

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalurgia, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os Trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Editor Executivo da RBCM  
Secretaria da ABCM  
PUC/RJ - ITUC  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea  
22453 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

---

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

Executive Editor of RBCM  
Secretary of ABCM  
PUC/RJ - ITUC  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea  
22453 - Rio de Janeiro, RJ - Brazil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.



**MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM**

Luiz Bevilacqua (Presidente)

Hans Ingo Weber (Vice-Presidente)

Augusto Cesar Galeão (Secretário Geral)

Mauro Sergio Pinto de Sampaio (Secretário)

Maurício Nogueira Frota (Diretor de Patrimônio)

Vol. IX n.º 2 - Mai. 1987

**EDITOR  
RESPONSÁVEL**  
*Rubens Sampaio*

**EDITOR  
EXECUTIVO**  
*J. M. Freire*

**CONSELHO  
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula  
Arthur J. V. Porto  
Berend Snoeijer  
Bernardo Horowitz  
C. S. Barcellos  
D. E. Zampieri  
Duraid Mahrus  
E.O. Taroco Aliano  
F. Venâncio Filho  
F. E. Mourão Saboya  
Giulio Massarani  
Guillermo Creuss  
Hans Ingo Weber  
Henner A. Gomide  
Jan Leon Scieszko  
Jerzy T. Sielawa  
J. J. Espindola  
Liu Hsu  
Maurício N. Frota  
Miguel H. Hirata  
Nelson Back  
Néstor Zouain  
Nivaldo L. Cupini  
O. Maizza Neto  
Pedro Carajilescov  
Sergio Colle

**ON THE EXISTENCE OF EULER FLOWS THAT ARE  
TOPOLOGICALLY ACCESSIBLE FROM A GIVEN FLOW** 93

**H. Keith Moffatt**

Institute for Nonlinear Science and  
Institute of Geophysics and Planetary Physics  
University of California  
San Diego - USA

**ANÁLISE TÉRMICA EM CRESCIMENTO DE CRISTAIS** 103

Washington Braga Filho - Membro da ABCM  
PUC/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica

**C.M. Vest**

Mechanical Engineering & Applied Mechanics Department  
The University of Michigan  
Ann Arbor - USA

**HYDROMAGNETIC FLOW PAST AN INFINITE VERTICAL  
OSCILLATING PLATE WITH CONSTANT HEAT FLUX** 119

**V. M. Soundalgekar**

Brindavan Society  
Thane - India

**NOTE ON THE LOW ECKERT NUMBER FORM OF THE  
ENERGY EQUATION** 129

Álvaro Toubes Prata - Membro da ABCM

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica

**RELAÇÕES CONSTITUTIVAS NÃO LINEARES NA  
DETERMINAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES PLANAS DE  
EQUILÍBRIO DE UM ANEL CIRCULAR EXTENSÍVEL** 137

Edgar Nobuo Mamiya - Membro da ABCM

Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Materiais

**Rubens Sampaio - Membro da ABCM**

PUC/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica



A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
É PUBLICADA COM O APOIO:

MCT – CNPq – FINEP

### ANÚNCIOS NA RBCM

Qualquer solicitação de anúncios na revista deverá ser encaminhada  
ao Representante exclusivo:

**RIMTO COMUNICAÇÕES PUBLICITÁRIA LTDA.**

Rio: Rua Conde de Bonfim, 370 Grs. 502/5/6/7/9

Tels.: 284-5842 (R) e 284-4920

SP: Rua Cel. Xavier de Toledo, 71 Grs. 602/3 – Tel.: 37-5252

DF: Shin QI 10 Cj. 7 – C/10 – Tel.: 577-2781

Formatos:

com margem 12,5 x 19,9 – sangrando 15,5 x 22,0

Todo o material deve ser fornecido pelo anunciante.

Fechamento: 30 dias antes do mês da circulação.

Circulação: Fevereiro – Maio – Agosto – Novembro.

Distribuição: Para todo o país.

# COBEM-87

IX CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
9th BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING

7 - 11 DE DEZEMBRO DE 1987

FLORIANÓPOLIS - SANTA CATARINA - BRASIL

## ÁREAS COBERTAS

- PROJETO MECÂNICO
- PROCESSOS DE FABRICAÇÃO
- INSTRUMENTAÇÃO, AUTOMAÇÃO E METROLOGIA
- VIBRAÇÕES E ACÚSTICA
- MECÂNICA DOS SÓLIDOS E ESTRUTURAL
- MÉTODOS NUMÉRICOS
- TERMODINÂMICA
- TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA
- MECÂNICA DOS FLUIDOS
- SISTEMAS E EQUIPAMENTOS TÉRMICOS E HIDRÁULICOS

## SCOPE

- MECHANICAL DESIGN
- MANUFACTURING PROCESSES
- AUTOMATION, INSTRUMENTATION, AND METROLOGY
- ACOUSTICS AND VIBRATION
- SOLID AND STRUCTURAL MECHANICS
- NUMERICAL METHODS
- THERMODYNAMICS
- HEAT AND MASS TRANSFER
- FLUID MECHANICS
- THERMAL AND HYDRAULIC SYSTEMS, AND EQUIPMENTS

## PROMOÇÃO (PROMOTED BY)



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

## INFORMAÇÕES GERAIS (GENERAL INFORMATION)

LIMITE PARA ENTREGA DOS RESUMOS — 20/03/87  
(*ABSTRACT DUE — MAR. 20, 1987*)  
LIMITE PARA ENTREGA DOS TRABALHOS — 15/06/87  
(*FULL-LENGTH PAPER DUE — JUN. 15, 1987*)  
ENDEREÇO P/ CORRESPONDÊNCIA (*MAILING ADDRESS*)  
COBEM/87  
DEPT. ENGENHARIA MECÂNICA - UFSC  
CX. P. 476 — FLORIANÓPOLIS, SC  
88049 — BRASIL  
TELEPHONE: (0482) 339397 - 33-9225  
TELEX: (0482) - 240 - UFSCBR

## ON THE EXISTENCE OF EULER FLOWS THAT ARE TOPOLOGICALLY ACCESSIBLE FROM A GIVEN FLOW

H. Keith Moffatt\*

Institute for Nonlinear Science and  
Institute of Geophysics and Planetary Physics  
University of California  
San Diego — USA

### ABSTRACT

*Through consideration of the process of magnetic relaxation in a perfectly conducting, viscous, barotropic fluid, it is shown that, for each pressure-density relationship  $p = k\rho^\gamma$ , there exists a magnetostatic equilibrium field  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  that is topologically accessible from any given field  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$ , and that the associated magnetic energy is a decreasing function of the compressibility. Exact analogy with the Euler equations of incompressible inviscid flow then leads to the conclusion that, given any kinematically possible flow  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , there exists (at least) a one-parameter family of distinct Euler flows  $\mathbf{u}^E(\mathbf{x}, \lambda)$  topologically accessible from  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ .*

### 1. INTRODUCTION

In a previous paper [1], we have introduced the concept of 'topological accessibility', which is a natural extension of the well-established concept of topological equivalence, and which plays an important role in the theory of the existence of Euler flows, i.e. steady solutions of the classical Euler equations of incompressible flow of an inviscid fluid. In [1], attention was focussed on a restricted form of topological accessibility involving volume-preserving mappings of the fluid domain. In the present paper, we extend the analysis to cover mappings that are not volume-preserving, and thereby show that, corresponding to any given streamline topology, there is (at least) a one-parameter family of distinct Euler flows (which, as in [1], may contain tangential discontinuities). The method involves appeal to the exact analogy between the steady Euler

On leave of absence from DAMTP, University of Cambridge, UK. This paper follows the theme of an invited lecture presented at the Brazilian National Congress in Thermoscience, Rio de Janeiro, December 1986

equations and the equations of magnetostatic equilibrium of a perfectly conducting, compressible fluid, and consideration of the process of relaxation towards such equilibria. The treatment given here is self-contained, but more compact than in [1], to which reference should be made for discussion of physical background and motivation.

## 2. TOPOLOGICAL ACCESSIBILITY

Let  $D$  be a finite connected domain in  $\mathbb{R}^3$ , and let  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  be a smooth ( $C^1$ ) velocity field defined for  $\mathbf{x} \in D$  and  $0 \leq t < \infty$ , and satisfying

$$\mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial D \quad (\text{all } t). \quad (2.1)$$

We define the dissipation integrals

$$D_s(t) = \int_D (\nabla \times \mathbf{v})^2 d^3\mathbf{x} \quad (2.2)$$

and

$$D_b(t) = \int_D (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 d^3\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

and we shall say that  $\mathbf{v}$  is a *relaxation velocity field* if

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \text{ uniformly in } D, \quad (2.4)$$

and

$$\int_0^\infty D_s(t) dt < \infty, \quad \int_0^\infty D_b(t) dt < \infty. \quad (2.5)$$

Let  $\rho(\mathbf{x}, t)$  be the associated density field satisfying the mass-conservation equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.6)$$

with initial condition  $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0$  (cst.), and let  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  be the particle displacement field, determined by the dynamical system

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}. \quad (2.7)$$

The Jacobian of the mapping  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  is

$$J = \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}, t)} (> 0). \quad (2.8)$$

Components of the deformation tensor  $\partial X_i / \partial x_j$  cannot increase more rapidly than exponentially,

and so are finite for all finite  $t$ ; hence, for  $t < \infty$ , the mapping  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  is a homeomorphism.

However, as  $t \rightarrow \infty$ , the limit mapping induced by a relaxation velocity field

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}^E(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{2.9}$$

may exhibit discontinuities, despite the partial control implied by (2.5); this is because material surfaces that are initially apart may, asymptotically, be squeezed together even when the conditions (2.4) and (2.5) are satisfied.

Now let  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$  be a smooth field satisfying

$$\nabla \cdot \mathbf{b}^0 = 0 \text{ in } D, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^0 = 0 \text{ on } \partial D \tag{2.10}$$

but otherwise arbitrary; in particular, the topology of  $\mathbf{b}^0$  is arbitrary, the knots and linkages in the lines of force of  $\mathbf{b}^0$  (' $\mathbf{b}^0$ -lines') being arbitrarily complex. Let  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  be the vector field that evolves from  $\mathbf{b}^0$  under 'frozen-field' distortion by  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , i.e.  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  is determined by

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}^0(\mathbf{x}). \tag{2.11}$$

Note that, by virtue of (2.1), (2.10) and (2.11), the conditions

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ in } D, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ on } \partial D \tag{2.12}$$

are automatically satisfied for all  $t > 0$ .

The (Lagrangian) solution of (2.11) is given by

$$b_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\rho(\mathbf{X}, t)}{\rho_0} b_j^0(\mathbf{x}) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = J^{-1} b_j^0(\mathbf{x}) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \tag{2.13}$$

(see, for example, [2], § 3.1). For each finite  $t > 0$ , this relationship establishes a homeomorphism between the fields  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$  and  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  which are therefore topologically equivalent:  $\mathbf{b}^0$ -lines map faithfully to  $\mathbf{b}$ -lines, and the fluxes of  $\mathbf{b}^0$  and  $\mathbf{b}$  along corresponding flux-tubes are equal. However, as  $t \rightarrow \infty$ , as noted above, the limit mapping  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}^E(\mathbf{x})$  may exhibit discontinuities, and so therefore may the limit field  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  defined by

$$\mathbf{b}^E(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t). \tag{2.14}$$

In general therefore, the relationship between  $\mathbf{b}^0$  and  $\mathbf{b}^E$  is *not* a homeomorphism, and the fields are not topologically equivalent. We say nevertheless that  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  is *topologically accessible* from  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$ , being the result of deformation of  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$  by a relaxation velocity field. The property of



topological accessibility is weaker than that of topological equivalence, but it is just the property that is needed in the Euler flow context.

### 3. MAGNETIC RELAXATION IN A BAROTROPIC FLUID

Let us now interpret  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$  as the magnetic field at time  $t=0$  in a perfectly conducting, viscous, compressible fluid, with barotropic pressure-density relationship  $p = p(\rho)$ . To be specific, we shall assume the perfect gas relationship

$$p = k\rho^\gamma, \quad (3.1)$$

where  $\gamma (> 1)$  and  $k$  are constants. The compressibility of the fluid in the uniform density state  $\rho = \rho_0$  is

$$\lambda = \left(\rho \frac{dp}{d\rho}\right)_0^{-1} = (\gamma k \rho_0^{\gamma-1})^{-1}, \quad (3.2)$$

so that the incompressible limit corresponds to  $\lambda \rightarrow 0$  (or  $k \rightarrow \infty$ ), and the perfectly compressible (or pressureless) limit corresponds to  $\lambda \rightarrow \infty$  (or  $k \rightarrow 0$ ).

In general, the Lorentz force  $(\nabla \times \mathbf{b}^0) \times \mathbf{b}^0$  is rotational, so that the fluid must move for  $t > 0$ , even if initially at rest. Let  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  be the velocity field that develops, and let  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$ , and  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  be the associated density, pressure and magnetic fields. These fields are governed by the MHD equations, namely (2.6), (2.11) and (3.1) together with the Navier-Stokes equation

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \zeta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (3.3)$$

Here,  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ , and  $\mu$  and  $\zeta$  represent shear and bulk viscosity coefficients respectively. We shall suppose that  $\mu$  and  $\zeta$  are sufficiently large to guarantee smoothness of  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  for all  $t > 0$ .

From these equations, we may easily construct an energy equation. Defining

$$M(t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{b}^2 d^3\mathbf{x} \quad (\text{magnetic energy}) \quad (3.4)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 \rho d^3\mathbf{x} \quad (\text{kinetic energy}) \quad (3.5)$$

$$\Pi(t) = \int Q(\rho) \rho d^3\mathbf{x} \quad (\text{elastic energy}) \quad (3.6)$$

where

$$Q(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{-2} p(\rho) d\rho = \frac{k}{\gamma-1} (\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}), \quad (3.7)$$

and

$$\Phi(t) = \mu D_s(t) + \zeta D_b(t) \geq 0 \quad (\text{energy dissipation rate}) \quad (3.8)$$

we find

$$\frac{d}{dt}(M(t) + K(t) + \Pi(t)) = -\Phi(t). \quad (3.9)$$

$\Pi(t)$  represents the energy stored in the fluid by virtue of the compression or expansion of fluid elements, and is positive (when  $\gamma > 1$ ) (since work must be done on the fluid to generate density fluctuations from an initial state of uniform density). At time  $t = 0$ , we have

$$M(0) = M_0 \neq 0, \quad K(0) = 0, \quad \Pi(0) = 0, \quad (3.10)$$

and for all  $t \geq 0$ , we have

$$0 \leq M(t) \leq M_0, \quad 0 \leq K(t) \leq M_0, \quad 0 \leq \Pi(t) \leq M_0. \quad (3.11)$$

We now argue as in [1]: the total energy  $E(t) = M(t) + K(t) + \Pi(t)$  is non-negative and monotonic decreasing, according to (3.9), and therefore tends to a limit. Hence

$$\Phi(t) \downarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

and hence also, since  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  is smooth,

$$K(t) \downarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Hence

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \text{ uniformly in } D. \quad (3.14)$$

Moreover

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) dt = E(0) - E(\infty) \leq M_0 \quad (3.15)$$

so that the integrals (2.5) both converge. Hence  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  is a relaxation velocity field as defined in section 2.

The constraints (3.11) further imply that both  $\rho$  and  $|\mathbf{b}|$  remain uniformly bounded in  $D$ .

To see this, consider the contribution to  $\Pi$  and  $M$  from a small mass element  $\delta m = \rho \delta^3 \mathbf{x}$ :

$$\delta \Pi = Q(\rho) \delta m, \quad \delta M \sim \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \delta m / \rho \quad (3.16)$$

If  $\rho \rightarrow 0$  ( $\delta m$  being fixed) then clearly  $|\mathbf{b}| \rightarrow 0$  also, since  $\delta M$  remains finite. Also  $\rho$  cannot increase without limit, since then  $\delta \Pi \rightarrow \infty$  also, in conflict with (3.11c) (a positive infinity cannot

be compensated by a negative infinity, since  $Q(\rho)$  is bounded below). Hence,  $|\mathbf{b}|^2 - 2\rho \delta M / \delta m$  remains finite also.

Since  $v \rightarrow 0$  and  $\rho$  and  $|\mathbf{b}|$  remain bounded, equations (2.6) and (2.11) become asymptotically

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

i.e.

$$\rho \rightarrow \rho^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}^E(\mathbf{x}), \text{ say, as } t \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Moreover (3.3) becomes

$$(\nabla \times \mathbf{b}^E) \times \mathbf{b}^E = \nabla p^E, \quad (3.19)$$

where  $p^E = p(\rho^E)$ ; i.e. the asymptotic state is magnetostatic.

If the topology of the initial field  $\mathbf{b}^0$  is trivial (in the sense that each  $\mathbf{b}^0$ -line is a closed curve which may be shrunk continuously in  $D$  to a point without cutting any other  $\mathbf{b}^0$ -line) then the asymptotic field may be identically zero. This cannot happen however if the topology of  $\mathbf{b}^0$  is non-trivial, since all linkages are conserved by (2.11). One measure of topological complexity is the magnetic helicity

$$H = \int_D \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d^3\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

where  $\mathbf{a}$  is any vector potential of  $\mathbf{b}$  (i.e.  $\mathbf{b} = \text{curl } \mathbf{a}$ ).  $H$  is conserved under the frozen-field evolution described by (2.11) even when the flow is compressible [4,3]. Moreover when  $H \neq 0$ , the magnetic energy is bounded [5,1] by an inequality of the form

$$M \geq q_0 |H|, \quad (3.21)$$

where  $q_0$  depends only on the geometry of  $D$ . As  $t \rightarrow \infty$  therefore, during the relaxation process, the magnetic energy  $M(t)$  must tend to a steady value  $M^E$  compatible with (3.21).

It would appear therefore that, for each topologically nontrivial field  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$ , and for each pressure-density relationship  $p = k\rho^\gamma$  (with  $\gamma > 1$ ), the field must relax to a field  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  that is topologically accessible from  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$ , and that satisfies the equation of magnetostatic equilibrium (3.19).

Consider now how the field  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  changes if the compressibility of the fluid, represented by the parameter  $\lambda$  (eqn. (3.2)), is gradually changed. Suppose that, when the fluid is incompressible ( $\lambda = 0$ ) with uniform density  $\rho_0$ , the relaxed state is described by a field  $\mathbf{b}_1^E(\mathbf{x})$ , with corresponding pressure field  $p_1^E(\mathbf{x})$ , and magnetic energy  $M_1^E$ . Suppose that we now introduce a small compressibility  $\delta\lambda$  into the system, the new initial conditions being

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}_1^E(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0, \quad p(\mathbf{x}, 0) = p(\rho_0) \text{ (cst.)} \quad (3.22)$$

This is no longer a magnetostatic equilibrium, and the field  $\mathbf{b}$  will proceed to relax, as described above, to a new magnetostatic field  $\mathbf{b}_2^E(\mathbf{x})$  say, topologically accessible from  $\mathbf{b}_1^E(\mathbf{x})$ , with energy  $M_2^E$ . During this process, some energy is dissipated by viscosity, and some magnetic energy is converted to elastic energy. Hence

$$M_2^E < M_1^E. \quad (3.23)$$

This argument may now be repeated. With each small increase  $\delta\lambda$  in compressibility, there will be an adjustment to a new magnetostatic equilibrium, with a small decrease of magnetic energy:  $\delta M^E < 0$ . We thus infer the existence of a family of magnetostatic equilibria  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x}, \lambda)$ , each one of which is topologically accessible from the initial field  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$ , with magnetic energy  $M^E(\lambda)$  satisfying

$$\frac{dM^E}{d\lambda} < 0. \quad (3.24)$$

This inequality of course implies that distinct values of  $\lambda$  give distinct fields:

$$\mathbf{b}^E(\mathbf{x}, \lambda_1) \neq \mathbf{b}^E(\mathbf{x}, \lambda_2) \quad \text{if } \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (3.25)$$

#### 4. THE ANALOGOUS EULER FLOWS

The steady Euler equations of incompressible inviscid flow may be written in the form

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla h \quad (4.1)$$

with  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . The analogy with (3.19) is well-known, the analogous variables being  $(\mathbf{u}, \mathbf{b})$  and  $(h, -p)$ . To each solution  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x})$  of (3.9), there then corresponds an Euler flow  $\mathbf{u}^E(\mathbf{x})$ , satisfying the same boundary condition that  $\mathbf{b}^E$  satisfies, namely

$$\mathbf{u}^E \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial D. \quad (4.2)$$

By the argument of § 3, we have shown that for any field  $\mathbf{b}^0(\mathbf{x})$  satisfying  $\nabla \cdot \mathbf{b}^0 = 0$  in  $D$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}^0 = 0$  on  $\partial D$ , there exists at least a one-parameter family of magnetostatic fields  $\mathbf{b}^E(\mathbf{x}, \lambda)$  that are topologically accessible from  $\mathbf{b}^0$ . We can now translate this to the language of Euler flows: given any kinematically possible flow  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  in  $D$ , satisfying  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  in  $D$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$  on  $\partial D$ , there exists at least a one-parameter family of Euler flows  $\mathbf{u}^E(\mathbf{x}, \lambda)$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ ), with kinetic energy  $K^E(\lambda)$  satisfying  $dK^E/d\lambda < 0$ .

We should perhaps emphasise that, for general three-dimensional configurations, these flows may exhibit tangential discontinuities (which are an inescapable feature of the magnetic relaxation problem as described in [1]). As  $\lambda$  increases, it seems likely (from physical considerations like those preceding (3.24)) that these discontinuities will become stronger and more densely distributed.

The limiting situation  $\lambda \rightarrow \infty$  is of particular interest. For the MHD relaxation problem of section 3, this corresponds to the 'pressureless limit' and the equilibrium field is then a force-free field satisfying

$$(\nabla \times \mathbf{b}^E) \times \mathbf{b}^E = 0. \quad (4.3)$$

(Minimisation of magnetic energy subject to the constraints of magnetic helicity invariance is known to yield force-free fields [4,6].) The analogous Euler flow is then a Beltrami flow satisfying

$$(\nabla \times \mathbf{u}^E) \times \mathbf{u}^E = 0. \quad (4.4)$$

It is remarkable that there must exist a Beltrami flow that is topologically accessible from any kinematically possible flow  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ ; but the above reservations concerning the probable singular character of the flow  $\mathbf{u}^E(\mathbf{x}, \lambda)$  as  $\lambda \rightarrow \infty$  should be borne in mind.

## 5. DISCUSSION

It is an extraordinary fact that new insights concerning Euler flows, i.e., the steady flows of a fluid that is (i) inviscid (ii) incompressible and (iii) non-conducting, can be obtained, as described above, through consideration of unsteady relaxation processes in a fluid that is (i) viscous (ii) compressible and (iii) perfectly conducting, and through argument by analogy. The

same results could be obtained without using the language of magnetohydrodynamics, but the formulation would appear artificial, since the subsidiary relaxation velocity field  $v(x, t)$  that has to be introduced could be interpreted only in terms of mappings of the fluid domain (via (2.7)), and would lack simple physical interpretation.

The fact [1] that there is at least one Euler flow topologically accessible from an arbitrary solenoidal flow  $U(x)$  is already remarkable since this immediately implies the existence of an uncountable infinity of topologically distinct Euler flows for a given domain. We have shown in the present paper that the complete family of Euler flows is wider still: for any solenoidal  $U(x)$ , there is a whole family  $u^E(x, \lambda)$  of Euler flows, each member of the family being topologically accessible from  $U(x)$  via mappings of the domain that are not volume-preserving.

#### REFERENCES

- [1] Moffatt, H.K. - Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1, Fundamentals. *J. Fluid Mech.*, **159**, 359-378.
- [2] Moffatt, H.K. - Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge Univ. Press, 1978
- [3] Moffatt, H.K. - The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, **35**, 117-129.
- [4] Woltjer, L. - A theorem on force-free magnetic fields. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44**, 489-491, 1958.
- [5] Arnold, V. - The asymptotic Hopf invariant and its applications. In: Proc. Summer School in Differential Equations. Armenian SSR Acad. Sci. (in Russian), 1974.
- [6] Taylor, J.B. - Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1139, 1974.

## ANÁLISE TÉRMICA EM CRESCIMENTO DE CRISTAIS

Washington Braga Filho - Membro da ABCM  
PUC/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica

C.M. Vest  
Mechanical Engineering & Applied Mechanics Department  
The University of Michigan  
Ann Arbor - USA

### RESUMO

Um estudo numérico foi feito sobre os efeitos convectivos que ocorrem durante o crescimento de cristais pelo método proposto por Czochralski. O estudo observou a transição de um escoamento dominado por empuxo para um escoamento dominado por forças centrífugas, o efeito do resfriamento na base do cadinho e o possível aparecimento de uma região de escoamento assimétrico. As equações de transporte foram resolvidas por extensões do método compacto originalmente sugerido por Kreiss. Soluções foram obtidas para números de Rayleigh até  $10^5$ , razão de aspectos variando de 0,75 até 2,0, tamanhos adimensionais de cristais variando de 0,1 a 0,7 e números de Prandtl variando de 10 a 100.

### ABSTRACT

A numerical study of the convective effects appearing during crystal growth by the Czochralski method was made. The study focused primarily on the transition from a buoyancy dominated flow to one dominated by centrifugal force, a crucible bottom cooling effect and the likely appearance of a non-symmetrical flow situation. The governing equations were solved by extended versions of the compact method originally suggested by Kreiss. Solutions were obtained for Rayleigh numbers up to  $10^5$ , crucible aspect ratio ranging from 0,75 to 2,0, dimensionless crystal sizes from 0.1 to 0.7, and Prandtl numbers ranging from 10 to 100.

## NOMENCLATURA

- a - raio do cristal  
 b - raio do cadinho  
 F - primeira derivada da função, equação (6)  
 g - aceleração da gravidade  
 $Gr_b$  - número de Grashof, definido pela razão  $Ra/Pr$   
 h - tamanho da malha  
 hf - nível do fundido na cavidade  
 H - razão de aspectos da cavidade, definida por  $hf/b$   
 P - coeficiente de radiação, definido por  $\kappa_m \Delta T / \sigma_T \epsilon b T_s^4$   
 Pr - número de Prandtl, definido por  $\nu_m / \alpha_m$   
 r - coordenada radial, adimensional  
 $Ra_b$  - número de Rayleigh, definido por  $\beta_m g \Delta T b^3 / \alpha_m \nu_m$   
 Re - número de Reynolds, definido por  $\omega_s a^2 / \nu_m$   
 $Re^*$  - número de Reynolds na transição do escoamento  
 $R_s$  - raio do cristal, adimensional  
 S - segunda derivada da função, equação (6)  
 t - tempo  
 T - temperatura  
 $T_a$  - temperatura ambiente  
 $T_{a_s}$  - razão entre temperatura ambiente e temperatura lateral do ca  
dinho  
 $T_b$  - temperatura da base do cadinho  
 $T_c$  - temperatura lateral do cadinho  
 $T_s$  - temperatura do cristal  
 u - velocidade meridional, direção radial, equação (4)  
 V - velocidade azimutal  
 w - velocidade meridional, direção axial, equação (4)  
 z - coordenada axial, adimensional

## Símbolos Gregos

- $\alpha_m$  - difusividade térmica do fundido  
 $\alpha^+$  - definida pela razão  $\Delta T / T_s$   
 $\beta_m$  - coeficiente de expansão volumétrica do fundido  
 $\Delta T$  - diferença de temperatura entre cadinho e cristal  
 $\epsilon$  - emissividade do fundido  
 $\theta$  - temperatura adimensional, definida por  $(T - T_s) / (T_c - T_s)$   
 $\theta_b$  - temperatura adimensional do fundo do cadinho,  $(T_b - T_s) / (T_c - T_s)$



- $\kappa_m$  - condutividade térmica do fundido  
 $\nu_m$  - viscosidade cinemática do fundido  
 $\zeta$  - vorticidade, equação (1)  
 $\psi$  - função de corrente, adimensional  
 $\psi_{max}$  - máximo valor para a função de corrente  
 $\sigma_r$  - constante de Stefan-Boltzmann  
 $\omega_s$  - rotação do cristal

## INTRODUÇÃO

A técnica proposta por Czochralski é frequentemente usada para o desenvolvimento de cristais de óxidos ou mesmo semi-condutores. Em uma cavidade cilíndrica, o cadinho, os componentes fundidos são aquecidos lateralmente e um escoamento por convecção natural é induzido. O processo de cristalização é iniciado pelo abaixamento de uma semente do cristal até a superfície livre do fundido. Após o equilíbrio térmico local, a semente é posta a girar, tentando-se assegurar a simetria do escoamento e com isto, as características do produto final, isto é, o cristal. Para isto, há necessidade ainda de se controlar o escoamento do fundido que dependerá da importância relativa do aquecimento lateral e da rotação do cristal. Como mostra o experimentalmente por Cockayne et al. (1976).

Num trabalho anterior, Braga (1985) descreveu os efeitos do resfriamento da base do cadinho no escoamento de fundido. Portanto, a inter-dependência do número de Rayleigh, efeitos rotacionais, número de Prandtl, tamanho relativo do cristal, razão de aspectos e grau de resfriamento da base foi estudada. Dois dos aspectos estudados são aqui relatados: o efeito do resfriamento na transição de convecção natural para convecção forçada e o aparecimento de uma região de escoamento aparentemente assimétrico.

## DESCRIÇÃO DO MODELO

A Figura 1 apresenta o modelo físico e o sistema de coordenadas usados neste sentido. Nesta primeira fase do estudo, várias simplificações foram introduzidas para simplificar o trabalho computacional. Por exemplo, desprezamos os efeitos do escoamento termocapilar na interface líquida, da interação por radiação com o meio ambiente, etc. Desta forma, as equações são escritas em coordenadas

cilíndricas seguindo Kobayashi (1980), usando-se a aproximação de Oberbeck-Boussinesq para o termo de empuxo. As velocidades meridionais são obtidas a partir da solução de uma equação biharmônica generalizada para a função de corrente,  $\psi$ . Com isto, apenas três  $\underline{v}$  riáveis dependentes básicas estão presentes: a função de corrente, a temperatura  $T$  e a velocidade azimutal  $V$ .

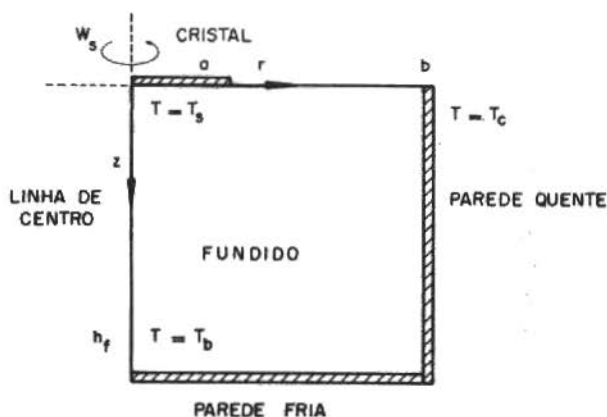


Figura 1. Modelo Geométrico para Cristal e Cadinho

Normalizando-se os comprimentos pelo raio do cadinho,  $b$ , o tempo por  $b^2/\alpha_m$  ( $\alpha_m$  sendo a difusividade térmica), as velocidades meridionais ( $u$  e  $w$ ) por  $\alpha_m/b$ , a velocidade azimutal por  $w_s a$  (rotação do cristal vezes o raio do cristal) e a temperatura por  $\theta = (T - T_s)/(T_c - T_s)$ ,  $T_c$  sendo a temperatura do cadinho e  $T_s$  a temperatura do cristal, ambas supostas constantes, as seguintes equações são obtidas:

i. Equação biharmônica:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} =$$

$$= \frac{r}{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (u\zeta) + \frac{\partial}{\partial z} (w\zeta) \right\} - r Ra \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{Re^2 Pr}{Rs^2} \frac{\partial V^2}{\partial z} \quad (1)$$

com

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

ii. Equação de energia:

$$\frac{\partial(u\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(w\theta)}{\partial z} + \frac{u\theta}{r} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2)$$

iii. Componente azimutal da equação de momentum:

$$\frac{\partial(uV)}{\partial r} + \frac{\partial(wV)}{\partial z} + 2 \frac{uV}{r} = Pr \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} \quad (3)$$

Para estas equações, os perfis de velocidade são obtidos por:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad e \quad w = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4)$$

Devido à normalização escolhida, a região de interesse torna-se  $0 \leq r \leq 1.0$  e  $0 \leq z \leq H$ , onde  $H$  é a razão de aspectos da cavidade, definida pela razão entre a altura do fundido na cavidade e o raio da mesma. Para esta região, as condições de contorno são:

Para  $r = 0$ , a condição de simetria resulta em que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (5a)$$

na parede lateral do cadinho,  $r = 1.0$ :

$$\theta = 1.0 \quad ; \quad V = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad u = 0 \quad e \quad w = 0 \quad (5b)$$

no topo,  $z = 0$ , e:i. Na região do cristal,  $0 \leq r \leq R_s$ :

$$u = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad w = 0 \quad , \quad V = r/R_s \quad e \quad \theta = 0 \quad (5c)$$

ii. Na interface líquida,  $R_s < r < 1.0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial z} = 0 ; w = 0 ; \psi = 0 , \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{p} \{ (1 + \alpha^+ \theta)^4 - Ta_s^4 \} \quad (5d)$$

e na base do cadinho,  $z = H$ :

$$u = 0 , w = 0 , \psi = 0 , v = 0 \quad e \quad \theta = \theta_b \quad (5e)$$

A metodologia de solução é apresentada em detalhes em Braga (1985) e é baseada na formulação Hermitiana proposta por Kreiss em Orszag e Israeli (1975). Uma descrição sucinta é apresentada a seguir.

#### MÉTODO DE SOLUÇÃO

Nesta primeira fase do estudo, apenas as soluções de regime permanente foram obtidas e conseqüentemente um termo de falso transiente foi introduzido, Mallison e Vahl Davis (1973). A técnica de diferenças finitas foi usada para a discretização das equações de transporte. Usou-se a formulação Hermitiana na qual a primeira ou a segunda derivada são mantidas como incógnitas, além da função. Para as equações de energia e momentum azimutal, considerou-se a primeira derivada,  $F$ , isto é, o gradiente, e para a equação biharmônica usou-se a segunda derivada. Em ambos os casos, os esquemas resultantes são tri-diagonais em blocos de 2.

Como a formulação usada neste trabalho requer para cada contorno a determinação de duas condições, que normalmente não estão disponíveis, optou-se pelo uso de relações entre as incógnitas, como indicado por Hirsh (1975). Por exemplo, para a equação biharmônica, usou-se.

$$\psi_w - \psi_{w+1} + \frac{h^2}{6} (2 S_w + S_{w+1}) = -h F_w$$

onde  $h$  é o tamanho da malha. Naturalmente,  $F_w$  é a velocidade do fluido na parede, que é conhecida pela condição de não deslizamento. Para a equação de energia, informação adicional nos contornos foram obtidas pela aplicação local da equação diferencial ou pelo uso de correções a posteriori, Braga (1985).

O procedimento de solução é simples. Um ciclo interno de iterações, consistindo na solução da equação biharmônica através de método iterativo (direções alternadas), indica o campo de velocidades meridionais. Em seguida, as equações da energia e momentum azimutal são resolvidas no ciclo externo de iterações. Critérios adequados de convergência foram usados como de costume. Quando conveniente, métodos simples de continuação no número de Reynolds e no raio de cristal foram utilizados a fim de fornecer estimativas iniciais para o próximo conjunto de parâmetros. Outros detalhes do método matemático são discutidos em Braga (1986).

Nas próximas seções, as observações feitas durante estudo paramétrico são apresentadas.

#### TRANSIÇÃO DE ESCOAMENTO

Sem rotação, o escoamento na superfície do fundido vai da parede lateral do cadinho para a região do cristal, induzido pela convecção natural e indicado pelo número de Grashof, baseado no raio do cadinho,  $Gr_b$ . Com isto, a interface de cristalização assume uma forma convexa, se vista do lado do fundido. Com suficiente rotação do cristal, indicada pelo número de Reynolds,  $Re$ , o escoamento ocorre no sentido oposto, do cristal para a parede lateral, o que resulta numa forma côncava para a mesma. Um balanço de energia associa as isoterms à curvatura da interface, através dos gradientes térmicos.

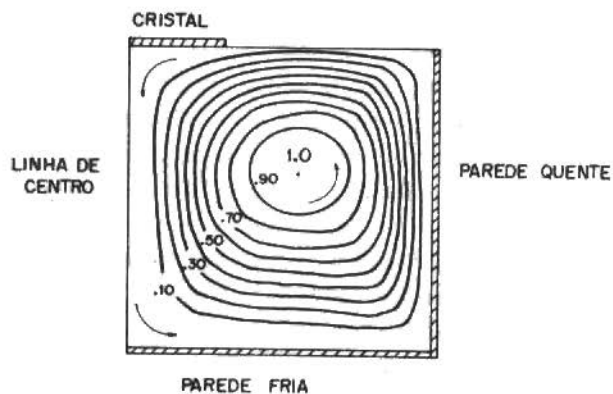
Como o escoamento se dá em sentidos opostos na região do cristal, dependendo da força dominante, pode-se definir a transição como sendo a situação em que o máximo valor da função de corrente muda de sinal; de negativo, para escoamentos dominados pela convecção natural, para positivo, quando dominados pela convecção forçada. As Figuras 2 e 3 mostram os contornos das linhas de corrente e do campo de temperaturas, nestes dois casos, respectivamente. O efeito da rotação aparece nitidamente.

Um extenso estudo sequencial sobre a transição foi feito e concluiu-se que a interação entre os potenciais disponíveis é descrita por:

$$Gr_b \propto Re^{*n} \quad (7)$$

onde  $n = 2,0$   $Rs^{-0,26}$ , indica o efeito do tamanho do cristal. Para

i)



ii)

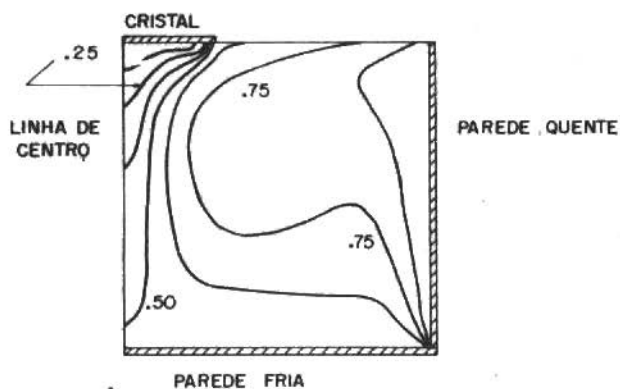


Figura 2. i) Linhas de Corrente e ii) Isotermas  
 $Ra=5 \times 10^4$ ,  $Re=0$ ,  $Pr=100.0$ ,  $\theta_b=0.5$ ,  $Rs=0.3$ ,  
 $H=1.0$ ,  $\psi_{\max} = -6.4$  no ponto  $(0.58, 0.39)$

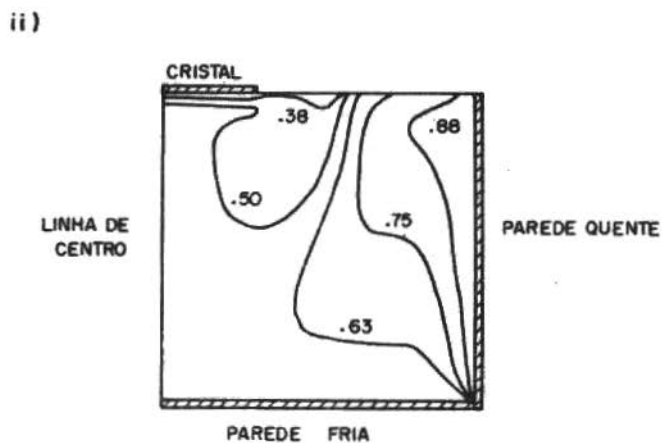
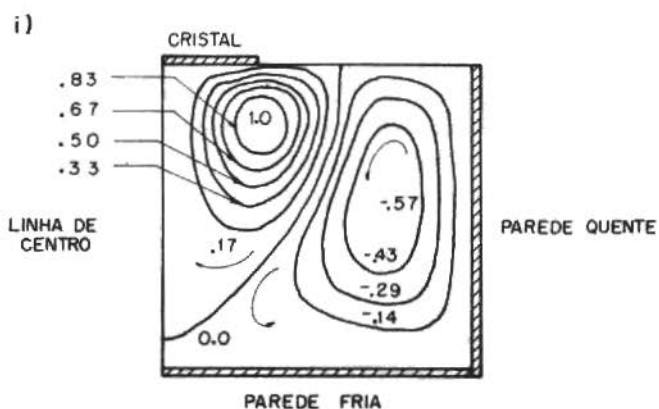


Figura 3. i) Linhas de Corrente e ii) Isotermas  
 $Ra=5 \times 10^4$ ,  $Re=15.0$ ,  $Pr=100.0$ ,  $\theta_b=0.5$ ,  
 $Rs=0.3$ ,  $H=1.0$ ,  $\psi_{max}=10.8$  no ponto  $(0.31, 0.21)$

inspeção da equação (1), vê-se que o expoente correto para o caso que o raio do cristal seja igual ao raio do cadinho,  $Rs = 1$ , é de fato 2,0, confirmando em parte a equação (7). Neste caso limite, este resultado confirma a análise feita por Carruthers (1976) mas difere totalmente da análise de Kokayashi (1981) e Miyazawa (1981) que indicaram que a transição é descrita por:

$$Gr_a = 0,1 Re^{2,5} \quad (8)$$

Aparentemente, as hipóteses feitas por estes últimos autores, baseando-se no trabalho de Mori (1961) não são satisfatórias no escoamento do fundido. Maiores detalhes estão disponíveis em Braga (1985).

Com o aumento gradual do número de Reynolds, i.e. da rotação, a célula de convecção forçada tende a ocupar gradualmente o fundo da cavidade, formando uma célula do tipo de Taylor-Proudman, embora com intensos gradientes axiais. Como a corrente de fluido que sai da superfície livre poderá ser aquecida no fundo do cadinho, a corrente que é puxada pela rotação do cristal poderá causar uma liberação mais intensa de calor. Assim, uma intensa fusão local do cristal já desenvolvido poderá ocorrer, que além de resultar na mudança de concavidade, já citada, poderá gerar tensões térmicas residuais no produto final, o que é indesejável.

A Figura 4 mostra o efeito da rotação no aumento de temperatura do fundido perto do centro do cristal. Como discutido por Hurle (1983), o aumento de temperatura pode ser tão elevado que geral instabilidades no menisco junto ao cristal. Nestas condições, o cristal poderá se separar do fundido, terminando o crescimento. O efeito benéfico do resfriamento da base do cadinho é ainda mostrado. Quando a célula de convecção forçada atinge o fundo, calor será retirado do sistema e assim, a corrente ascendente será mais fria e ocasionará menor fusão. Um outro efeito benéfico é a redução dos gradientes térmicos na região do cristal, obtendo-se uma transição mais suave e reduzindo-se o aparecimento das discordâncias, isto é, reduzindo as tensões térmicas. Nestas figuras,  $Re^*$  é o número de Reynolds que promove a transição no escoamento.

Confirmando observações anteriores de Simpkins (1983), sempre que a temperatura da base do cadinho for menor que a temperatura correspondente a uma condição adiabática, uma região estagnante apare-



ce no fundo, devido a presença de uma estratificação estável. Como o escoamento nesta região é bastante lento, eventuais contaminações irão se concentrar lá e, poderão ser arrastadas para a região de cristalização se a célula de convecção forçada atingir o fundo repentinamente. A região da estagnação é mostrada na Figura 5. Vê-se nitidamente, as isotermas horizontais, características do regime de condução. Uma discussão destes efeitos é apresentada em Braga e Vest (1986).

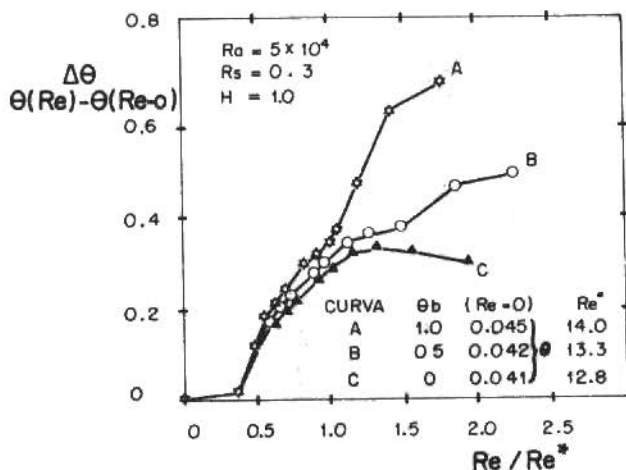


Figura 4. Aumento de temperatura próxima ao cristal devido ao número de Reynolds. Efeito do resfriamento na base do cadinho

#### INSTABILIDADE

Durante o presente estudo, verificou-se que a obtenção de soluções numéricas para certos números de Reynolds era muito difícil. Por exemplo, para  $Ra = 10^5$ ,  $\theta_b = 0$ ,  $Pr = 100$ ,  $Rs = 0,7$  e  $H = 1,0$ , soluções só foram obtidas para  $Re \leq 11,0$  e  $Re \geq 22,0$ . Para  $12,0 < Re < 21,0$ , as oscilações que apareceram nas variáveis dependentes, tornaram impossível a obtenção de soluções convergentes. Um extenso estudo numérico foi feito e nenhuma fonte de instabilidade numérica foi encontrada. Soluções aparentemente corretas foram obtidas em situações onde os gradientes de temperatura e de velocidade azimutal eram bastante mais

intensos que os observáveis naquelas faixas. Verificou-se ainda que as oscilações aparecem para números de Reynolds capazes de iniciar o desenvolvimento da célula de escoamento secundário controlada pela rotação do cristal e perduram até que o número de Reynolds seja suficientemente elevado para que a célula se estenda horizontalmente passando a ocupar toda a extensão do cristal.

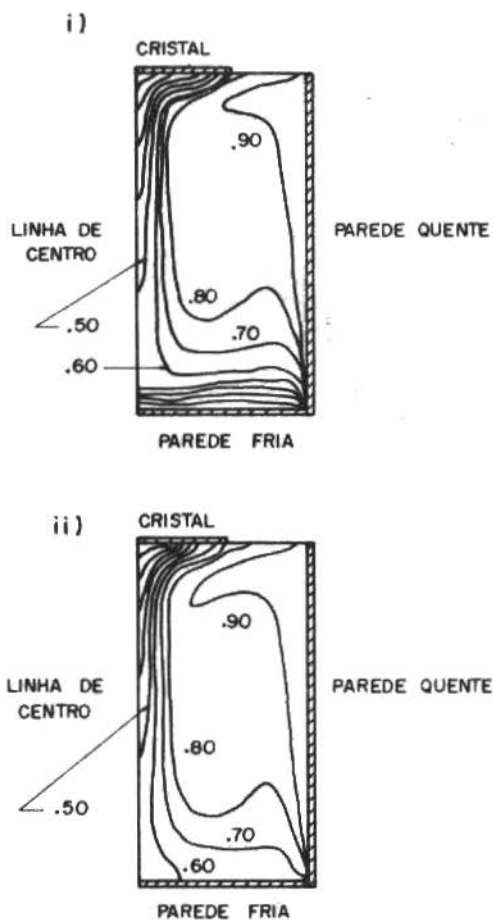


Figura 5. Isotermas  $Ra = 10^5$ ,  $Pr = 100.0$ ,  $Re = 0$ ,  $H = 2.0$ ,  $\theta_{eq} = 0.56$ ,

i)  $\theta_b = 0$     ii)  $\theta_b = 0.6$

Uma vez que explicações puramente numéricas para o fenômeno foram descartadas, explicações físicas foram procuradas. De todas as possíveis causas de oscilação já identificadas durante o crescimento de cristais, apenas o aparecimento de ondas de superfície observado por Brice et al (1974) poderia oferecer um possível mecanismo de instabilidade. Estes autores observaram ondas durante o crescimento de cristais de óxido de silício estabilizado por bismuto.

O aparecimento daquelas ondas aparentemente está associado com as chamadas instabilidades baroclínicas, comuns a sistemas meteorológicos e, é facilitado quando os efeitos de inércia não são dominantes no interior do fluido. Este é o caso nos escoamentos estudados por Brice. A partir do extenso trabalho de Hide e seus co-autores (e.g. 1965), sabe-se que em certas situações, regiões simétricas e assimétricas de escoamento podem aparecer e, as situações de assimetria são caracterizadas por ondas. Uma visão mais recente sobre esse tipo de instabilidade (Pedlosky, 1977) diz respeito à teoria das bifurcações, onde um tipo de escoamento torna-se instável, bifurcando-se para outro estável.

Apesar das várias similaridades entre os experimentos de Hide e os escoamentos dos fundidos, o mecanismo exato que leva ao regime de ondas no caso em estudo, não pode ser o das instabilidades baroclínicas, como foi proposto por Brice et al (1974) ou Brandle (1981). Em meteorologia, de acordo com Lorentz (1953), o mecanismo de troca de energia entre o escoamento principal e o secundário é o da conversão das energias potencial e interna disponíveis em energia cinética, o que foi comprovado no estudo numérico sobre este problema, feito durante o presente trabalho, dando suporte à investigação numérica. Entretanto, durante o crescimento de cristais, o regime instável aparece numa situação em que os níveis de energia cinética e interna do escoamento principal são mínimos e máximos; respectivamente. Isto é discutido em detalhe por Braga (1985).

Como conclusão deste estudo, verificou-se que o aparecimento do escoamento secundário pode gerar instabilidades que resultam em perturbações oscilatórias. Como estas situações constituem fenômenos tri-dimensionais, que não podem ser simulados por códigos supondo simetria radial, o processo iterativo tem dificuldades para convergir para um possível escoamento médio. Pretende-se retomar estes experimentos, usando-se agora métodos mais eficientes para o estudo de bifurcações, como, por exemplo, o usado por Dinar e Keller (1985).

## CONCLUSÕES

As equações de transporte foram resolvidas numericamente para o estudo dos efeitos térmicos durante o crescimento de cristais. Usou-se um código biharmônico generalizado e esquemas compactos para o estudo paramétrico.

As soluções indicaram que com o aumento do número de Reynolds uma região de escoamento secundário aparece embaixo de cristal, promovendo uma uniformização da temperatura local. Eventualmente, os efeitos centrífugos tornam-se dominantes e haverá transição no regime de escoamento. Na transição,  $Gr_D \propto Re^n$ , onde  $Gr$  é o número de Grashof baseado no raio do cristal.

Verificou-se que o resfriamento da base do cadinho pode promover reduções significantes nos gradientes térmicos na interface de cristalização, reduzindo assim as tensões térmicas que alteram a qualidade dos cristais desenvolvidos. Naturalmente, os resultados indicados aqui só são relevantes considerando-se o modelo apresentado. Tendo em vista que todos os resultados apresentados têm comprovação experimental, ao menos qualitativa, pode-se concluir que as aproximações feitas apenas afetam localmente o escoamento (caso da interface suposta plana, por exemplo) ou são pouco importantes (aproximação de propriedades constantes). Finalmente, deve-se lembrar que os fluidos aqui tratados não tem suas propriedades conhecidas com precisão e seria temerário incluir estes efeitos neste estudo.

Finalmente, oscilações incomuns foram observadas durante o estudo, indicando provavelmente um regime de escoamento assimétrico. A situação é vagamente semelhante a fenômenos meteorológicos mas com diferentes mecanismos de desenvolvimento de perturbações.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado durante o doutoramento do primeiro autor. Diversas pessoas e instituições contribuíram de alguma forma durante o projeto. Em especial, o CNPq e a PUC/RJ pelo indispensável suporte financeiro. Os autores são também gratos ao Dr. Dixon Dudderar dos Laboratórios Bell (AT & T) pelo apoio e atenção durante o trabalho e aos revisores deste artigo, pelas sugestões feitas no intuito de aclarar diversos pontos. A todos nossos agradecimentos.

## REFERÊNCIAS

- [1] Braga, W., Tese de Doutorado, The University of Michigan, (1985).
- [2] Braga, W. e Vest, C.M. Submetido à publicação (1986).
- [3] Braga, W., A Super Compact Formulation for Navier-Stokes Equations, anais do ENCIT'86, Rio de Janeiro, RJ, (1986).
- [4] Brandle, C.D., Flow transitions in Czochralski oxide melts, J.C. Growth 53 (1981) 636-638.
- [5] Brice, J.; Buton, T.M.; Hill, O.F. e Whiffin, P.A.C., The Czochralski Growth of  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  crystals, J.C. 24/25 (1974) 429-431.
- [6] Carruthers, J.R., Flow transitions and interface shape in the Czochralski Growth of oxide crystals, J.C. Growth 36 (1976) 212-214.
- [7] Cockayne, B.L. e Roslington, J.M., "Interface shape changes during the Czochralski Growth of gadolinium gallium garnet single crystals, J. Mat. Sci. 11 (1976) 259-263.
- [8] Dinar, N. e Keller, N.B., Computations of Taylor vortex flows using multigrid continuation methods, Applied Mathematics 217-50, California Institute of Technology (1985).
- [9] Fowles, W.E. e Hide, R. Thermal convection in rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes, J.Atmos.Sci. 22 (1965), 541-558.
- [10] Hurle, D.T.J., Convective transport in melt Growth systems, J.C. Growth 65 (1983) 124-132.
- [11] Kobayashi, N., Computer simulation of heat, mass and fluid flows in a melt during Czochralski crystal Growth, Comp. Meths in Appl. Mech. and Engrg. 23 (1980) 21-33.
- [12] Kobayashi, N., Hydrodynamics in Czochralski Growth: computer analysis and experiments, J.C. Growth 52 (1981) 425-434.
- [13] Lorentz, E.N., A proposed explanation for the existence of two regimes of flow in a rotating symmetrically-heated cylindrical vessel, em Fluids Models in Geophysics, editado por R.R. Long (1953) U.S. Government Printing Office.
- [14] Mallison, G.D. e Davis, G.V., The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations, J. Comp. Physics 12 (1973) 435-461.
- [15] Miyazawa, S., Fluid flow analysis in a Czochralski simulation, J.C. Growth 53 (1981) 636-638.

- [16] Mori, Y., Bouyancy effects in laminar convection flow over a horizontal flat plate, J. Heat Transfer 83C, 4 (1961) 425-434.
- [17] Orszag, S.A. e Israeli, M. Annual review of fluid mechanics, vol. 6 (1974).
- [18] Pedlosky, J., The finite amplitude dynamics of baroclinic waves, em Applications of Bifurcation Theory, editado por P. Rabinowitz, Academic Press, NY (1977).
- [19] Simpkins, P.G., On stagnant layers in simulated Czochralski melts, AT & T Bell Laboratories, Internal Memorandum (1983).
- [20] Hirsh, R.S., Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, J. Comp. Phys., 19 (1975) 90-109.
- [21] Fowles, W.W. & Hide, R., Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes, J. Atmos. Sci., 22 (1965), 541-558.

penetration distance  $X_{p_{\max}}$ . Also  $X_{p_{\max}}$  is a function of  $t'$  (time) and  $y'$  (coordinate normal to the plate). In all these papers the flow past a stationary plate was studied.

If the vertical plate is oscillating in its own plane, and the temperature of the plate is slightly different from the temperature of the fluid far away from the plate, then the free-convection currents do affect the flow and the leading edge effects. For an isothermal, oscillating vertical plate, such a study was undertaken by Soundalgekar [15] and its MHD-aspect was also studied by Soundalgekar, Patil and Takhar [16]. Another physical situation to be considered here is the effects of constant heat flux on the flow of an incompressible viscous fluid past an oscillating vertical infinite plate. This was studied by Soundalgekar and Patil [17]. It is now proposed to study the effects of transversely applied magnetic field on the flow of an electrically conducting viscous incompressible fluid past an infinite vertical plate oscillating in its own plane in the presence of constant heat flux at the plate.

These results will be useful in nuclear engineering, space-ship devices, etc. at the design stage.

In Section 2, the mathematical analysis is presented and in Section 3, the conclusions are set out.

#### MATHEMATICAL ANALYSIS

We consider an infinite vertical plate coinciding with  $x'$ -direction and normal to  $y'$ -direction. Initially, the infinite vertical plate and the electrically conducting fluid are at rest and at the same temperature  $T'_\infty$ . A transversely applied magnetic field in the direction of  $y'$ -axis is assumed to exist. At time  $t' = 0^+$ , (which means time measured just after  $t' = 0$ ) the plate starts oscillating harmonically in its own plane and simultaneously, heat transfer takes place. Under these conditions, with usual Boussinesq's approximations, and neglecting induced magnetic field, the flow can be shown to be governed by the following equations:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + g\beta(T' - T'_\infty) - \frac{0^- B_0^2}{\rho} u' \quad (1)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T'}{\partial t'} = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \quad (2)$$

The initial and boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} u'(0) &= U_0 \cos \omega' t' & , & \quad \frac{\partial T'}{\partial y'} = -\frac{q}{K} \quad \text{at } y' = 0 \\ u'(\infty) &= 0 & , & \quad T' \rightarrow T'_\infty \quad \text{as } y' \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \text{for all } x' \text{ and } t' \geq 0$$

$$u'(y') = 0 \quad , \quad T'(y') = T'_\infty \quad \text{for } t' \leq 0 \quad (3)$$

We now introduce the following non-dimensional quantities:

$$\begin{aligned} u &= u'/U_0 & , & \quad y = y'U_0/\nu & , & \quad t = U_0^2 t'/\nu & , & \quad \omega = \nu \omega'/U_0^2 \\ \theta &= (T' - T'_\infty)/(q\nu/kU_0) & , & \quad G = q\nu^2 g\beta/kU_0^4 & , & \quad M = \frac{0^- B_0^2 \nu}{\rho U_0^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Equations (1)-(3), in view of equation (4), can be reduced into the following non-dimensional form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\theta - Mu \quad (5)$$

$$P \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6)$$

Here  $G$  is the Grashof number,  $P = (\nu c_p/k)$ , the Prandtl number,  $\nu$  the kinematic viscosity,  $\omega$  the non-dimensional frequency,  $q$  the heat flux,  $g$  the acceleration due to gravity,  $k$  the thermal conductivity,  $c_p$  the specific heat at constant pressure,  $\mu$  the viscosity,  $U_0$  is the velocity amplitude of the oscillating surface and  $T'$  is the temperature of the fluid near the plate. Also the fluid is bounded by the plate on one side.

The initial and boundary conditions are

$$u(y) = 0 \quad , \quad \theta(y) = 0 \quad \text{for } t \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= \cos \omega t & , & \quad \frac{d\theta}{dy}(0) = -1 \\ u(\infty) &= 0 & , & \quad \theta(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \text{for all } x \text{ and } t \geq 0 \quad (7)$$



The solution of equations (5) and (6), satisfying the conditions (7) are derived by the usual Laplace-transform technique and is given as follows:

$$\theta = 2\sqrt{t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi P}} \exp(-\eta^2 P) - \eta \sqrt{P} \operatorname{erfc}(\eta \sqrt{P}) \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u = & \exp \left[ -\eta \sqrt{2} \left\{ \sqrt{M^2 t^2 + 1} + Mt \right\}^{1/2} \right] \\ & \cos \left[ \omega t - \eta \sqrt{2} \left\{ \sqrt{M^2 t^2 + 1} - Mt \right\}^{1/2} \right] \\ & + \frac{G}{(P-1)\sqrt{P}} \left[ \frac{(P-1)^2}{M^2} \left\{ \frac{1}{2} \exp \left( \frac{Mt}{P-1} \right) \left[ \exp \left( -2\eta \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) \operatorname{erfc} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left( \eta - \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) + \exp \left( 2\eta \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) \operatorname{erfc} \left( \eta + \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) \right] \right\} \right. \\ & - \frac{(P-1)^2}{M^2 \sqrt{\pi t}} \exp(-\eta^2) - \frac{P-1}{M} \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\eta^2) - \eta \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\eta) \right] \right\} \\ & + \frac{(P-1)^2}{M^2} \left\{ \frac{\exp(-\eta^2 P)}{\sqrt{\pi t}} \right\} + \frac{P-1}{M} 2\sqrt{t} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2 P) \right. \\ & - \eta \sqrt{P} \operatorname{erfc}(\eta \sqrt{P}) \left. \right] - \frac{(P-1)^2}{M^2} \left\{ \frac{1}{2} \exp \left( \frac{Mt}{P-1} \right) \left[ \exp \left( -2\eta \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) \right. \right. \\ & \cdot \operatorname{erfc} \left( \eta \sqrt{P} - \sqrt{\frac{Mt}{P-1}} \right) + \exp \left( 2\eta \sqrt{\frac{MPt}{P-1}} \right) \\ & \cdot \operatorname{erfc} \left( \eta \sqrt{P} + \sqrt{\frac{Mt}{P-1}} \right) \left. \right] \left. \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

where  $\eta = y/2\sqrt{t}$  and  $\operatorname{erfc}$  is the complementary error function.

When  $P < 1$ , the argument of the error function is imaginary and hence in this case, while numerical calculations are carried out, we use the following formula:

$$\operatorname{erfc}(X+iY) = e^{-2iXY} F(X, Y)$$

where  $F(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (XY)^{2n} [V_n(X) - i(n+1)V_{n+1}(X)]$

$$V_{n+1}(X) = \frac{2}{2n+1} \left[ \frac{e^{-X^2}}{\sqrt{\pi}(n+1)} \frac{1}{X^{2n+1}} - \frac{V_n(X)}{n+1} \right]$$

$$V_0(X) = \operatorname{erfc}(X)$$

Thus,  $u$  and  $\theta$  are calculated for  $P = 0.71$  (air) and  $P = 7$  (water) for different values of  $M$ , the magnetic field parameter. The velocity profiles are shown on Figure 1, for  $P = 0.71$  and for different values of  $G$ . We observe from Figure 1 that due to the presence of constant heat flux, the symmetry of the velocity profiles is distorted. Also, an increase in  $M$  leads to a decrease in the velocity.

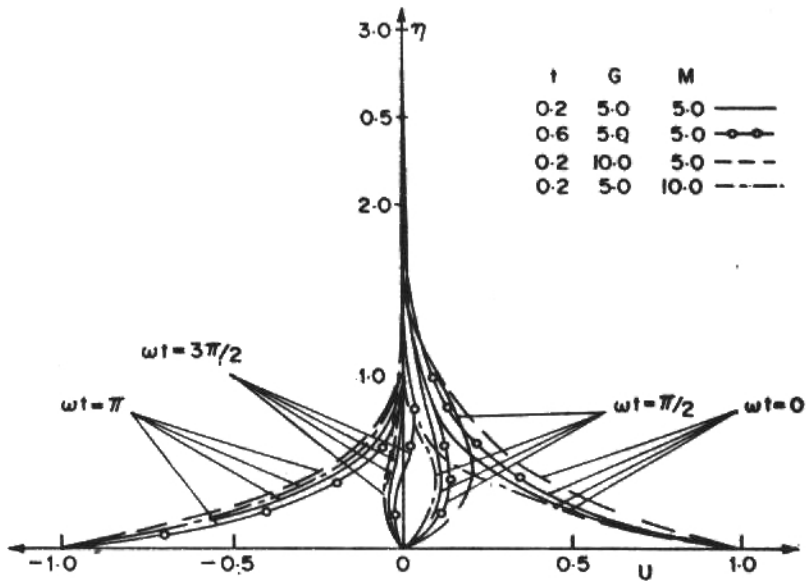


Figure 1. Velocity profiles,  $P = 0.71$

From Figure 2, we observe that the velocity profiles for  $\omega t = 0$  becomes negative. Also, symmetry is completely distorted.  $\theta$  is shown on Figure 3. We observe that the temperature  $\theta$  increases with time for both, air and water.

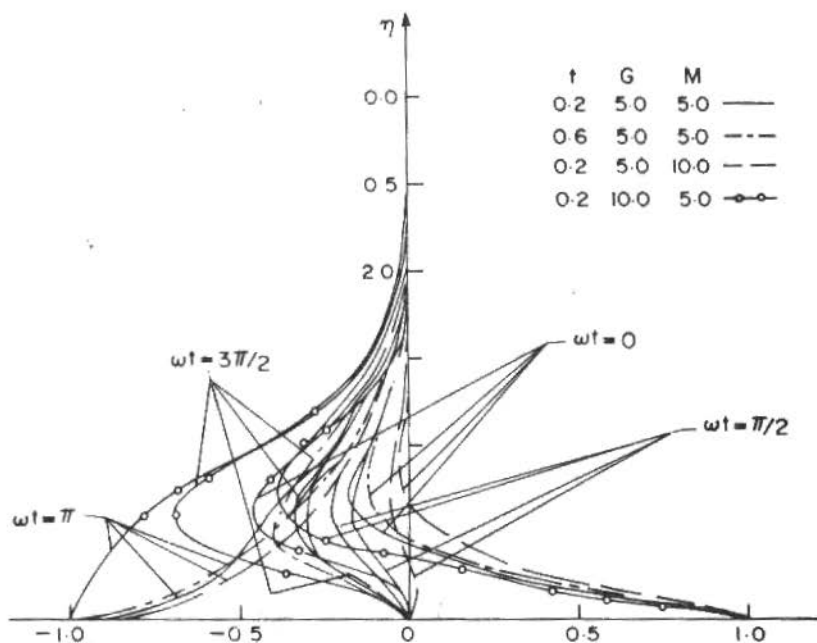
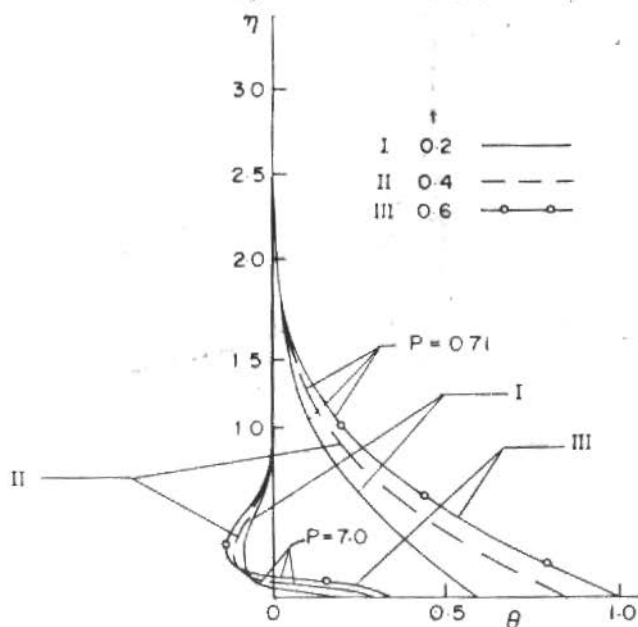
Figure 2. Velocity profiles  $P = 7$ 

Figure 3. Temperature profiles

From the velocity field, we now study the effects of the magnetic field on the leading edge effect. The penetration distance is derived by integrating  $u$  with respect to  $t$  and the maximum penetration distance  $X_{P_{\max}}$  at any time can be determined by differentiating  $X_P$  with respect to  $y$  holding  $t$  constant and then by setting the derivative equal to zero. Thus, the penetration distance is given by

$$X_P = \int_0^t u(y, t) dt \quad (10)$$

We can express  $X_P$  in terms of the Laplace-transform and inverse transform with respect to the variable  $t$  as

$$X_P = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L(u(y, t)) \right\} \quad \text{or} \quad X_P = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \bar{u}(y, s) \right\}$$

Substituting  $\bar{u}(y, s)$  and taking the inverse function, we have

$$\begin{aligned} X_P = & \frac{G}{(P-1)\sqrt{P}} \left[ \frac{(P-1)^2}{M^2} \left\{ \frac{P-1}{M} \left[ \frac{1}{2} \exp\left(\frac{Mt}{P-1}\right) \left\{ \exp\left(-2\eta\sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \cdot \operatorname{erfc}\left(\eta - \sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) + \exp\left(2\eta\sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \left. \left. \left. \left. \right\} \right] \right. \right. \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp(-\eta^2) \left. \right\} - \frac{2(P-1)^2\sqrt{t}}{M^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) - \eta \operatorname{erfc}(\eta) \right\} \\ & - \frac{P-1}{M} \left\{ \frac{2t^{3/2}}{3} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) - 3\eta \operatorname{erfc}(\eta) + 2\eta^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. - \eta \operatorname{erfc}(\eta) \right) \right] \right\} + \frac{(P-1)^2 2\sqrt{t}}{M^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2 P) - \eta\sqrt{P} \operatorname{erfc}(\eta\sqrt{P}) \right\} \\ & + \frac{P-1}{M} \left\{ \frac{4}{3} t^{3/2} \left( \frac{1+\eta^2 P}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2 P) - \left( \frac{3}{2} + \eta^2 P \right) \eta\sqrt{P} \operatorname{erfc}(\eta\sqrt{P}) \right) \right\} \\ & - \frac{(P-1)^2}{M^2} \left\{ \frac{P-1}{M} \left[ \frac{1}{2} \exp\left(\frac{Mt}{P-1}\right) \left\{ \exp\left(-2\eta\sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \right. \right. \right. \right. \\ & \cdot \operatorname{erfc}\left(\eta\sqrt{P} - \sqrt{\frac{Mt}{P-1}}\right) + \exp\left(2\eta\sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta\sqrt{P} + \sqrt{\frac{Mt}{P-1}}\right) \left. \left. \left. \left. \right\} \right] \right. \\ & \left. \left. \cdot \operatorname{erfc}\left(\eta\sqrt{P} + \sqrt{\frac{MPt}{P-1}}\right) \right\} - \sqrt{\frac{P}{\pi t}} \exp(-\eta^2 P) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

The numerical values of  $X_p/G$  have been calculated for  $P=7$ , and  $P=0.71$ , as shown on Figure 4. We observe from this figure, that  $X_p/G$  negative for water means that there is no transition from conduction to convection in water. But in water,  $X_p/G$  increases with increasing  $M$  and hence, we can expect transition at large values of  $M$ . But in air,  $X_p/G$  decreases with increasing  $M$  and hence the transition from conduction to convection is anticipated by a large value of  $M$ . Also, the transition from conduction to convection is not found to be affected by the frequency of the oscillating plate. This is so in the absence of viscous dissipative heat. The transition will certainly be affected if viscous dissipative heat is taken into account which is so in the presence of very high Prandtl number fluids or if the effects of oscillating plate are considered at a very high value of gravitational field.

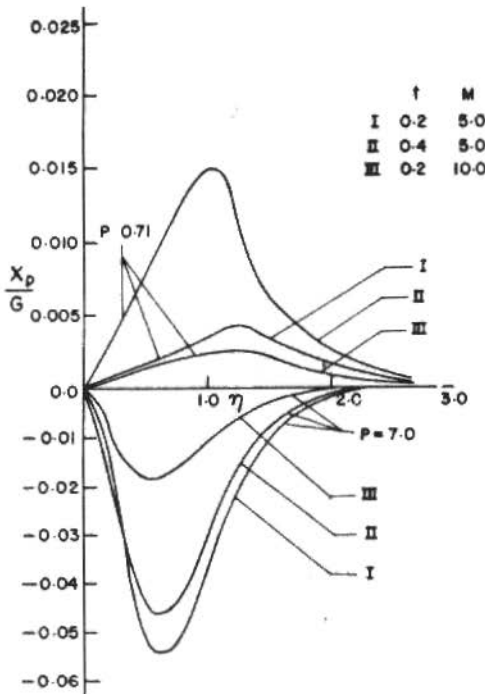


Figure 4. Leading edge effects

From the velocity field, we can calculate the skin-friction as

$$\tau = - \frac{1}{2\sqrt{t}} \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (12)$$

From equations (9) and (12), one can find the expression for  $\tau$ , a straightforward operation avoided here due to space limitation. The numerical values of  $\tau$  are entered in Table 1.

Table 1. Values of  $\tau$ , skin-friction

t	G	M	P = 0.71	P = 7
0.2	5	5	0.176	0.660
0.4	5	5	0.250	0.543
0.2	10	5	0.353	1.32
0.2	5	10	0.109	0.228

We observe from this table that the skin-friction for water is greater than that for air. An increase in M leads to a decrease in the skin-friction but it increases with increasing t or G. Also the skin-friction is not affected by the frequency of the oscillating plate.

#### CONCLUSIONS

(1) The velocity profiles are not symmetrical about  $\eta$ -axis. (2) An increase in M leads to a decrease in the velocity. (3) The temperature increases with increasing time. (4) For water, there is no transition from conduction to convection at small values of M. But the transition exists in case of air. For air, the transition from conduction to convection, at large values of M, takes place rather early. (5) The transition is not affected by the frequency of the oscillating plate.

#### ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to thank the referee of this paper whose valuable comments lead to the improvement of this paper.

## REFERENCES

- [ 1 ] Illingworth, C.R., Proc. Camb. Phil. Soc., 46 : 603 (1950).
- [ 2 ] Siegel, R., Amer. Soc. Mech. Eng., 80 : 347 (1958).
- [ 3 ] Schetz, J.A. and Eichhorn, R., J. Heat Transfer (Tr. ASME), 84 334 (1962).
- [ 4 ] Menold, E.R. and Yang, K.T., J. Appl. Mech. (Tr. ASME), 29 124 (1962).
- [ 5 ] Chung, P.M. and Anderson, A.D., J. Heat Transfer (Tr. ASME), 83 473 (1961).
- [ 6 ] Hellums, J.D. and Churchill, S.W., International developments in heat transfer. Part V (ASME), Sec. B, 985 (1961).
- [ 7 ] Hellums, J.D. and Churchill, S.W., Amer. Inst. Chem. Engrs., 8 690 (1962).
- [ 8 ] Sparrow, E.M. and Gregg, J.L., J. Heat Transfer (Tr. ASME), 82 258 (1960).
- [ 9 ] Goldstein, R.J. and Briggs, D.G., J. Heat Transfer (Tr. ASME), 86C : 490 (1964).
- [ 10 ] Sugawara, S. and Michiyoshi, I., Proceedings of 1<sup>st</sup> Japan Congress of Applied Mechanics, p.501 (1951).
- [ 11 ] Nambu, K., International J. Heat Mass Transfer, 14 : 1531 (1971).
- [ 12 ] Mizukami, K., International J. Heat Mass Transfer, 20 : 981 (1977).
- [ 13 ] Goldstein, R.J. and Eckert, E.R.G., International J. Heat Mass Transfer, 1 : 208 (1960).
- [ 14 ] Mizukami, K. and Sakurai, A., 10<sup>th</sup> Japan Heat Transfer Symp., B211 (In Japanese).
- [ 15 ] Soundalgekar, V.M., J. Astrophys. and Space Science, 64 : 165 (1979).
- [ 16 ] Soundalgekar, V.M., Patil, M.R. and Takhar, H.S., Nuclear Energy and Design, 64 : 39 (1981).
- [ 17 ] Soundalgekar, V.M. and Patil, M.R., Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 4 : 143 (1980).

## NOTE ON THE LOW ECKERT NUMBER FORM OF THE ENERGY EQUATION

Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM  
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica

### ABSTRACT

This paper addresses the issue of  $c_p$  versus  $c_v$  in the energy equation. For flows in which  $\rho \approx$  constant and flows where  $p \approx$  constant, simplified forms of the energy equation were written in terms of  $c_v$  and  $c_p$ , respectively. Using scale analysis it was shown that for situations where the Eckert number is small compared to 1 the simplified  $c_p$  form of the energy equation is more accurate than the corresponding  $c_v$  form.

### RESUMO

O trabalho trata do uso de  $c_p$  e  $c_v$  na equação da energia. Para escoamentos onde  $\rho \approx$  constante (quase-isocóricos) e escoamentos onde  $p \approx$  constante (quase-isobáricos), formas simplificadas da equação da energia são escritas em termos de  $c_v$  e  $c_p$ , respectivamente. Através de uma análise da ordem de grandeza dos termos das equações é mostrado que para situações onde o número de Eckert é pequeno comparado com 1, a forma simplificada da equação da energia escrita em termos de  $c_p$  é mais precisa do que aquela escrita em termos de  $c_v$ .



## NOMENCLATURE

- $c_p$  - specific heat at constant pressure
- $c_v$  - specific heat at constant volume
- $Ec$  - Eckert number, equation (16) and (23)
- $g$  - gravity
- $k$  - thermal conductivity
- $L$  - length scale
- $M$  - Mach number, equation (22)
- $p$  - pressure
- $\dot{S}$  - energy generated per unit time and volume
- $T$  - temperature
- $T_0$  - reference temperature
- $T'$  - temperature variation
- $t$  - time
- $U$  - magnitude of the velocity vector
- $\vec{u}$  - velocity vector
- 
- $\beta$  - thermal expansion coefficient
- $\gamma$  -  $c_p/c_v$
- $\kappa$  - isothermal compressibility factor
- $\mu$  - viscosity
- $\xi_v$  - equation (6)
- $\xi_p$  - equation (7)
- $\rho$  - density
- $\Phi$  - dissipation function

## INTRODUCTION

The equation that expresses the conservation of energy for a newtonian fluid can be written in several forms (Slattery, 1981). Two of these forms are very common in engineering, the  $c_p$  form

$$\rho c_p (DT/Dt) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{B}T(Dp/Dt) + \mu \Phi + S \quad (1)$$

and the  $c_v$  form

$$\rho c_v (DT/Dt) = \nabla \cdot (k \nabla T) - (BT/\kappa) \nabla \cdot \vec{u} + \mu \Phi + S \quad (2)$$

Except for the substantial derivative  $D/Dt$  and the operator  $\nabla = (\partial/\partial x_i) \vec{e}_i$ , all quantities in equations (1) and (2) are listed in the nomenclature. Equations (1) and (2) are equivalent and one is easily obtained from the other:

For a compressible fluid (air for example) undergoing an isochoric motion, that is, the density of a material element does not change following the motion,  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  and equation (2) reduces to

$$\rho c_v (DT/Dt) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi + \dot{S} \quad (3)$$

It should be noted that equation (3) is also the correct form of the energy equation for a flow in which  $\rho$  is constant.

Now, if the fluid is assumed to be incompressible, rather than assuming the fluid to be compressible and the flow to be isochoric,  $c_p = c_v = c$  and the energy equation could be written as

$$\rho c (DT/Dt) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi + \dot{S} \quad (4)$$

In most of the convective heat transfer situations encountered in engineering, the density of an element of the fluid is affected by variations in pressure and temperature and, strictly speaking, the flow is not isochoric. Also, all fluids are compressible to some extent, and even liquids have different values for  $c_p$  and  $c_v$ . To illustrate this fact Table I presents  $c_p$  and  $c_v$  values for some liquids. When using equation (4), the choice of which specific heat should be picked is totally arbitrary. From the previous discussion it is seen that both (3) and (4) are to be

considered approximations. Those approximate forms of the energy equation apply for flow fields in which the density of an element of the fluid is almost constant, that is, quasi-isochoric flows.

Table 1. Values of  $c_p$  and  $c_v$  for some liquids  
(Gray, 1972 and Weast, 1984)

	$T [^{\circ}\text{C}]$	$c_p - c_v [J/g^{\circ}\text{C}]$	$c_p [J/g^{\circ}\text{C}]$
Water	15	0.013	4.186
	50	0.13	4.180
	90	0.34	4.205
Mercury	20	0.018	1.394
Acetic Acid	20	0.353	2.180
Methyl Alcohol	20	0.437	2.510
Acetone	20	0.655	2.150
Benzene	20	0.540	1.720
Chloroform	20	0.320	0.980

The corresponding approximate  $c_p$  form of the energy equation is obtained by dropping the  $\beta T(Dp/Dt)$  term from equation (1) yielding

$$\rho c_p (DT/Dt) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \phi + S \quad (5)$$

Equation (5) is accurate for flows in which  $p$  is constant. It also applies for situations in which the pressure variations along the flow are small, that is, quasi-isobaric flows.

In situations where the fluid velocity is small compared to the speed of sound, both forms of the energy equation can be employed, the  $c_p$  form (equation (5)) and the  $c_v$  form (equation (3)). The question that arises is which of the two equations correspond to a better approximation. This issue will be addressed in the following paragraphs.

#### SCALE ANALYSIS

The use of equation (3) implies that the quantity  $-(\beta T/\kappa) \nabla \cdot \vec{u}$  is small enough to be neglected; alternatively, if equation (5) is

to be used the quantity  $\beta T(Dp/Dt)$  should be regarded as negligible. To decide which equation better approximates the energy balance for low velocity flows  $-(\beta T/\kappa)\nabla\cdot\vec{u}$  must be compared with  $\beta T(Dp/Dt)$ . To this end, the following simplifications are made

$$\xi_v = -(\beta T/\kappa)\nabla\cdot\vec{u} = (\beta T/\rho\kappa)(D\rho/Dt) \quad (6)$$

and

$$\xi_p = \beta T(Dp/Dt) \quad (7)$$

where continuity was used to obtain the right hand term in equation (6). Regarding  $\rho$  as a function of  $T$  and  $p$ , the thermodynamic relationship  $d\rho = \rho\kappa dp - \rho\beta dT$  can be combined with equation (6) to yield

$$\xi_v = \beta T(Dp/Dt) - (T\beta^2/\kappa)(DT/Dt) \quad (8)$$

Dividing  $\xi_v$  by  $\xi_p$

$$\xi_v/\xi_p = 1 - (\beta/\kappa)(DT/Dt)(Dp/Dt) \quad (9)$$

Attention now centers on the magnitude of  $DT/Dt$  and  $Dp/Dt$ . To evaluate  $DT/Dt$ , the temperature of a material element of the fluid will be written  $T = T_0 + T'$ , where  $T'$  is the temperature departure from a reference  $T_0$ . If the dominant oscillating frequency of the temperature field is small and  $\nabla T \sim T'/L$ ,

$$DT/Dt = \partial T/\partial t + \vec{u}\cdot\nabla T \sim U(T - T_0)/L \quad (10)$$

where  $L$  is the length scale that characterizes the spatial distribution of  $T$ , and  $U$  is the magnitude of the velocity vector  $\vec{u}$ .

To estimate the order of magnitude of  $Dp/Dt$ , it is assumed that the flow is isentropic since the effect of viscosity and the presence of heat transport normally modify the pressure distribution but not the magnitude of the pressure itself. Thus, employing the momentum equation for isentropic flow (Euler equation),  $Dp/Dt$  can be written as

$$\begin{aligned} Dp/Dt &= \partial p/\partial t + \vec{u}\cdot\nabla p = \partial p/\partial t + \rho\vec{u}\cdot\vec{g} - \rho\vec{u}\cdot(D\vec{u}/Dt) \\ &= \partial p/\partial t + \rho\vec{u}\cdot\vec{g} - \rho\partial U^2/\partial t - \rho\vec{u}\cdot\nabla U^2 \end{aligned} \quad (11)$$

where the only body force considered was the gravitational force. For the type of flows considered here, i.e. absence of acoustic waves and small oscillations of the flow field,  $\partial p/\partial t$  and  $\partial U^2/\partial t$  can be ignored and equation (11) yields

$$Dp/Dt \sim -\rho U g - \rho U^3/L = -(\rho U^3/L)(gL/U^2 + 1) \quad (12)$$

In obtaining equation (12), the length scale that characterizes the spatial distribution of  $\vec{u}$  and  $T$  was taken to be the same.

The term  $gL/U^2$  in equation (12) is the ratio between potential and kinetic energy. Except for large values of  $L$  as in the case of atmospheric flows, this term is small and can be neglected. Equation (12) can then be written as

$$Dp/Dt \sim -\rho U^3/L \quad (13)$$

Now, substituting equations (10) and (13) into equation (9) follows

$$\xi_v/\xi_p \sim 1 + (\beta/\kappa) [U(T - T_0)/\rho U^3] \quad (14)$$

or

$$\xi_v/\xi_p \sim 1 + (\beta/\kappa\rho c_p)(1/Ec) \quad (15)$$

where  $Ec$  is the Eckert number defined as

$$Ec = U^2 / [c_p (T - T_0)] \quad (16)$$

It should be noted that  $\beta/\kappa\rho c_p$  is a ratio of fluid properties, whereas  $Ec$  is a dimensionless number related to the flow.

Equation (15) presents the ratio  $\xi_v/\xi_p$  in a very compact form and will be used to compare  $\xi_v$  with  $\xi_p$ . For simplicity, in the analysis that follows, liquids and gases are treated separately.

Liquids. Most of the liquids have the ratio  $\beta/\kappa\rho c_p$  in the order of 1 (Gray, 1972 and Weast, 1984). Water is an exception with  $\beta/\kappa\rho c_p \sim 0.1$ . Furthermore, liquids cannot move at large velocities, and the Eckert number  $Ec$  for liquid flows is usually very small.

From equation (15) with  $\beta/\kappa\rho c_p$  in the range 0.1 to 1 and  $Ec \ll 1$  it follows

$$\xi_v > \xi_p \quad (17)$$

or, using equations (6) and (7)

$$-(\beta T/\kappa)\nabla\cdot\vec{u} > \beta T(Dp/Dt) \quad (18)$$

The inequality (18) shows that for liquids undergoing low velocity flows  $\beta T(Dp/Dt)$  is smaller than  $-(\beta T/\kappa)\nabla\cdot\vec{u}$ . Therefore, the simplified  $c_p$  form of the energy equation is a better approximation than the corresponding  $c_v$  form.

Gases. For simplicity, attention will be focused on perfect gases in which  $\beta/\kappa\rho c_p = (\gamma-1)/\gamma$ , where  $\gamma = c_p/c_v$ . From equation (15) it then follows

$$\xi_v/\xi_p \sim 1 + [(\gamma-1)/\gamma] (1/Ec) \quad (19)$$

For the type of flows under consideration, the temperature increase of the fluid due to friction and compression is only a small fraction of the temperature difference prescribed as a boundary condition. Thus  $Ec \ll 1$  and equation (19) yields

$$\xi_v > \xi_p \quad (20)$$

If the temperature variation  $T'$  experienced by the fluid is on the order of the fluid temperature  $T$ , the Eckert number can be written as

$$Ec = U^2/c_p T \quad (21)$$

Recalling that the Mach number  $M$  is given by  $M = U/\sqrt{\gamma RT}$  where  $R$  is the gas constant, and that  $c_p = \gamma R/(\gamma-1)$ , equation (21) becomes

$$Ec = (\gamma-1)M^2 \quad (22)$$

Now, substituting equation (22) into equation (19) it follows

$$\xi_v/\xi_p \sim 1 + 1/\gamma M^2 \quad (23)$$

Equation (23) relates the ratio  $\xi_v/\xi_p$  to the Mach number  $M$ . For low velocity flows  $M$  is small and  $\xi_v > \xi_p$ . Therefore, as in the case of liquids, the simplified  $c_p$  form of the energy equation is a better approximation than the corresponding  $c_v$  form.

#### CONCLUSION

The  $c_p$  and  $c_v$  forms of the energy equation were simplified for flows in which  $\rho \approx \text{constant}$  (quasi-isochoric flows) and  $p \approx \text{constant}$  (quasi-isobaric flows). Such flows are commonly encountered in many engineering problems. Using scale analysis it was shown that the simplified  $c_p$  form of the energy equation is more accurate than the corresponding  $c_v$  form for flows in which the Eckert number is small compared to 1.

The simplified  $c_v$  form of the energy equation is exact for flows in which  $\rho \approx \text{constant}$ . On the other hand the simplified  $c_p$  form of the energy equation is exact under the assumption of  $p \approx \text{constant}$ . The present analysis has demonstrated that for low velocities flows subjected to temperature gradients, less error is introduced in the calculations if  $p$  is assumed constant instead of assuming  $\rho$  constant.

#### REFERENCES

- [1] Gray, D.E., American Institute of Physics Handbook, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1972.
- [2] Slattery, J.C., Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, 2<sup>nd</sup> edition, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1981.
- [3] Weast, R.C., CRC Handbook of Chemistry and Physics, 65<sup>th</sup> edition, CRC Pres Inc., Boca Raton, Florida, 1984.

## RELAÇÕES CONSTITUTIVAS NÃO LINEARES NA DETERMINAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES PLANAS DE EQUILÍBRIO DE UM ANEL CIRCULAR EXTENSÍVEL

Edgar Nobuo Mamiya – Membro da ABCM  
Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Materiais

Rubens Sampaio – Membro da ABCM  
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

### RESUMO

Considerando-se relações constitutivas não lineares e a hipótese de extensibilidade, determinam-se as configurações planas de equilíbrio pós-flambagem de um anel circular delgado submetido à pressão externa. O modelo matemático é obtido a partir do princípio de Hamilton, e descreve o anel como uma curva regular plana: as configurações e os esforços internos são funções de um único parâmetro espacial. Obtém-se um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias, acoplado a condições de periodicidade, que é resolvido pelo método do Tiro Simples. Os resultados são comparados com aqueles obtidos considerando-se equações constitutivas lineares.

### ABSTRACT

Considering non linear constitutive relations and the extensibility hypothesis, the plane post-buckling configurations of a thin circular ring subjected to external pressure are determined. The mathematical model is obtained from the Hamilton's principle and describes the ring as a plane regular curve: the configurations and the internal forces are functions of only one spacial parameter. A non linear system of seven differential equations, coupled to periodicity conditions, is obtained, and is solved by the method of the Simple Shooting. The results are compared with those obtained by considering linear constitutive equations.



## INTRODUÇÃO

O surgimento de novos materiais possibilitou o projeto de estruturas mais leves e, conseqüentemente, mais esbeltas. Nestas condições, em muitos casos, o fator decisivo no projeto é a deformação da estrutura, e, em particular, o comportamento pós-flambagem.

Uma maneira de se estudar o comportamento mecânico de estruturas em que uma das dimensões predomina sobre as demais é a de se considerá-las como curvas seccionalmente regulares no espaço. Neste caso, as funções que caracterizam a configuração da estrutura passam a ser descritas em termos de um único parâmetro espacial e mais um parâmetro temporal.

O modelo matemático apresentado neste trabalho é obtido a partir de um princípio variacional e de uma forma adotada para a densidade de ação potencial, permitindo a análise do comportamento estático de estruturas elásticas que possam ser consideradas como curvas planas, regulares.

Classicamente são adotadas, como hipóteses constitutivas, relações lineares entre o esforço normal e a elongação e entre o momento fletor e a variação da curvatura. Entretanto, Tadjbakhsh [1] mostra que, nas condições do movimento plano de estruturas alongáveis não é possível se associar forma alguma para a densidade de ação potencial da qual as relações constitutivas lineares possam ser derivadas. Este fato sugere que um procedimento melhor consiste no estabelecimento de uma forma para a densidade de ação potencial e então derivar as relações constitutivas.

O desenvolvimento do presente modelo leva a um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias a sete incógnitas. Os problemas associados podem então ser resolvidos pelo método do tiro simples. Em particular, apresentam-se os resultados correspondentes ao problema do anel circular delgado submetido à pressão externa, considerando-se as relações constitutivas não lineares. Estes valores são comparados com aqueles associados à utilização de relações constitutivas lineares clássicas, verificando-se diferenças sensíveis nas configurações de equilíbrio pós-flambagem, assim como nos pontos de bifurcação associados às mesmas.

## O MODELO MATEMÁTICO

Seja uma estrutura unidimensional descrita como uma curva regular plana parametrizada pelo comprimento de arco  $S$  em uma configuração de referência e pelo comprimento de arco  $s$  em cada instante  $t$  distinto daquele associado à configuração de referência. No decorrer de um movimento, considere todas as variáveis do problema parametrizadas pela dupla  $(s,t)$ . Seja o mapeamento  $s = (S,t)$  um difeomorfismo entre  $s$  e  $S$  para cada instante  $t$  considerado, de tal modo que as derivadas  $ds/dS$  e  $dS/ds$  existam em todos os pontos da curva e para todo  $t$ . Cada ponto da curva pode ser localizado pelas coordenadas  $X_i(S)$ ,  $i=1,2$  na configuração de referência e pelas coordenadas  $x_i(s,t)$  na configuração do instante  $t$ . O ângulo entre a tangente  $X_{,S}(S)$  e o eixo  $X_1$  é denotado por  $\vartheta(S)$ , enquanto o ângulo entre a tangente  $x_{,s}$  e o eixo  $x_1$  é dado por  $\theta(s,t)$ , conforme ilustra a Fig. 1.

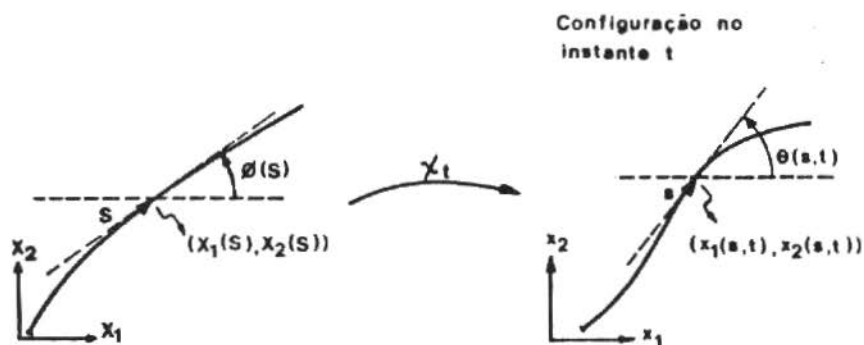


Figura 1. Parametrização da curva

As equações do movimento e as relações constitutivas podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton [1,2,3], descrito pela expressão:

$$\delta \int_0^{\bar{s}} \int_0^{\bar{t}} L(x,t,x_{,t},x_{,s},x_{,ss},s) ds dt + \int_0^{\bar{s}} \int_0^{\bar{t}} f \cdot \delta x ds dt + \int_0^{\bar{t}} (\bar{F} \cdot \delta x + \bar{R} \cdot \delta x_{,s}) \Big|_0^{\bar{s}} dt - \int_0^{\bar{s}} \bar{P} \cdot \delta x \Big|_0^{\bar{t}} ds + (\bar{A} \cdot \delta x) \Big|_0^{\bar{s}} \Big|_0^{\bar{t}} = 0 \quad (1)$$

onde  $L$  é a densidade de ação, função da velocidade  $x_{,t}$ , do spin  $x_{,ts}$  e dos gradientes de deformação  $x_{,s}$  e  $x_{,ss}$ . As grandezas  $\bar{F}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{P}$  e  $\bar{A}$  representam, respectivamente, as densidades de força e de momento

nos contornos, a inércia linear, nos instantes inicial e final, e a inércia angular, nos contornos e nos instantes inicial e final. O carregamento distribuído, em cada instante  $t$ , é dado por  $f$ .

Assumindo-se as regularidades necessárias para  $x_i$  e  $\delta x_i$ , o desenvolvimento de (1) fornece:

$$\int_0^{\bar{s}} \int_0^{\bar{t}} [F_{,s} + f - (P - A_{,s}),_t] \cdot \delta x \, ds \, dt + \int_0^{\bar{t}} (P - \bar{P}) \cdot \delta x + (R - \bar{R}) \cdot \delta x_{,s} \Big|_0^{\bar{s}} dt - \int_0^{\bar{s}} (P - \bar{P}) \cdot \delta x \Big|_0^{\bar{t}} ds + (A - \bar{A}) \cdot \delta x \Big|_0^{\bar{s}} \Big|_0^{\bar{t}} = 0 \quad (2)$$

onde:

$$F_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,s}} + \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ss}} \right)_{,s} + \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \right)_{,t} \quad (2)$$

$$R_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,ss}} \quad (4)$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial x_{i,t}} - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \right)_{,s} \quad (5)$$

$$A_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \quad (6)$$

Assim, as condições necessárias e suficientes para que (2) seja satisfeita são dadas por:

$$F_{i,s} + f_i = (P_i - A_{i,s}),_t \quad t \in \{0, \bar{t}\}, \quad s \in \{0, \bar{s}\} \quad (7)$$

$$F_i = \bar{F}_i \quad ; \quad R_i = \bar{R}_i \quad s \in \{0, \bar{s}\} \quad (8)$$

$$P_i = \bar{P}_i \quad t \in \{0, \bar{t}\} \quad (9)$$

$$A_i = \bar{A}_i \quad t \in \{0, \bar{t}\}, \quad s \in \{0, \bar{s}\} \quad (10)$$

Assume-se que a densidade de ação  $L$  seja invariante sob a ação de rotações rígidas. Isto é expresso por:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_{,t}} \Delta x_{,t} + \frac{\partial L}{\partial x_{,ts}} \Delta x_{,ts} + \frac{\partial L}{\partial x_{,s}} \Delta x_{,s} + \frac{\partial L}{\partial x_{,ss}} \Delta x_{,ss} = 0 \quad (11)$$

A expressão (11) pode ser reescrita utilizando-se as definições (3), (4), (5) e (6), obtendo-se:

$$(R \Delta x_{,s})_{,s} + F \Delta x_{,s} = (P - A_{,s}) \Delta x_{,t} - (F \Delta x_{,s})_{,t} \quad (12)$$

As equações (7) e (12) representam os balanços de esforços lineares e angulares na estrutura.

Sejam definidos os esforços solicitantes: densidade de força normal  $n$ , densidade de força cortante  $q$  e densidade de momento  $m$ , através das expressões:

$$n = x_{i,s} F_i \quad ; \quad q = e_{ij} F_j x_{i,s} \quad ; \quad m = e_{ij} R_j x_{i,s} \quad (13)$$

Com base nas definições (13), as equações (7) e (12) podem ser reescritas, para o caso estático, como:

$$n_{,s} - kq + f_n = 0 \quad (14)$$

$$q_{,s} + kn + f_q = 0 \quad (15)$$

$$m_{,s} + q = 0 \quad (16)$$

onde  $k = e_{ij} x_{j,ss} x_{i,s} = d\theta/ds$  é a curvatura na configuração deformada. As expressões (14) e (15) são as equações de equilíbrio de esforços lineares nas direções tangencial e transversal à curva, enquanto a expressão (16) representa a equação de equilíbrio de momentos.

É conveniente se parametrizar as equações (14), (15) e (16) segundo o comprimento de arco  $S$ . Definindo os esforços solicitantes: força normal  $N = nA$ , força cortante  $Q = qA$  e o momento fletor  $M = mA$ , onde  $A$  é a área da seção transversal, é possível se reescrever as equações de equilíbrio na forma:

$$N_{,S}(S) - Q(S) \theta_{,S}(S) + f_N(S) s_{,S} = 0 \quad (17)$$

$$Q_{,S}(S) + N(S) \theta_{,S}(S) + f_Q(S) s_{,S} = 0 \quad (18)$$

$$M_{,S}(S) + Q(S) s_{,S} = 0 \quad (19)$$

### RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

É possível demonstrar [1] que, sob condições apropriadas, a densidade de ação  $L$  pode ser reescrita na forma:

$$L = K(v, \theta, \tau, S) - E(S) \tilde{W}(e, \tau) \quad (20)$$

onde  $v = (x_{i,t} x_{i,t})^{1/2}$  é o módulo da velocidade  $x_{,t}$ ,  $\theta_{,t} = (s_{,S})^{-2} e_{ij} x_{j,ts} x_{i,s}$  é a taxa de rotação da tangente,  $e = s_{,S} - 1$  é a alongação,  $E(S)$  é o módulo de Young do material e  $\tau = I^{1/4}(S) (\theta_{,S} - \theta_{,S})$  é a variação adimensional da curvatura.  $I$  representa o momento de inércia de área da seção transversal no ponto  $S$ .

Considerando-se a densidade de ação potencial na forma da expressão (20) e as definições (13), as relações (3) a (4) reduzem-se a:

$$n = E \frac{\partial \tilde{W}}{\partial e} s_{,S} \quad (21)$$

$$m = E I^{1/4} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} s_{,S} \quad (22)$$

É fácil verificar, a partir das expressões (21) e (22), que não é possível se definir forma alguma para a densidade de ação potencial  $\tilde{W}$  tal que se obtenham relações lineares  $m = \alpha \tau$  e  $n = \beta e$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  constante, simultaneamente.

Seja adotada uma forma particular simples para  $\tilde{W}$ :

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} (e^2 + \frac{I^{1/2}}{A..} \tau^2) \quad (23)$$

Nestas condições, as expressões (21) e (22) tomam a forma particular:

$$s_{,S} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + 4 \frac{N}{EA})^{1/2} \right] \quad (24)$$

$$\theta_{,S} = \frac{M}{EI s_{,S}} + \emptyset_{,S} \quad (25)$$

com a restrição de que:

$$N \geq -\frac{EA}{4} \quad (26)$$

Para efeito de comparação, as relações constitutivas lineares clássicas [4,5,6], são apresentadas abaixo:

$$s_{,S} = 1 + \frac{N}{EA} \quad (27)$$

$$\theta_{,S} = \frac{M}{EI} + \emptyset_{,S} \quad (28)$$

onde vale a restrição:

$$N \geq -EA \quad (29)$$

A configuração de equilíbrio é descrita pelas coordenadas  $x_i(S)$ , relacionadas com  $s$  e  $\theta$  através das expressões:

$$x_{1,S} = s_{,S} \cos\theta \quad (30)$$

$$x_{2,S} = s_{,S} \sin\theta \quad (31)$$

As expressões (17), (18), (19), (25), (30) e (31) constituem um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias, a sete incógnitas.

#### O PROBLEMA DO ANEL CIRCULAR

Considere-se um anel circular delgado submetido à pressão externa. A configuração não carregada é caracterizada pela curvatura:

$$K(S) = -R^{-1}$$

onde  $R$  é o raio do anel não deformado.

O equilíbrio é descrito pelo sistema não linear de equações diferenciais ordinárias apresentado no item anterior e mais as con-

dições adicionais:

$$\begin{aligned}
 M(0) - M(2\pi R) &= 0 \\
 N(0) - N(2\pi R) &= 0 \\
 Q(0) - Q(2\pi R) &= 0 \\
 s(0) &= 0 \\
 \theta(0) - \theta(2\pi R) - 2\pi &= 0 \\
 x_1(0) - x_1(2\pi R) &= 0 \\
 x_2(0) - x_2(2\pi R) &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

Uma técnica utilizada na resolução do problema de condições adicionais genéricas consiste em transformá-lo em problemas de valores iniciais, para os quais existem procedimentos numéricos clássicos, como o método de Runge-Kutta, para resolvê-los. Este procedimento constitui o método do Tiro Simples [7]: se um dado problema é descrito por:

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\
 y: [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 F(y(a), y(b)) &= 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

é possível transformá-lo em problemas do tipo:

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\
 y: [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 y(a) &= t, \quad t \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{34}$$

tais que  $F(t, y(b, t)) = 0$ . O problema original é reduzido, através desta técnica, à pesquisa de zeros de  $F(t, y(b, t))$ . No caso, fixando-se os valores:

$$\begin{aligned}
 \theta(0) &= \pi \\
 x_1(0) &= 0 \\
 x_2(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

as únicas condições iniciais que devem ser pesquisadas de modo a satisfazer as expressões (32) são  $M(0)$ ,  $N(0)$  e  $Q(0)$ , associadas, por exemplo, às condições:

$$F_1(M(0), N(0), Q(0)) = \theta(2\pi R) - \pi = 0$$

$$F_2(M(0), N(0), Q(0)) = x_1(2\pi R) = 0 \quad (36)$$

$$F_3(M(0), N(0), Q(0)) = x_2(2\pi R) = 0$$

## RESULTADOS

A pesquisa de zeros das equações (36) foi efetuada utilizando-se o método de Newton, enquanto os problemas de valores iniciais foram integrados pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, particionando-se o intervalo  $[0, 2\pi R]$  em 300 partes iguais. O problema foi analisado adotando-se o raio de giração  $i = \sqrt{I/A} = 0,1$  e fazendo-se variar o carregamento  $pR^3/(EI)$  dentro do intervalo  $[-21,5, 0]$ .

Foram determinadas duas configurações pós-flambagem distintas, sendo os resultados ilustrados nas Figuras 2 e 3. Uma comparação com o caso em que se adotam equações constitutivas lineares (27) e (28) também é efetuada.

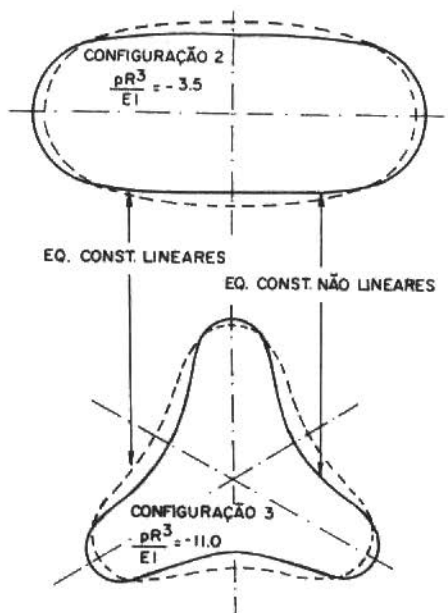


Figura 2. Configurações de equilíbrio pós-flambagem



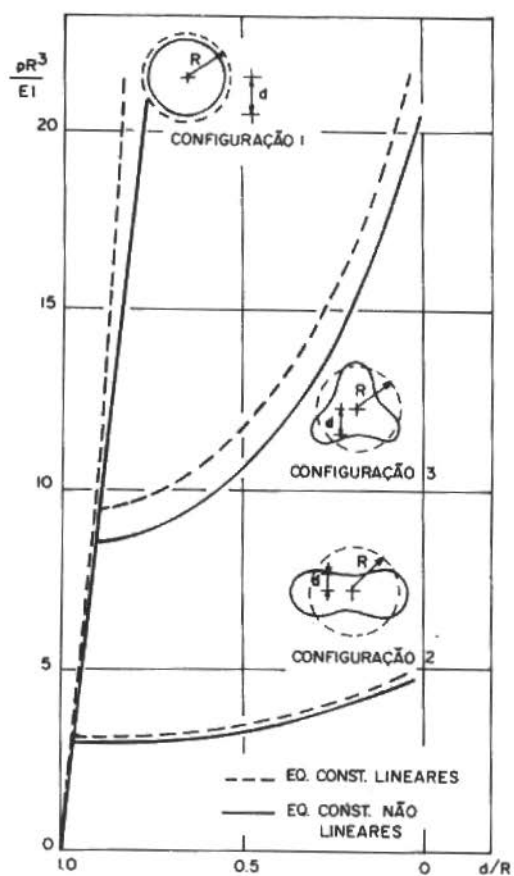


Figura 3. Distância mínima ao centro do anel

Verifica-se que os pontos de bifurcação sofrem influência da não linearidade das relações constitutivas, conforme ilustra a Tabela 1.

Tabela 1. Carregamentos de bifurcação  $pR^3/(EI)$

Bifurcação	Equação Constitutiva Linear	Equação Constitutiva Não Linear
1 - 2	-3,2	-3,1
1 - 3	-9,5	-8,7

A Tabela 2 indica uma diferença de 22,6% na menor distância  $d$  do anel ao centro, entre os casos com equações constitutivas lineares e não lineares, para a configuração 3 com carga  $pR^3/(EI) = -11$ . As diferenças entre os valores máximos dos esforços solicitantes são igualmente significativas.

Tabela 2. Resultados correspondentes à Figura 2

	Equação Constitutiva Linear	Equação Constitutiva Não Linear	Desvio Relativo à Hipótese Não Linear
Config. 2(*)			
d/R	0,5582	0,4922	0,134
MR / (EI)	1,1551	1,2908	-0,105
NR <sup>2</sup> / (EI)	4,3578	4,4534	-0,021
QR <sup>2</sup> / (EI)	2,2444	2,5032	-0,103
Config. 3(**)			
d/R	0,5907	0,4820	0,226
MR / (EI)	2,1487	2,5154	-0,146
NR <sup>2</sup> / (EI)	11,4960	11,5195	-0,002
QR <sup>2</sup> / (EI)	6,5670	7,6019	-0,136

\*  $pR^3/(EI) = -3,5$ \*\*  $pR^3/(EI) = -11$ 

## CONCLUSÕES

Foram obtidas equações constitutivas não lineares para estruturas elásticas unidimensionais, a partir do princípio de Hamilton e de uma forma particular para a densidade de ação potencial. Verificou-se que, uma vez assumido este princípio variacional, não se pode obter relações constitutivas lineares que expressem o comportamento mecânico da estrutura elástica como uma variedade unidimensional. A partir do modelo matemático obtido, foram determinadas duas configurações de equilíbrio pós-flambagem para um anel circular delgado submetido à pressão externa. Os resultados mostram que a simplificação pela adoção de equações constitutivas lineares gera alterações significativas sobre as configurações de equilíbrio calculadas. Assim, é importante que as hipóteses constitutivas sejam levadas

tadas sobre a densidade de ação potencial, e não diretamente sobre as relações constitutivas.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio da FINEP e do CNPq.

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Tadjbakhsh, I., Buckled states of elastic rings. Int. J. Engng. Sci., 4 : 433-450 (1966).
- [ 2 ] Toupin, R.A., Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Rational Mech. Anal., 17 : 85-112.
- [ 3 ] Whitman, A.B. and De Silva, C.N., A dynamical theory of elastic directed curves. ZAMP, 20 : 200-212 (1969).
- [ 4 ] Almeida, M.P. & Sampaio, R., Flambagem de barras com compressão axial. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, VII. UFU, Uberlândia, 1983. Anais do COBEM 83, vol.B, p.201 (1983).
- [ 5 ] Costa Mattos, H.S., Método do tiro na resolução de estruturas unidimensionais elásticas. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ (1984).
- [ 6 ] Mamiya, E.N. & Sampaio, R., Configurações pós-flambagem de um anel circular extensível. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, VIII. ITA, São José dos Campos, 1985. Anais do COBEM 85, pp.525-528 (1985).
- [ 7 ] Stoer, J. and Bulirsch, R., Introduction to numerical analysis. Springer Verlag, New York, 1ª ed., 690p. (1980).

## NOTICIÁRIO

### ~~SEMINAR IN MACHINERY NOISE AND DIAGNOSTICS~~

This six-day seminar, taught by Professor Richard H. Lyon, of M.I.T., will be offered the week of 10-15 August 1987, in Cambridge, Massachusetts. The seminar teaches the design principles for making machines operate more quietly, and the use of vibration and acoustical signals to determine faults in operating machines. Sources of noise and vibration in machines, the transmission and radiation of acoustical energy by the machine, and signal processing methods for fault signature recovery will be covered in the lectures and demonstrations. The text for the course is Professor Lyon's new book, Machinery Noise and Diagnostics.

For further information contact:

Prof. R.H. Lyon, Rm. 3-366  
Mass. Inst. of Technology  
Cambridge, Mass. 02139 - USA

