



REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalurgia, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os Trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Editor Executivo da RBCM
Secretaria da ABCM
PUC/RJ - ITUC
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

Executive Editor of RBCM
Secretary of ABCM
PUC/RJ - ITUC
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro, RJ - Brazil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.



**EDITOR
RESPONSÁVEL**
Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**
J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijs
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zampieri
Duraid Mahrus
E. O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guillermo Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jerzy T. Sielawa
J. J. Espindola
Liu Hsu
Maurício N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Néstor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

**METODOLOGIA AUTOMATIZADA PARA O
CONTROLE GEOMÉTRICO DE SUPERFÍCIES
DE PRECISÃO** 251

Armando Albertazzi Gonçalves Jr.
UFSC – Departamento de Engenharia Mecânica
Laboratório de Metrologia e Automatização

**DIFFUSION PROBLEMS WITH GENERAL
TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS** 269

R. M. Cotta – Membro da ABCM
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Departamento de Energia
M. N. Özisik
North Carolina State University
Mechanical and Aerospace Engineering Department

**UM MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO
DE UM FLUXO ESTRATIFICADO** 293

Armando M. Awruch
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Civil

**VIABILIDADE DA ANÁLISE TÉRMICA EM ESCALA
DO PRIMEIRO SATÉLITE BRASILEIRO** 311

Fernando Manuel Ramos
Instituto de Pesquisas Espaciais
Pedro Carajilescov – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica



A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO:

MCT – CNPq – FINEP

ANÚNCIOS NA RBCM

Qualquer solicitação de anúncios na revista deverá ser encaminhada
ao Representante exclusivo:

RIMTO COMUNICAÇÕES PUBLICITÁRIA LTDA.

Rio: Rua Conde de Bonfim, 370 Grs. 502/5/6/7/9

Tels.: 284-5842 (R) e 284-4920

SP: Rua Cel. Xavier de Toledo, 71 Grs. 602/3 – Tel.: 37-5252

DF: Shin QI 10 Cj. 7 – C/10 – Tel.: 577-2781

Formatos:

com margem 12,5 x 19,9 – sangrando 15,5 x 22,0

Todo o material deve ser fornecido pelo anunciante.

Fechamento: 30 dias antes do mês da circulação.

Circulação: Fevereiro – Maio – Agosto – Novembro.

Distribuição: Para todo o país.

AGRADECIMENTOS

A Direção da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas agradece a contribuição de todos os revisores que se empenharam para a boa apresentação dos trabalhos publicados durante este ano de 1987:

Álvaro Toubes Prata, UFSC
Ângela Ourivio Nieckele, PUC/RJ
Antonio Mac Dowell de Figueiredo, COPPE/UF RJ
Augusto César Galeão, LNCC/CNPq
Carlos Alberto de Almeida, PUC/RJ
Carlos Alberto Schneider, UFSC
Carlos Telles, COPPE/UF RJ
Clóvis Sperb de Barcellos, UFSC
Fernando Venâncio Filho, PROMON
Jorge Guilherme S. Patiño, PUC/RJ
José Alberto dos Reis Parise, PUC/RJ
Leonardo Goldstein Júnior, UNICAMP
Luís Fernando Alzugar Azevedo, PUC/RJ
Luiz Bevilacqua, PUC/RJ
Nisio de Carvalho L. Brum, COPPE/UF RJ
Paulo Murillo de Souza Araújo, PUC/RJ
Raúl Antonino Feijóo, LNCC/CNPq
Rogério Martins Saldanha da Gama, LNCC/CNPq
Sérgio Colle, UFSC

Announcement and Call for Papers

FIRST WORLD CONFERENCE

ON

EXPERIMENTAL HEAT TRANSFER, FLUID MECHANICS AND THERMODYNAMICS

September 4-9, 1988 Dubrovnik, Yugoslavia

The objectives of the Conference are to bring together the experimental researchers and industrialists active in the areas of thermal and fluid science and engineering, to exchange their expertise and experiences in many research areas with cooperation and friendship, and to further stimulate their research activities. All participants will also have an opportunity to get informed on:

- advances in basic phenomena of heat transfer and fluid flow through conventional and sophisticated experiments
- state-of-the-art in experimental techniques and instrumentation
- innovative applications of research results through cross-fertilization of ideas from conference participants of various disciplines
- validity of experimental results in many fields
- definition of needs for further measurements
- experience gained and lessons learned from building test facilities and reducing test data

Papers dealing with experimental work together with theory, analysis and numerical studies on all aspects of heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics will be considered. Also, papers analyzing original or existing experimental data together with theory or numerical results will be accepted.

The Conference Scientific Committee (made up of leading world authorities and experimentalists in heat transfer, fluid mechanics, and thermodynamics) is in charge of approving the acceptance of papers and final conference program.

Deadlines

- Nov. 1, 1987 Three copies of up to 1,000 word abstract.
- Dec. 1, 1987 Notify abstract acceptance
- Jan. 15, 1988 Full-length paper due
- Mar. 15, 1988 Notify paper acceptance
- Apr. 15, 1988 Author-prepared mats due

Send abstracts and further inquiry to: Professor Paulo Roberto de Souza Mendes, Department of Mechanical Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, CEP 22453, Rio de Janeiro, RJ, BRASIL.

2° DINAME

SEGUNDO SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS DA MECÂNICA PROBLEMAS DINÂMICOS EM MÁQUINAS E ESTRUTURAS

CHAMADA DE TRABALHOS

Período: 29 de fevereiro a 04 de março de 1988

Local: Campos do Jordão em hotel a ser definido

Objetivos:

- . Congregar os pesquisadores brasileiros na área de Dinâmica de Máquinas, Equipamentos e Estruturas para intercâmbio de conhecimentos e experiência.
- . Consolidar um Comitê da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM, nesta área.
- . Integrar os participantes com pesquisadores estrangeiros presentes no evento.
- . Apresentar experiências e problemas de caráter aplicado de origem industrial integrando os engenheiros, docentes universitários e pesquisadores de centros de pesquisa presentes.

Endereço para correspondência:

Coordenação Geral
GEPROM - Laboratório de Projeto Mecânica / UNICAMP
Caixa Postal 6051
13081 - Campinas, SP
Tel.: (0192) 39-1495 Telex: (019) 1150

EVENTOS

CADCOMP 88 - International Conference on Computer Aided Design in Composite Material Technology. 13-15 Abril 1988, Southampton Univ., UK.

CMWR 88 - Computational Methods in Water Resources. 13-17 Junho 1988, MIT, Boston, USA.

BEM 10 - Boundary Element Method Conference. 6-9 Setembro 1988, Southampton University, UK.

ASE 88 - International Conference on Applications of Supercomputers in Engineering. 19-21 Julho 1988, Aachen University, West Germany.

METODOLOGIA AUTOMATIZADA PARA O CONTROLE GEOMÉTRICO DE SUPERFÍCIES DE PRECISÃO

Armando Albertazzi Gonçalves Jr.*

UFSC - Departamento de Engenharia Mecânica
Laboratório de Metrologia e Automatização

RESUMO

Este trabalho descreve uma metodologia não convencional para medir erros geométricos de superfícies de precisão. São apresentados resultados da medição de planicidade de blocos padrão. Este método é estendido para medição de paralelismo, ortogonalidade, constância de afastamento e angular entre superfícies de precisão planas ou quase planas.

ABSTRACT

This work presents a non-conventional methodology to measure geometric errors of precise surfaces. There are presented results of a length gauge surface flatness. This method is extended to measure paralelism, ortogonality, thick and angular constancy between flat or almost-flat precise surfaces.

(*) Prêmio Yehan Numata 1986 como melhor trabalho em Mecânica de Precisão no período (junho/85 a junho/86).

INTRODUÇÃO

Medições de propriedades de superfícies de precisão, tais como: planicidade, paralelismo, ortogonalidade, constância de afastamento, etc., com elevada precisão, constitui um problema de difícil solução dentro do controle geométrico. Métodos convencionais praticamente inexistem ou são caracterizados por grande morosidade e rarefeição de informações. A medição de constância de afastamento em blocos padrão (BP) é um exemplo clássico, onde além da retroação e desgaste provocado pelo contato mecânico dos apalpadores, o processo normalizado é bastante metódico e só fornece informações em cinco pontos notáveis, com precisão raramente melhor que $0,02\mu\text{m}$.

Este trabalho apresenta um sistema não convencional, completamente automático, para efetuar o controle geométrico de superfícies planas ou quase planas, com elevada precisão. Foi inicialmente idealizado para medição de planicidade em BP, onde são requeridas precisões melhores que $0,02\mu\text{m}$. Porém, pode ser facilmente estendido para outras aplicações tais como: constância de afastamento, ortogonalidade, paralelismo e constância angular. Dispensa a intervenção do operador e efetua medições absolutamente sem contato ou "colagem" de superfícies.

O sistema dispensa o uso de componentes ópticos de precisão e utiliza um padrão para compensar os erros sistemáticos provocados pelas aberrações ópticas.

São apresentados aqui seus princípios, forma de operação, componentes básicos para medição de planicidade, paralelismo, ortogonalidade e constância angular. Resultados da aplicação desta metodologia na medição de planicidade de BP são apresentados.

INTERFERÔMETRO DE MICHELSON

O interferômetro de Michelson possui largas aplicações na metrologia [1 a 3]. Consiste basicamente de um divisor de feixe e um par de espelhos, como mostrado na figura 1a. O divisor separa o feixe original em duas componentes: a primeira segue em frente e é re-

fletida de volta pelo espelho A, e na volta, desviada lateralmente, atingindo o anteparo. A outra componente é desviada para a direita pelo divisor e atinge o espelho B, sendo refletido de volta para a direção do anteparo. Assim, no anteparo incidem simultaneamente as duas componentes superpostas, havendo então interferência.

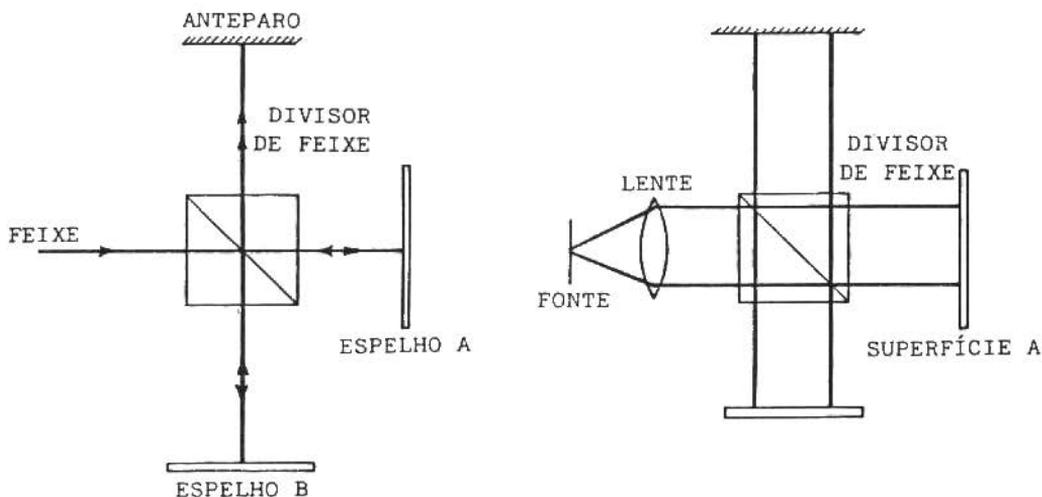


Fig. 1. a) Interferômetro de Michelson básico; b) Interferômetro de Michelson aplicado a comparação de superfícies

Dependendo da diferença de caminho óptico, estas duas componentes podem atingir o anteparo guardando uma certa diferença de fase. Quando é usada luz monocromática e coerente, esta diferença de fase é estável e facilmente visualizada.

Sendo esta diferença de fase de 180° , ou cômputos, há cancelamento, resultando intensidade mínima, e máxima quando a diferença de fase é 0° ou cômputos. Estando fixo o espelho A, um deslocamento no espelho B provocará uma mudança de fase proporcional. Para um deslocamento no espelho B de $\lambda/2$, sendo λ o comprimento de onda da luz usada, há uma variação de λ no caminho óptico provocando uma mudança de 360° na diferença de fase entre os feixes que incidem no anteparo. Este efeito é comumente usado na metrologia para medição de deslocamentos e, dependendo da precisão com a qual a diferença de fase é medida, podem ser medidos deslocamentos de até alguns metros, com pre-

cisão melhor que poucos nanômetros.

Outra concepção do interferômetro de Michelson, que permite comparar interferometricamente superfícies, é mostrada na figura 1b. Nesta, o feixe é colimado de forma a resultar em uma onda plana. De composta pelo divisor de feixe de forma análoga e refletida de volta por cada uma das superfícies a comparar, ambas as parcelas são superpostas e interferem mutuamente. Como resultado, aparece no anteparo uma imagem cuja diferença de fase é função das diferenças geométricas entre as duas superfícies. Tendo estas superfícies exatamente a mesma forma e sendo posicionadas ortogonalmente, a diferença de caminho óptico e, conseqüentemente, fase, será constante, resultando uma imagem homogênea. Havendo uma ligeira não-ortogonalidade, aparecem franjas retas e equiespaçadas riscando a imagem sobre o anteparo. Se as franjas apresentam algum tipo de curvatura é sinal de que há diferença de forma. Geralmente estes efeitos aparecem superpostos.

A diferença de cota entre dois pontos que estejam sobre duas franjas vizinhas, é de $\lambda/2$.

Sendo uma das superfícies padrão, a imagem resultante reflete os erros de forma da segunda superfície em relação à primeira.

MEDIÇÃO DE FASE

Para medir a diferença de forma entre duas superfícies por processos interferométricos, é imprescindível a medição precisa de diferença de fase. Esta poderia ser feita simplesmente através da medição de intensidade luminosa resultante em cada ponto da imagem sobre o anteparo. Porém esta forma de medição, além de imprecisa, não define o sinal da diferença de fase, ou seja, se $+\phi$ ou $-\phi$.

O processo alternativo desenvolvido consiste em, através de um dispositivo eletro-magnético, deslocar o espelho móvel (fig. 2) de forma controlada, ao mesmo tempo em que é registrada a intensidade de luminosa do ponto de interesse a cada nova posição do espelho móvel. Uma vez tendo sido calibrado o dispositivo eletromagnético de

forma apropriada, controla-se o espelho para executar, por exemplo, uma série de 16 passos sucessivos com valor de $\lambda/32$. Como resultado, provoca-se a cada passo um acréscimo de fase em toda a imagem de $360^\circ/16=22,5^\circ$. Sendo medida a intensidade luminosa do ponto de interesse em cada passo, obtém-se um gráfico similar ao da figura 2.

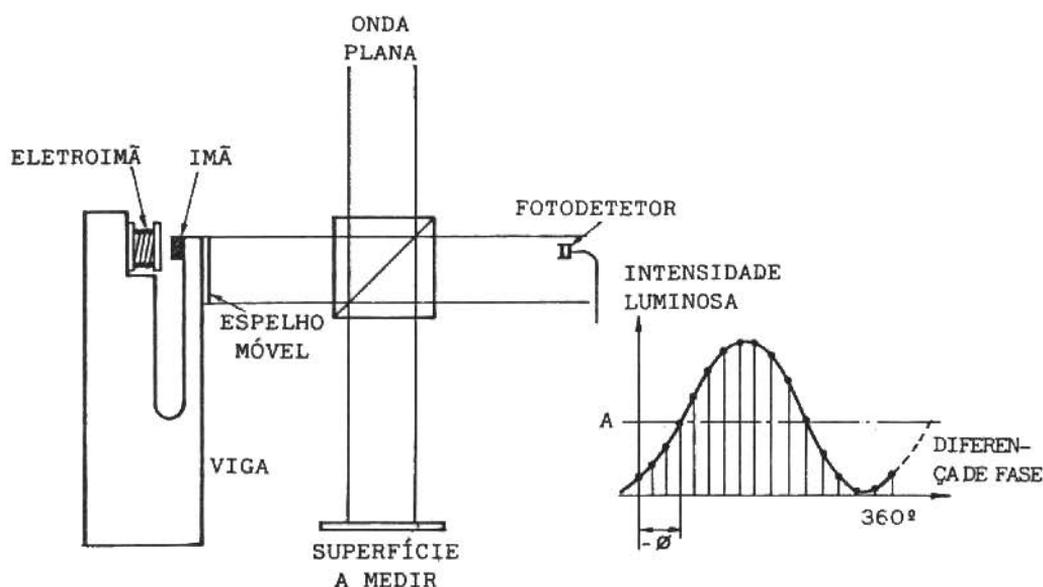


Fig. 2. Medição precisa de fase

Uma vez conhecido o período da senóide obtida, calcula-se o ângulo de fase ϕ do ponto de interesse, a menos de um número inteiro de voltas.

Sendo a curva obtida equacionada por:

$$Y = A + K \cdot \text{sen} (22,5 i + \phi) \quad (1)$$

discretizada por

$$Y_i = A + K \text{ sen} (22,5 i + \phi) \quad \text{com } i=1, \dots, 16 \quad (2)$$

onde

$$A = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} Y_i \quad (\text{m\u00e9dia dos 16 valores}) \quad (3)$$

obt\u00eam-se ent\u00e3o

$$Z_i = Y_i - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} Y_i = K \text{ sen } (22,5 i + \phi) \quad (4)$$

Observa-se que

$$Z_{i+4} = K \text{ sen } (22,5 i + \phi + 90) = K \text{ cos } (22,5 i + \phi) \quad (5)$$

e

$$\text{tg } (22,5 i + \phi) = \frac{K \text{ sen } (22,5 i + \phi)}{K \text{ cos } (22,5 i + \phi)} = \frac{Z_i}{Z_{i+4}} \quad (6)$$

ou

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Z_i}{Z_{i+4}} \right) - 22,5 i ; \quad i=1, \dots, 16 \quad (7)$$

Sabendo-se que $Z_i = Z_{i+16}$, podem ser calculados at\u00e9 16 valores independentes para ϕ , e portanto, pode ser feito um tratamento estat\u00edstico nestes valores medidos, aumentando a precis\u00e3o do resultado.

Testes mostraram que com este processo \u00e9 poss\u00edvel medir fase com repetibilidade melhor que 10° , o que se mostra suficiente para a grande maioria de aplica\u00e7\u00f5es dentro do controle geom\u00e9trico. Uma incerteza de $\pm 5^\circ$ na medi\u00e7\u00e3o de fase resulta em uma incerteza de $\pm 4,4\text{nm}$ na medi\u00e7\u00e3o de forma.

ABERRA\u00c7\u00d5ES \u00d3PTICAS

A compara\u00e7\u00e3o de superf\u00edcies por processos interferom\u00e9tricos pode ser efetuada com grande precis\u00e3o desde que sejam usados componentes \u00f3pticos perfeitos. Esta situa\u00e7\u00e3o idealizada est\u00e1 longe de ser a real e compromete substancialmente os resultados.

Imperfei\u00e7\u00f5es \u00f3pticas de lentes, do divisor de feixe e do es-

pelho móvel, conhecidas genericamente por aberrações, bem como desalinhamentos, são responsáveis por distorções e erros sistemáticos na medição de forma.

Felizmente, para um mesmo sistema, estas aberrações são estáveis, ou seja, não mudam com o tempo. Podem ser levantadas com o uso de uma superfície padrão de qualidade adequada: os "erros" de forma medidos para a superfície padrão representam exatamente o somatório das aberrações totais do sistema. Uma vez levantadas estas aberrações, podem ser convenientemente armazenadas e posteriormente compensadas.

Assim, ao medir uma superfície qualquer por este processo, deve-se compensar este erro sistemático, ou seja, abater do erro de forma encontrado a parcela correspondente às aberrações. Esta operação pode ser grandemente facilitada por meio de armazenamento digital de dados.

O SISTEMA DE MEDIÇÃO

A figura 3 ilustra os módulos do sistema de medição de planicidade desenvolvido. Consiste basicamente de um interferômetro de Michelson computadorizado.

A fonte de luz é um laser Hélio-Neônio com $\lambda=0,6328$ m filtrado e colimado convenientemente de modo a se obter uma onda plana.

O interferômetro de Michelson é de forma similar ao da figura 2, portanto já discutido. O deslocamento do espelho móvel é controlado por um dispositivo eletro-magnético, e varia linearmente para pequenos deslocamentos com a tensão aplicada sobre este por meio do conversor digital/analógico (D/A), que por sua vez, é controlado pelo computador.

O bloco padrão é posicionado sobre uma mesa contendo guias apropriadas e dispositivos de ajuste fino para facilitar a tarefa de reposicionamento.

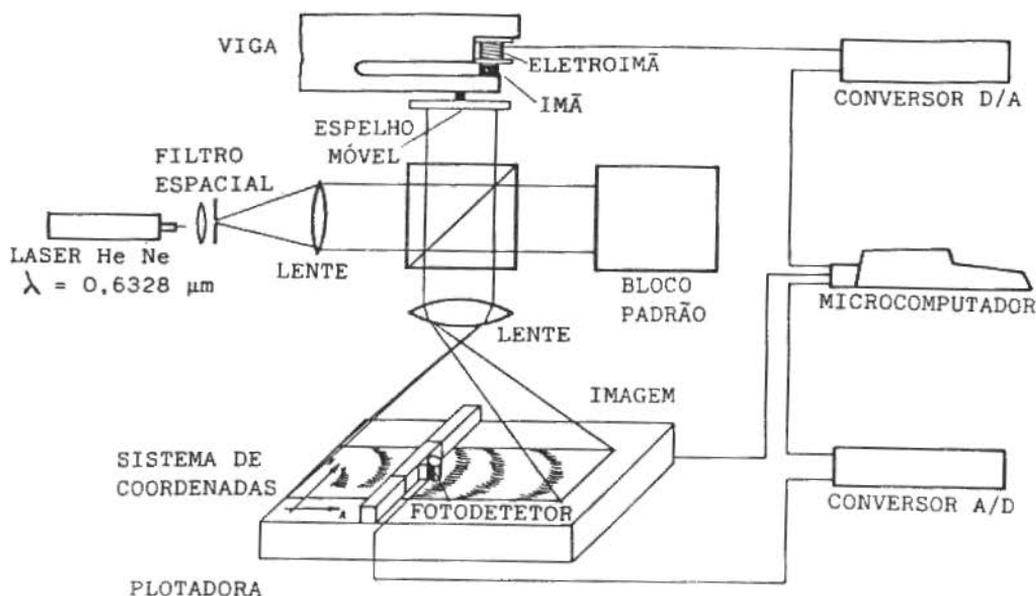


Fig. 3. Sistema de Medição de Planicidade

Uma lente objetiva é usada com o intuito de ampliar a imagem da interferência, de modo a torná-la com tamanho conveniente para sua análise.

Uma plotadora adaptada, na qual a pena é substituída por um fotodetetor, é usada como digitalizadora [4]. Por software, as posições dos quatro vértices da imagem sobre sua área útil são informadas. Uma vez tendo sido definida uma malha de discretização sobre o bloco padrão, a plotadora, corrigindo o efeito de perspectiva, posiciona o fotodetetor sobre a posição correspondente na imagem a cada ponto da malha definida. O conversor A/D transforma o sinal de tensão emitido pelo fotodetetor em um dado digital inteligível ao microcomputador.

O microcomputador controla a tensão sobre o dispositivo eletro-magnético, a posição XY do fotodetetor e mede a intensidade luminosa.

MEDIÇÃO DE PLANICIDADE

O software utilizado é constituído de várias etapas. Inicialmente, a malha é definida e a posição da imagem sobre a plotadora é informada ao computador. Este, por sua vez, desloca o fotodetector para a região da imagem correspondente a cada ponto da malha definida sobre o bloco padrão. Em cada posição, procede-se um ciclo de incremento de 16 níveis de tensão sobre o eletroimã, provocando incrementos de deslocamentos de $\lambda/32$ e, conseqüentemente, variação de fase de $22,5^\circ$ a cada incremento. Com estes dados, e o procedimento descrito no item 3, calcula-se, a menos de um múltiplo inteiro de 360° , a fase ϕ de cada ponto da malha.

Uma vez calculada a fase relativa de cada ponto da malha, estes são convertidos em cotas (distâncias) pela relação:

$$Z_i = (\phi_i + 360 K_i) \frac{\lambda}{2.360} \quad (10)$$

Inclinações e translações nas cotas medidas são eliminadas ajustando-se ao conjunto de pontos (X_i, Y_i, Z_i) o melhor plano segundo o método dos mínimos quadrados. X_i e Y_i são as coordenadas do ponto "i" da malha e Z_i sua cota calculada por (10). A equação do plano ajustado pelos mínimos quadrados é da forma:

$$f(X_i, Y_i) = A X_i + B Y_i + C \quad (11)$$

onde A, B e C são calculados por:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i Y_i & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i & \sum_{i=1}^n Y_i^2 & \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n Y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i Z_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i Z_i \\ \sum_{i=1}^n Z_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

sendo "n" o número total de pontos da malha.

Desta forma, as distâncias dos pontos Z_i 's ao melhor plano (δ_i) refletem os erros de planicidade da superfície ensaiada em relação à superfície padrão, porém estarão ainda acrescidos de erros provocados por aberrações. Calcula-se δ_i como sendo:

$$\delta_i = Z_i - f(X_i, Z_i) \quad (13)$$

Para conhecer precisamente os erros provocados por aberrações ópticas, usa-se uma superfície plana padrão com erros de planicidade pelo menos cinco vezes menores que os erros da superfície a analisar. Esta superfície é então medida pelo sistema. Os "erros" de planicidade encontrados para esta superfície plana padrão são exatamente os erros provocados pelas aberrações ópticas como um todo.

Desde que a disposição seja mantida, os erros provocados pelas aberrações ópticas constituem um erro sistemático constante e conhecido, podendo facilmente ser compensado. Para tal, a superfície de interesse é medida pelo sistema, as cotas são calculadas, e o erro sistemático corresponde às aberrações é subtraído para, em seguida, serem calculados os erros de planicidade em relação ao melhor plano ajustado pelo método dos mínimos quadrados.

MEDIÇÃO DE BLOCOS PADRÃO

Uma vez constituído o sistema descrito, foram efetuados testes e ensaios de planicidade em blocos padrão.

Como padrão de planicidade, foi usado um bloco padrão de 25,000mm, classe 0, com erros de constâncias de afastamento da ordem de 0,01 μ m, segundo certificado emitido pelo IPT e confirmado pelo LABMETRO.

Os erros de planicidade medidos, correspondente às aberrações ópticas, são representados na figura 4. O referencial zero adotado para as curvas de nível corresponde ao valor médio encontrado, sendo que assim sempre existem valores positivos e valores negativos. Uma translação deste referencial para o valor de nível mínimo

é desejável em alguns casos. A vista em perspectiva mostra o retângulo tomado como nível igual a zero e, em relação a este, é desenhada a malha correspondente à superfície deformada. Neste caso, esta representação não possui significado físico, apenas fornece dados sobre a magnitude das aberrações ópticas. Foi selecionada uma malha de 8 x 4 nós.

Uma vez encontrado o erro sistemático, foi medida a planicidade de alguns blocos padrões. A figura 5 mostra os resultados de testes de repetibilidade efetuados em blocos padrão. O erro máximo de repetibilidade encontrado neste caso foi da ordem de $0,01\mu\text{m}$. Estas medições foram efetuadas em um bloco padrão de 75mm.

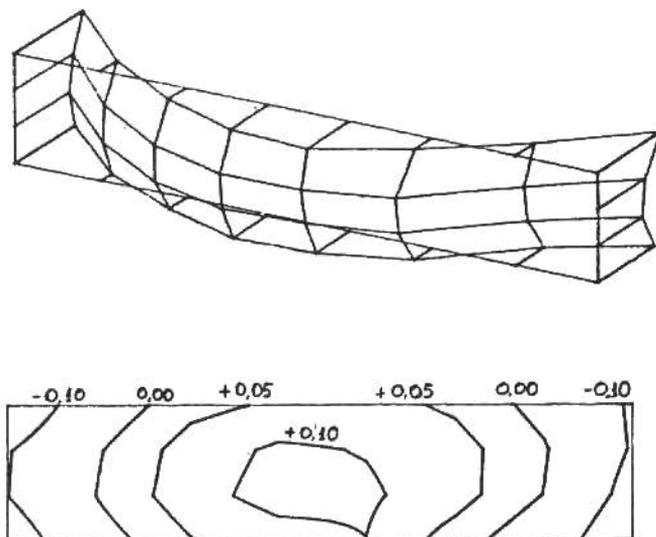


Fig. 4. Aberrações Ópticas (μm)

A figura 6 mostra os resultados da medição de planicidade em um BP de 75mm grau 2. Nota-se a presença de uma região mais alta na parte esquerda do BP. Embora pertença ao grau 2, onde são aceitos erros de constância de afastamento de $0,15\mu\text{m}$, o erro máximo de planicidade encontrado foi pouco superior a $0,05\mu\text{m}$.

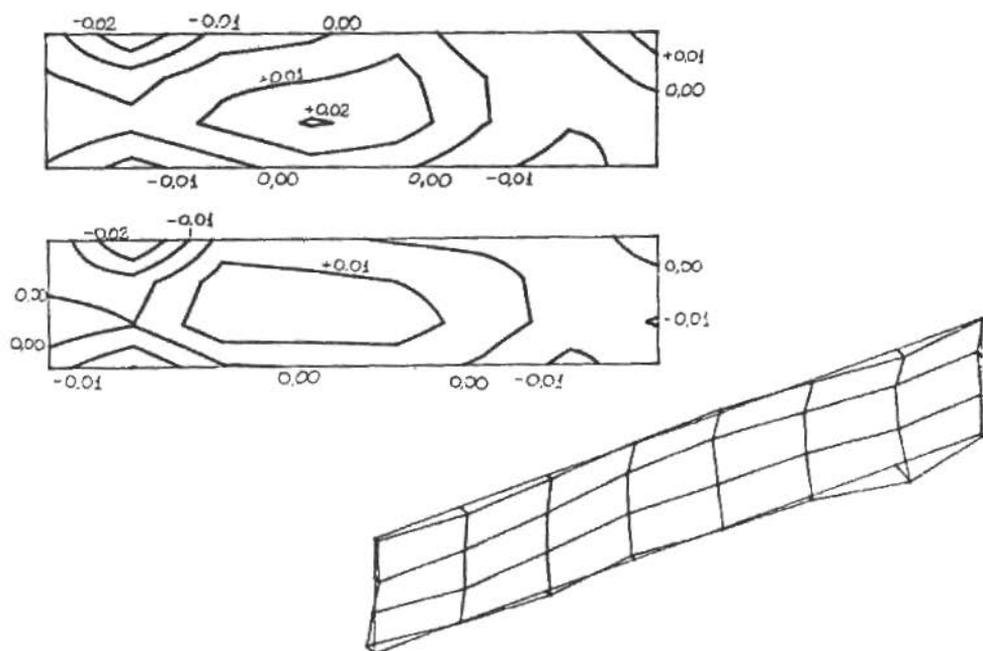


Fig. 5. Testes de Repetibilidade em um BP de 75mm (μm)

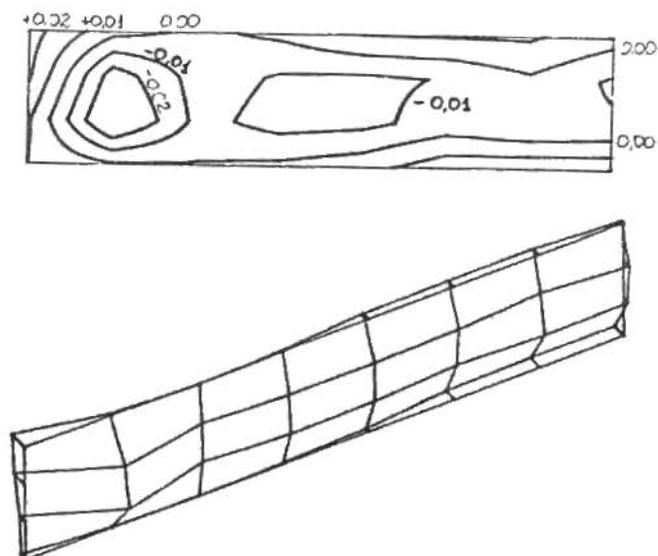


Fig. 6. Erros de planicidade de um BP de 75mm - Grau 2 (μm)

Os resultados da figura 7 correspondem aos erros de planicidade medidos nas duas faces de um BP grau 1 de 70mm.

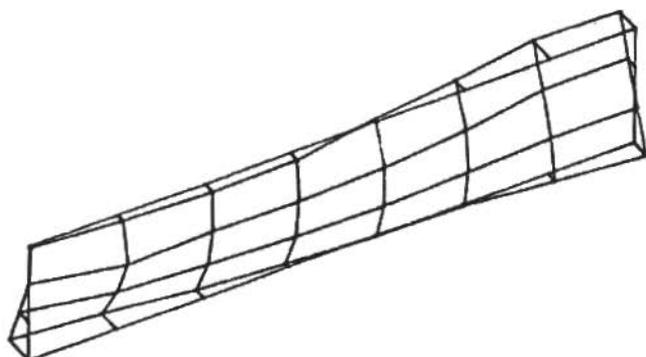


Fig. 7a. Erros de planicidade nas duas faces de um BP de 70mm (μm)

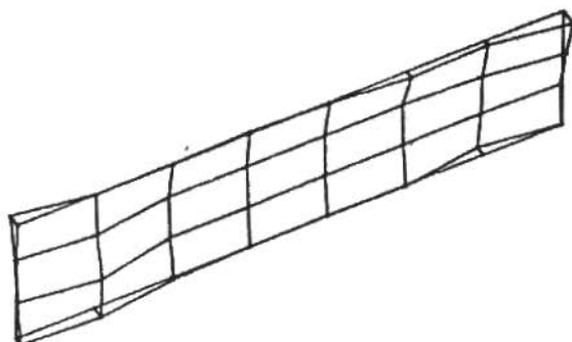
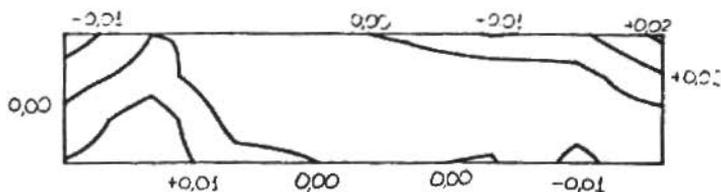


Fig. 7b. Erros de planicidade nas duas faces de um BP de 70mm (μm)

Os erros de planicidade medidos em BP se mostraram bastante reduzidos, mesmo para BP de grau 2. Entretanto, estes erros são grandemente multiplicados quando são formadas composições com BP colados. A figura 8 mostra os erros de planicidade da composição formada pelos BP de 25,000 e 1,001mm. Os erros de planicidade passam de cerca de $0,05\mu\text{m}$ para valores de até $0,25\mu\text{m}$, ou mais. Este fenômeno se dá em função do ajuste não uniforme entre as duas superfícies no momento da colagem dos BP, provocando ligeira flexão. Uma segunda medição foi efetuada neste conjunto, após um novo reposicionamento, e, em relação à primeira, foram feitas comparações e mostraram excelentes repetibilidade (fig. 8a e 8b).

Um último resultado é mostra do na figura 9. Neste caso, os erros de planicidade são de uma composição de um BP de 25,000 e outro de 1,010mm colados pelo mesmo operador, nas mesmas condições. Neste caso estão presentes erros de planicidade mais acentuados.

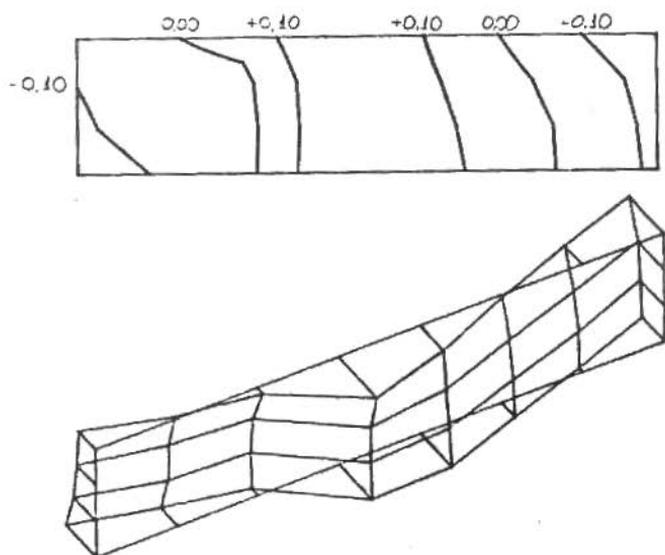


Fig. 8a. Erros de planicidade e testes de repetibilidade da composição dos BP de 25,000 com 1,001mm colados (μm)

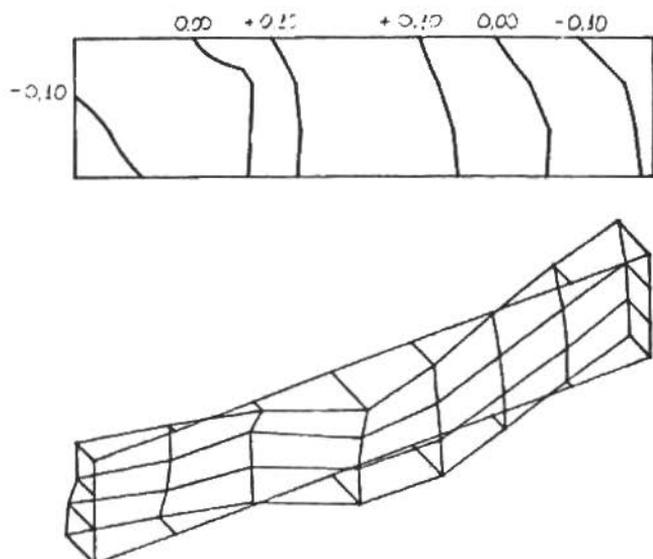


Fig. 8b. Erros de planicidade e testes de repetibilidade da composição dos BP de 25,000 com 1,001mm colados (μm)

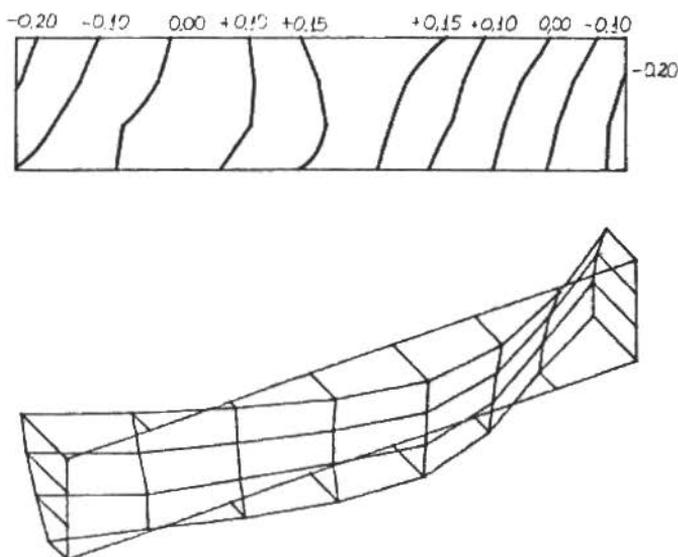


Fig. 9. Erros de planicidade da composição dos BP de 25,000 com 1,010mm colados (μm)

EXTENSÃO DA METODOLOGIA

A metodologia apresentada mostrou-se bastante eficiente para a medição de planicidade de superfícies espelhadas de precisão, tais como BP, espelhos, vidros e lâminas de precisão. Entretanto, superfícies quase planas, com elevado raio de curvatura, podem ser comparadas interferometricamente por este método. Para tal, substitui-se o espelho móvel por uma superfície similar a medir e procede-se a determinação da aberração óptica de forma análoga usando uma superfície padrão. Assim, podem ser medidas cilindrícidades, esfericidades e formas particulares, desde que estas superfícies possuam raios de curvatura elevados.

Outra extensão do método, de largas aplicações no controle geométrico de precisão, é a medição de constância de afastamento e paralelismo entre duas faces de um mesmo componente. É suficiente para isto, utilizar a variação do interferômetro de Michelson mostrado na figura 10. Ao passar pelo divisor de feixe, a luz é conduzida a cada uma das faces do componente e refletida de volta e superposta no anteparo. Novamente as franjas indicam a diferença de cota entre as duas superfícies (constância de afastamento). A determinação das aberrações ópticas é efetuada mediante um padrão com boas características de paralelismo. O software apenas elimina as aberrações, obtendo os resultados de constância de afastamento. A inclinação do plano ajustado a estes dados fornece a inclinação média entre as duas superfícies.

Alternativamente, o interferômetro da figura 11 mede ortogonalidade entre as faces assinaladas. Novamente é requerido o uso de um padrão, desta vez com boas características de planicidade em suas superfícies e de ortogonalidade entre suas faces. O processo de medição é análogo ao de paralelismo. Mudando a inclinação do espelho A, é possível generalizar o interferômetro para medição de "constância angular" entre duas superfícies planas afastadas de um ângulo qualquer, desde que se possua um padrão que possua as qualidades requeridas.

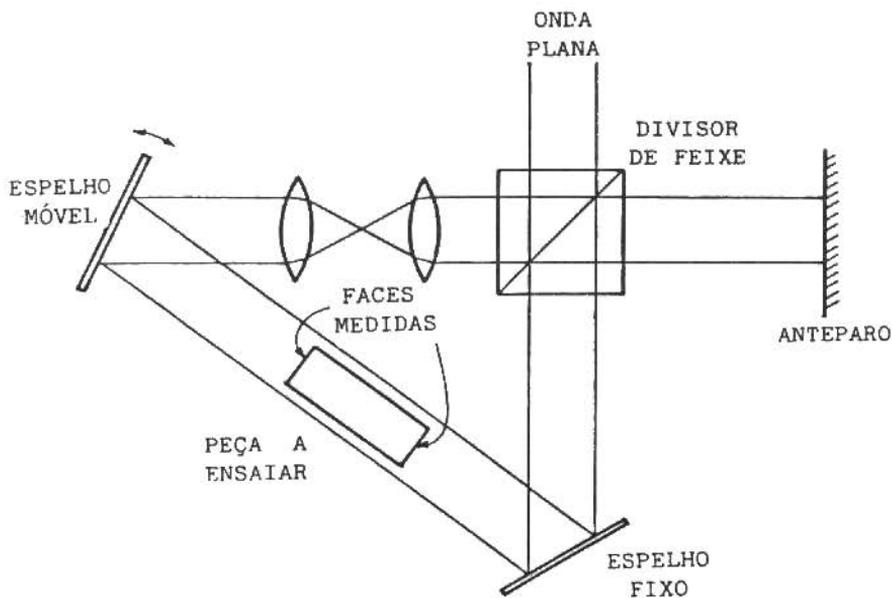


Fig. 10. Medição de paralelismo e constância de afastamento

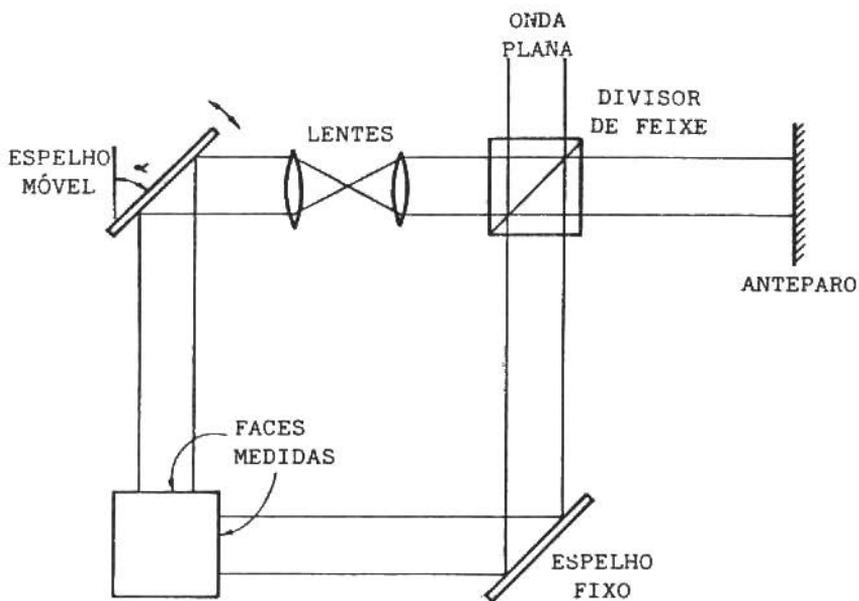


Fig. 11. Medição de ortogonalidade

CONCLUSÕES

O sistema desenvolvido apresentou erros de repetibilidade menores que $0,015\mu\text{m}$, considerados satisfatórios para uma série de aplicações dentro do controle geométrico. Entretanto, acredita-se que, com uso de fontes de laser mais potentes e com alguns recursos de hardware, seja possível medir com precisões melhores que $0,005\mu\text{m}$. Neste limite, fatores que influenciam na estabilidade térmica e mecânica passam a ter maior influência e devem ser convenientemente considerados.

O sistema usado, embora na concepção inicial pareça caro ou muito sofisticado, pode ser enormemente simplificado se uma bateria de fotocélulas for usada nas posições de interesse sobre a imagem. O conversor D/A e o conversor A/D são facilmente adquiridos no mercado. Uma unidade de chaveamento (porta lógica) pode ser usada para adquirir de forma sequencial o sinal de cada fotocélula.

Este sistema poderá constituir uma estação de medição com largas aplicações dentro do controle geométrico de precisão, elevado grau de automatização e alta confiabilidade e eficiência.

REFERÊNCIAS

- [1] ZAJAC, A.; HECHT, E., "Optics", Addison Wesley Pub. Co, Massachusetts, 1980.
- [2] ENGELHARD, E., "Precise interferometric measurement of gage blocks", (Technische Bundesanstalt, Braunschweig, Germany).
- [3] ROLT, F.H., "Using of light waves for controlling the accuracy of block gages" (Consultant in Metrology and Standardization, Hampton, England).
- [4] ALBERTAZZI JR, A., "Automatização da medição de deslocamento pela holografia interferométrica", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1984.

DIFFUSION PROBLEMS WITH GENERAL TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS

R. M. Cotta - Membro da ABCM
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Departamento de Energia

M. N. Özisik
North Carolina State University
Mechanical and Aerospace Engineering Department

ABSTRACT

Analytical solutions are given to diffusion equations with time-dependent coefficients in any general functional form. The generalized integral transform technique is utilized and time-dependence on related eigenvalue problems is completely avoided. Formal three-dimensional general solutions are first developed and then, the specific one-dimensional solutions are systematically obtained. Computational procedures for the solution of the associated systems of linear first order differential equations are considered. In addition, a systematic procedure for obtaining approximate explicit solutions is suggested.

RESUMO

Soluções analíticas são obtidas para equações de difusão com coeficientes dependentes do tempo em forma funcional geral. A técnica de transformada integral generalizada é utilizada e a dependência com o tempo é completamente evitada no problema de autovalor correspondente. Soluções gerais, tridimensionais são formalmente desenvolvidas e soluções unidimensionais específicas são sistematicamente obtidas. Procedimentos computacionais para a solução do sistema linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são considerados. Além disso, um procedimento sistemático para obter soluções aproximadas e explícitas é sugerido.

NOMENCLATURE

$a_{ij}^*(t)$ - defined by equations (6.c), (10.c), and (14.c)

$f(\underline{x})$ - initial condition for equation (1.a)

N_i - normalization integral

$P(\underline{x}, t)$ - source term in diffusion equation (1.a)

t - time variable

$T(\underline{x}, t)$ - temperature field

$w_1(\underline{x}), K_1(\underline{x}), d_1(\underline{x})$ - time-independent portion of coefficients in diffusion equations

$w_2(\underline{x}, t), K_2(\underline{x}, t), d_2(\underline{x}, t)$ - time-dependent portion of coefficients in diffusion equations

\underline{x} - position vector

Greek Letters

μ_i - eigenvalue of Sturm-Liouville system

$\Psi(\mu, \underline{x})$ - eigenfunctions

$\alpha(\underline{x}), \beta(\underline{x})$ - boundary condition coefficients

Superscripts

— - integral transform

Subscripts

h - iterated lowest order solution

i, j - order of eigenquantities

$k = 0, 1$ - boundary condition index

ℓ - lowest order solution

INTRODUCTION

The analytic solution of linear diffusion-type problems has been of great interest through the years, as demonstrated by the vast literature available, in both the contexts of applied mathematics and physical sciences. The considerably recent and parallel developments of computers and numerical analysis has been allowing the extraction of useful information, in the realm of applications, from those once formal and or too involved solutions. The classical integral transform technique, as described in several well-known works, has been the basic tool for such developments. Very recently [1], general solutions for seven different classes of problems have been provided in a systematic manner, from which several special cases of great interest in the heat and mass diffusion field can be obtained. This and related works have in common the fact that time-dependence (or corresponding independent variable) of the coefficients in the diffusion equation is not considered, despite its considerable importance. It appears that a systematic and computationally both fast and reliable approach has not yet been provided; purely numerical solutions are then, in general, preferred. A few previous works, however, have been directed towards obtaining such a systematic approach.

In reference [2], Mikhailov obtained general solutions for the diffusion equation in finite regions, including separable time and space-dependent coefficients, with a particular transformable function form. Due to these specific constraints on the coefficients, a time-independent eigenvalue problem could immediately be considered and all the terms in the diffusion equation could be transformed through the appropriate integral transform.

Özsisik and Murray [3] then introduced the so-called generalized integral transform technique for the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters. A time-dependent eigenvalue problem was considered which made the integral transform kernel time-dependent as well. Therefore, all but the time derivative term in the diffusion equation could be transformed to provide the usual system of uncoupled ordinary differential-equations. The formal solution to the problem then involves an infinite system of first-order linear differential equations.

Approximate solutions are then suggested and obtained as explicit expressions for a zeroth, and first order approximations. This technique was then extended to multi-region problems [4] and diffusion problems with a moving boundary [5,6].

Mikhailov [7] then considered the more general case including time dependent coefficients in the diffusion equation itself. The generalized integral transform technique was utilized through consideration of a time-dependent eigenvalue problem involving the time-dependent coefficient. Again, all but the time derivative term could be transformed to yield the desirable uncoupled system of ordinary differential equations.

These formal solutions, besides requiring the solution of an infinite system of differential equations with variable coefficients, involve the additional difficulty of fast and reliable evaluations of time-dependent eigenvalues and eigenfunctions. Except for a few special cases that are obtainable as explicit expressions in time, these evaluations would be too lengthy for any practical purpose. Therefore, in this work we alleviate such difficulties by demonstrating how the generalized integral transform technique can be utilized through consideration of time-independent eigenvalue problems. For the sake of clarity, each time-dependent coefficient is considered at a time. Formal solutions are established for the general three-dimensional cases and then, specialized for its one-dimensional counterparts. Computational procedures for obtaining useful and accurate numerical results from these formal solutions are examined. Also, explicit lowest-order solutions are considered and suggested, when applicable, for fast, approximate estimates in the context of applications.

ANALYSIS

We consider the following boundary value problem in a homogeneous, finite region V with boundary surface S :

$$w(\underline{x}, t) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\underline{x}, t) \nabla T(\underline{x}, t)] - d(\underline{x}, t) T(\underline{x}, t) + P(\underline{x}, t) ,$$

in $\underline{x} \in V , t > 0$ (1.a)

with initial and boundary conditions given, respectively, by:

$$T(\underline{x}, t) = f(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in V \quad , \quad t = 0 \quad (1.b)$$

$$\alpha(\underline{x}) T(\underline{x}, t) + \beta(\underline{x}) K_1(\underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \underline{n}} = \phi(\underline{x}, t) \quad , \quad \underline{x} \in S \quad , \quad t > 0 \quad (1.c)$$

where, for convenience in the analysis, we let:

$$w(\underline{x}, t) = w_1(\underline{x}) + w_2(\underline{x}, t) \quad (2.a)$$

$$K(\underline{x}, t) = K_1(\underline{x}) + K_2(\underline{x}, t) \quad (2.b)$$

$$d(\underline{x}, t) = d_1(\underline{x}) + d_2(\underline{x}, t) \quad (2.c)$$

Also, $\alpha(\underline{x})$ and $\beta(\underline{x})$ are prescribed coefficients on the boundary S and $\partial/\partial \underline{n}$ denotes the outward normal derivative at the boundary.

The analytical solution of this problem by the classical integral transform technique [1,2] would involve certain difficulties, since the time-dependent coefficients are not necessarily separable in time and space variables, and do not have, a priori, any particular functional form [2]. In addition, application of the generalized integral transform technique as shown in [7] would introduce the undesirable, additional difficulty of a time-dependent eigenvalue problem. In the present approach this time-dependence of the auxiliary problem is completely avoided. For the sake of clarity in the presentation that follows, we consider separate problems with one time varying coefficient at a time. This appears to be more instructive, in the sense that several applications immediately derive from these cases.

Problem I - $d(\underline{x}, t)$, $K(\underline{x})$, and $w(\underline{x})$

To apply the generalized integral transform technique the appropriate eigenvalue problem is taken as:

$$\nabla \cdot [K(\underline{x}) \nabla \Psi(\mu, \underline{x})] + (\mu^2 w(\underline{x}) - d_1(\underline{x})) \Psi(\mu, \underline{x}) = 0 \quad , \quad \underline{x} \in V \quad (3.a)$$

with boundary conditions

$$\alpha(\underline{x}) \Psi(\mu, \underline{x}) + \beta(\underline{x}) K(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu, \underline{x})}{\partial \underline{n}} = 0, \quad \underline{x} \in S \quad (3.b)$$

Equations (3) form a classical Sturm-Liouville system, which is assumed to have a known solution at this point. This well-known system allows the development of the following integral transform pair:

$$\text{Transform} - \bar{T}_i(t) = \int_V w(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} T(\underline{x}, t) dv \quad (4.a)$$

$$\text{Inversion} - T(\underline{x}, t) = \int_i \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) \bar{T}_i(t) \quad (4.b)$$

where the normalization integral is given by:

$$N_i(\mu) = \int_V w(\underline{x}) |\Psi(\mu_i, \underline{x})|^2 dv \quad (4.c)$$

Note that a symmetric kernel has been utilized in the definition of the integral transform pair, eqs.(4.a,b), for reasons to be stated later.

Now, equation (1.a) with $K(\underline{x})$ and $w(\underline{x})$, is operated on with

$$\int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) dv,$$

to yield:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} = -\mu_i^2 \bar{T}_i(t) - \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) \bar{d}_2(\underline{x}, t) T(\underline{x}, t) dv + \bar{g}_i(t) \quad (5.a)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K(\underline{x}) \left| \Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \underline{n}} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}} \right| ds + \\ & + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \end{aligned} \quad (5.b)$$

The untransformed term can then be rewritten as:

$$\int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) d_2(\underline{x}, t) T(\underline{x}, t) dv = \sum_j \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \left| \int_V d_2(\underline{x}, t) \Psi(\mu_i, \underline{x}) \Psi(\mu_j, \underline{x}) dv \right| \bar{T}_j(t) \quad (5.c)$$

Equation (5.a) can be expressed as follows

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \nu_i^2 \bar{T}_i(t) + \sum_j a_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t) \quad (6.a)$$

with the transformed initial condition

$$\bar{T}_i(0) = \bar{F}_i = \int_V w(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} f(\underline{x}) dv \quad (6.b)$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_V d_2(\underline{x}, t) \Psi(\mu_i, \underline{x}) \Psi(\mu_j, \underline{x}) dv, \quad (6.c)$$

and the nonhomogeneous term $\bar{g}_i(t)$ is given, after manipulation of boundary conditions (1.c) and (3.b), by:

$$\bar{g}_i(t) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S \phi(\underline{x}, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x}) - K(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}}}{\alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x})} \right| ds + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \quad (6.d)$$

Equations (6) above form an infinite system of coupled, linear, first-order differential equations, and provide a formal solution to the problem, since after the functions $\bar{T}_i(t)$ have been determined,

the inversion formula (4.b) can be utilized to provide the complete solution. For the special cases of $d_1(\underline{x}, t)$ identically zero, or $d_1(\underline{x}, t) = \beta(t)w(\underline{x})$, system (6) is uncoupled, and the resulting explicit solutions correspond to those in [1,2].

Problem II - $d(\underline{x})$, $K(\underline{x}, t)$, and $w(\underline{x})$

The appropriate eigenvalue problem in this case is taken as:

$$\nabla \cdot [K_1(\underline{x}) \nabla \Psi(\mu, \underline{x})] + (\mu^2 w(\underline{x}) - d(\underline{x})) \Psi(\mu, \underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in V \quad (7.a)$$

with boundary conditions

$$\alpha(\underline{x}) \Psi(\mu, \underline{x}) + \beta(\underline{x}) K_1(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu, \underline{x})}{\partial \underline{n}} = 0, \quad \underline{x} \in S \quad (7.b)$$

which allows the development of the following integral transform pair with a symmetric kernel:

$$\text{Transform} - \bar{T}_i(t) = \int_V w(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} T(\underline{x}, t) dv \quad (8.a)$$

$$\text{Inversion} - T(\underline{x}, t) = \sum_i \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) \bar{T}_i(t) \quad (8.b)$$

and the normalization integral is written as:

$$N_i(\mu) = \int_V w(\underline{x}) |\Psi(\mu_i, \underline{x})|^2 dv \quad (8.c)$$

Now, equation (1.a) with $d(\underline{x})$ and $w(\underline{x})$, is operated on with the operator

$$\int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) dv, \quad \text{to obtain:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} &= -\nu_i^2 \bar{T}_i(t) + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla T(\underline{x}, t)] dv + \\ &+ \bar{g}_i^*(t) \end{aligned} \quad (9.a)$$

where,

$$\begin{aligned} \bar{g}_i^*(t) &= \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K_1(\underline{x}) \left[\Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial n} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial n} \right] ds + \\ &+ \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \end{aligned} \quad (9.b)$$

The untransformed term in equation (9.a) can be written in the alternative form

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V \Psi(\mu_i, \underline{x}) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla T(\underline{x}, t)] dv &= \\ &= \frac{1}{N_i^{1/2}} \left[\int_V T(\underline{x}, t) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla \Psi(\mu_i, \underline{x})] dv + \right. \\ &\left. + \int_S K_2(\underline{x}, t) \left[\Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial n} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial n} \right] ds \right] \end{aligned} \quad (9.c)$$

The first integral in the right hand side can then be expressed as:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_V T(\underline{x}, t) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla \Psi(\mu_i, \underline{x})] dv &= \\ &= \sum_j \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \left[\int_V \Psi(\mu_j, \underline{x}) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla \Psi(\mu_i, \underline{x})] dv \right] \bar{T}_j(t) \end{aligned} \quad (9.d)$$

And we let:

$$\bar{g}_i(t) = \bar{g}_i^*(t) + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K_2(\underline{x}, t) \left| \Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \underline{n}} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}} \right| ds \quad (9.e)$$

Equation (9.a) is then rewritten as:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) - \sum_j a_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t) \quad (10.a)$$

with the transformed initial condition

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = \int_V w(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} f(\underline{x}) dv \quad (10.b)$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_V \Psi(\mu_j, \underline{x}) \nabla \cdot [K_2(\underline{x}, t) \nabla \Psi(\mu_i, \underline{x})] dv \quad (10.c)$$

and the independent term $\bar{g}_i(t)$ is given, after manipulating the boundary condition for both the original and auxiliary problem, by:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S \phi(\underline{x}, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x}) - K_1(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}}}{\alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x})} \right| ds + \\ & + \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S \frac{K_2(\underline{x}, t)}{K_1(\underline{x})} \phi(\underline{x}, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x}) - K_1(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}}}{\alpha(\underline{x}) + \beta(\underline{x})} \right| ds + \\ & + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \end{aligned} \quad (10.d)$$

The infinite system of coupled differential equations (10) is now decoupled for the case $K_2(\underline{x}, t)$ identically zero, reducing the present solution to the explicit forms of [1,2].

Problem III - $d(\underline{x})$, $K(\underline{x})$, and $w(\underline{x}, t)$

The appropriate eigenvalue problem is now taken as:

$$\nabla \cdot [K(\underline{x}) \nabla \Psi(\mu, \underline{x})] + (\mu^2 w_1(\underline{x}) - d(\underline{x})) \Psi(\mu, \underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in V \quad (11.a)$$

with boundary conditions

$$\alpha(\underline{x}) \Psi(\mu, \underline{x}) + \beta(\underline{x}) K(\underline{x}) \frac{\partial \Psi(\mu, \underline{x})}{\partial n} = 0, \quad \underline{x} \in S \quad (11.b)$$

The development of the appropriate integral transform pair then yields:

$$\text{Transform} - \bar{T}_1(t) = \int_V w_1(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_1, \underline{x})}{N_1^{1/2}} T(\underline{x}, t) dV \quad (12.a)$$

$$\text{Inversion} - T(\underline{x}, t) = \sum_i \frac{1}{N_1^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) \bar{T}_1(t) \quad (12.b)$$

and the normalization integral is now given by:

$$N_1(\mu) = \int_V w_1(\underline{x}) |\Psi(\mu_1, \underline{x})|^2 dV \quad (12.c)$$

Equation (1.a), with $d(\underline{x})$ and $K(\underline{x})$, is now operated on by the operator

$$\int_V \frac{1}{N_1^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) dV, \quad \text{to obtain:}$$

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \int_V w_2(\underline{x}, t) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} dv = -\mu_i^2 \bar{T}_i(t) + \bar{g}_i(t) \quad (13.a)$$

where,

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K(\underline{x}) \left[\Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial n} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial n} \right] ds + \\ & + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \end{aligned} \quad (13.b)$$

The untransformed term equation (13.b) can then be rewritten

$$\begin{aligned} & \int_V w_2(\underline{x}, t) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} dv = \\ & = \sum_j \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \left\| \int_V w_2(\underline{x}, t) \Psi(\mu_i, \underline{x}) \Psi(\mu_j, \underline{x}) dv \right\| \frac{d\bar{T}_j(t)}{dt} \end{aligned} \quad (13.c)$$

Equation (13.a) is now expressed by:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \sum_j a_{ij}^*(t) \frac{d\bar{T}_j(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t) \quad (14.a)$$

with the transformed initial condition

$$\bar{T}_i(0) = \bar{F}_i = \int_V w_1(\underline{x}) \frac{\Psi(\mu_i, \underline{x})}{N_i^{1/2}} f(\underline{x}) dv \quad (14.b)$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \left| \int_V w_2(\underline{x}, t) \Psi(\mu_i, \underline{x}) \Psi(\mu_j, \underline{x}) dv \right| \quad (14.c)$$

and $\bar{g}_i(t)$, after manipulation of boundary conditions, is given by:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_S K(\underline{x}) \left| \Psi(\mu_i, \underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \underline{n}} - T(\underline{x}, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, \underline{x})}{\partial \underline{n}} \right| ds + \\ & + \int_V \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, \underline{x}) P(\underline{x}, t) dv \end{aligned} \quad (14.d)$$

Although not in normal form, equations (14) form an infinite system of coupled, first order, linear differential equations, which is decoupled for $w_2(\underline{x}, t)$ identically zero, or $w_2(\underline{x}, t) = \beta(t)w_1(\underline{x})$, to yield the explicit solutions in [1,2].

We can now focus attention on the one-dimensional counterpart of the boundary value problem (1), which is given in the form:

$$\begin{aligned} w(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left| K(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right| - d(x, t) T(x, t) + \\ & + P(x, t), \quad \text{in } x_0 < x < x_1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (15.a)$$

with initial and boundary conditions given by:

$$T(x, t) = f(x), \quad \text{in } x_0 \leq x \leq x_1, \quad t = 0 \quad (15.b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k T(x, t) - (-1)^k \beta_k K_1(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = & \phi(x, t), \quad \text{at } x = x_k, \\ & k = 0, 1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (15.c,d)$$

The formal solutions provided by systems (6,10,14) can be immediately specialized to the one-dimensional problem above, if the corresponding volume and surface integrals are appropriately restricted to this special case. Therefore, these systems can be rewritten as:

Problem I

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t) \quad (16.a)$$

$$\bar{T}_i(0) = \bar{F}_i = \int_{x_0}^{x_1} w(x) \frac{\Psi(\mu_i, x)}{N_i^{1/2}} f(x) dx, \quad i=1,2,3\dots \quad (16.b)$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_{x_0}^{x_1} d_2(x, t) \Psi(\mu_i, x) \Psi(\mu_j, x) dx, \quad (16.c)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) = & \frac{1}{N_i^{1/2}} \sum_{k=0}^1 \phi(x_k, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, x_k) + (-1)^k K(x_k) \Psi'(\mu_i, x_k)}{\alpha_k + \beta_k} \right| + \\ & + \int_{x_0}^x \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, x) P(x, t) dx \end{aligned} \quad (16.d)$$

and

$$N_i(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} w(x) |\Psi(\mu_i, x)|^2 dx \quad (16.e)$$

Problem II

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^*(t) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t) \quad (17.a)$$

$$\bar{T}_i(0) = \bar{F}_i = \int_{x_0}^{x_1} w(x) \frac{\Psi(\mu_i, x)}{N_i^{1/2}} f(x) dx, \quad i=1,2,3\dots \quad (17.b)$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_{x_0}^{x_1} \Psi(\mu_j, x) \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2(x, t) \frac{\partial \Psi(\mu_i, x)}{\partial x} \right] dx, \tag{17.c}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_i(t) &= \frac{1}{N_i^{1/2}} \sum_{k=0}^1 \phi(x_k, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, x_k) + (-1)^k K_1(x_k) \Psi'(\mu_i, x_k)}{\alpha_k + \beta_k} \right| + \\ &+ \frac{1}{N_i^{1/2}} \sum_{k=0}^1 \frac{K_2(x_k, t)}{K_1(x_k)} \phi(x_k, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, x_k) + (-1)^k K_1(x_k) \Psi'(\mu_i, x_k)}{\alpha_k + \beta_k} \right| + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, x) P(x, t) dx \end{aligned} \tag{17.d}$$

and

$$N_i(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} w(x) |\Psi(\mu_i, x)|^2 dx \tag{17.e}$$

Problem III

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^*(t) \frac{d\bar{T}_j(t)}{dt} + \mu_i \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t) \tag{18.a}$$

$$\bar{T}_i(0) = \bar{F}_i = \int_{x_0}^{x_1} w_1(x) \frac{\Psi(\mu_i, x)}{N_i^{1/2}} f(x) dx, \quad i=1,2,3... \tag{18.b}$$

where,

$$a_{ij}^*(t) = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_{x_0}^{x_1} w_2(x, t) \Psi(\mu_i, x) \Psi(\mu_j, x) dx, \tag{18.c}$$

$$\bar{g}_i(t) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \sum_{k=0}^1 \phi(x_k, t) \left| \frac{\Psi(\mu_i, x_k) + (-1)^k K(x_k) \Psi'(\mu_i, x_k)}{\alpha_k + \beta_k} \right| + \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{N_i^{1/2}} \Psi(\mu_i, x) P(x, t) dx \quad (18.d)$$

and

$$N_i(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} w_1(x) |\Psi(\mu_i, x)|^2 dx \quad (18.e)$$

Therefore, once numerical results have been obtained from systems (16, 17, or 18), the complete solution is evaluated from the inversion formula of the integral transform pair.

COMPUTATIONAL PROCEDURE

Our first concern when seeking numerical results from systems (16, 17, or 18) lies in the fact that they form infinite dimensional or denumerable systems. For numerical purpose it would be extremely desirable if a sufficiently large finite dimensional system could be considered instead, since several well-established numerical schemes of solution exist in this case. In reference [8], more general denumerable systems were investigated in the formal sense, by truncating the infinite system at the N^{th} row and N^{th} column, solving the $N \times N$ system, and looking for conditions on the coefficients ensuring that the solution of the finite system would tend to the infinite system solution as $N \rightarrow \infty$. We make no attempt of reproducing here the results obtained through this formal, mathematical analysis. Instead, we assume these conditions are met for a certain particular problem, a priori, and investigate the solution convergence by considering increasing values of N , which might suffice for practical purposes. Therefore, if a finite dimensional system is to be considered, systems (16, 17, and 18) can be written

in more conveniently as:

Problem I

$$\underline{y}' + A(t) \underline{y}(t) = \underline{g}(t) \quad (19.a)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{f} \quad (19.b)$$

where,

$A(t) = \{a_{ij}\}$ is the $N \times N$ symmetric matrix with

$$a_{ij} = \delta_{ij} \nu_i^2 + a_{ij}^*(t) \quad , \quad i, j=1, 2, \dots, N \quad (19.c)$$

and,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ for } i \neq j \\ 1 & , \text{ for } i = j \end{cases}$$

also

$$\underline{y} = \{\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \dots, \bar{T}_N(t)\}^T \quad (19.d)$$

$$\underline{g} = \{\bar{g}_1(t), \bar{g}_2(t), \dots, \bar{g}_N(t)\}^T \quad (19.e)$$

$$\underline{f} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_N\}^T \quad (19.f)$$

Problem II

$$\underline{y}' + A(t) \underline{y}(t) = \underline{g}(t) \quad (20.a)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{f} \quad (20.b)$$

with

$$a_{ij} = \delta_{ij} \nu_i^4 - a_{ij}^*(t) \quad , \quad i, j=1, 2, \dots, N \quad (20.c)$$

and other quantities defined as above.

Problem III

$$A(t) \underline{y}' + B \underline{y}(t) = \underline{g}(t) \quad (21.a)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{f} \quad (21.b)$$

with

$$a_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}^*(t) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (21.c)$$

where $B = \{b_{ij}\}$ is a constant, diagonal, $N \times N$ matrix with

$$b_{ij} = \delta_{ij} \mu_i^2 \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (21.d)$$

For a non-singular, system (2i) can be rewritten in normal form as:

$$\underline{y}' + C(t) \underline{y}(t) = \underline{h}(t) \quad (22.a)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{f} \quad (22.b)$$

where,

$$C(t) = A^{-1}(t) B \quad (22.c)$$

$$\underline{h}(t) = A^{-1}(t) \underline{g}(t) \quad (22.d)$$

The problems are now reduced to the solution of a finite, linear system of first order differential equations with time-varying coefficients. Closed-form solutions are unlikely to be obtainable, except for a class of commutative equations [9], which include the special case of systems with constant coefficients. Therefore, if a commutative coefficients matrix is identified, the solution can be

constructed by performing the same operations as for the constant-coefficients case, namely, through the solution of algebraic eigenvalue problems and systems of algebraic linear equations, making the inspection of conditions for commutivity particularly attractive. Some sufficient conditions for commutivity have been provided in references [9-12]. If the verification of commutivity does not apply, sufficiently accurate numerical results can still be obtained through consideration of well-known numerical techniques for initial value problems [13]. However, the systems of differential equations here considered are likely to produce the so-called "stiff problems" [13, 15], which are often related in the literature as problems with widely differing time constants, since the solution components $y_i(t)$'s may have transient decays at sharply different rates. Fortunately, over the past few years, special solution techniques have been developed for these class of problems, and are readily available through reliable and automatic subroutines packages [14]. In addition, specialized procedures for linear problems have been considered, and should be directly applicable to the systems under consideration [13, 15, 16]. These aspects are more closely examined in a companion paper within an application frame.

Therefore, once the components of the solution vector $\underline{y}(t)$ have been numerically evaluated, the inversion formula in the integral transform pair can be utilized to provide the complete solution for the potential $T(x,t)$.

It should also be noted that for best computational results, splitting up of the original problem into simpler ones, when applicable, might be mandatory, as demonstrated in references [1,2].

APPROXIMATE SOLUTIONS

We consider the system of first-order linear differential equations given in normal form as:

$$\underline{y}' + A(t) \underline{y}(t) = \underline{g}(t) \quad , \quad t > 0 \quad (23.a)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{f} \quad (23.b)$$

It is clear that in the case of a diagonal coefficients matrix, $A(t)$, the above problem would be uncoupled in the components of vector y , and an explicit, straight forward solution would be provided for each component y_i . In addition, the problem of solving system (23) can be interpreted as mathematically equivalent to the problem of diagonalizing the coefficients matrix. Therefore, when the diagonal elements of matrix $A(t)$ dominate the system over non-diagonal elements, it seems reasonable to consider an approximate solution by taking only the diagonal of $A(t)$. Therefore, when applicable, this "lowest order solution" would be given by:

$$y_{i,l}(t) = \bar{F}_i \exp \left[- \int_0^t a_{ii}(t') dt' \right] + \int_0^t g_i(t') \cdot \exp \left[- \int_t^t a_{ii}(t'') dt'' \right] dt' \quad (24)$$

This approximate, explicit solution will in general be appropriate for estimatives in practical applications, being more or less accurate in a certain range of parameters involved in the time-dependent coefficients of the original problems. Its suitability can be investigated, a priori, through inspection of the particular structure of the coefficients matrix, and by identifying parameters that govern the magnitude of non-diagonal elements.

Iterated Lowest Order Solution

When the lowest order solution proves not to be suitable over an entire range of interest, due to an increased importance of non-diagonal elements in the coefficients matrix, an analytical iteration on the complete system can be employed to approximately account for the effects of this decreased dominance. This so-called iterated lowest order solution would then provide more accurate results over a wider range of parameters, remaining explicit and simple enough to become practical.

The decoupled system to be solved is then given by:

$$y'_{i,h} + a_{ii}(t) y_{i,h}(t) = G_i(t) + g_i(t), \quad t > 0 \quad (25.a)$$

$$y_{i,h}(0) = f_i \quad (25.b)$$

where,

$$G_i(t) = - \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} a_{ij}(t) y_{j,\ell}(t) \quad (25.c)$$

And this higher-order solution could be written in the form:

$$y_{i,h}(t) = y_{i,\ell}(t) + y_{i,c}(t) \quad (26.a)$$

where the "correction term", would be simply given by:

$$y_{i,c}(t) = \int_0^t G_i(t') \exp \left[- \int_t^{t'} a_{ii}(t'') dt'' \right] dt' \quad (26.b)$$

The particular merits of each analytical approximation shall be better envisioned in a companion paper where an specific application is considered.

ACKNOWLEDGEMENT

One of the authors (R.M.C.) wishes to acknowledge the hospitality of the Mechanical & Aerospace Engineering Dept., North Carolina State University, during his stay in August, 1986. This work was also partially supported by CNPq/Brasil through grant nº 302366-85/EM.

REFERENCES

- [1] MIKHAILOV, M.D. and M.N. Özisik, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

- [2] MIKHAILOV, M.D., *General Solutions of the Heat Equation in Finite Regions*, *Int.J.Engng.Sci.*, Vol. 10, pp. 577-591, 1972.
- [3] ÖZISIK, M.N. and R.L. Murray, *On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters*, *J. Heat Transfer*, V. 96, pp. 48-51, 1974.
- [4] YENER, Y. and M.N. Özisik, *On the Solution of Unsteady Heat Conduction in Multi-Region Finite Media with Time Dependent Heat Transfer Coefficient*, *Proc. 5th Int. Heat Transfer Conference*, Tokyo, Sept. 1974.
- [5] LEITE, S.B., M.N. Özisik, and K. Verghese, *On the Solution of Linear Diffusion Problems in Media with Moving Boundaries*, *Nucl. Science Eng.*, Vol. 76, pp. 345-370, 1980.
- [6] ÖZISIK, M.N. and S.I. Guçeri, *A Variable Eigenvalue Approach to the Solution of Phase-Change Problems*, *Can.J.Chem.Eng.*, Vol. 55, pp. 145-148, 1977.
- [7] MIKHAILOV, M.D., *On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient*, *Int.J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 344-345, 1975.
- [8] DEIMLING, K., *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, *Lect. Notes Math.*, Vol. 596, 1977.
- [9] LUKES, D.L., *Differential Equations: Classical to Controlled*, Academic Press, New York, 1982.
- [10] ERUGIN, N.P., *Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasi-Periodic Coefficients*, Academic Press, New York, 1966.
- [11] ASLANYAN, A.G. and V.I. Burenkov, *Integrability in Quadratures of Some Systems of Linear Differential Equations*, *Diff. Uravneniya*, Vol. 4, nº 7, pp. 1241-1249, 1986.
- [12] FREEDMAN, H.I., *Functionally Commutative Matrices and Matrices with Constant Eigenvectors*, *Lin.Mult.*, Vol. 4, pp. 107-113, 1976.

- [13] GEAR, C.W., *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- [14] IMSL Library, Edition 7, GNB Building, 7500 Ballaire Blvd. Houston, Texas, 77036, 1979.
- [15] HALL, G. and J.M. Watt, Eds., *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [16] LAWSON, J.D., *Generalized Runge-Kutta Processes for Stable Systems with Large Lipschitz Constants*, *SIAM J.Numer.Anal.*, Vol. 4, nº 3, 1967.

UM MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DE UM FLUXO ESTRATIFICADO

Armando M. Awruch

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Civil

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas a formulação e solução numérica de um modelo matemático para simular o fluxo estratificado num sistema de águas rasas. Os métodos dos elementos finitos e diferenças finitas são usados para discretizar o espaço e o tempo respectivamente. A aplicação do modelo é mostrada através de dois exemplos simples.

ABSTRACT

The formulation and numerical solution of a mathematical model to study stratified flow in shallow waters are presented in this work. Finite element and finite differences are used for space and time discretization respectively. The adequacy of the model is shown through two simple examples.

INTRODUÇÃO

Muitas vezes o estudo do fluxo de um sistema hídrico não pode fazer-se supondo que o mesmo é homogêneo, já que alguns fatores como a existência de gradientes de temperatura ou intrusão salina originam um escoamento estratificado em duas ou mais camadas.

Muitos modelos matemáticos foram realizados com o fim de estudar fluxos estratificados, fundamentalmente referidos a problemas de intrusão salina. Existem autores que utilizaram técnicas analíticas ([1],[2],[3],[4]) fazendo algumas simplificações; outros preferem sofisticar estes modelos utilizando métodos numéricos.

Entre os métodos numéricos, o de diferenças finitas tem sido intensivamente aplicado para simular fluxos estratificados. De todos estes modelos pode-se mencionar o trabalho de Dazzi e Tomassino [5] que foi aplicado ao Delta do Rio Pô (Itália); este modelo é uni dimensional, constituído por duas camadas e está baseado num esquema de diferenças finitas centradas; seus aspectos mais importantes são a utilização de intervalos de espaço diferentes para cada estrato, a eliminação dos termos convectivos nas equações de movimento e a definição do operador diferencial de tal forma, que se assume uma variação linear de todas as variáveis (em tempo e em espaço), expressando-se um valor num ponto intermediário da malha como a média entre o ponto precedente e o que segue. Um outro modelo similar que pode ser destacado é o de D.O. Hodgins et alii [6] que foi aplicado ao Rio Fraser (USA); utilizando-se também aqui um esquema de diferenças finitas centradas explícito; uma característica interessante deste modelo é a introdução do número de Froude interfacial na expressão das tensões de cisalhamento interfaciais, o qual atua como um fator de amplificação, crescendo quando a espessura das camadas decrece.

O método dos elementos finitos tem sido aplicado com bastante frequência no estudo de fluxos estratificados nos últimos anos. Entre os diferentes modelos apresentados pode-se mencionar o trabalho de H.P. Wang [7]; este modelo, que pode ser usado para um número arbitrário de camadas, é uma extensão dos modelos bidimensionais que resultam de integrar verticalmente as equações tridimensionais de movimento e continuidade em meios homogêneos e que são aplicadas em sistemas de águas rasas; neste modelo pode-se destacar; a) a comparação feita entre resultados obtidos usando a matriz de massa consistente e discreta; b) a análise para eliminar instabilidades numéricas provocadas pelos termos não lineares usando um processo de "suavização" (smoothing); c) a utilização de um esquema de adequação dos níveis das diferentes camadas aos câmbios da topografia do fundo; para a integração no tempo utiliza-se um esquema explícito e são usa

dos elementos triangulares lineares. Outro modelo que convém mencionar é o de M. Kawahara et alii [8]; este modelo tem como característica fundamental o tipo de esquema de integração no tempo, que é explícito e se faz em dois passos combinando a matriz de massa consistente e discreta; a justificativa deste esquema pode achar-se na ref. [9].

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático bidimensional transiente para simular um fluxo estratificado em sistemas de águas rasas (onde as dimensões horizontais são significativamente maiores que a vertical, e assumindo-se que as amplitudes das ondas são muito pequenas em relação à espessura das camadas), o qual é resolvido numericamente usando o método dos elementos finitos para discretizar no espaço e diferenças finitas para discretizar no tempo. As camadas são acopladas por condições cinemáticas e dinâmicas. Embora as expressões aqui deduzidas estejam particularizadas para o caso de duas camadas, sua extensão a um número arbitrário de estratos pode facilmente ser realizada.

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA

O sistema de equações diferenciais que governa o fluxo tridimensional transiente é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{x_j x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

onde as $v_i(x_i, t)$ são as componentes da velocidade do fluido, $\rho(x_i, t)$ é a massa específica, p é a pressão e as $\tau_{x_i x_j}$ são as tensões tangenciais que incluem os efeitos da viscosidade molecular e a transferência turbulenta de quantidade de movimento.

A seguir se fazem as seguintes considerações (ver Figura 1):

a) Assume-se uma distribuição hidrostática de pressões na direção vertical, o que implica que a equação de 'momentum' na direção x_3 fica

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g = 0 \quad (3)$$

b) A massa específica e as componentes da velocidade, quando integradas verticalmente em cada camada, dão a densidade e componentes da velocidade "média" que são constantes em toda a espessura da camada. Assim sendo, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\rho_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{H_1} \int_{H_2}^{H_1+H_2} \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_3$$

$$\rho_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{H_2} \int_0^{H_2} \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_3$$

(4)

$$v_i^1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{H_1} \int_{H_2}^{H_1+H_2} v_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3$$

$$v_i^2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{H_2} \int_0^{H_2} v_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \quad (i = 1, 2)$$

onde o superíndice 1 e 2 indicam a camada superior e inferior, respectivamente.

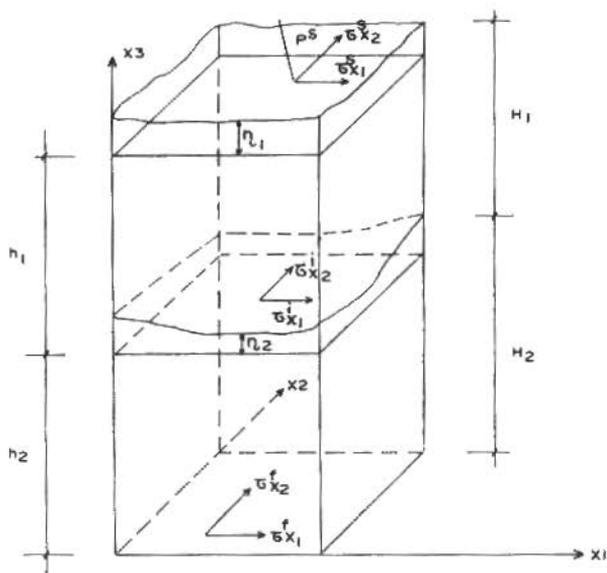


Figura 1. Porção do domínio com escoamento estratificado em duas camadas

c) Condições de contorno cinemáticas

- Na superfície:

$$|v_3|_{x_3=H_1+H_2} = \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} \right|_{x_3=H_1+H_2} \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

- Na interface:

$$|v_3|_{x_3=H_2} = \left| \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + v_i \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} + v_e \right|_{x_3=H_2} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

- No fundo:

$$|v_3|_{x_3=0} = 0 \quad (7)$$

onde v_e , na interface é a diferença entre v_3 e a velocidade de movimento da interface.

d) Condições de contorno dinâmicas

- Na superfície:

$$\tau_{x_i}^s = |\tau_{x_3 x_i}|_{x_3=H_1+H_2} = \rho_a \gamma^2 V_V^2 \cos(x_V, x_i) \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

- Na interface:

$$\tau_{x_i}^i = |\tau_{x_3 x_i}|_{x_3=H_2} = C^i F_R^i \rho_1 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (v_{i_1} - v_{i_2}) \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

- No fundo:

$$\tau_{x_i}^f = |\tau_{x_3 x_i}|_{x_3=0} = \frac{g}{C^2} \rho_2 |\vec{v}_2| v_{i_2} \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

onde ρ_a é a massa específica do ar, V_V a velocidade do vento, (x_V, x_i) o ângulo que forma o vento com o sentido positivo do eixo

no x_i , C^i um coeficiente adimensional, g a aceleração da gravidade, C o coeficiente de Chezy e F_F^i o número de Froude interfacial, que é igual a

$$F_F^i = \{ \rho_2 (H_1 + H_2) [g (\rho_2 - \rho_1) H_1 H_2]^{-1} \}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

sendo que os sub-índices 1 e 2 referem-se à camada superior e inferior, respectivamente.

- e) Equilíbrio dinâmico entre as tensões de superfície e as interiores. Tomando um elemento infinitesimal na superfície e projetando segundo os eixos de referência tem-se:

$$\tau_{x_i}^s + p^s \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} = \left[-(\tau_{x_i x_i} - p) \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} - \tau_{x_j x_i} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_j} - \tau_{x_3 x_i} \right]_{x_3 = H_1 + H_2} \quad (12)$$

$$-p^s + \tau_{x_j}^s \frac{\partial \eta_1}{\partial x_j} = \left[-\tau_{x_j x_3} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_j} + (\tau_{x_3 x_3} - p) \right]_{x_3 = H_1 + H_2} \quad (i=1,2) \quad (13)$$

onde o super-índice s indica valores tomados na superfície.

- f) O excesso de pressão em relação à pressão hidrostática correspondentes a $h_1 + h_2$ e h_2 podem expressar-se da seguinte forma (sem levar em conta os termos de segunda ordem em η_1 e η_2):

$$F_{p_1} = p^s H_1 + \rho_1 g h_1 (\eta_1 - \eta_2) \quad (14)$$

$$F_{p_2} = \rho_1 g h_1 \eta_2 + \rho_2 g h_2 \eta_2$$

Assume-se no que segue que $p^s = p_{atm} = 0$.

- g) As componentes das velocidades instantâneas são expressas em função de um valor médio e uma flutuação, e se assume que a massa específica fica constante em cada camada.
- h) Integrando as equações (1) e (2) entre H_2 e $H_1 + H_2$ e entre zero e H_2 , levando em conta as considerações anteriores e aplicando a regra de Leibnitz, obtém-se o seguinte sistema de equações que governa o problema:

- Camada superior:

$$\begin{aligned}
 & v_{j_1, t} + v_{i_1} v_{j_1, x_i} + g \eta_{1, x_i} + g \beta (h_1 - \eta_1)_{, x_j} + C^i F_R^i \cdot \\
 & \cdot H_1^{-1} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (v_{j_1} - v_{j_2}) + g h_1 (2\rho_1)^{-1} (1-\beta) \rho_{1, x_j} + \epsilon_{ij} v_{i_1} - \\
 & - \rho_a \gamma^2 \cdot (\rho_1 H_1)^{-1} v_v^2 \cos(x_v, x_j) - (H_1)^{-1} \left[v_{x_i x_j}^1 (v_{j_1} H_1)_{, x_i} + \right. \\
 & \left. + v_{x_j x_i}^1 (v_{i_1} H_1)_{, x_j} \right]_{, x_i} = 0 \quad \begin{matrix} (i=1,2) & (j=1) \\ (i=1,2) & (j=2) \end{matrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$(\eta_1 - \eta_2)_{, t} + [(h_1 + \eta_1 - \eta_2) v_{i_1}]_{, x_i} - (\rho_1)^{-1} [\rho v_e]_{x_3=H_2} = 0 \quad (16)$$

- Camada inferior:

$$\begin{aligned}
 & v_{j_2, t} + v_{i_2} v_{j_2, x_i} + \delta g \eta_{1, x_j} + (1-\delta) g \eta_{2, x_j} + \\
 & + g \lambda \left[\delta h_1 + h_2 - \delta \eta_1 - (1-\delta) \eta_2 \right]_{, x_j} + \epsilon_{ij} f v_{i_2} + \\
 & + (C^2 H_2)^{-1} g |\vec{v}_2| v_{j_2} + \delta (H_2)^{-1} C^i F_R^i |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (v_{j_2} - v_{j_1}) + \\
 & + \delta g h_2 (2\rho_1) (1-\lambda) \rho_{2, x_j} - (H_2)^{-1} \left[v_{x_i x_j}^2 (v_{j_2} H_2)_{, x_i} + \right. \\
 & \left. + v_{x_j x_i}^2 (v_{i_2} H_2)_{, x_j} \right]_{, x_i} = 0 \quad \begin{matrix} (i=1,2) & (j=1) \\ (i=1,2) & (j=2) \end{matrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{2, t} + (h_2 + \eta_2) v_{i_2, x_i} + (\delta \rho_1)^{-1} \rho v_e_{x_3=H_2} = 0 \quad (i=1,2) \quad (18)$$

onde

$$\frac{\partial ()}{\partial t} = ()_{, t} ; \frac{\partial ()}{\partial x_i} = ()_{, x_i} ; \beta = \frac{\eta_1 - \eta_2}{H_1} ; \lambda = \frac{\eta_2}{H_2} ; \delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

sendo que os índices 1 e 2 correspondem à camada superior e inferior respectivamente. Os termos de viscosidade surgem ao se fazer a aproximação de Boussinesq para as integrais que contêm as tensões tangenciais e as de Reynolds (função das flutuações das componentes da velocidade); os coeficientes $v_{x_i x_j}^k$ são os componentes da viscosida-

de turbulenta e são funções do campo de velocidades (convém esclarecer que os valores destes coeficientes não são conhecidos com precisão e inclusive para casos práticos sua influência é pequena em relação à fricção interfacial e no fundo. Contudo, embora tenha sido negligenciado neste modelo, pode ser útil para criar um mecanismo de eliminação de instabilidade e oscilações numéricas); f é o coeficiente de Coriolis, e ϵ_{ij} é um tensor tal que $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. As incógnitas do problema são as elevações $\eta_j(x_i, t)$ sobre os planos de referência $h_j(x_i, t)$ (com $i, j=1, 2$) e as componentes das velocidades integradas verticalmente $v_j(x_i, t)$ de cada camada (com $i, j=1, 2$). Nos contornos "sólidos" (linhas da costa) são prescritas as velocidades e nos contornos "abertos" (limite de domínio que não é "sólido") prescreve-se as elevações η_1 e η_2 .

Uma exposição mais detalhada da formulação deste parágrafo é apresentada na ref. [11].

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO DO TEMPO

Aplicando um princípio de resíduos ponderados (neste caso usa-se o método de Galerkin) ao sistema de seis equações representado em (15) a (18), e expandindo as incógnitas em cada elemento através de funções de interpolação, obtém-se uma expressão matricial do tipo

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{A}(\underline{X}) \underline{X} + \underline{P} = 0 \quad (19)$$

onde $\dot{\underline{X}}$ é a derivada em relação ao tempo do vetor de incógnitas \underline{X} .

A integração no tempo é efetuada utilizando o método das diferenças finitas empregando a regra trapezoidal, obtendo-se

$$\left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}(x_{t+\Delta t}) \right] \underline{X}_{t+\Delta t} = \left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{A}(x_t) \right] \underline{X}_t - (\underline{P}_t + \underline{P}_{t+\Delta t}) \quad (20)$$

onde Δt é o intervalo de tempo. Esta expressão deve ser montada para todos os elementos do sistema e nela devem aplicar-se as correspondentes condições de contorno.

A matriz \underline{A} é decomposta na soma de uma matriz que contém os termos não lineares \underline{A}_{NL} , e em outra que contém os termos lineares

\underline{A}_L , empregando-se a seguinte fórmula de recorrência para resolver o problema:

- Primeiro passo (em $t+\Delta t$):

$$\underline{K}_1 \underline{X}_{t+\Delta t} = \underline{K}_1 \underline{X}_t - (\underline{P}_t + \underline{P}_{t+\Delta t}) \quad (21)$$

- Segundo passo (em $t+2t$):

$$\begin{aligned} \underline{K}_1 \underline{X}_{t+2\Delta t} = \underline{K}_2 \underline{X}_{t+\Delta t} - (\underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{P}_{t+2\Delta t}) - \\ - \phi \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t})\underline{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (22)$$

onde

$$\underline{K}_1 = \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}_L \quad \text{e} \quad \underline{K}_2 = \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{A}_L$$

Podemos observar-se que no primeiro passo, expressão (21), não foram levados em conta os termos não lineares no membro esquerdo [$\underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t}) \cdot (\underline{X}_{t+\Delta t})$] e no membro direito ($\underline{A}_{NL}(\underline{X}_t)\underline{X}_t$); já no segundo passo, expressão (22), não foram considerados os termos não lineares no membro esquerdo ($\underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+2\Delta t})\underline{X}_{t+2\Delta t}$), sendo que no membro direito aparece multiplicado por um fator ϕ . Se $\phi=0$, o problema é linearizado por eliminação dos termos não lineares; entretanto se $\phi=4$ significa que, à maneira do método dos passos fracionários [10], a soma das equações correspondentes a cada passo daria um sistema balanceado em $t+\Delta t$, fornecendo resultados em $t+2\Delta t$.

Podemos observar-se que foi feita a seguinte hipótese (se $\phi=4$):

$$\begin{aligned} 4 \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t})\underline{X}_{t+\Delta t} = \underline{A}_{NL}(\underline{X}_t)\underline{X}_t + 2 \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t})\underline{X}_{t+\Delta t} + \\ + \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+2\Delta t})\underline{X}_{t+2\Delta t} \end{aligned} \quad (23)$$

A matriz \underline{K}_1 é estacionária e deve ser calculada e triangulada uma só vez em todo o processo; para cada elemento, \underline{K}_1 vem dada por

de turbulenta e são funções do campo de velocidades (convém esclarecer que os valores destes coeficientes não são conhecidos com precisão e inclusive para casos práticos sua influência é pequena em relação à fricção interfacial e no fundo. Contudo, embora tenha sido negligenciado neste modelo, pode ser útil para criar um mecanismo de eliminação de instabilidade e oscilações numéricas); f é o coeficiente de Coriolis, e ϵ_{ij} é um tensor tal que $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. As incógnitas do problema são as elevações $\eta_j(x_i, t)$ sobre os planos de referência $h_j(x_i, t)$ (com $i, j=1, 2$) e as componentes das velocidades integradas verticalmente $v_j(x_i, t)$ de cada camada (com $i, j=1, 2$). Nos contornos "sólidos" (linhas da costa) são prescritas as velocidades e nos contornos "abertos" (limite de domínio que não é "sólido") prescreve-se as elevações η_1 e η_2 .

Uma exposição mais detalhada da formulação deste parágrafo é apresentada na ref. [11].

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO DO TEMPO

Aplicando um princípio de resíduos ponderados (neste caso usa-se o método de Galerkin) ao sistema de seis equações representado em (15) a (18), e expandindo as incógnitas em cada elemento através de funções de interpolação, obtém-se uma expressão matricial do tipo

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{A}(\underline{X}) \underline{X} + \underline{P} = 0 \quad (19)$$

onde $\dot{\underline{X}}$ é a derivada em relação ao tempo do vetor de incógnitas \underline{X} .

A integração no tempo é efetuada utilizando o método das diferenças finitas empregando a regra trapezoidal, obtendo-se

$$\left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}(\underline{x}_{t+\Delta t}) \right] \underline{X}_{t+\Delta t} = \left[\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{A}(\underline{x}_t) \right] \underline{X}_t - (\underline{P}_t + \underline{P}_{t+\Delta t}) \quad (20)$$

onde Δt é o intervalo de tempo. Esta expressão deve ser montada para todos os elementos do sistema e nela devem aplicar-se as correspondentes condições de contorno.

A matriz \underline{A} é decomposta na soma de uma matriz que contém os termos não lineares \underline{A}_{NL} , e em outra que contém os termos lineares

\underline{A}_L , empregando-se a seguinte fórmula de recorrência para resolver o problema:

- Primeiro passo (em $t+\Delta t$):

$$\underline{K}_1 \underline{X}_{t+\Delta t} = \underline{K}_1 \underline{X}_t - (\underline{P}_t + \underline{P}_{t+\Delta t}) \quad (21)$$

- Segundo passo (em $t+2\Delta t$):

$$\begin{aligned} \underline{K}_1 \underline{X}_{t+2\Delta t} = \underline{K}_2 \underline{X}_{t+\Delta t} - (\underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{P}_{t+2\Delta t}) - \\ - \phi \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t}) \underline{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (22)$$

onde

$$\underline{K}_1 = \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}_L \quad \text{e} \quad \underline{K}_2 = \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{A}_L$$

Pode observar-se que no primeiro passo, expressão (21), não foram levados em conta os termos não lineares no membro esquerdo [$\underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t}) \cdot (\underline{X}_{t+\Delta t})$] e no membro direito ($\underline{A}_{NL}(\underline{X}_t) \underline{X}_t$); já no segundo passo, expressão (22), não foram considerados os termos não lineares no membro esquerdo ($\underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+2\Delta t}) \underline{X}_{t+2\Delta t}$), sendo que no membro direito aparece multiplicado por um fator ϕ . Se $\phi=0$, o problema é linearizado por eliminação dos termos não lineares; entretanto se $\phi=4$ significa que, à maneira do método dos passos fracionários [10], a soma das equações correspondentes a cada passo daria um sistema balanceado em $t+\Delta t$, fornecendo resultados em $t+2\Delta t$.

Pode observar-se que foi feita a seguinte hipótese (se $\phi=4$):

$$\begin{aligned} 4 \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t}) \underline{X}_{t+\Delta t} = \underline{A}_{NL}(\underline{X}_t) \underline{X}_t + 2 \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+\Delta t}) \underline{X}_{t+\Delta t} + \\ + \underline{A}_{NL}(\underline{X}_{t+2\Delta t}) \underline{X}_{t+2\Delta t} \end{aligned} \quad (23)$$

A matriz \underline{K}_1 é estacionária e deve ser calculada e triangulada uma só vez em todo o processo; para cada elemento, \underline{K}_1 vem dada por

$$\begin{bmatrix}
 \frac{2}{\Delta t} \underline{M}' & -f \underline{M}' & \underline{G}_{x_1} & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
 f \underline{M}' & \frac{2}{\Delta t} \underline{M}' & \underline{G}_{x_2} & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\
 \underline{N}_{x_1}^1 & \underline{N}_{x_2}^2 & \frac{2}{\Delta t} \underline{M}' & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & -\frac{2}{\Delta t} \underline{M}' \\
 \hline
 \underline{0} & \underline{0} & \delta \underline{G}_{x_1} & \vdots & \frac{2}{\Delta t} \underline{M}' & -f \underline{M}' & (1-\delta) \underline{G}_{x_1} \\
 \underline{0} & \underline{0} & \delta \underline{G}_x & \vdots & f \underline{M}' & \frac{2}{\Delta t} \underline{M}' & (1-\delta) \underline{G}_{x_2} \\
 \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \vdots & \underline{N}_{x_1}^1 & \underline{N}_{x_2}^2 & \frac{2}{\Delta t} \underline{M}'
 \end{bmatrix} \quad (24)$$

sendo:

$$\underline{M}' = \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA ; \quad \underline{G}_{x_i} = g \int_A \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} dA ; \quad \underline{N}_{x_i}^j = - \int_A (\underline{\phi}^T h_j^n) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} \underline{\phi}^T dA$$

(i=1,2) (refere-se ao eixo) (j=1,2) (refere-se à camada)

onde $\underline{\phi}$ são as funções de interpolação, T indica transposição, n é o número de nós do elemento e A o domínio do elemento.

No vetor de incógnitas \underline{X} estão incluídas as componentes das velocidades em cada camada, e a elevação η_1 e η_2 de cada camada em relação aos níveis médios h_1 e h_2 , respectivamente. No vetor de termos independentes \underline{P} tem-se

$$\underline{P}^T = \left\{ \underline{W}_{x_1}^n \quad \underline{W}_{x_2}^n \quad \underline{Q}_1^n \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{Q}_2^n \right\} \quad (25)$$

onde

$$\underline{W}_{x_i} = \frac{\rho_a \gamma^2}{\rho_1} V_V^2 \cos(x_V, x_i) \int_A \frac{\underline{\phi}}{(\underline{\phi}^T \underline{H}^n)} dA$$

sendo \underline{Q}_1 e \underline{Q}_2 os fluxos que entram e/ou saem de cada camada.

A matriz que contém os termos não lineares $\underline{A}_{NL}(x)$ vem dada por

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 + \underline{F}_1^i & \underline{0} & -\underline{B}_{x_1} + \underline{D}_{x_1} & -\underline{F}_1^i & \underline{0} & -\underline{D}_{x_1} \\ \underline{0} & \underline{A}_1 + \underline{F}_1^i & -\underline{B}_{x_2} + \underline{D}_{x_2} & \underline{0} & -\underline{F}_1^i & -\underline{D}_{x_2} \\ -\underline{L}_{x_1}^1 + \underline{L}_{x_1}^2 & -\underline{L}_{x_2}^1 + \underline{L}_{x_2}^2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\delta \underline{F}_2^i & \underline{0} & -\delta \underline{E}_{x_1} & \underline{A}_2 + \underline{F}_f + \delta \underline{F}_2^i & \underline{0} & -(1-\delta) \underline{E}_{x_1} + \underline{S}_{x_1} \\ \underline{0} & -\delta \underline{F}_2^i & -\delta \underline{E}_{x_2} & \underline{0} & \underline{A}_2 + \underline{F}_f + \delta \underline{F}_2^i & -(1-\delta) \underline{E}_{x_2} + \underline{S}_{x_2} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{L}_{x_1}^2 & -\underline{L}_{x_2}^2 & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{A}_j &= \int_A (\underline{\phi}^T \underline{v}_j^n) \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_k} dA ; \\ \underline{B}_{x_k} &= g \int_A \frac{[\underline{\phi}^T (\underline{n}_1^n - \underline{n}_2^n)]}{(\underline{\phi}^T \underline{H}_1^n)} \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_k} dA ; \\ \underline{D}_{x_k} &= g \int_A \left(\frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_k} \underline{h}_1^n \right) \frac{\underline{\phi} \underline{\phi}^T}{(\underline{\phi}^T \underline{H}_1^n)} dA ; \\ \underline{L}_{x_k}^j &= \int_A (\underline{\phi}^T \underline{n}_j^n) \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_k} \underline{\phi}^T dA ; \\ & \hspace{15em} (j=1,2) \quad (k=1,2) \\ \underline{E}_{x_k} &= g \int_A \frac{(\underline{\phi}^T \underline{n}_2^n)}{(\underline{\phi}^T \underline{H}_2^n)} \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_k} dA ; \\ \underline{S}_{x_k} &= g \int_A \left(\delta \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_k} \underline{h}_1^n + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_k} \underline{h}_2^n \right) \frac{\underline{\phi} \underline{\phi}^T}{(\underline{\phi}^T \underline{H}_2^n)} dA ; \\ \underline{F}_{-j}^i &= \int_A \underline{C}_i \underline{F}_r^i [\underline{\phi}^T (\underline{v}_1^n - \underline{v}_2^n)] \frac{\underline{\phi} \underline{\phi}^T}{\underline{\phi}^T \underline{H}_j^n} dA ; \\ \underline{F}^f &= \frac{g}{C^2} \int_A (\underline{\phi}^T \underline{v}_2^n) \frac{\underline{\phi} \underline{\phi}^T}{(\underline{\phi}^T \underline{H}_2^n)} dA \end{aligned}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 1

Seja o canal da Figura 2 onde estão indicados os dados utilizados. A solução analítica para as ondas estacionárias, sem levar em conta a fricção e a convecção, é a seguinte [2]:

$$\eta_1 = \left\{ A \cos k_1 x + B \cos k_2 x \right\} \text{sen } \omega t \quad (27)$$

$$\eta_2 = \left\{ A \left(1 - \frac{gh_1}{\omega^2} k_1^2 \right) \cos k_1 x + B \left(1 - \frac{gh_1}{\omega^2} k_2^2 \right) \cos k_2 x \right\} \text{sen } \omega t \quad (28)$$

onde

$$A = \frac{a \left(1 - \frac{gh_1}{\omega^2} k_2^2 \right)}{(k_1^2 - k_2^2) \frac{gh_2}{\omega^2} \cos k_2 L}$$

$$B = \frac{a \left(\frac{gh_1}{\omega^2} k_1^2 - 1 \right)}{(k_1^2 - k_2^2) \frac{gh_1}{\omega^2} \cos k_2 L}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{(h_1 + h_2)}{g h_1 h_2} \omega^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \omega^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{(h_1 + h_2)}{g h_1 h_2} - \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{1}{g^2 h_1 h_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

sendo L o comprimento do canal.

Na Figura 3 são indicados os valores de η_1 e η_2 no tempo $t = T = 500\text{seg}$ e na Tabela 1 se compara os resultados analíticos e numéricos em $t = 2T = 1000\text{seg}$.

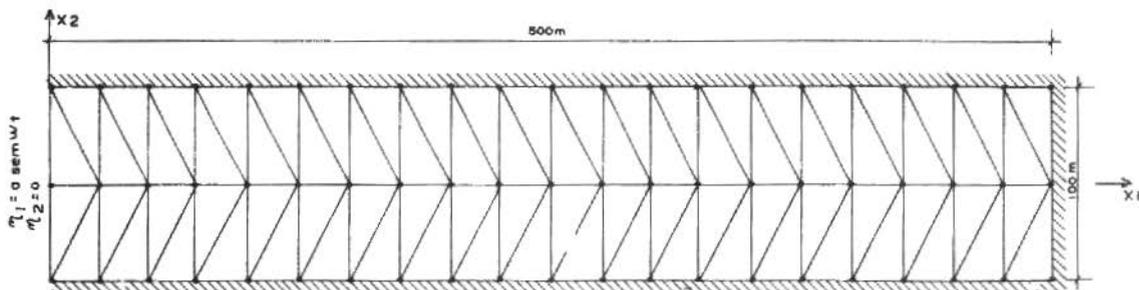


FIG. 2 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS E DIMENSÕES CARACTERÍSTICAS DO CANAL ABERTO NUM EXTREMO E FECHADO NO OUTRO.

$\rho_1 = 1 \text{ g/m}^3$ $\rho_2 = 1.005 \text{ g/m}^3$ $h_1 = h_2 = 10 \text{ m}$
 $a = 0.2 \text{ m}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 500 \text{ seg}$

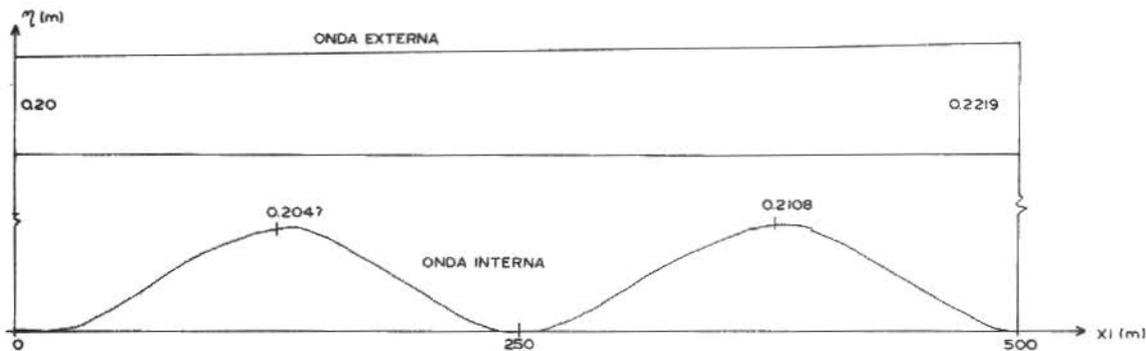


FIG. 3 - SUPERFÍCIE EXTERNA E INTERFACE PARA $T = 500 \text{ s}$

Tabela 1

X	SOLUÇÃO ANALÍTICA		SOLUÇÃO NUMÉRICA		
	η_1	η_2	η_2 nós laterais	η_2 nós laterais	η_2 nós centrais
0	0,20000	0,20000	0,20000	0,00000	0,00000
25	0,20208	0,01189	0,20208	0,01389	-0,00066
50	0,20397	0,05845	0,20399	0,05937	0,05457
75	0,20572	0,12189	0,20569	0,13348	0,11289
100	0,20739	0,17781	0,20738	0,18052	0,17341
125	0,20902	0,20472	0,20902	0,21163	0,20940
150	0,21964	0,19243	0,21064	0,19098	0,19283
175	0,21224	0,14607	0,21226	0,13434	0,16278
200	0,21378	0,08402	0,21378	0,08945	0,08681
225	0,21518	0,03078	0,21520	0,02216	0,02428
250	0,21640	0,00740	0,21643	-0,00147	0,01459
275	0,21742	0,02323	0,21745	0,02324	0,01940
300	0,21824	0,07229	0,21823	0,07128	0,06761
325	0,21892	0,13561	0,21891	0,13816	0,13603
350	0,21951	0,18862	0,21951	0,19685	0,18662
375	0,22007	0,21076	0,22002	0,22215	0,20848
400	0,22061	0,19351	0,22056	0,20848	0,18763
425	0,22113	0,14369	0,22115	0,14068	0,13766
450	0,22156	0,08085	0,22157	0,06963	0,08849
475	0,22186	0,02957	0,22184	0,02565	0,03199
500	0,22196	0,00991	0,22204	-0,00672	0,01547

$\Delta t = 10$ seg.; solução numérica calculada em $2T$

$T = 500$ seg.

Exemplo 2

Seja um fluxo estratificado unidimensional estacionário com os dados indicados na Figura 4. Assumindo que as variações da profundidade total H_1+H_2 são pequenas em relação às de H_2 (devido a que o número de Froude baseado em H_1+H_2 e a velocidade média do fluxo é muito menor à unidade) Schiff e Schönfeld [3] derivaram a seguinte equação para a interface:

$$\frac{dH_2}{dx} = - \frac{dH_1}{dx} = \frac{c^f (1-\zeta)^3 \frac{|q_2| q_2}{q_1^2} - c^i \left[\left[\zeta - \frac{q_2}{q_1} (1-\zeta) \right] \left[\zeta - \frac{q_2}{q_1} (1-\zeta) \right] \right]}{\left\{ - \frac{1}{F^2} (1-\zeta)^3 \zeta^3 + \zeta^3 + (1-\zeta)^3 \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 \right\}} \quad (29)$$

onde

$$c^f = g/C^2 \quad (C: \text{coef. de Chezy});$$

$$\zeta = H_2 / (H_1+H_2);$$

$$F = \rho q_1^2 / [(H_1+H_2)^3 g \Delta \rho]$$

e sendo q_1 e q_2 os fluxos por unidade de largura.

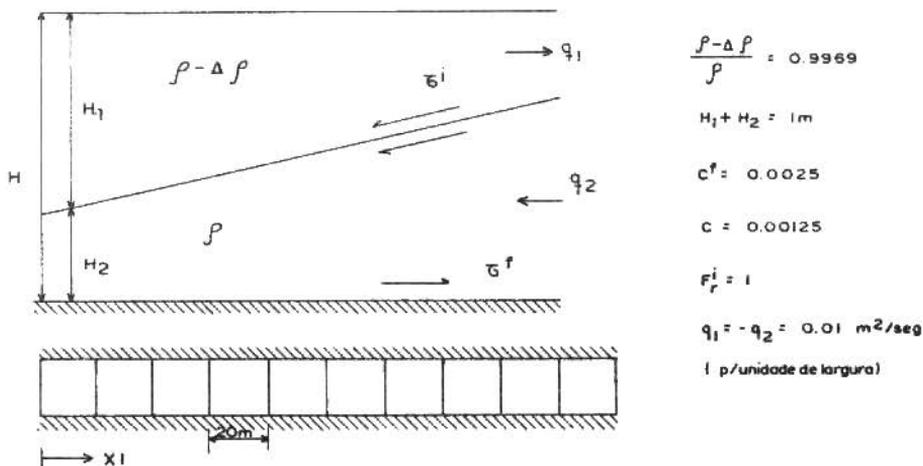


Figura 4. Fluxo estratificado estacionário e malha de elementos finitos para o modelo numérico

O modelo transiente é aplicado com $\Delta t = 4$ seg. até atingir o estado estacionário. Na Tabela 2 são comparadas as soluções "analíticas" (resolvendo (21) com o método de Runge Kutta de quarta ordem) e numérica para η_2 ao atingir o fluxo do regime estacionário. Neste caso adotou-se intervalos de tempo que satisfazem a condição de estabilidade de Courant-Friedricks-Levy já que Δt maiores apresentavam instabilidade numérica; por outro lado, os fluxos q_1 e q_2 foram introduzidos de forma gradual até atingir o valor final pelas mesmas razões.

Tabela 2. Comparação de resultados analíticos e numéricos

X (m)	η_1 (m) Elementos Finitos	η_2 Elementos Finitos	η_2 (29) Usando Runge Kutta
0	$4,4 \times 10^{-5}$	$-3,283 \times 10^{-2}$	$-3,263 \times 10^{-2}$
20	$3,6 \times 10^{-5}$	$-2,640 \times 10^{-2}$	$-2,683 \times 10^{-2}$
40	$2,7 \times 10^{-5}$	$-1,941 \times 10^{-2}$	$-1,935 \times 10^{-2}$
60	$1,8 \times 10^{-5}$	$-1,289 \times 10^{-2}$	$-1,284 \times 10^{-2}$
80	$0,9 \times 10^{-5}$	$-0,627 \times 10^{-2}$	$-0,639 \times 10^{-2}$
100	$0,0 \times 10^{-5}$	$0,025 \times 10^{-2}$	$0,000 \times 10^{-2}$
120	$-0,8 \times 10^{-5}$	$0,667 \times 10^{-2}$	$0,639 \times 10^{-2}$
140	$-1,8 \times 10^{-5}$	$1,314 \times 10^{-2}$	$1,284 \times 10^{-2}$
160	$-2,7 \times 10^{-5}$	$1,941 \times 10^{-2}$	$1,935 \times 10^{-2}$
180	$-3,6 \times 10^{-5}$	$2,588 \times 10^{-2}$	$2,683 \times 10^{-2}$
200	$-4,5 \times 10^{-5}$	$3,200 \times 10^{-2}$	$3,263 \times 10^{-2}$

CONCLUSÕES

No presente trabalho foi deduzido o sistema de equações que governa o fluxo estratificado quando existem duas camadas; sua extensão para o caso da existência de maior número de camadas é imediato. Como em geral o tempo de integração para a simulação numérica de um problema real é bastante grande, convém formular um esquema implícito onde seja possível tomar intervalos de tempo grandes sem perder significativamente a precisão e sem que o acoplamento resultante de tal esquema implique num consumo excessivo de tempo de processamento na montagem e solução do sistema de equações.

O modelo matemático demonstra, para os casos simples apresentados, sua capacidade em simular um escoamento estratificado.

Existem ainda algumas dificuldades que devem ser analisadas. Assim, por exemplo, resultaria mais próximo do real considerar uma variação vertical das velocidades no lugar de uma velocidade constante em toda a camada; também é necessário estudar com mais profundidade a influência de viscosidade turbulenta e da mistura entre as camadas nas condições de contorno e nas tensões interfaciais.

Finalmente, a comparação dos resultados do modelo com medidas num protótipo torna-se fundamental antes de extrapolar aos efeitos de obter uma previsão do fluxo num sistema qualquer.

REFERÊNCIAS

- [1] Vass, R.J. – Characteristics of the interfacial region of a two layer flow system. In: International Symposium on River Mechanics. Proceeding IAHR, Bangkok, Thailand, 1973. p.441-451.
- [2] Connor, J.J. et alii. – Analytical models for one and two-layer systems in rectangular basins. In: Mathematical Models for the Massachussets Bay. Washington, Ralph M. Pearson Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics of M.I.T., 1973. v.2.
- [3] Schiff, J.B. & Schönfeld, J.C. – Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water. In: International Hydraulic Convection. Proceeding. Minnessota 1953. IAHR/J. of the Hyd. Div., ASCE, New York, 1953. p.321-333.
- [4] Fisher, J.; Dimars, J.D. & Ippen, A.T. – Mathematical Simulation of tidal time-averages of salinity and velocity profiles in estuaries. In: Rep nº 151. Washington, Ralph M. Pearson Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics of MIT, 1972. 193p.
- [5] Dazzi, R. & Tomassino, M. – Mathematical model of salinity intrusion in the Delta of the Po River. In: International Conference on Coastal Engineering, 14. Copenhagen, 1974. Cap. 134, p.2303-2321.
- [6] Hodgins, D.O.; Osborn, T.R. & Quick, M.C. – Numerical model of stratified estuary flow. Journal of the Watway, Port, Coastal and Ocean Division, 95 (2) : 621-631, Mar.1969. ASCE, New York.

- [7] Wang, H.P. - Multi-leveled finite element hydrodynamics model of Block Island Sound. In: Finite Element in Water Resources. Pentech Press, 1975. p. 4.69-4.93.
- [8] Kawahara, M.; Kobayashi, M. & Makata, K. - A three dimensional multiple level finite element, considering variable water density. Finite Element in Fluids, 4 : p.129-156, 1982. J. Wiley & Sons.
- [9] Kawahara, M. et alii. - Selective lumping finite element method for shallow water flow. Int. Journal of Num. Meth. in Fluid, 4 (1) : 89-112, 1982.
- [10] Yanenko, N. - The method of fractional steps. Springer Verlag (1971).
- [11] Awruch, A.M. - Modelos numéricos em hidrodinâmica e fenômenos de transporte usando elementos finitos. Tese de Doutorado. COPPE/UFRGS, Maio 1983.

VIABILIDADE DA ANÁLISE TÉRMICA EM ESCALA DO PRIMEIRO SATÉLITE BRASILEIRO

Fernando Manuel Ramos
Instituto de Pesquisas Espaciais

Pedro Carajilescov – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO

Este trabalho analisa a viabilidade do emprego de modelos em escala reduzida na realização de testes de simulação espacial visando obter a distribuição de temperaturas do protótipo do primeiro satélite brasileiro. As condições gerais para o modelamento térmico em escala são estabelecidas e as técnicas de preservação das temperaturas e preservação dos materiais são consideradas. Modelos em escala do satélite são especificados e seus comportamentos térmicos são calculados e comparados com o comportamento do protótipo em escala real.

ABSTRACT

This paper analyses the feasibility of testing reduced-scale thermal models of the first brazilian type spacecraft in simulated space environment in order to obtain the prototype temperature distribution. General conditions for thermal scaling are established and the temperature preservation and materials preservation techniques are considered. Reduced-scale thermal models are specified and their temperature distributions are calculated and compared to the prototype.

INTRODUÇÃO

Um dos aspectos mais delicados no desenvolvimento de um satélite é assegurar que, quando em órbita, todos os equipamentos do sistema operarão dentro dos seus limites de temperatura especificados. Esta tarefa exige uma cuidadosa especificação dos materiais, coberturas e dispositivos que regularão as trocas de calor no satélite durante sua vida útil, o que, por sua vez, demanda uma multiplicidade de atividades como a realização de testes térmicos sob vácuo ou a execução de simulações numéricas das condições de operação do sistema.

Atualmente, mesmo com o desenvolvimento de rotinas computacionais rápidas para o cálculo da distribuição de temperatura em satélites, verifica-se que é imprescindível a realização de ensaios experimentais em maquetes com o objetivo de aumentar a confiabilidade do projeto, especialmente quando os acoplamentos são difíceis de modelar analiticamente ou quando as propriedades dos materiais e das superfícies não são bem conhecidas.

O aumento do porte e da complexidade dos satélites tem exigido o emprego de instalações de teste cada vez maiores, com custos operacionais exponencialmente crescentes. Observou-se que o custo de um programa de testes térmicos pode representar até 7% do custo total de desenvolvimento de um satélite [1]. Por isto, desde a década de sessenta, propôs-se a utilização de modelos térmicos em escala reduzida no lugar de protótipos em escala real, possibilitando a realização de ensaios mais rápidos e menos onerosos, em instalações menores e mais baratas.

No começo do programa espacial americano, foram determinadas as condições gerais para o modelamento térmico em escala de satélites [2,3] e duas principais técnicas foram desenvolvidas. Na primeira técnica, chamada "técnica de preservação das temperaturas", o modelo em escala é concebido de modo a reproduzir ponto a ponto a distribuição de temperaturas do protótipo. Na segunda técnica, chamada "técnica de preservação dos materiais", o modelo e o protótipo são construídos com os mesmos materiais. Nesta técnica, as temperaturas em pontos homólogos do modelo e protótipo são diferentes mas estão

relacionadas por uma razão constante e conhecida. Os problemas e os erros associados a ambas as técnicas foram analisados por alguns autores [4,5].

Após 1965, foram realizadas investigações experimentais para determinar a viabilidade da utilização de modelos em escala no âmbito de diversos projetos espaciais. Foram utilizados modelos em escala, por exemplo, no desenvolvimento da sonda Voyager [6] e no programa Apollo [7].

O presente trabalho analisa a viabilidade do desenvolvimento de modelos térmicos em escala reduzida para o primeiro satélite brasileiro a ser lançado em 1989. Quatro modelos foram especificados e os seus comportamentos térmicos foram calculados e comparados com a distribuição de temperaturas do protótipo.

CRITÉRIOS PARA MODELAMENTO EM ESCALA

Para um satélite dividido em "n" regiões isotérmicas, a equação de balanço térmico para o i-ésimo nó pode ser expressa por

$$\rho_i C_i V_i \frac{dT_i}{dt} + \sum_{j=1}^n R_{ij} (T_i - T_j) + \sum_{j=1}^n S_{ij} (T_i - T_j) - \phi_i - P_i = 0 \quad , \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

onde $(\rho_i C_i V_i)$ representa a capacidade térmica do nó i, R_{ij} e S_{ij} são, respectivamente, os coeficientes de acoplamento radiativo e condutivo entre os nós i e j, ϕ_i é a carga térmica externa absorvida pelo nó i devido a insolação direta, albedo e radiação terrestre, P_i é a potência térmica dissipada internamente no i-ésimo nó.

A solução do sistema de equações (1) permite determinar o comportamento térmico do satélite desde que as cargas térmicas dos diversos nós sejam conhecidas.

Considerando um modelo térmico deste satélite onde cada parâmetro e variável tenham sido escalonados por um correspondente fator de escala, γ , sua distribuição de temperaturas pode ser descrita pe

lo seguinte sistema de equações:

$$\frac{(\gamma_{\rho} \gamma_C \gamma_L^3 \gamma_T)}{\gamma_t} \rho_i C_i V_i \frac{dT_i}{dt} + (\gamma_R \gamma_T) \sum_{j=1}^n R_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) +$$

$$+ (\gamma_S \gamma_T) \sum_{j=1}^n S_{ij} (T_i - T_j) - \gamma_{\phi} \phi_i - \gamma_P P_i = 0 ,$$

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Para que modelo em escala e protótipo sejam termicamente semelhantes entre si, impõe-se:

$$\frac{\gamma_{\rho} \gamma_C \gamma_L^3 \gamma_T}{\gamma_t} = \gamma_R \gamma_T = \gamma_S \gamma_T = \gamma_{\phi} = \gamma_P . \quad (3)$$

Os coeficientes de acoplamento radiativo e condutivo e a carga térmica externa são usualmente expressos por

$$R_{ij} = \epsilon_i A_i \left\{ \sum_{k=1}^n F_{ik} [\delta_{jk} - (1 - \epsilon_j) F_{jk}]^{-1} \right\} \epsilon_j , \quad (4)$$

$$S_{ij} = \frac{K_{ij} A_{ij}}{L_{ij}} + h_{ij} A_{c,ij} , \quad (5)$$

$$\phi_i = \alpha_i A_i H_i . \quad (6)$$

Nestas expressões, A_i , A_{ij} , $A_{c,ij}$ representam a área do nó i , a área da seção reta entre os nós i e j e a área de contacto entre nós adjacentes, respectivamente, enquanto que ϵ_i e α_i são a emissividade e a absorvidade do nó i e K_{ij} e h_{ij} representam a condutividade térmica e a condutividade de contacto. Finalmente, H_i é o fluxo térmico incidente sobre o i -ésimo nó e F_{ik} é o fator de forma do nó i em relação ao nó k .

Considerando identidade geométrica e emissividades iguais entre regiões homólogas do modelo em escala e do protótipo, as equações (4), (5) e (6) indicam que

$$\gamma_R = \gamma_L^2, \quad \gamma_S = \gamma_k \gamma_L = \gamma_h \gamma_L^2, \quad \gamma_\phi = \gamma_a \gamma_L^2 \gamma_H. \quad (7)$$

Substituindo (7) em (3), segue:

$$\frac{\gamma_\rho \gamma_c \gamma_L^3 \gamma_T}{\gamma_t} = \gamma_L^2 \gamma_T^4 = \gamma_k \gamma_L \gamma_T = \gamma_h \gamma_L^2 \gamma_T = \gamma_a \gamma_L^2 \gamma_H = \gamma_p \quad (8)$$

Em geral, um grande número de elementos de um satélite é constituído por placas, cascas, perfis, onde a distribuição de temperaturas pode ser considerada bidimensional. Neste caso, a espessura de um elemento pode ser escalonada independentemente do fator de escala adotado para as demais dimensões. Este procedimento permite ajustar a condutância térmica entre dois nós, modificando a área de passagem de calor. Considerando γ_δ como o fator de escala das espessuras, segue

$$\frac{\gamma_\rho \gamma_c \gamma_\delta \gamma_L^2 \gamma_T}{\gamma_t} = \gamma_L^2 \gamma_T^4 = \gamma_k \gamma_\delta \gamma_T = \gamma_h \gamma_L^2 \gamma_T = \gamma_a \gamma_L^2 \gamma_H = \gamma_p \quad (9)$$

Esta expressão define as condições para o desenvolvimento de um modelo em escala a partir de um dado protótipo.

ESPECIFICAÇÃO DOS MODELOS EM ESCALA

Para aplicação da técnica de modelamento térmico em escala, considerou-se o protótipo da estrutura do primeiro satélite brasileiro, ilustrado na Figura 1. Dados gerais sobre este protótipo estão apresentados na Tabela 1.

Foram especificados quatro modelos de acordo com técnicas de escalonamento e para regimes de operação diferentes, conforme segue:

TÉCNICAS	PERMANENTE	TRANSITÓRIO
Preservação das Temperaturas	Modelo I	Modelo III
Preservação dos Materiais	Modelo II	Modelo IV

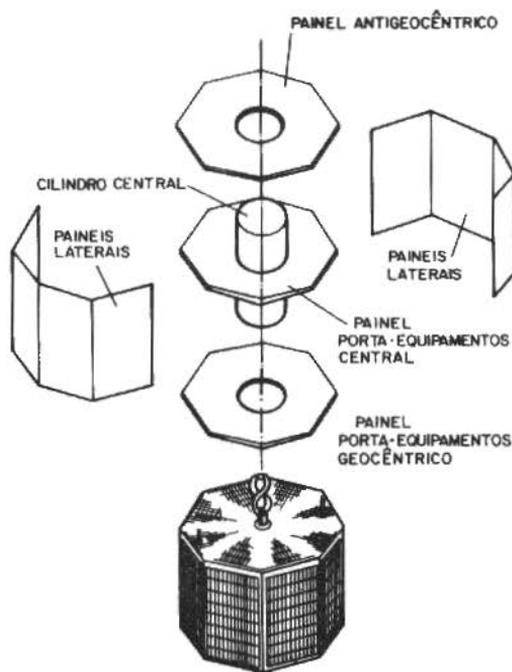


Fig. 1. Vista explodida do primeiro satélite brasileiro

TABELA 1. Especificações Gerais do Protótipo

COMPONENTES	MATERIAL	δ (mm)	K (W/mK)	$\rho C \times 10^5$ (J/m ³ K)
Cilindro central	Al 2024	2.00	121.0	25.5
Painéis porta-equipamentos	Painel sanduíche de alumínio	26.21	4.42	1.60
Painéis laterais e anti-geocêntrico	Painel sanduíche de alumínio	13.51	7.79	2.69

Os seguintes critérios foram adotados:

- a) $\gamma_L = 0.5$ - compromisso entre o tamanho dos modelos e a dimensão das instalações de teste do INPE;
- b) $\gamma_T = 1$ - para preservação das temperaturas;
- c) $\gamma_\rho = \gamma_C = \gamma_k = 1$ = para preservação dos materiais;
- d) o primeiro termo da eq. (9) não considerado para regime permanente;
- e) $\gamma_\alpha = 1$ - mesma cobertura externa para modelos e protótipo;
- f) $\gamma_h = 1$ - utilização da mesma graxa térmica nos contactos do protótipo e dos modelos.

A condutividade térmica dos painéis sanduíches foi calculada de acordo com modelo proposto por Daniels et alii [8].

Os dados selecionados para os modelos em escala e os fatores de escala mais importantes são apresentados nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

TABELA 2. Especificações dos modelos em escala

COMPONENTES	MODELO I		MODELO II		MODELO III		MODELO IV	
	MAT.	δ (mm)	MAT.	δ (mm)	MAT.	δ (mm)	MAT.	δ (mm)
Cilindro Central	Aço Inox 430	2.37	Al 2024	1.02	Aço Inox 430	2.78	Al 2024	2.00
Painéis Porta-Equipamentos	Aço Inox 316	1.98	Al 2024	0.41	Aço Inox 316	2.00	Painéis Sanduíche de alumínio	26.21
Painéis Laterais e Anti-Geocêntrico	Aço Inox 316	1.79	Al 2024	0.41	Aço Inox 316	1.79	Painéis Sanduíche de alumínio	13.61

TABELA 3. Fatores de Escala

	γ_T	γ_t	γ_L	γ_H	γ_p
MODELO I	1.0	-	0.5	1.0	0.25
MODELO II	1.24	-	0.5	2.30	0.58
MODELO III	1.0	1.95	0.5	1.0	0.25
MODELO IV	1.59	0.25	0.5	6.35	1.59

Deve-se acrescentar que todos os modelos em escala foram especificados considerando materiais e bitolas disponíveis comercialmente.

RESULTADOS

O comportamento térmico do protótipo e dos modelos foi simulado numericamente com o conjunto de programas de análise térmica desenvolvido pelo Grupo de Controle Térmico do INPE [9]. Os sistemas foram divididos em nós isotérmicos, como ilustrado na Figura 2, e analisados sob diversas condições de operação, em regime permanente e transitório. Em regime transitório, considerou-se uma órbita circular com 700 Km de raio e 25° de inclinação, típica do primeiro satélite brasileiro.

As Figuras 3 e 4 mostram os resultados das simulações para o desempenho dos modelos I e II comparado com o comportamento do protótipo, para diferentes posições na órbita (diferentes cargas térmicas externas).

Figuras 5, 6 e 7 apresentam resultados típicos do comportamento térmico, ao longo de uma órbita, de regiões homólogas do protótipo e dos modelos III e IV. Resultados adicionais podem ser encontrados nas referências [10] e [11].

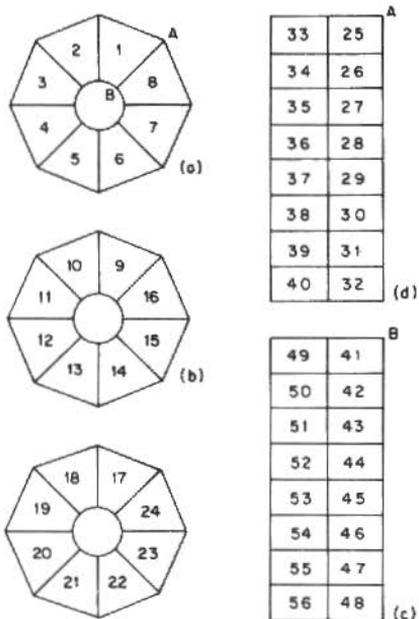


Fig. 2. Malha de nós adotada: (a) painel antigeocêntrico, (b) painel porta-equipamentos central, (c) painel porta-equipamentos geocêntrico, (d) painéis laterais e (e) cilindro central.

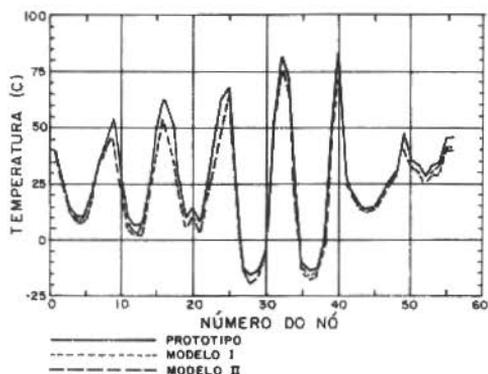


Fig. 3. Distribuição de temperaturas do protótipo e dos modelos I e II em regime permanente (condição C).

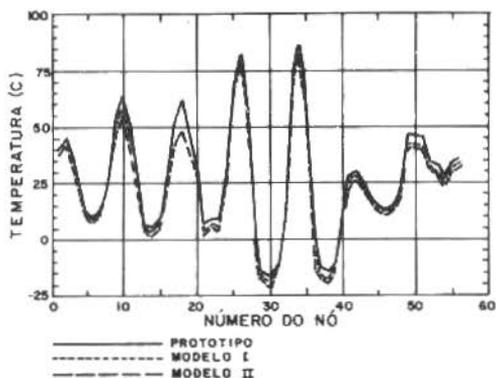


Fig. 4. Distribuição de temperaturas do protótipo e dos modelos I e II em regime permanente (condição B).

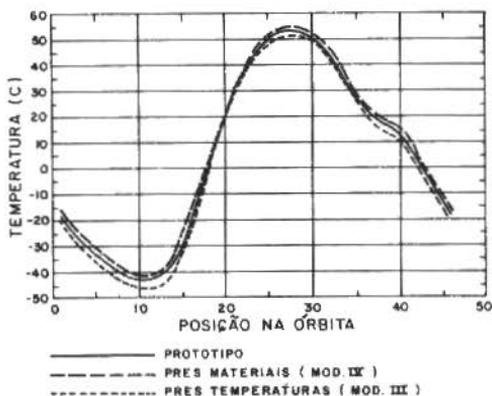


Fig. 5. Variação da temperatura do nó 2 do protótipo e dos modelos III e IV ao longo de uma órbita.

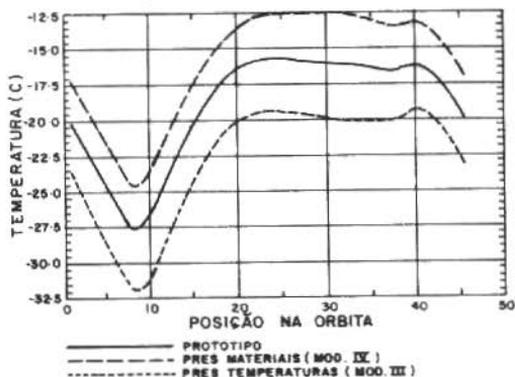


Fig. 6. Variação da temperatura do nó 38 do protótipo e dos modelos III e IV ao longo de uma órbita

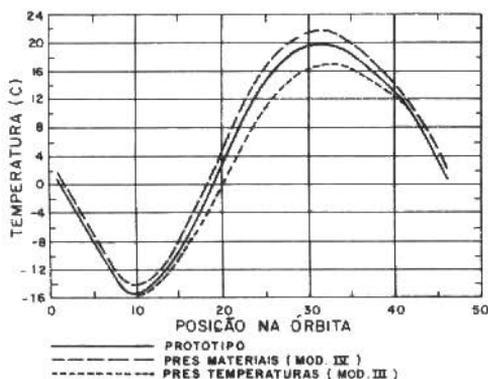


Fig. 7. Variação da temperatura do nó 48 do protótipo e dos modelos III e IV ao longo de uma órbita

Com base nos resultados para regime permanente, verificou-se que os modelos I e II reproduzem o comportamento do protótipo satisfatoriamente com desempenhos equivalentes. Em ambos os modelos, os desvios máximos ocorrem em regiões com altos níveis de potência dissipada localmente ou com grande incidência de carga externa.

Para regime transitório, os modelos III e IV apresentam um comportamento térmico bastante semelhante ao do protótipo, ao longo de toda a órbita e em todos os nós da malha.

Observou-se, também, que os modelos I, II e III apresentam níveis de temperatura sistematicamente inferiores ao do protótipo, enquanto no modelo IV, único modelo em escala constituído por painéis sanduíche, ocorre o inverso. Este fato resulta da redução de escala do protótipo ter sido efetuada a partir de suas dimensões externas e não pelas linhas médias de seus elementos constitutivos. Como os painéis sanduíche apresentam espessuras significativas, este procedimento introduz distorções não desprezíveis nos modelos em escala, como demonstrado a seguir.

Seja

$$\gamma_{L_n} = \frac{L_m + \delta m}{L_p + \delta p} ,$$

$$\gamma_{L_r} = \frac{L_m}{L_p},$$

onde γ_{L_n} é o fator de escala nominal ($\gamma_{L_n} = 0.50$), representando a relação entre dimensões externas, e γ_{L_r} é o fator de escala real calculado a partir das linhas médias dos elementos do protótipo (p) e dos modelos (m).

Para os modelos I, II e III, constituídos por chapas finas, tem-se que $\delta_m \ll L_m$.

Logo

$$\gamma_{L_r} = \gamma_{L_n} \left(1 + \frac{\delta_p}{L_p}\right)$$

ou seja,

$$\gamma_{L_r} > \gamma_{L_n}.$$

Para o modelo IV, constituído por painéis sanduíche, onde $\delta_m = \delta_p$, segue que

$$\gamma_{L_r} = \gamma_{L_n} - \frac{\delta_p}{L_p} (1 - \gamma_{L_n})$$

e

$$\gamma_{L_r} < \gamma_{L_n}$$

Consequentemente, de acordo com a Equação 8, segue que para os modelos I, II e III

$$\gamma_{T_r} < \gamma_{T_n}$$

e para o modelo IV

$$\gamma_{T_R} > \gamma_{T_N}$$

Finalmente, a sensibilidade dos modelos em escala foi avaliada com relação a perturbações nos acoplamentos condutivos (γ_S), nos acoplamentos radiativos (γ_R) e nas cargas térmicas (γ_P e γ_Φ).

Para isto, foram calculadas, para cada modelo, as sensibilidades médias definidas por:

$$S_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \gamma_{T_i}}{\partial \gamma_\alpha} \right| \quad (10)$$

com $\alpha = S, R, P, \Phi$.

Para a técnica de preservação das temperaturas, os resultados ilustrados pela Figura 8, indicam que eventuais distorções nos acoplamentos condutivos implicam em pequenas variações no comportamento térmico dos modelos em escala. No entanto, a minimização de perturbações nos acoplamentos radiativos e nas cargas térmicas é crítica para a garantia do bom desempenho dos modelos em escala. Observa-se, também, que a diminuição dos modelos resulta em dificuldades crescentes, tornando-se a técnica de modelamento térmico em escala praticamente inviável a partir de $\gamma_L < 0.25$.

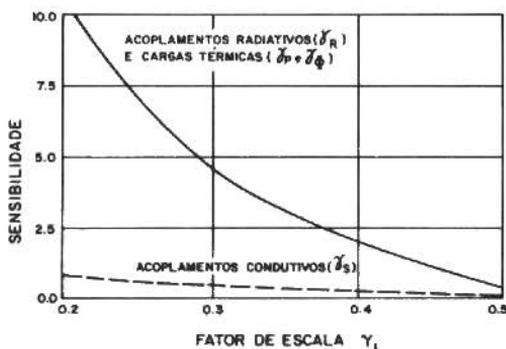


Fig. 8. Variação das sensibilidades em função da redução de escala dos modelos

Considerações análogas podem ser feitas para a técnica de preservação dos materiais, embora, neste caso, as perturbações nas cargas térmicas sejam menos críticas.

COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho demonstra a viabilidade do emprego de modelos em escala, concebidos de acordo com qualquer uma das técnicas de preservação estudadas, para a simulação do comportamento térmico do primeiro satélite brasileiro. Os modelos especificados reproduzem satisfatoriamente o desempenho do protótipo com desvios médios inferiores a 8°C , para todos os nós e todas as condições de operação analisadas.

Deve-se mencionar também que:

- a) a redução da escala do protótipo com base nas suas dimensões externas introduz desvios sistemáticos no desempenho dos modelos em escala. Tais desvios, entretanto, podem ser estimados e corrigidos, adequadamente;
- b) a especificação de valores muito pequenos para o fator de escala dimensional, γ_L , introduz incertezas na distribuição de temperatura dos modelos que podem inviabilizar a utilização da técnica de modelamento térmico em escala.

REFERÊNCIAS

- [1] BRINKMANN, F.W. et alii, "Economic use of facilities for thermal testing of large satellites and subsystems", In European Space Agency (ESA), Spacecraft Thermal and Environmental Control Systems, France (1972), pp. 387-396.
- [2] KATZOFF, S., "Similitude in thermal models of spacecraft", Report NASA-TND-1631, Washington (1963).
- [3] JONES, E.P., "Thermal similitude studies", J. Spacecraft and Rockets, V. 1 (4), (1964), pp. 364-369.

- [4] VICKERS, J.M.F., "A study of thermal scale modeling techniques", Report NASA-CR-52598, Caltech (1963).
- [5] FOWLE, A.A., GABRON, F. and VICKERS, J.M.F., "Thermal scale modeling: an experimental investigation", J. Spacecraft and Rockets, V. 3 (4), pp. 577-581.
- [6] GABRON, F., "Thermal scale modeling techniques for Voyager type spacecraft", Report NASA-CR-87447, Caltech (1967).
- [7] SHANNON, R.L., "A thermal scale modeling study for Apollo and Apollo applications", Report NASA-CR-115753 (1972).
- [8] DANIELS, D.H.W. et alii, "Thermal conductivity of metallic honeycomb sandwich panels", In European Space Research Organization (ESRO), Structural and Thermal Tests: Their Evolution and Present Trends, V. 3, Part 1, France (1972), pp. 47-68.
- [9] OLIVEIRA FQ, O.B. et alii, "Programas de análise térmica para satélite: Manual do usuário", INPE, S. José dos Campos, Brasil (1986), (to be published).
- [10] RAMOS, F.M., "Análise em escala de modelos térmicos de satélites", M.Sc. Thesis, INPE (1986).
- [11] RAMOS, F.M., CARAJILESCOV, P., "Thermal scale modeling applied to the first brazilian type spacecraft", I Encontro Nacional de Ciências Térmicas - ENCIT 86 (1986), pp. 79-82.

ÍNDICE GERAL

VOL. IX - Nº 1

THE COUPLED PROBLEM OF THE OPERATING TEMPERATURES AND ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION (EHL) OF ROLLING CONTACT BEARINGS 5

V. A. Schwarz

Department of Mechanical Engineering
Escola Federal de Engenharia de Itajubá, MG

B. R. Reason

School of Mechanical Engineering
Cranfield Institut of Technology
Cranfield, Bedford - England

A COMPUTER PACKAGE FOR THE MODELLING AND ANALYSIS OF MULTIBODY SYSTEMS 33

José Eduardo Zindel Deboni - Membro da ABCM
IPEN - Instituto de Pesquisas Energéticas
e Nucleares CNEN/SP

VIBRATION CONTROL OF MAGNETICALLY SUPPORTED ROTORS 47

M. Frik

R. Weweries
University of Duisburg

A SELF-TUNING REGULATOR BASED ON POLE PLACEMENT DESIGN FOR USE IN SATELLITE ATTITUDE CONTROL 65

José Francisco Ribeiro

Antonio Felix Martins Neto

João Moro

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/MCT
São José dos Campos, SP



VOL. IX - Nº 2

STABILITY OF CENTRIFUGES PARTIALLY FILLED WITH LIQUID 73

Dr. Eberhard Brommundt

Institut für Technische Mechanik (Mechanikzentrum)
Technische Universität Braunschweig
D-3300 Braunschweig

DYNAMICS OF THE RELATIVE MOTION OF A SOLID PARTICLE AND A VISCOUS FLUID CONFINED IN CYLINDRICAL DUCTS OF DIFFERENT GEOMETRIES 87

Roberto Guimarães Pereira, Membro da ABCM

Maurício Nogueira Frota, Membro da ABCM

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

DETERMINAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL DA VELOCIDADE DE QUEIMA DE PROPELENTE SÓLIDO 105

Aparecida Minhoko Kawamoto

IAE - Divisão de Química
CTA - São José dos Campos, SP

Gordiano Farai de Alvim Filho

ITA - Departamento de Aeronáutica
CTA - São José dos Campos, SP

SOBRE AS SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE TROCA DE ENERGIA RADIANTE TÉRMICA 121

Rogério Martins Saldanha da Gamá – Membro da ABCM

LNCC/CNPq

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO EQUILÍBRIO DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS ELÁSTICAS PLANAS 131

Haroldo Silva da Costa Mattos – Membro da ABCM

Rubens Sampaio Filho, Membro da ABCM

Depto de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

MODELING OF FLEXIBLE MULTIBEAM SYSTEM BY RIGID-ELASTIC SUPERELEMENTS 151

Werner O. Schiehlen

Jochen Rauh

University of Stuttgart, Stuttgart, F. R. G.



SILGRAF ARTES GRÁFICAS LTDA.

TEL.: 263-5685 – 233-0017

VOL. IX - Nº 3

A BOUNDARY ELEMENT ALGORITHM FOR PLATE PROBLEMS 157

J. A. Costa Jr. – Membro da ABCM
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

THE STATE OF THE ART IN ADVANCED HEAT-TRANSFER A REVIEW OF TURBULENT BOUNDARY LAYER HEAT TRANSFER 173

Robert J. Moffat – Member of ABCM
Thermosciences Division
Department of Mechanical Engineering
Stanford University



**METODOLOGIA AUTOMATIZADA PARA O
CONTROLE GEOMÉTRICO DE SUPERFÍCIES
DE PRECISÃO** 251

Armando Albertazzi Gonçalves Jr.
UFSC – Departamento de Engenharia Mecânica
Laboratório de Metrologia e Automatização

**DIFFUSION PROBLEMS WITH GENERAL
TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS** 269

R. M. Cotta – Membro da ABCM
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Departamento de Energia

M. N. Özisik
North Carolina State University
Mechanical and Aerospace Engineering Department

**UM MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO
DE UM FLUXO ESTRATIFICADO** 293

Armando M. Awruch
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Civil

**VIABILIDADE DA ANÁLISE TÉRMICA EM ESCALA
DO PRIMEIRO SATÉLITE BRASILEIRO** 311

Fernando Manuel Ramos
Instituto de Pesquisas Espaciais

Pedro Carajilescov – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica



PEDIDO DE ASSINATURA DA RBCM
OU NÚMEROS ATRASADOS QUER DA REVISTA OU ANAIS DE CONGRESSOS

- Preencha a ficha abaixo, indicando o desejado, e remeta para ABCM.

Secretaria da ABCM
PUC/RJ - ITUC
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

- Remeta, em anexo, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor indicado na referida ficha.

	BRASIL AMÉRICA LATINA	EXTERIOR
Anais do COBEM _____	() 3,0 OTN'S	() US\$ 100,00
Anais do SIBRAT _____	() 2,0 OTN'S	() US\$ 50,00
Anais do ENCIT _____	() 2,0 OTN'S	() US\$ 50,00
Número avulso RBCM _____	() 1,0 OTN'S	() US\$ 15,00
Assinatura da RBCM _____	() 2,0 OTN'S	() US\$ 40,00

ASSINALE SUA SOLICITAÇÃO

NOME _____

ENDEREÇO _____

CIDADE _____ ESTADO _____ CEP _____

