt } T_{22} = \sqrt{T_{q2}\cdot T_f} = \sqrt{T_1T_f} \tag{11}$$

(11) fixa a temperatura alta do segundo ciclo, T_2; então opt T_{12} é solução de

$$\frac{dW(2)}{dT_{11}} = C\left[T_qT_f\Big/(T_{11})^2 - \sqrt{\frac{T_f}{T_q}}\right] = 0 \tag{12}$$

que é

$$\text{opt } T_{12} = \left[(T_q)^2T_f\right]^{1/3} = T_q\left[\frac{T_f}{T_q}\right]^{1/3} \tag{13}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os ciclos descendentes, podemos, otimizando todas as temperaturas altas, achar o valor ótimo de T_{1N}:

$$\text{opt } T_{1N} = \left[(T_q)^NT_f\right]^{\frac{1}{N+T}} = T_q\left[\frac{T_2}{T_q}\right]^{\frac{1}{N+T}} \tag{14}$$

A equação (2) foi demonstrada para N = 1 e 2 pode ser demonstrada, por indução, para N qualquer. Se cada um dos ciclos pode ser otimizado independentemente dos ciclos de índice mais baixo, podemos começar pelo ciclo N-mo, prosseguindo com N-1, N-2...2. Admitindo (14) verdadeira para a sequência de 1...(N-1), a temperatura superior ótima para um ciclo de índice i, $2 \leq i \leq N$, será

$$\text{opt } T_{iN} = T_{qi}\left(\frac{T_f}{T_{qi}}\right)^{\frac{1}{N-i+2}} \tag{15}$$

Para introduzir a variável principal T_{11} façamos i = 2, utilizando a eq. (6).

$$T_{2N} = T_{11}\left(\frac{T_f}{T_{11}}\right)^{1/N} \tag{16}$$

O passo seguinte é o caso $3 \leq i \leq N$. Por indução, para o ciclo (i - 1)-mo.

$$\text{opt } T_{(i-1)} = T_{11}\left(\frac{T_f}{T_{11}}\right)^{\frac{i-2}{N}} = T_q \tag{17}$$

Substituindo este valor em (15), em função de T_{11}

$$\text{opt } T_{iN} = T_{11}\left(\frac{T_f}{T_{11}}\right)^{\frac{i-1}{N}} \tag{18}$$

(18) pode ser usada na expressão do trabalho total dos N ciclos (9).

$$W(N) = C\left[-\frac{T_qT_f}{T_{11}} - N(T_{11})^{\frac{1}{N}}(T_f)^{\frac{N-1}{N}} + T_fN + T_q\right] \tag{19}$$

Este trabalho pode ser otimizado em relação a T_{11}. O resultado é

$$C\left[\frac{T_qT_f}{\text{opt } T_{1N}^{\,2}} - \left(\frac{T_f}{\text{opt } T_{1N}}\right)^{\frac{N-1}{N}}\right] = 0 \tag{20}$$

Desta equação, o valor de opt T_{1N} reproduz a eq. 14.

Com a fonte inicial a T_q, o trabalho máximo obtenível para a sequência de N cíclos será

$$W(N) = C\left[-(N+1)T_f\left(\frac{T_q}{T_f}\right)^{\frac{1}{N+1}} + NT_f + T_q\right] \tag{21}$$

O limite superior desta função corresponde a $N \to \infty$. A fim de separar os termos em N, escrevemos (21) sob a forma

$$W(N) = C\left[T_q - T_f - T_f(N+1)\left[\left(\frac{T_q}{T_f}\right)^{\frac{1}{N+1}} - 1\right]\right] \tag{22}$$

e lembramos que

$$\lim_{N\to\infty} N(x^{\frac{1}{N}} - 1) = \ln x \tag{23}$$

obtendo

$$W(\infty) = C\left(T_q - T_f - T_f \ln \frac{T_q}{T_f}\right) \tag{24}$$

Este é o trabalho reversível máximo que pode ser extraído do reservatório de capacidade finita, e que é igual à exergia inicial do sistema à temperatura T_q. Esta exergia é

$$W = C\int_{T_f}^{T_q}\left(1 - \frac{T_f}{T}\right)dT \tag{25}$$

O trabalho máximo que poderia ser obtido a partir do ciclo de Carnot único entre as duas temperaturas pode ser obtido fazendo N = 1 em (21) ou combinando as eqs. (3) e (5):

$$W(1) = C\left(\sqrt{T_q} - \sqrt{T_f}\right)^2 \tag{26}$$

e é menor do que $W(\infty)$, como era de esperar

RENDIMENTOS

O rendimento do ciclo múltiplo é

$$\eta(N) = \frac{W(N)}{Q} = \frac{W(N)}{C(T_q - T_f)} \tag{27}$$

ou

$$\eta(N) = 1 - \frac{T_f}{T_q - T_f}(N+1)\left[\left(\frac{T_q}{T_f}\right)^{\frac{1}{N+1}} - 1\right] \tag{28}$$

Calculemos $\eta(\infty)$ pelo limite

$$\eta(\infty) = \lim_{N\to\infty} (N) = 1 - \frac{T_f}{T_q - T_f}\,\ln\left(\frac{T_q}{T_f}\right) \tag{29}$$

ou

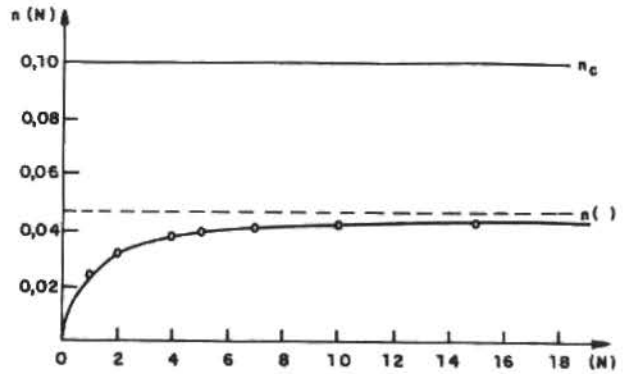
$$\eta(\infty) = 1 + \frac{1-\eta_c}{\eta_c}\,\ln(1-\eta_c) \tag{30}$$

onde

η_c é o rendimento de Carnot

$$\eta_c = \frac{T_q - T_f}{T_q}$$

O rendimento em questão acha-se plotado na figura abaixo.



Uma expressão significativa resulta da expansão do logarítmo em (29) em forma de somatória:

$$\eta(\infty) = \eta_c - (1 - \eta_c)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_c^{\,j}}{j+1} \tag{31}$$

onde η_{cj} é o rendimento de Carnot de j-esimo ciclo.

Todos os termos da somatória são positivos, e, portanto

$$\eta(\infty) < \eta_c$$

O rendimento de uma sequência infinita de máquinas produzindo trabalho a partir de um reservatório quente finito originalmente a T_q, rejeitando para um reservatório frio à temperatura constante T_f, será sempre menor do que o rendimento de uma máquina de Carnot única operando entre dois reservatórios, a T_q e T_f.

O rendimento de Carnot clássico, que supõe reservatórios infinitos de calor não deve ser utilizado como índice de mérito para máquinas térmicas operando entre fontes finitas.

Admitindo que a fonte fria pode ser suposta infinita (atmosfera ou massa d'água), não é verdade que as fontes quentes usuais sejam infinitas. No motor de combustão interna, há ignição intermitente de uma massa finita de gás combustível, altamente diluido com ar, que ao queimar perde calor e temperatura. No queimador de fornalha, há suprimento contínuo de combustível e uma chama contínua, simulando um reservatório infinito. Haveria que examinar melhor a validade desta hipótese, em face das perdas de transmissão de calor e outras.

Fig.4 - Rendimento térmico de ciclo com fonte finita em função do rendimento de Carnot, entre as mesmas temperaturas.

O ciclo global de N máquinas não se comporta como nenhum dos ciclos termodinâmicos comuns. Andresen e seus colaboradores construiram um ciclo reversível que faz a conversão de energia de uma fonte por meio de 3 processos reversíveis: uma adiabática, uma isotérmica e uma politrópica.

POLICICLO DE ANDRESEN

Seja o reservatório frio a temperatura T_f de capacidade térmica infinita. É a ponta apropriada, obviamente, para uma rejeição isotérmica de calor.

O reservatório quente tem a capacidade C. Temos, portanto,

$$-\frac{dQ}{dT} = C \text{ (do ponto de vista da máquina)}$$

Suponhamos que o fluido operante é um gás perfeito. Pelo 1º Princípio:

$$dQ = C_v dT + \frac{RT}{V} dV \qquad (33)$$

e

$$-\frac{dV}{V} = \frac{C + C_v}{R} \frac{dt}{t} \qquad (34)$$

Integrando, vem

$$V = V_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{C+C_v}{R}} \qquad (35)$$

onde V_i e T_0 são parâmetros de referência.

Ora, o resultado (35) define um processo politrópico

$$P\,V^k = \text{const}$$

com $k = 1 + \dfrac{R}{C_v - C}$

Fazendo C sucessivamente igual a 0, ∞, $-C_v$ e $-C_p$ obtemos a adiabática, isotérmica, isométrica e isobárica, respectivamente.

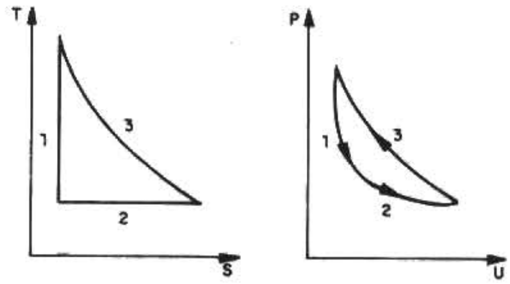


Fig. 5 - Policiclo reversível a gás perfeito
1 = adiabatica, 2 = isotérmica,
3 = politrópica

Para completar o ciclo, podemos juntar os dois ramos já vistos do ciclo por uma adiabática reversível (compressão).

CASO DE FONTE FRIA FINITA

Haveria troca da isotérmica por uma politrópica

$$pV^{1 + \frac{R}{C + C_v}} = \text{const}$$

O ciclo obtido é um hibrido entre o ciclo de Carnot (a isotérmica) e um ciclo de Brayton (politrópica) ou mesmo Otto. Para maior detalhe seria preciso definir a capacidade C (volume constante, pressão constante,....)

O policiclo resulta duma sequência de ciclos, cada qual utilizando o calor de rejeito do anterior. Na prática só existe o ciclo dual (p.ex. gás/vapor, turbina de gás seguida de turbina a vapor), eventualmente o triplo, (ex reator rápido resfriado a sódio, ciclo intermediário a sódio, ciclo de vapor).

A vantagem, em relação à máquina única, é evitar os volumes enormes na expansão e as razões de compressão elevadas. Em contrapartida, a razão dos trabalhos é baixa em relação à do ciclo de Carnot clássico: calor é recebido a uma temperatura inferior à máxima do ciclo único.

O rendimento, em função do volume varrido, depende fortemente do intervalo total de temperatura e da capacidade do reservatório. Definamos o rendimento volumétrico

$$\eta_{vol} = \frac{W}{V_{max} - V_{min}}$$

Pode-se provar que o máximo de η_{vol} corresponde a

$$\frac{R}{C + C_V} = 1 + \frac{\ell n\left(\frac{T_1}{T_f}\right)}{1 - \frac{T_q}{T_f}} \tag{36}$$

Assim, o policiclo é apropriado à utilização de calor de baixa qualidade. Para Tq/Tf alto, a razão de compressão é alta, tornando o ciclo sensível às perdas de atrito no êmbolo.

Nos processos de combustão a taxa finita, a potência máxima que pode ser obtida tem a ver com os resultados acima.

Os ciclos em que a troca de calor dá-se à temperatura variável, tal como o Otto ou Rankine, têm rendimento de Carnot menores do que os ciclos em que a troca de calor se dá isotermicamente, tal como o Carnot ou o Stirling. Esta aparente inferioridade dos primeiros só é real no caso de reservatórios infinitos.

No caso de fontes de capacidade finita é melhor aceitar o calor não-isotermicamente, acompanhando a queda de temperatura do reservatório, do que receber o calor a uma temperatura fixa, não utilizando o resto do intervalo de temperatura. A politrópica então acompanha a capacidade térmica do reservatório.

Cada um dos ciclos componentes deve operar à maior temperatura possível compatível com a sequência dos ciclos de índice superior na sequência.

As irreversibilidades das máquinas reais não foram consideradas, e iriam baixar os rendimentos calculados pelo método acima. O que se fez foi estimar o efeito da capacidade térmica finita da fonte de calor primária.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRESEN, B., Salamon e R.S. Berry. Thermodynamics in finite time: extremals for imperfect heat engines. J. Chem. Phys. 66 (4), 1571-77 (1977).

[2] ANDRESEN, B., R.S. Berry, A. Nitzan P. Salamon. Thermodynamics in finite time I: The step-Carnot cycle. Phys. Rev. A 15, 2086-93 (1977).

[3] RUBIN, Morton H. Optimal configuration of a class of irreversible heat engines. Phys. Rev. A 19 (3), 1272-1276 (I); 1277-1289 (II) 1979.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Sta. Maria Imaculada Corsino pela esmerada datilografia do trabalho.

ABSTRACT

The hypothesis of an infinite heat reservoir is admittedly unrealistic for common cycles. However, the authors have neglected this fact, adopting the Carnot efficiency even for a finite source. We prove that the efficiency of a recersible engine operating from a finite hot source is lower than the Carnot efficiency.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and tecnological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of U$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscripts is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies – approx. 210 x 280 mm – with a letter containing title of the papers, name(s) of the institution(s) and author(s)' address(es).

Together with the letter, the author(s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author(s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

Subscriptions

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO