

Vol. V · Nº 1 · 1983

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

# RBCM

PATROCINADA PELA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM



EDITORA CAMPUS

ISSN 0100-7386

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

*Rubens Sampaio*  
Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225 - Gávea  
22453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 - Rio Comprido - 20261 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas - aproximadamente 21 x 28 cm - para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

*Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.*

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1983, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

#### **Assinaturas**

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri 35 Rio Comprido  
Tel.: (021) 284 8443 PABX  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.**

EDITOR  
RESPONSÁVEL*L. Bevilacqua*EDITOR  
EXECUTIVO*R. Sampaio*CONSELHO  
EDITORIAL

A. Blass

J.J. de Espíndola

R.A. Feijóo

A.C.N.R. Galeão

M.H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarini

F.E.M. Saboya

J.T. Sielawa

F. Venâncio Filho

Modelagem para Escoamentos com Duas 3  
Regiões, Uma Ocupada por um Fluido  
Viscoso e Outra por uma Mistura

**Rogério Martins Saldanha da Gama****Rubens Sampaio**

Deptº de Engenharia Mecânica

Uma Comparação Numérica entre Regras de 19  
Combinação dos Máximos Modais em Análise  
Sfsmica de Tubulações

**Hélio J.C. Barbosa**

LCC/CNPq

**Fernando Venâncio Filho**

COPPE/UFRJ

Solução Numérica de Equação Bi-Harmônica 35  
usando Esquema Tri-Diagonal

**Washington Braga Filho**

University of Michigan – Ann Arbor, MI, USA

Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

Análise Dinâmica Elastoplástica de Tubulações 45

**Djalma Veloso Filho**

Fundação Universidade Federal do Piauí

**Abimael Dourado Loula****João Nisan Guerreiro**

LCC/CNPq

# MODELAGEM PARA ESCOAMENTOS COM DUAS REGIÕES, UMA OCUPADA POR UM FLUIDO VISCOSO E OUTRA POR UMA MISTURA

Rogério Martins Saldanha da Gama

Rubens Sampaio

Dept<sup>o</sup> de Engenharia Mecânica

PUC/RJ

## SUMÁRIO

*Este trabalho modela um escoamento com duas regiões, uma ocupada apenas por um fluido Newtoniano incompressível e outra por uma mistura formada por um sólido rígido e o mesmo fluido. Na região onde so existe o fluido o escoamento é descrito pelas equações de Navier-Stokes e na outra região propomos uma generalização da lei de Darcy que leva em conta forças inerciais e viscosas. Condições na interface entre as duas regiões são cuidadosamente descritas e dois exemplos são resolvidos.*

## SUMMARY

*This work models a flow with two regions, one occupied only by an incompressible Newtonian fluid and another by a mixture of a rigid solid with the same fluid. In the region occupied only by the fluid the flow is described by the Navier-Stokes equation and in the other region we propose a generalization of Darcy's law that takes account inertial and viscous forces. Conditions in the interface between the two regions are carefully described, and two examples are completely solved.*

## INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é modelar escoamentos em duas regiões utilizando teoria de misturas [1]. Mais precisamente, nosso interesse é estudar escoamentos onde numa região temos apenas fluido e em outra, contígua, um meio poroso saturado pelo mesmo fluido. Esta situação é encontrada com frequência em Engenharia Civil, Mecânica, Agronomia, Petróleo, etc. Problemas envolvendo lubrificação de mancais porosos, e principalmente, escoamento de lamelas de perfuração em poços de petróleo, nossa motivação inicial para estudar esse problema, são exemplos de situações que podem ser tratadas pelo modelo aqui apresentado.

O meio poroso que consideraremos será suposto homogêneo e isotrópico. As duas regiões, de fluido puro e meio poroso saturado, são separadas por uma interface sobre a qual temos que impor condições, as quais discutiremos detalhadamente mais adiante, e o conjunto das regiões é limitado por uma fronteira impermeável.

Suporemos que o fluido é Newtoniano e incompressível e que o escoamento é isotérmico, de modo que na região de fluido puro temos que resolver a equação de Navier-Stokes com densidade e viscosidade constantes.

A outra região será modelada como uma mistura sólido-rígido-fluido Newtoniano. Esta teoria fornece uma equação que generaliza a equação clássica de Darcy que resulta do nosso modelo quando desprezamos forças inerciais e viscosas.

O modelo aqui apresentado difere dos usualmente adotados em engenharia. Primeiro, porque não utilizamos a equação de Darcy no meio poroso pois estamos principalmente interessados nos efeitos inerciais e viscosos não levados em conta na equação de Darcy. Segundo, no tratamento que damos às condições de compatibilidade na interface que é verificada experimentalmente [3,4] e discutida teoricamente em [2,5,6]. Não é verdade que na interface fluido-mistura a velocidade do fluido puro seja igual à velocidade do fluido na mistura! O que é verdade é que a velocidade  $y$  na região de fluido puro é uma média ponderada entre as velocidades do sólido e do fluido, sobre a interface, na região de mistura.

Vários casos particulares foram resolvidos com a teoria e previsões foram feitas para posterior comprovação experimental.

No presente trabalho são apresentados dois exemplos como motivação. O primeiro é um escoamento num duto circular de paredes poro-

sas e, o segundo, um escoamento contendo três regiões (duas de mistura e uma de fluido puro).

### TEORIA DE MISTURAS

A idéia básica da teoria é utilizar meios contínuos distintos para modelar cada constituinte da mistura. Cada meio é dotado de cinemática independente e na dinâmica considera-se termos desprezando interação entre esses contínuos.

As equações básicas da teoria diferem das usualmente estudadas em Mecânica dos Fluidos Clássica onde um só contínuo é considerado. Faremos aqui sumariamente a apresentação das equações que utilizaremos em notação vetorial, os índices se referem aos componentes da mistura, não devendo ser confundidos com os usados na conhecida notação indicial (não será adotada a convenção de soma para índices repetidos). Uma exposição didática e detalhada da teoria pode ser encontrada em [1].

Para o  $i$ -ésimo constituinte da mistura, na configuração atual, a equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \underline{v}_i) = 0 \quad (1)$$

onde  $\rho_i$  é a densidade do componente  $i$  na mistura, ( $\rho_i$  é uma razão local entre a massa de  $i$  e o volume de mistura correspondente) e  $\underline{v}_i$  é a velocidade de  $i$ .

A equação de movimento para o  $i$ -ésimo constituinte é

$$\rho_i \left[ \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}_i) \underline{v}_i \right] = \text{div } \underline{T}_i + \underline{m}_i + \rho_i \underline{b}_i \quad (2)$$

onde  $\underline{T}_i$ ,  $\underline{m}_i$  e  $\underline{b}_i$  descrevem, para o constituinte  $i$ , a distribuição de forças internas, a interação entre  $i$  e os demais constituintes e a distribuição de forças externas (no nosso caso simplesmente a gravidade), respectivamente. O tensor  $\underline{T}_i$  será suposto simétrico no nosso estudo.

Observe que o campo vetorial  $\underline{m}_i$ , denominado de força difusiva, é peculiar da teoria de misturas. Ele não aparece em teorias que utilizam um só contínuo.

Não trataremos aqui da equação da energia, assumindo que esta se já satisfeita por alguma fonte externa.

As equações (1) e (2) se aplicam a situações onde não ocorram reações químicas.

## HIPÓTESES CONSTITUTIVAS

Vamos particularizar a teoria desenvolvida na seção anterior para o caso de um escoamento de um fluido através de um meio poroso, que será modelado como uma mistura binária.

Suporemos a matriz porosa homogênea, rígida, isotrópica e saturada pelo fluido que é Newtoniano e incompressível.

Sob estas hipóteses as equações de continuidade e movimento para o sólido são trivialmente satisfeitas.

As duas hipóteses constitutivas básicas que adotaremos, discutidas em detalhe por [2,6] são:

a) Tensão no fluido  $\underline{T}_f$

$$\underline{T}_f = -\psi p \underline{1} + 2\eta \lambda \psi^2 \underline{D}_f \quad (3)$$

b) Força difusiva  $\underline{m}_f$

$$\underline{m}_f = -\frac{\psi^2 \eta}{K} (\underline{v}_f - \underline{U}) \quad (4)$$

O índice "f" denota fluido. As grandezas  $\psi$ ,  $p$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\underline{D}_f$  e  $K$ , são a porosidade, a pressão no fluido (consequência da incompressibilidade), a viscosidade, um parâmetro adimensional que leva em conta propriedades geométricas da matriz porosa, a parte simétrica do gradiente de velocidades do fluido e a permeabilidade do meio poroso, respectivamente.  $\underline{U}$  é a velocidade da matriz porosa.

A porosidade  $\psi$  representa a relação local entre o volume de "vazios" e o volume total de mistura. Devido ao fato da matriz porosa ser suposta homogênea  $\psi$ ,  $\lambda$  e  $K$  serão considerados constantes.

Com estas hipóteses as equações (1) e (2) para o fluido são reduzidas a

$$\text{div } \underline{v}_f = 0 \quad (5)$$

$$\rho \psi \left[ \frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}_f) \underline{v}_f \right] = -\psi \text{ grad } p + \lambda \psi^2 \eta \Delta \underline{v}_f - \frac{\psi^2 \eta}{K} (\underline{v}_f - \underline{U}) + \rho \psi \underline{g} \quad (6)$$

Aqui levamos em conta que  $\rho_f = \psi \rho$  sendo  $\rho$  a densidade do fluido puro.

É importante observar que se desprezarmos as forças inerciais e viscosas clássicas (i.e. não incluídas em  $\underline{m}_f$ ) temos a equação de Darcy (uma vez que se o meio poroso estiver em repouso  $\underline{U} = 0$ ).



$$\psi(\rho \underline{g} - \text{grad } p) = \frac{\psi^2 \eta}{K} \underline{v}_f \quad (7)$$

Este fato, por si sô, parece ser suficiente para justificar (4) e, a posteriori, a utilização da teoria de misturas, já que a equação de Darcy é consagrada na literatura de meios porosos.

#### CONDIÇÕES DE CONTORNO

Consideremos agora duas regiões contíguas, uma de fluido puro e outra de meio poroso saturado, como sugerido na Figura 1.

Na região de fluido puro o escoamento é governado pela equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis e na região de mistura pelas equações descritas na seção anterior.

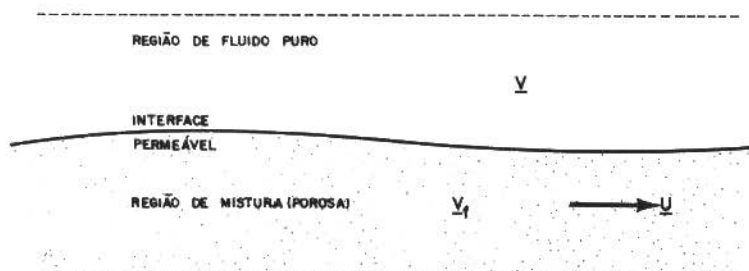


FIG. 1 - ESQUEMA DE UM ESCOAMENTO EM DUAS REGIÕES

Discutiremos agora condições de contorno nas interfaces das regiões de fluido puro, de mistura e superfícies impermeáveis que limitam o escoamento. Notaremos por  $\underline{v}$  e  $\underline{v}_f$  a velocidade do fluido na região de fluido puro e de mistura respectivamente e  $\underline{U}$  é a velocidade da matriz porosa.

Adotaremos a hipótese clássica de não deslizamento sobre superfícies impermeáveis, i.e.,  $\underline{v} = \underline{U}_s$  ou  $\underline{v}_f = \underline{U}_s$  (conforme o caso) onde  $\underline{U}_s$  é a velocidade da superfície impermeável em questão, a qual



delimita a região de fluido puro ou região porosa.

A grande dificuldade é o estabelecimento de condições na interface fluido-puro-mistura. Neste trabalho consideraremos apenas o caso onde não há fluxo de massa através da interface, apenas transferência de momentum.

É evidente que o sólido, por ser suposto rígido, não é afetado pela transferência de momentum. Apenas o fluido troca momentum.

Uma vez que a interface (do lado do meio poroso) é formada por fluido e sólido a velocidades diferentes, o fluido que toca a interface (pelo lado do fluido puro) deverá ter uma velocidade (no sentido de teoria de misturas) igual à média ponderada entre as velocidades do sólido e do fluido da região de mistura na interface.

Assim sendo, se assumirmos porosidade superficial  $\psi$ , teremos que, numa interface fluido-puro-mistura.

$$\underline{v} = \psi \underline{v}_f + (1 - \psi)\underline{U} \quad \text{na interface} \quad (8)$$

onde  $\underline{U}$  é a velocidade do sólido que compõe a matriz porosa.

É interessante observar que se em vez de ter uma região porosa tivéssemos uma região impermeável a porosidade  $\psi$  seria nula e

$$\underline{v} = \underline{U} \quad (9)$$

que é a condição clássica de não deslizamento sobre paredes impermeáveis.

E se em vez de meio poroso fosse uma região de fluido puro teríamos  $\psi = 1$  e

$$\underline{v} = \underline{v}_f \quad (10)$$

que seria também uma condição de não deslizamento entre camadas fluidas.

Na verdade a hipótese feita nesta condição de contorno implicará numa velocidade  $\underline{v}$  que não será rigorosamente coerente com uma condição de não deslizamento, já que em geral:

$$\underline{v} \neq \underline{v}_f \neq \underline{U}$$

porém como a teoria de misturas admite superposição de contínuos es

ta  $\bar{e}$  a  $\bar{u}$ nica condi $\bar{c}$ o $\bar{a}$ o compat $\bar{i}$ vel.

A outra condi $\bar{c}$ o $\bar{a}$ o a ser imposta na interface se refere ao momen-  
tum transferido atrav $\bar{e}$ s desta.

A hip $\bar{o}$ tese de que o fluido ocupa apenas  $\psi$  vezes a interface nos  
leva a postular que

$$\psi \underline{T} \underline{n} \cdot \underline{m} = \underline{T}_f \underline{n} \cdot \underline{m} \quad ; \quad \forall \underline{m} \quad \text{na interface} \quad (11)$$

onde  $\underline{T}$   $\bar{e}$  o tensor tens $\bar{a}$ o no fluido na regi $\bar{a}$ o de fluido puro,  $\underline{T}_f$   $\bar{e}$   
o tensor parcial de tens $\bar{õ}$ es no fluido na regi $\bar{a}$ o porosa,  $\underline{n}$  a normal  
 $\bar{a}$  interface e  $\underline{m}$  um unit $\bar{a}$ rio do plano tangente  $\bar{a}$  interface.

Observe que a an $\bar{a}$ lise  $\bar{e}$  local e a afirma $\bar{c}$ o $\bar{a}$ o do fluido ocupar  $\psi$  ve-  
zes a interface n $\bar{a}$ o deve ser tomada literalmente, serve apenas pa-  
ra melhor compreens $\bar{a}$ o da hip $\bar{o}$ tese adotada.

A condi $\bar{c}$ o $\bar{a}$ o (11) implica que

$$\underline{D} \underline{n} \cdot \underline{m} = \lambda \psi \underline{D}_f \underline{n} \cdot \underline{m} \quad ; \quad \forall \underline{m} \quad \text{na interface} \quad (12)$$

onde  $\underline{D}$   $\bar{e}$  a parte sim $\bar{e}$ trica do gradiente de  $\underline{v}$  e  $\underline{D}_f$  a parte sim $\bar{e}$ tri-  
ca do gradiente de  $\underline{v}_f$ .

O par $\bar{a}$ metro  $\lambda$  entra como fator de corre $\bar{c}$ o $\bar{a}$ o que pode levar em con-  
ta efeitos n $\bar{a}$ o considerados no nosso modelo como por exemplo imper-  
fei $\bar{c}$ o $\bar{e}$ s interfaciais e efeitos de tens $\bar{õ}$ es superficiais. Este par $\bar{a}$ m-  
etro s $\bar{o}$  depende da geometria da matriz porosa.

#### MODELO MATEM $\bar{A}$ TICO

Vamos agora sumarizar o nosso modelo apresentando o problema ma-  
tem $\bar{a}$ tico. N $\bar{a}$ o trataremos aqui condi $\bar{c}$ o $\bar{e}$ s iniciais pois estamos inte-  
ressados apenas em um problema de estado estacion $\bar{a}$ rio. Temos ent $\bar{a}$ o  
que

- em regi $\bar{õ}$ es de fluido puro

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (13)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \underline{v} = - \text{grad } p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g} \quad (14)$$

- em regi $\bar{õ}$ es de misturas

$$\text{div } \underline{v}_f = 0 \quad (5)$$

$$\rho\psi \left[ \frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}_f) \underline{v}_f \right] = -\psi \text{ grad } p + \lambda \psi^2 \eta \Delta \underline{v}_f - \frac{\psi^2 \eta}{K} (\underline{v}_f - \underline{U}) + \rho \psi \underline{g} \quad (6)$$

Com as seguintes condições de contorno:

- em paredes impermeáveis

$$\underline{v} = \underline{U}_s \quad , \quad \underline{U}_s \text{ velocidade da parede respectiva} \quad (15)$$

$$\underline{v}_f = \underline{U}_s \quad , \quad \underline{U}_s \text{ velocidade da parede respectiva} \quad (16)$$

- em interfaces fluido puro-mistura

$$\underline{v} = \psi \underline{v}_f + (1 - \psi) \underline{U} \quad (8)$$

$$\lambda \psi \underline{D}_f \underline{n} \cdot \underline{m} = \underline{D} \underline{n} \cdot \underline{m} \quad , \quad \forall \underline{m} \quad (12)$$

#### ESCOAMENTO EM UM DUTO CIRCULAR DE PAREDES POROSAS

Como primeiro exemplo da teoria apresentada aqui analisaremos o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível através de duas regiões. A primeira região, compreendida entre  $0 \leq r < R_1$  é uma região de fluido puro e a segunda, compreendida entre  $R_1 < r < R_2$ , é uma região de mistura (meio poroso + fluido Newtoniano) como mostra a Figura 2. Em  $r = R_2$  temos uma superfície impermeável sobre a qual é imposta a clássica condição de não deslizamento.

A matriz porosa que, juntamente com o fluido, compõe a região de mistura é suposta rígida e está em repouso.

Será utilizado um sistema cilíndrico de coordenadas.

Procuraremos uma solução em regime permanente, isto é, independente do tempo e axissimétrica, ou seja, independente da variável  $\theta$ . Assumiremos que o campo de velocidades é independente de  $z$ . Assim sendo temos o seguinte sistema de equações diferenciais para resolver

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_{<z>} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{<z>}}{\partial r} \right) = 0 \quad 0 \leq r < R_1 \quad (17)$$

$$\psi \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_{<z>} \right) - \frac{\psi^2 \eta}{K} v_{<z>} + \lambda \psi^2 \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{<z>}}{\partial r} \right) = 0 \quad R_1 < r < R_2 \quad (18)$$

se  $\phi = -p + \rho g_{\langle z \rangle} z$  (19)

podemos escrever que

$$v_{\langle z \rangle}(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (20)$$

$$v_{\langle z \rangle_f}(r) = C_3 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{K\lambda}}\right) + C_4 I_0\left(\frac{r}{\sqrt{K\lambda}}\right) + \frac{K}{\eta\psi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (21)$$

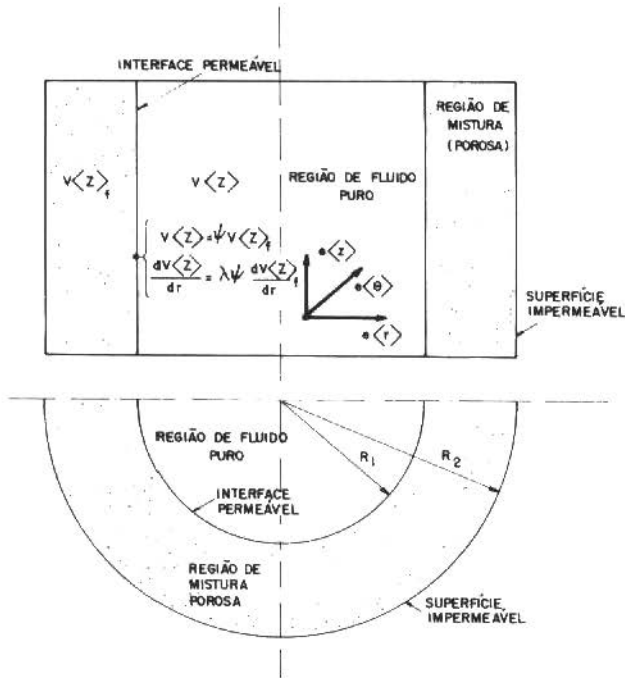


FIG. 2- ARRANJO DO PROBLEMA ESTUDADO

Aplicando as condições de contorno

$$v_{\langle z \rangle_f}(r = R_2) = 0 \quad (22)$$

$v_{\langle z \rangle}$  é finito

$$\lambda \psi \frac{dv_{\langle z \rangle_f}}{dr} (r = R_1) = \frac{dv_{\langle z \rangle}}{dr} (r = R_1) \quad (23)$$

$$\psi v_{\langle z \rangle_f} (r = R_1) = v_{\langle z \rangle} (r = R_1) \quad (24)$$

teremos que

$$v_{\langle z \rangle} = \frac{K\lambda}{4\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} (\xi_1^2 - \xi^2) + \frac{K}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ 1 - \frac{I_0(\xi_1)}{I_0(\xi_2)} \right] - \frac{K}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ \frac{K_0(\xi_1) I_0(\xi_2) - K_0(\xi_2) I_0(\xi_1)}{I_0(\xi_2) K_1(\xi_1) + I_1(\xi_1) K_0(\xi_2)} \right] \left( \frac{I_1(\xi_1)}{I_0(\xi_2)} - \frac{\xi_1}{2} \right) \quad R_1 > r \geq 0 \quad (25)$$

$$v_{\langle z \rangle_f} = \frac{K}{\eta \psi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ 1 - \frac{I_0(\xi)}{I_0(\xi_2)} \right] + \frac{K}{\eta \psi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ \frac{K_0(\xi) I_0(\xi_2) - K_0(\xi_2) I_0(\xi)}{I_0(\xi_2) K_1(\xi_1) + I_1(\xi_1) K_0(\xi_2)} \right] \left( \frac{\xi_1}{2} - \frac{I_1(\xi_1)}{I_0(\xi_2)} \right) \quad R_2 > r > R_1 \quad (26)$$

onde:

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{K\lambda}} \quad , \quad \xi_1 = \frac{R_1}{\sqrt{K\lambda}} \quad e \quad \xi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{K\lambda}}$$

As componentes  $v_{\langle z \rangle}$  e  $v_{\langle z \rangle_f}$  são as componentes físicas do campo de velocidades na direção  $e_{\langle z \rangle}$ , ou seja:

$$v_{\langle z \rangle} = \underline{v} \cdot e_{\langle z \rangle} \quad , \quad e_{\langle z \rangle} = (0,0,1) \quad (27)$$

$$v_{\langle z \rangle_f} = \underline{v}_f \cdot e_{\langle z \rangle} \quad , \quad e_{\langle z \rangle} = (0,0,1) \quad (28)$$

Podemos observar, da equação (25) que quando  $K \rightarrow 0$  temos um escoamento de Hagen-Poiseuille, já que  $\xi^2 K\lambda = r^2$ .

A Figura 3 apresenta os adimensionais  $(\eta v_{\langle z \rangle}) / (K \frac{\partial \phi}{\partial z})$  na região de fluido puro e  $(\eta \psi v_{\langle z \rangle_f}) / (K \frac{\partial \phi}{\partial z})$  na região de mistura plotados versus a variável  $\xi = r / \sqrt{K\lambda}$ .

É importante frisar que a continuidade da curva não implica em continuidade do campo de velocidades, já que a porosidade  $\psi$  não é

unitária.

De posse do campo de velocidades podemos calcular as tensões no fluido e a perda de carga num arranjo do tipo proposto.

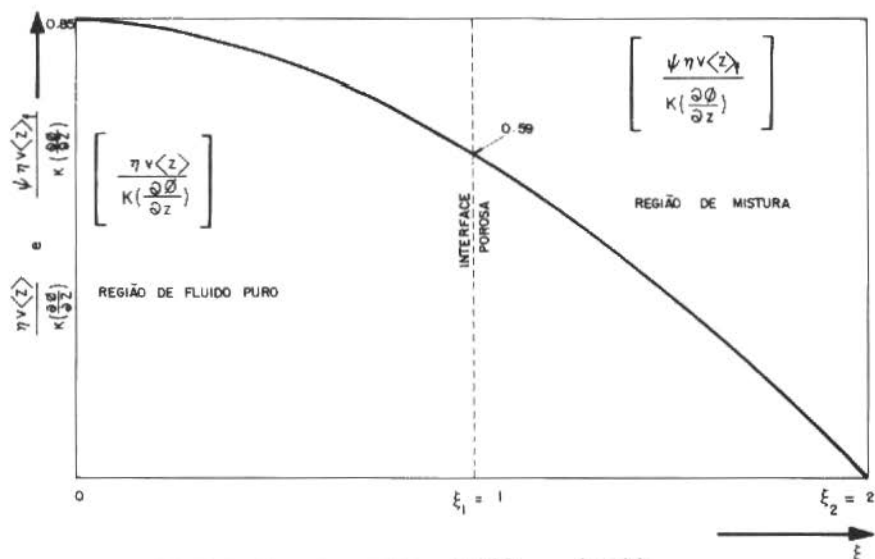


FIG. 3 - CURVA DAS FUNÇÕES  $\frac{\eta v(z)}{K(\frac{\partial \phi}{\partial z})}$  e  $\frac{\psi \eta v(z)}{K(\frac{\partial \phi}{\partial z})}$ , PARA O CASO

EM QUE  $\xi_1, \xi_2$  e  $\lambda = 1$ .

ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESSÍVEL ATRAVÉS DE UMA REGIÃO DE FLUIDO PURO E DUAS REGIÕES DE MISTURA COM MOVIMENTO RELATIVO

O arranjo estudado é apresentado na Figura 4. Em  $y = h_3$  e  $y = 0$  temos duas placas impermeáveis infinitas, sendo que a placa em  $y = h_3$  se desloca com velocidade  $U$  e a placa em  $y = 0$  está em repouso.

Entre  $0 < y < h_1$ , temos um meio poroso rígido e saturado que está em repouso e possui propriedades  $K_B$  (permeabilidade),  $\psi_B$  (porosidade) e  $\lambda_B$ . Entre  $h_2 < y < h_3$  temos um outro meio poroso saturado e rígido, sendo que este se desloca com velocidade  $U$  (como mostra a figura), com propriedades  $K_A$ ,  $\psi_A$  e  $\lambda_A$ .

A região compreendida entre  $h_1 < y < h_2$  é uma região de fluido puro.

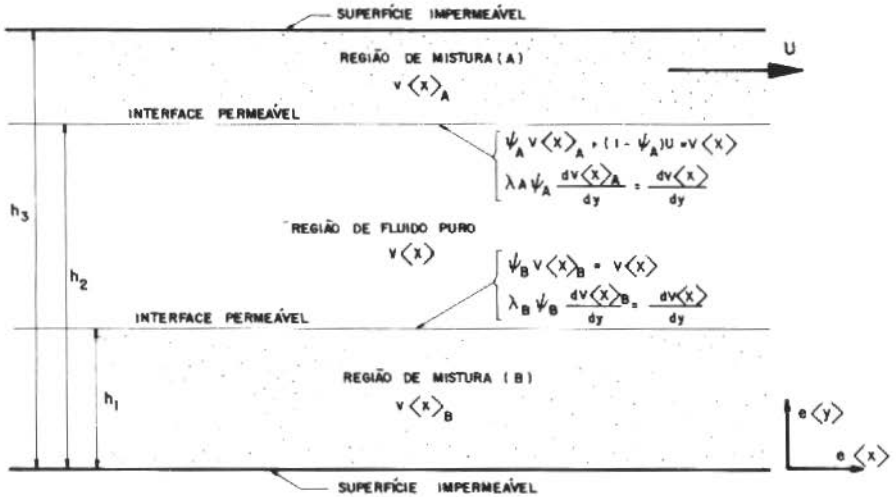


FIG. 4 - ARRANJO DO PROBLEMA ESTUDADO

O problema será resolvido usando-se um sistema retangular de coordenadas e com a hipótese de que a única componente não nula do campo de velocidades é  $v_{<x>}$  e que esta só é função da variável  $y$ .

O sistema de equações que rege o problema é o seguinte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda_A \psi_A \eta \frac{\partial^2 v_{<x>_A}}{\partial y^2} - \frac{\psi_A \eta}{K_A} v_{<x>_A} + \frac{\psi_A \eta}{K_A} U = 0 ; \quad h_2 < y < h_3 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_{<x>}}{\partial y^2} = 0 ; \quad h_1 < y < h_2 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda_B \psi_B \eta \frac{\partial^2 v_{<x>_B}}{\partial y^2} - \frac{\psi_B \eta}{K_B} v_{<x>_B} = 0 \quad 0 < y < h_1 \quad (31)$$

onde 
$$\phi = -p + \rho g_{<x>} x \quad (32)$$

As condições de contorno a serem impostas são:

$$(1 - \psi_A)U + \psi_A v_{<x>_A} = v_{<x>} \quad \text{em} \quad y = h_2 \quad (33)$$



$$\psi_B v_{\langle x \rangle B} = v_{\langle x \rangle} \quad \text{em} \quad y = h_1 \quad (34)$$

$$\lambda_A \psi_A \frac{dv_{\langle x \rangle A}}{dy} = \frac{dv_{\langle x \rangle}}{dy} \quad \text{em} \quad y = h_2 \quad (35)$$

$$\lambda_B \psi_B \frac{dv_{\langle x \rangle B}}{dy} = \frac{dv_{\langle x \rangle}}{dy} \quad \text{em} \quad y = h_1 \quad (36)$$

$$v_{\langle x \rangle A} = U \quad \text{em} \quad y = h_3 \quad (37)$$

$$v_{\langle x \rangle B} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad (38)$$

Resolvendo o sistema de equações e aplicando as condições (37) e (38) ficamos com:

$$v_{\langle x \rangle A} = \frac{K_A}{\eta \psi_A} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{y - h_3}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right) \right] + U + A \sinh\left(\frac{y - h_3}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right) \quad (39)$$

$$v_{\langle x \rangle} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{y^2}{2\eta} + C_1 y + C_2 \quad (40)$$

$$v_{\langle x \rangle B} = \frac{K_B}{\eta \psi_B} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{y}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) \right] + B \sinh\left(\frac{y}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) \quad (41)$$

onde as constantes A, B, C<sub>1</sub> e C<sub>2</sub> serão calculadas através das condições (33), (34), (35) e (36).

Devido à grande quantidade de parâmetros envolvidos, vamos apresentar resultados para um caso particular onde será suposta constante a função  $\phi$  ( $\partial \phi / \partial x = 0$ ).

Para o caso onde  $\partial \phi / \partial x = 0$  temos que

$$\frac{v_{\langle x \rangle A}}{U} = 1 + \frac{\frac{1}{\psi_A} \sqrt{\frac{K_A}{\lambda_A}} \sinh\left(\frac{y - h_3}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right)}{\cosh\left(\frac{h_3 - h_2}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right) \left[ h_2 - h_1 + \sqrt{\frac{K_B}{\lambda_B}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_1}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) + \sqrt{\frac{K_A}{\lambda_A}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_3 - h_2}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right) \right]} \quad (42)$$

$$\frac{v_{\langle x \rangle}}{U} = \frac{\sqrt{\frac{K_B}{\lambda_B}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_1}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) + y - h_1}{h_2 - h_1 + \sqrt{\frac{K_B}{\lambda_B}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_1}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) + \sqrt{\frac{K_A}{\lambda_A}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_3 - h_2}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right)} \quad (43)$$

$$\frac{v_{\langle x \rangle B}}{U} = \frac{\frac{1}{\psi_B} \sqrt{\frac{K_B}{\lambda_B}} \operatorname{senh}\left(\frac{y}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right)}{\cosh\left(\frac{h_1}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) \left[ h_2 - h_1 + \sqrt{\frac{K_B}{\lambda_B}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_1}{\sqrt{K_B \lambda_B}}\right) + \sqrt{\frac{K_A}{\lambda_A}} \operatorname{tgh}\left(\frac{h_3 - h_2}{\sqrt{K_A \lambda_A}}\right) \right]} \quad (44)$$

A Figura 5 apresenta curvas para um escoamento particular onde  $K_A = 0,01$  ;  $K_B = 0,02$  ;  $\lambda_A = \lambda_B = 1,2$  ;  $h_1 = 1$  ;  $h_2 = 2$  e  $h_3 = 3$ .

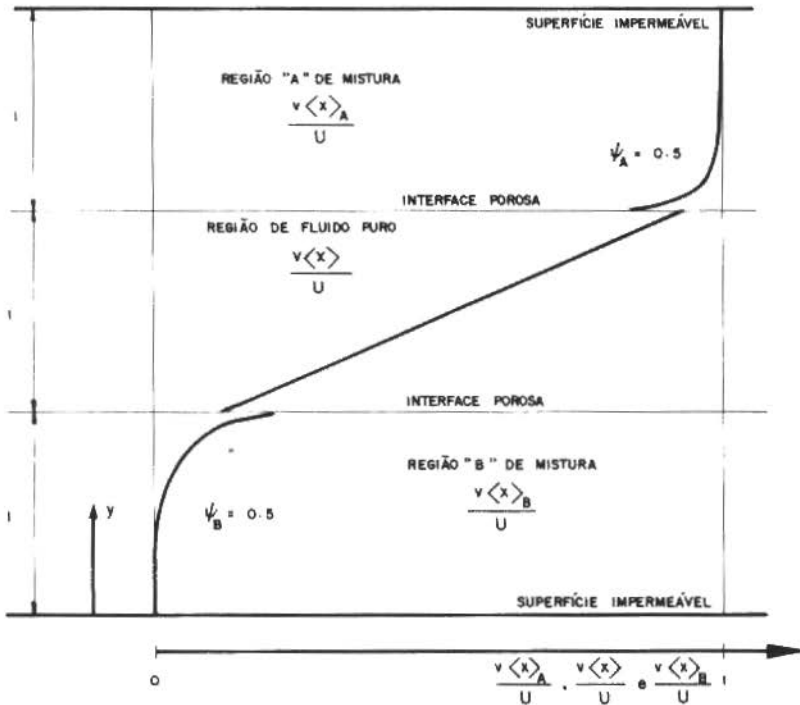


FIG. 5 - PERFIL DE VELOCIDADES TÍPICO PARA UM ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PARALELAS CONTENDO MATRIZES COM MOVIMENTO RELATIVO ENTRE SI

Podemos observar que se  $h_1 = 0$  e  $h_2 = h_3$  temos o clássico escoamento de Couette sem gradiente de pressões. O mesmo ocorre se as permeabilidades  $K_A$  e  $K_B$  forem nulas. Nestes casos limite não faz sentido calcular  $v_{\langle x \rangle_A}$  e  $v_{\langle x \rangle_B}$ , já que não haverá escoamento na matriz porosa.

#### COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Foi apresentada neste trabalho uma breve discussão sobre aplicação da teoria de misturas a escoamentos através de mais de uma região, com discussão de equações constitutivas e condições de contorno, procurando estabelecer uma forma sistemática de resolução de problemas deste tipo.

Foram resolvidos, a título de motivação, dois problemas que possuem solução analítica. Em ambos apresentamos apenas os campos de velocidades nas distintas regiões, uma vez que de posse destes é possível determinar os campos de tensões, vazão, etc... e posteriormente obter informações sobre forças atuantes, perda de carga, etc.

As referências [3] e [4] fornecem grande suporte experimental para o que foi apresentado aqui.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Atkin, R.J. and Craine, R.E. — Continuum theory of mixtures. Applications, J. Inst. Math. Appl. 17, pp.153-207 (1976).
- [2] Sampaio, R. and Williams, W.O. — On the viscosities of liquid mixtures. Zamp. 28, pp.607-614 (1977).
- [3] Beavers, G.S. and Joseph, D.D. — Boundary conditions at a naturally permeable wall. J. Fluid Mechanics, 30, pp.197-207 (1967).
- [4] Taylor, G.I. — A model for boundary conditions of a porous material. J. Fluid Mechanics, 49, pp.319-326 (1971).
- [5] Saffman, P.G. — On the boundary condition at the surface of a porous medium. Studies in Applied Math., 48, pp.93-101 (1971).
- [6] Williams, W.O. — Constitutive equations for flow of an incompressible fluid through a porous media. Quart. Appl. Math., 36, 255-267 (1978).

# UMA COMPARAÇÃO NUMÉRICA ENTRE REGRAS DE COMBINAÇÃO DOS MÁXIMOS MODAIS EM ANÁLISE SÍSMICA DE TUBULAÇÕES

Hélio J. C. Barbosa  
LCC/CNPq

Fernando Venâncio Filho  
COPPE/UFRJ

## SUMÁRIO

*Compara-se, através de exemplos numéricos, o desempenho de várias regras de combinação dos máximos modais, usualmente empregadas no método do espectro de resposta, quando aplicadas à análise sísmica de tubulações. As estimativas para os deslocamentos máximos previstas pelas diversas regras de combinação são comparadas com os máximos obtidos por integração no tempo e os erros cometidos em cada caso são analisados em termos de medidas estatísticas simples.*

## INTRODUÇÃO

As regras de superposição de grandezas modais para a estimativa da resposta estrutural máxima são especificadas na Ref. [1]. A regra da soma absoluta estima a resposta máxima como a soma dos valores absolutos dos máximos modais. Esta estimativa constitui um limite superior absoluto da verdadeira resposta e é por demais conservadora. A regra mais comumente utilizada é a RQSQ (Raiz Quadrada da Soma dos Quadrados). Esta regra tem um certo fundamento estatístico levando em conta o fato de que os máximos modais não ocorrem simultaneamente. No entanto não considera o caso em que existem modos com frequências muito próximas quando a probabilidade de ocorrência simultânea de máximos modais é ponderável. Algumas regras agrupam os máximos modais dos modos com frequências muito próximas de uma maneira empírica.

Recentemente foi proposta a regra CQC (Combinação Quadrática Completa), Ref. [2], a partir de uma base estatística coerente. Neste trabalho é também revivida a regra R-E (Rosenblueth e Elorduy) que foi incorporada de maneira errônea na Ref. [1] com o nome de Soma Dupla. Ambas as regras CQC e R-E levam em conta, com uma base estatística, a interação entre os máximos modais por meio de coeficientes de interação. A regra RQSQ torna-se um caso particular destas duas últimas quando os coeficientes de interação se anulam.

Apresentam-se neste trabalho as várias regras de superposição modal com o objetivo de comparar os resultados de sua aplicação na análise de tubulações submetidas a excitações sísmicas de apoios rígidos. A solução suposta exata para comparação é a solução do histórico no tempo pelo método da superposição modal para uma excitação cujo espectro é o utilizado na aplicação das várias regras.

Os deslocamentos máximos obtidos pelas diversas regras de superposição são comparados com os máximos obtidos pela solução do histórico no tempo e os erros cometidos em cada caso são analisados em termos de medidas estatísticas simples. Procura-se desta maneira verificar o desempenho dos diversos métodos de superposição propostos.

#### EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Na análise dinâmica de estruturas é usual o emprego de uma técnica de discretização espacial, comumente o Método dos Elementos Finitos, e as equações de movimento do sistema discretizado podem ser colocadas então na forma:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{F}(t) \quad (1)$$

onde  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  são, respectivamente, as matrizes da massa, amortecimento e rigidez do sistema,  $\underline{u}(t)$  é o vetor de deslocamentos e  $\underline{F}(t)$  é o vetor associado às solicitações externas atuantes sobre o sistema. Os pontos denotam derivação em relação ao tempo  $t$ .

Supondo-se  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  simétricas e positivas definidas os autovetores  $\underline{\phi}$  do problema de autovalor:

$$\omega^2 \underline{M} \underline{\phi} = \underline{K} \underline{\phi} \quad (2)$$

normalizados em relação à matriz de massa, apresentam as propriedades de ortogonalidade

$$\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_j = \delta_{ij} \quad (3)$$

$$\underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (4)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\omega_i$  e  $\phi_i$  são, respectivamente, as frequências e modos naturais de vibração do sistema.

Admitindo-se que a matriz de amortecimento  $\underline{C}$  satisfaça as relações

$$\underline{\phi}_i^T \underline{C} \underline{\phi}_j = 2\xi_i \omega_i \delta_{ij} \quad (5)$$

onde  $\xi_i$  é a fração do amortecimento crítico no  $i$ -ésimo modo, é possível se desacoplar o sistema de equações (1) através da mudança de coordenadas

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \underline{\phi}_i \quad (6)$$

As equações de movimento nas coordenadas modais  $\eta$  se escrevem então:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \underline{\phi}_i^T \underline{F}(t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (7)$$

onde  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema discretizado.

No caso de estruturas com movimento prescrito nos apoios, a equação de movimento, após uma mudança conveniente [3] de variáveis e desprezando-se a contribuição relativa ao amortecimento no termo de excitação [4], pode ser escrita como [5]:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = - \sum_{k=1}^p \underline{M} \underline{r}_{-k} \ddot{\underline{v}}_k(t) \quad (8)$$

onde  $\underline{u}$  mede a parcela dinâmica do deslocamento total da estrutura.  $\underline{r}_{-k}$  é conhecido como função de influência e é o campo de deslocamentos estáticos resultante da aplicação de um deslocamento unitário segundo o  $k$ -ésimo grau de liberdade com movimento prescrito.  $\ddot{\underline{v}}_k(t)$  dá a correspondente dependência temporal da aceleração prescrita e  $p$  é o número total de graus de liberdade com movimento imposto.

Este seria o caso da análise sísmica de tubulações cujos apoios

estão em estruturas distintas ou em níveis diferentes de uma mesma estrutura.

Uma situação particular, de interesse prático, é aquela em que não há movimento relativo entre os apoios e a equação (8) se simplifica para

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = -\underline{M} \left[ \underline{E}_x \ddot{v}_x(t) + \underline{E}_y \ddot{v}_y(t) + \underline{E}_z \ddot{v}_z(t) \right] \quad (9)$$

onde os vetores  $\underline{E}_x$ ,  $\underline{E}_y$  e  $\underline{E}_z$  contêm 1's ou 0's conforme o grau de liberdade coincida ou não com uma translação segundo uma das direções globais x, y e z, respectivamente, e  $\ddot{v}_x(t)$ ,  $\ddot{v}_y(t)$  e  $\ddot{v}_z(t)$  são as componentes, segundo essas mesmas direções globais, da aceleração imposta aos apoios. Essa situação será referida aqui como movimento uniforme dos apoios.

As equações de movimento podem ser integradas diretamente nas coordenadas  $\underline{u}$ , EQ. (1), através de um algoritmo passo a passo, ou nas coordenadas modais  $\eta$ , EQ. (7), quando então é usual se considerar apenas uma fração dos modos naturais, normalmente aqueles correspondentes as primeiras frequências naturais. É o chamado método da superposição modal.

Uma terceira opção, bastante conveniente no caso de análise sísmica de estruturas, é dada pelo método do espectro de resposta que fornece estimativas para os máximos de variáveis de interesse tais como deslocamentos, tensões, etc.

Assim, tendo em mente a EQ. (8) e considerando apenas a contribuição sobre o modo j do movimento de apoio segundo o grau de liberdade prescrito k tem-se:

$$\ddot{\eta}_j^k + 2\xi_j \omega_j \dot{\eta}_j^k + \omega_j^2 \eta_j^k = \Gamma_j^k \ddot{v}_k(t) \quad (10)$$

onde

$$\Gamma_j^k = -\phi_j^T \underline{M} \underline{r}_k \quad (11)$$

é o fator de participação modal do modo j devido ao movimento segundo o k-ésimo grau de liberdade prescrito.

Levando em conta a ação simultânea de todos os p movimentos de apoio e a contribuição dos m primeiros modos, o valor de uma determinada variável de interesse, q, (deslocamento, tensão, etc.) é da



do por

$$q(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \eta_j^k(t) q_j \tag{12}$$

onde  $q_j$  é o valor da variável em questão associado ao  $j$ -ésimo modo de vibração.

Denotando por  $SA^k(\omega_j, \xi_j)$  a aceleração espectral [6] para o modo  $j$  relativa à excitação  $\ddot{v}_k(t)$ , o valor máximo de  $\eta_j^k$  na equação (10) é dado por

$$\eta_{jmax}^k = \Gamma_j^k \frac{SA^k(\omega_j, \xi_j)}{\omega_j^2} \tag{13}$$

e ocorre no instante  $t_j^k$ .

Pela definição dos espectros de resposta, que não leva em conta nem o sinal do máximo nem o instante em que ele ocorreu, é impossível se determinar o valor máximo da resposta do modo  $j$  quando da aplicação simultânea de todos os  $p$  movimentos prescritos.

Uma estimativa da resposta máximo no modo  $j$  pode ser feita por

$$\eta_{jmax} = \left[ \sum_{k=1}^p \eta_{jmax}^k{}^2 \right]^{1/2} \tag{14a}$$

ou ainda

$$\eta_{jmax} = \sum_{k=1}^p |\eta_{jmax}^k| \tag{14b}$$

A expressão (14a) pode vir a subestimar a resposta já que assume que os máximos se dão em tempos distintos, aleatoriamente. Já a expressão (14b) é conservadora pois supõe que os máximos correspondentes às excitações  $\ddot{v}_k$  ocorrem simultaneamente e em fase.

Observe-se também que mesmo no caso de uma única excitação  $p=1$ , e conseqüentemente apenas um espectro,  $SA(\omega_j, \xi_j)$ , é impossível se determinar o máximo de uma dada variável em (12) já que não se dispõe da história no tempo das coordenadas modais  $\eta$  mas apenas dos valores absolutos dos máximos atingidos por cada uma delas separadamente, dados pela EQ. (13).

Assim, uma estimativa deverá ser feita para o valor máximo,  $Q$ , de uma dada variável de interesse,  $q$ , em função dos valores representativos dos máximos atingidos em cada modo,  $Q_j$ .

As opções mais frequentes na literatura para a combinação desses

máximos modais  $Q_j$  são:

a) Soma absoluta - SABS

$$Q = \sum_{j=1}^m |Q_j| \quad (15)$$

Esta expressão gera valores conservadores já que pressupõe que os máximos modais se dão simultaneamente e em fase. Fornece, na realidade, um limite superior para a resposta.

b) Raiz quadrada da soma dos quadrados - RQSQ

$$Q = \left[ \sum_{j=1}^m Q_j^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

Supõe que os máximos modais ocorrem em tempos distintos e aleatoriamente. Pode subestimar a resposta em alguns casos, principalmente quando da existência de modos com frequências próximas que poderiam atingir o máximo em tempos próximos.

c) RQSQ com agrupamentos

Forma-se, inicialmente, grupos de modos com frequências que vão da primeira do grupo (a mais baixa) até uma 10% mais alta. Parte-se da frequência mais baixa da estrutura para a formação dos grupos e nenhuma frequência poderá estar incluída em mais de um grupo.

A combinação é feita por soma absoluta dos máximos modais relativos a cada grupo de modos próximos e, em seguida, combina-se por raiz quadrada da soma dos quadrados os valores representativos de cada grupo de modos próximos com os valores correspondentes aos modos isolados. Matematicamente:

$$Q = \left[ \sum_{r=1}^m Q_r^2 + \sum_{s=1}^g \left\{ \sum_{i=f}^{\ell} \sum_{j=f}^{\ell} |Q_i Q_j| \right\} \right]^{1/2} \quad i \neq j \quad (17)$$

onde  $g$  é o número de grupos e  $f$  e  $\ell$  correspondem ao primeiro e último modos do  $s$ -ésimo grupo.

d) Método de 10%

Pode ser escrito como:

$$Q = \left[ \sum_{r=1}^m Q_r^2 + 2 \sum |Q_i Q_j| \right]^{1/2} \quad i \neq j \quad (18)$$

onde o segundo somatório inclui todos os pares de modo  $i$  e  $j$  para

os quais se tenha:

$$\omega_j - \omega_i \leq 0.1 \omega_i \quad \text{e} \quad 1 \leq i < j \leq m \quad (19)$$

Quando a resposta dos modos próximos não está em fase o método RQSQ, EQ. (16), pode ser usado. Em caso contrário, a soma absoluta, EQ. (15), deve ser usada, pelo menos para os modos próximos EQ. (17).

Observe-se que a expressão (18) contém, pelo menos, todos os termos da expressão (17) e não fornece, portanto, resultados menos conservadores.

**e) Soma dupla da NRC**

Expressa-se por

$$Q = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |Q_i Q_j| \epsilon_{ij} \right]^{1/2} \quad (20)$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \left\{ 1 + \left[ \frac{\omega_i' - \omega_j'}{\xi_i' \omega_i + \xi_j' \omega_j} \right]^2 \right\}^{-1} \quad (21)$$

$$\omega_\ell' = \omega_\ell (1 - \xi_\ell^2)^{1/2} \quad (22)$$

$$\xi_\ell' = \xi_\ell + \frac{2}{t_d \omega_\ell} \quad (23)$$

e  $t_d$  é o tempo de duração do sismo.

**f) Rosenblueth e Elorduy - R-E**

É dada por

$$Q = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Q_i Q_j \epsilon_{ij} \right]^{1/2} \quad (24)$$

com  $\epsilon_{ij}$  definido como em (21), (22) e (23). Esta expressão parece ter sido incorporada de uma maneira errônea na referência [1] da origem à expressão (20), Soma Dupla da NRC.

**g) Combinação Quadrática Completa - CQC**

Esta regra, cuja base estatística decorre das Ref. [7] e [8], expressa-se como

$$Q = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Q_i Q_j \epsilon_{ij} \right]^{1/2} \quad (25)$$

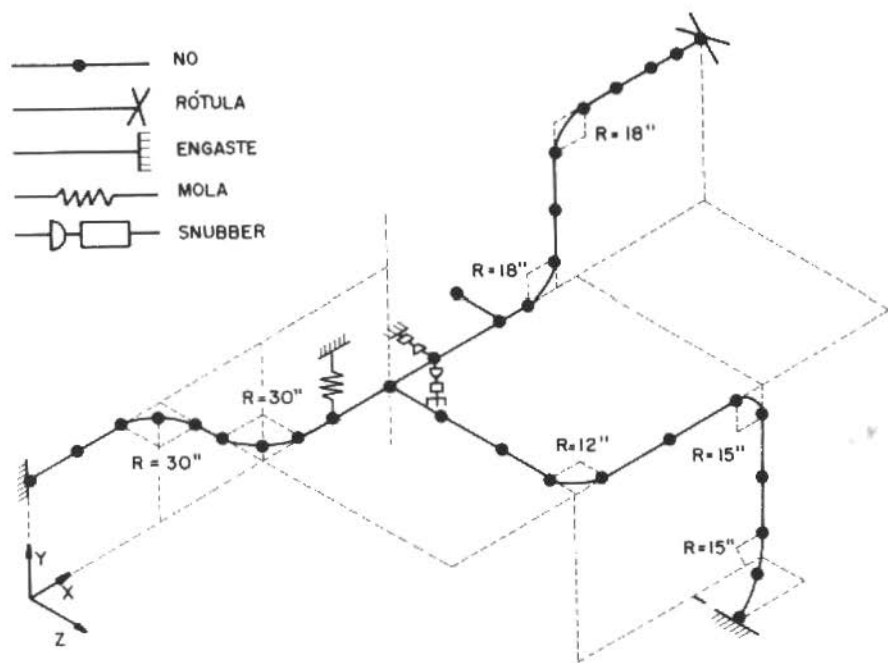


Figura 1

Tabela 1 - Frequências naturais (Hz) e valores espectrais (g) Tubulação nº 1

MODDO	$\omega$	SA( $\omega, \xi$ )	
		$\xi = 2\%$	$\xi = 4\%$
1	5.9357	0.37126	0.25787
2	7.3929	0.38289	0.29162
3	7.9808	0.29092	0.25296
4	-9.4774	0.29965	0.24152
5	11.619	0.14962	0.14207
6	13.215	0.12399	0.12035
7	15.755	0.11082	0.11222
8	17.287	0.10734	0.10842
9	20.789	0.10479	0.10351
10	23.724	0.10619	0.10389
11	25.228	0.10675	0.10330
12	26.482	0.10645	0.10293
13	39.695	0.10258	0.10233

Tabela 2 - Terremoto atuando segundo a direção X -  $\xi = 2\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	79.8	0.351	0	0	0	7.94	227.
RQSQ	2.62	0.106	66	36.5	0.7046	-26.0	47.0
RQSQ c/agr.	8.91	0.131	47	26.0	0.3971	-21.8	55.1
METODO 10%	8.91	0.131	47	26.0	0.3971	-21.8	55.1
SOMA DUPLA	6.73	0.116	48	26.5	0.4467	-21.1	53.8
R-E	1.77	0.098	83	45.9	0.5542	-21.6	45.6
CQC	1.93	0.099	82	45.3	0.5739	-21.8	45.9
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	41.2	0.221	0	0	0	3.14	137.
AM+RQSQ*	38.4	0.186	0	0	0	2.66	106.

Tabela 3 - Terremoto atuando segundo a direção Y -  $\xi = 2\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	120.	0.456	0	0	0	27.9	345.
RQSQ	3.34	0.150	56	30.9	1.7899	-32.8	65.6
RQSQ c/agr.	15.4	0.190	27	14.9	0.8622	-24.6	98.9
METODO 10%	15.4	0.190	27	14.9	0.8619	-24.6	98.9
SOMA DUPLA	9.40	0.161	31	18.2	1.1758	-27.5	78.4
R-E	3.30	0.142	55	30.4	1.5023	-30.9	66.7
CQC	3.42	0.143	54	29.8	1.5399	-31.1	66.9
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	61.6	0.284	0	0	0	7.42	205.
AM+RQSQ*	43.3	0.214	12	6.53	0.0100	-7.31	125.

Tabela 4 - Terremoto atuando segundo a direção Z -  $\xi = 2\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	123.	0.635	0	0	0	31.2	280.
RQSQ	7.58	0.169	62	34.2	1.1338	-25.9	43.6
RQSQ c/agr.	26.9	0.215	20	11.1	0.1290	-13.0	58.3
METODO 10%	27.0	0.214	19	10.5	0.1208	-13.0	58.7
SOMA DUPLA	16.4	0.193	48	25.5	0.4564	-16.3	52.7
R-E	3.35	0.129	94	51.9	0.6784	-16.8	40.1
CQC	4.21	0.135	91	50.3	0.7212	-18.4	40.9
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	65.1	0.395	0	0	0	5.00	162.
AM+RQSQ*	49.3	0.243	0	0	0	4.57	102.

Tabela 5 - Terremoto atuando segundo a direção X -  $\xi = 4\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	91.9	0.458	0	0	0	10.8	269.
RQSQ	6.30	0.153	58	32.0	1.0932	-31.0	60.6
RQSQ c/agr.	14.1	0.203	52	28.7	0.7154	-29.9	70.7
METODO 10%	14.1	0.203	52	28.7	0.7154	-29.9	70.7
SOMA DUPLA	18.8	0.207	44	24.3	0.4434	-26.5	83.1
R-E	3.45	0.115	63	34.8	0.6384	-27.5	57.2
CQC	3.68	0.118	59	32.6	0.6801	-28.0	57.6
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	49.1	0.300	0	0	0	0.79	165.
AM+RQSQ*	43.7	0.252	4	2.21	0.0065	-6.16	125.

Tabela 6 - Terremoto atuando segundo a direção Y -  $\xi = 4\%$ 

REGRA	ERRO MEDIO(%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	152.	0.718	0	0	0	34,1	472.
RQSQ	14.0	0.258	37	20.4	2.4410	-37.4	113.
RQSQ c/agr.	28.7	0.325	32	17.7	1.3056	-29.9	165.
MÉTODO 10%	28.8	0.325	32	17.7	1.3051	-29.9	165.
SOMA DUPLA	32.2	0.315	26	14.4	0.8403	-23.8	162.
R-E	12.5	0.236	39	21.5	1.7180	-32.2	119.
CQC	12.9	0.238	40	22.1	1.7361	-32.3	120.
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	82.8	0.475	0	0	0	6.37	292.
AM+RQSQ*	58.4	0.370	16	8.84	0.1329	-15.1	196.

Tabela 7 - Terremoto atuando segundo a direção Z -  $\xi = 4\%$ 

REGRA	ERRO MEDIO(%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	173.	1.055	0	0	0	29.5	482.
RQSQ	25.7	0.309	32	17.7	1.3223	-28.3	96.8
RQSQ c/agr.	50.6	0.392	25	13.8	0.1957	-14.4	141.
MÉTODO 10%	50.8	0.392	25	13.8	1.1776	-12.7	141.
SOMA DUPLA	52.6	0.416	27	14.9	0.1733	-9.82	153.
R-E	11.5	0.184	60	33.1	0.4658	-17.6	71.8
CQC	12.7	0.192	52	28.7	0.4646	-17.3	73.2
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	99.4	0.676	0	0	0	2.06	289.
AM+RQSQ*	74.3	0.430	0	0	0	1.25	173.

A segunda tubulação analisada é mais complexa e corresponde ao circuito de refrigeração de um reator do tipo PWR. O modelo discreto, Fig. 2, tem 610 graus de liberdade e foram considerados os 14 primeiros modos de vibração. A Tabela 8 apresenta as primeiras frequências naturais do modelo e os valores do espectro de acelerações do terremoto considerado, para  $\xi = 2\%$  em todos os modos. Observa-se neste caso a existência de "agrupamentos" de frequências naturais.

Os resultados relativos ao terremoto atuando segundo as direções X e Z encontram-se nas Tabelas 9 e 10, respectivamente.

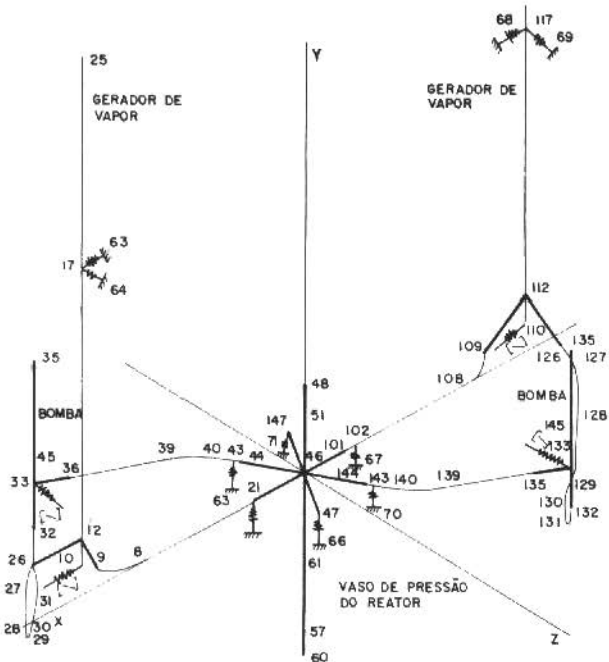


Figura 2

Tabela 8 - Frequências naturais (Hz) e valores espectrais (g)  
Tubulação nº 2

MODO	$\omega$	$SA(\omega, \xi)$ $\xi = 2\%$
1	5.5981	0.37414
2	5.7265	0.36202
3	5.7269	0.36184
4	5.7719	0.36307
5	5.9127	0.36140
6	12.088	0.15771
7	12.260	0.14474
8	13.470	0.11706
9	16.172	0.11346
10	16.217	0.11408
11	16.349	0.11525
12	17.072	0.10558
13	18.643	0.10518
14	18.731	0.10583



Tabela 9 - Terremoto atuando segundo a direção X -  $\xi = 2\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	95,3	0,683	0	0	0	7,43	333,
RQSQ	20,2	0,382	195	32,0	3,2626	-22,2	155,
RQSQ c/agr.	56,7	0,566	37	6,07	0,1757	-19,2	211,
MÉTODO 10%	56,7	0,566	37	6,07	0,1743	-19,2	211,
SOMA DUPLA	42,7	0,529	51	8,36	0,3380	-19,2	179,
R-E	2,82	0,266	349	57,2	4,9356	-25,5	138,
CQC	5,73	0,261	272	44,6	3,1662	-22,8	140,
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	56,3	0,524	2	0,33	0,0007	-1,90	244,
AM+RQSQ*	63,8	0,546	0	0	0	2,28	256,

Tabela 10 - Terremoto atuando segundo a direção Z -  $\xi = 2\%$ 

REGRA	ERRO MÉDIO (%)	DESVIO PADRÃO	ERROS NEGATIVOS	% ERROS NEGATIVOS	MOMENTO ERROS NEGATIVOS	ERRO MÍNIMO (%)	ERRO MÁXIMO (%)
SABS	62,5	0,495	0	0	0	8,95	341,
RQSQ	-0,64	0,211	376	61,6	8,1125	-27,7	99,9
RQSQ c/agr.	36,5	0,347	0	0	0	0,22	233,
MÉTODO 10%	36,7	0,348	0	0	0	3,36	233,
SOMA DUPLA	22,2	0,306	48	7,87	0,0057	-3,87	196,
R-E	2,34	0,102	266	43,6	1,6131	-30,4	43,8
CQC	1,86	0,099	315	51,6	1,0427	-22,9	43,9
$\frac{1}{2}(SABS+RQSQ)$	30,9	0,341	2	0,33	0,0001	-0,67	270,
AM+RQSQ*	34,4	0,301	0	0	0	1,45	180,

## CONCLUSÕES

Em todos os casos analisados as regras com base estatística, R-E e CQC, apresentaram praticamente os mesmos níveis de dispersão medidos pelo desvio padrão, níveis esses inferiores aos das demais regras. Em termos de erro médio os valores correspondentes às regras R-E e CQC apresentaram-se próximos e, em quase todos os casos, sensivelmente inferiores aos das demais regras.

Considerando precisão em termos de valores absolutos mínimos para o erro médio e o desvio padrão, as regras mais precisas foram R-E e CQC, seguidas da RQSQ.

A regra da soma absoluta apresentou, nos casos analisados, o maior erro médio e também a maior dispersão.

Observa-se também que o aumento do amortecimento ocasionou, em todos os casos, aumento tanto no erro médio quanto na dispersão dos resultados sendo este aumento menos sensível para R-E e CQC.

As estimativas dadas pela soma dupla da NRC para  $\xi = 2\%$  foram, em média, sempre inferiores às da RQSQ com agrupamentos e da regra de

10%, bem como apresentaram menor dispersão. Quando o amortecimento passou a 4% essa relação se inverteu.

Os resultados da regra de 10% diferiram, em média, muito pouco dos da RQSQ com agrupamentos mesmo no caso da segunda tubulação em que havia agrupamentos de frequências.

Em face desses resultados as regras R-E e CQC devem ser recomendadas para combinação modal em tubulações analisadas pelo método do espectro de resposta.

#### REFERÊNCIAS

- [1] U.S. Nuclear Regulatory Commission, Regulatory Guide 1.92 - "Combining Modal Responses and Spatial Components in Seismic Response Analysis", Feb. 1976.
- [2] Wilson, E.L.; Der Kiureghian, A.; Bayo, E.P. - "A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 187-192, 1981.
- [3] Galeão, A.C.N.R.; Barbosa, H.J.C. - "Excitação Múltipla de Suportes, Parte I: Formulação", I Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, pp. 373-397, Salvador, BA, 1980.
- [4] Wu, R.W.; Hussain, F.A.; Liu, L.K. - "Seismic Response Analysis of Structural Systems Subjected to Multiple Support Excitation", Nuclear Engineering and Design 47, pp. 273-282, 1978.
- [5] Galeão, A.C.N.R.; Barbosa, H.J.C. - "Aplicação de Técnicas Variacionais ao Problema de Estruturas com Movimento Prescrito nos Apoios", Revista Brasileira de Engenharia Mecânica, III (4) : pp. 3-12, 1981.
- [6] Clough, R.; Penzien, J. - "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Inc., 1975.
- [7] Der Kiureghian, A. - "A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 419-435, 1981.
- [8] Der Kiureghian, A. - "Structural Response to Stationary Excitation", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, pp.1195-1213, 1980.
- [9] PIPESD - "Pipe Static and Dynamic Analysis Software System", User Information Manual, Control Data Corporation, 1977.

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÃO BI-HARMÔNICA USANDO ESQUEMA TRI-DIAGONAL

Washington Braga Filho

University of Michigan - Ann Arbor, MI, USA

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - RJ, Brasil

## SUMÁRIO

*Um esquema não-acoplado e iterativo para a solução numérica de equações diferenciais de 4ª ordem é apresentado. Baseado numa formulação hermitiana, este esquema lida com a função e uma das derivadas como incógnitas. O sistema formado é tri-diagonal e pode ser eficientemente resolvido pelo método generalizado de Thomas. Com o objetivo de se estudar a equação Bi-Harmônica,  $\nabla^4 w = g$ , e reduzir o tempo de processamento em computador, um esquema de 2ª ordem de precisão ( $h^2$ ) é proposto e aplicado a dois casos típicos, um no contexto de elasticidade e outro referente a Fenômenos de Transporte.*

## INTRODUÇÃO

A necessidade de se conhecer a solução de equações bi-harmônicas é comum a diversas áreas do conhecimento. Em termo-ciências, por exemplo, por vezes se deseja analisar assintoticamente algum tipo de escoamento, em termos de parâmetros como números de Reynolds, Rayleigh ou mesmo razão de aspectos de alguma configuração (veja por exemplo (1)). Nestes casos, a equação resultante é escrita em termos da função de corrente. Em problemas de elasticidade (veja (2)), este tipo de equação é mais comum, com a variável sendo o deslocamento. Naturalmente, a complexidade das equações resultantes impede a obtenção de soluções exatas para os casos de interesse, de modo que soluções aproximadas são procuradas.

O presente trabalho apresenta uma formulação hermitiana para a solução numérica daquelas equações. Dependendo da forma da equação (e das condições de con-

torno disponíveis), são possíveis esquemas de diferentes ordens de precisão. Dois deles são apresentados para uma equação diferencial ordinária e em seguida, a equação Bi-Harmônica é discutida neste contexto.

#### EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A forma mais geral de uma equação deste tipo é  $f^{IV} = f^{IV}(f''', f'', f', f)$ . Neste trabalho, por simplicidade, vai-se supor a inexistência da 3ª derivada. A sua consideração não apresenta dificuldades especiais, conforme deve ficar claro a seguir. Assim, a forma geral de interesse se reduz a:

$$f^{IV} = f^{IV}(f'', f', f) \quad (1)$$

A formulação hermitiana originalmente proposta por Kreiss [3] para a solução de equações diferenciais de 2ª ordem considera a função e as duas primeiras derivadas como incógnitas. Como este procedimento mostrou-se computacionalmente lento, como é discutido por Braga [4], neste trabalho considera-se apenas a função e uma das derivadas como incógnitas, reduzindo sensivelmente o tempo de computação. O esquema resultante é compatível com a formulação proposta para as equações Bi-Harmônicas, como é discutido adiante.

Em geral, não se pretende conhecer localmente a derivada de mais alta ordem e, assim o primeiro passo é a sua eliminação da equação diferencial. Isto é feito por meio de uma expansão em série de Taylor, envolvendo a função e uma das derivadas ( $f''$  ou  $f'$ ) em uma relação tri-diagonal, isto é, envolvendo os nós  $i$  e  $i \pm 1$ . A obtenção de uma relação deste tipo é apresentada no apêndice I e em termos da 1ª derivada se escreve:

$$f_i^{IV} = \frac{1}{h^4} \left[ 24 f_i - 12 f_{i+1} - 12 f_{i-1} \right] + \frac{6}{h^3} \left[ f'_{i+1} - f'_{i-1} \right] \quad (2)$$

ou como se segue em termos da 2ª derivada:

$$f_i^{IV} = \frac{1}{h^2} \left[ f''_{i-1} + f''_{i+1} - 2 f''_i \right] \quad (3)$$

Embora relações de ordem superior possam ser obtidas (envolvendo  $f^{IV}, f'', f', f$ ), dificuldades com condições de contorno e com tempo de processamento tornam seu uso pouco eficiente na maior parte dos casos.

O próximo passo na redução de incógnitas é a eliminação da primeira ou segunda derivada, usando o mesmo princípio (as relações necessárias são apresentadas por Hirsh [5] e estão reproduzidas no apêndice I). A escolha entre as relações (2) e (3), isto é, a escolha da derivada a ser eliminada vai depender não

são do tipo de equação diferencial em estudo mas também das condições de contorno disponíveis.

Com a eliminação das derivadas de mais alta ordem, substitui-se a equação diferencial original por uma série de equações algébricas relacionando a função e uma das derivadas em três nós adjacentes,  $i$  e  $i \pm 1$ . Como são duas incógnitas por nó, há necessidade de uma outra equação que as relacione e que é obtida ainda por meio de uma expansão em série de Taylor. Como indicado por Hirsh [5], tais relações podem ser escritas:

$$f'_{i+1} + 4 f'_i + f'_{i-1} = \frac{3}{h} [f_{i+1} - f_{i-1}] \quad (4)$$

ou

$$f''_{i+1} + 10 f''_i + f''_{i-1} = \frac{12}{h^2} [f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}] \quad (5)$$

#### CONDIÇÕES DE COTORNO

Uma das desvantagens dos métodos hermitianos diz respeito à necessidade de se ter condições de contorno para  $f$  e  $f'$  (ou  $f''$ ) e nem sempre elas são disponíveis. Novamente, a solução é o uso de relações como as anteriores, como foi originalmente proposto por Hirsh. Como é mostrado por Braga [4], isto aumenta o erro mas não afeta a sua ordem.

Em resumo, o método proposto é baseado em um esquema tri-diagonal em bloco de 2, podendo ser resolvido por meio do método generalizado de Thomas [6]. O método resultante é de  $O(h^2)$  de precisão, com o erro de truncamento dependendo da derivada de 6ª ordem (veja apêndice I). Uma aplicação direta da formulação aqui apresentada é referente ao estudo da estabilidade de escoamentos viscosos através de equações como a proposta por Orr-Sommerfeld.

Na próxima seção é discutida a aplicação do método para a obtenção de solução para as equações Bi-Harmônicas. Diferentes condições de contorno são analisadas e em seguida, são apresentados alguns resultados numéricos.

#### EQUAÇÃO BI-HARMÔNICA

Um dos métodos clássicos de solução deste tipo de equação utiliza a linearidade da mesma. Introduzindo-se nova variável  $u$ , de forma que se:

$$\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w) = g$$

tem-se

$$\nabla^2 w = u \quad (6)$$

e

$$\nabla^2 u = g \quad (7)$$

Como se vê, a equação original é substituída por um sistema de 2 equações de Poisson que podem ser resolvidas sequencialmente desde que as condições de contorno para  $w$  e  $u$  sejam disponíveis. Frequentemente, este não é o caso (veja [2]) e então o sistema formado por (6) e (7) deve ser resolvido iterativamente. Uma primeira vantagem do método hermitiano proposto diz respeito a maior facilidade de lidar com condições de contorno.

Embora métodos com ordem mais elevada de erro de truncamento possam ser genericamente obtidos para uma equação diferencial ordinária, a presença da derivada cruzada na equação Bi-Harmônica impede tal fato. Neste caso, o método resultante será necessariamente de 2ª ordem (supondo-se um esquema tri-diagonal). A eliminação das quartas derivadas já foi discutida e para a derivada cruzada, sugere-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{w_{yy}(i+1,j) + w_{yy}(i-1,j) - 2 w_{yy}(i,j)}{h_x^2} \quad (8)$$

ou

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{w_{xx}(i,j+1) + w_{xx}(i,j-1) - 2 w_{xx}(i,j)}{h_y^2} \quad (9)$$

Já que ambas as relações são de ordem  $h^2$ , a escolha dependerá do problema físico em estudo. De qualquer forma, o sistema resultante poderá ser resolvido por meio do método de direções alternadas (ADI) ou do método fortemente implícito (SIP). No presente trabalho, optou-se pelo primeiro e no apêndice II alguns detalhes específicos são apresentados.

#### ESTABILIDADE DO MÉTODO

Um dos problemas acadêmicos típicos na área de elasticidade é o da deformação de uma placa quadrada com apoio simples. Pode ser visto (por exemplo, em [2]) que as condições de contorno são do tipo generalizado de Dirichlet ( $w = 0$  e  $w'' = 0$ ). Supondo uma largura unitária e um carregamento uniforme  $P_0$  tem-se que a deformação máxima é:

$$w_{\max} = 0,00406 P_0$$

A Figura 1 apresenta o perfil erro X tamanho de malha para a deformação máxima. P perfil pe nitidamente de ordem  $h^2$ .

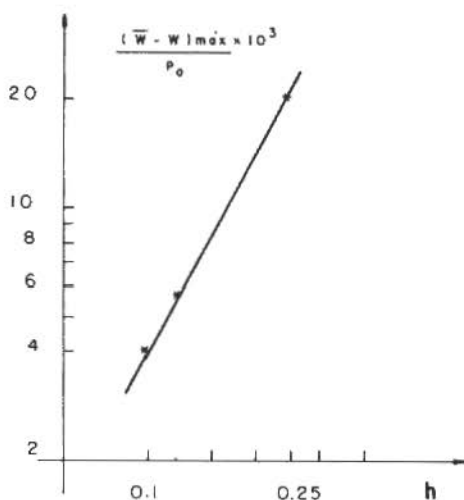


Figura 1. Perfil de erro na deformação máxima (Teste 1)

Embora o esforço computacional seja maior que para a solução convencional discutida em Carnahan et al [8], deve-se notar que adicional informação é obtida por este método. Além da função, as segundas derivadas  $w_{xx}$  e  $w_{yy}$  são ainda obtidas, ao contrário do que ocorre com a outra formulação, onde apenas a soma delas é calculada. Assim, os momentos  $M_x$  e  $M_y$  podem ser calculados.

#### DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE EM FENÔMENOS DE TRANSPORTE

Em expansões assintóticas como feitas em [1] por exemplo, a análise de 1ª ordem se refere à solução de equações do tipo:

$$\nabla^4 \psi = \partial \theta_k / \partial y$$

onde  $\psi$  é a função de corrente e  $\theta_k$  é o perfil de temperaturas, obtido na ordem zero, isto é, no regime de condução pura. Em casos com este, a informação disponível no contorno é referente à função  $\psi$  e às velocidades  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ , onde  $\eta$  é a direção normal ao contorno. Como antes, a presença da derivada cruzada implica na eliminação da 4ª derivada por meio da relação (3), de forma que uma condição para a 2ª derivada no contorno é necessária. Como citado anteriormente, Hirsh [5] sugeriu o uso de relações entre as variáveis escritas nos dois nós adjacentes ao contorno. De interesse ao tipo de problema em questão é:

$$\psi_i - \psi_{i+1} + h \psi'_i + \frac{h^2}{6} (2 \psi''_i + \psi''_{i+1}) + O(h^4) = 0 \quad (10)$$

Devido à condição de não-deslizamento, a velocidade do fluido junto a parede,  $\psi'_1$ , é conhecida e então a equação (10) pode ser usada para definir o sistema. Como antes, o uso de uma relação entre as variáveis ao invés de uma condição especificada para  $\psi'_1$  aumenta a incerteza na solução. Isto pode ser minimizado pelo uso de malhas mais finas junto ao contorno ou pelo uso de correções a posteriori, como discutido por Braga [4].

Uma vez que o processo iterativo tenha convergido, obtêm-se a distribuição de  $\psi$ ,  $\psi_{xx}$  e  $\psi_{yy}$ . Como o desejado é o campo de velocidades que é expresso pelas primeiras derivadas, adicional cálculo é necessário. Dentre as várias opções existentes para o seu cálculo, a que melhor resultado deu foi a relação (10) acima. A Figura 2 apresenta o perfil do erro referente a velocidade para o teste definido por:

$$\nabla^4 \psi = G(x,y)$$

onde a função de corrente é definida por:

$$\psi = C [x(x-1)]^2 (1 - \cos 2\pi y)$$

e sujeita às condições generalizadas de Dirichlet,  $\psi = 0 = \psi'$

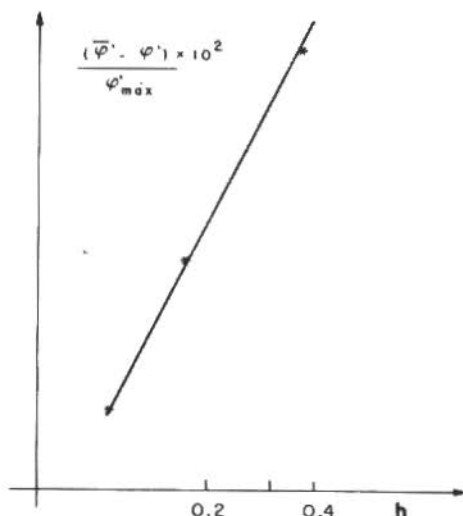


Figura 2. Perfil de erro na velocidade máxima (Teste 2)



## COMPARAÇÃO COM OUTRO MÉTODO

Recentemente Gupta e Manohar [9] apresentaram um método não acoplado (como o presente) e não iterativo para a solução numérica de equações Bi-Harmônicas. Naturalmente, a relação algébrica relacionando os nós é bastante complexa, implicando numa matriz de coeficientes com extensa largura de banda e necessitando de muito espaço de armazenamento. A metodologia proposta aqui não tem esta limitação e conforme a Tabela 1, apresenta resultados comparáveis, ao menos nos casos estudados. Como os resultados aqui apresentados foram obtidos num micro-computador, informação sobre tempo de CPU não foi obtida.

TABELA 1 - Resultados Comparativos

Caso 1:		
solução exata: $u = x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2$		
		Máximo erro relativo
Gupta e Manohar	* (2,1) **	0,47 %
Método proposto		0,27 %
Caso 2:		
solução exata: $u = (1 - \cos 2\pi x)(1 - \cos 2\pi y)$		
		Máximo erro relativo
Gupta e Manohar	(2,1) **	1,5 %
Gupta e Manohar	(4,9) **	0,5 %
Método proposto		0,7 %

## OUTRAS APLICAÇÕES

Uma aplicação de interesse imediato do método proposto se refere à solução da equação Bi-Harmônica resultante das equações de Navier-Stokes. Tal procedimento tem sido estudado pelo autor [10] e os resultados iniciais tem sido interessantes. Como se sabe, a maior parte dos métodos utilizados envolve a determinação numérica da vorticidade no contorno. Como isto envolve diferenciação numérica, o procedimento é naturalmente instável (veja P. Roache [11]) e exige intenso relaxamento dos valores obtidos para convergência. Além de não necessitar da vorticidade, o presente método tem a vantagem de lidar com as condições de contorno totalmente conhecidas e ser estável.

\* Referência [9]. Método direto e não-acoplado.

\*\* Número entre parênteses se refere ao tipo de fórmula usada no contorno.

## OBSERVAÇÕES FINAIS

Um método hermitiano foi apresentado para a solução de equações Bi-Hermônicas. Diversos outros esquemas são ainda possíveis e o apresentado aqui é um dos mais convenientes. Embora de menor precisão que os métodos hermitianos empregados na solução de equações de 2ª ordem, o presente método determina também a função e uma das derivadas diretamente, possibilitando um tratamento eficaz das condições de contorno. Resultados obtidos tem mostrado a eficácia da formulação proposta em diferentes situações.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido durante o doutoramento do autor na Universidade de Michigan, Ann Arbor. Desta forma, o indispensável apoio financeiro do CNPq e da PUC/RJ é agradecido. Da mesma forma, o autor agradece o uso do micro-computador pertencente ao Laboratório de Interferometria do Prof. C.M. Vest.

## REFERÊNCIAS

- [1] G.K. Batchelor, *Quart. Appl. Math.*, 12, 209 (1954).
- [2] A.C. Ugural, *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] S.A. Orszag e M. Israeli, *Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows*, in *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 6, 1974.
- [4] W. Braga, "An efficient Super Compact Method for second order differential equations", em preparação.
- [5] R.S. Hirsh, *J. Comp. Phys.* 19, 90-109 (1975).
- [6] Von Rosemberg, *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, American Elsevier, N.Y. 1969.
- [7] P. Bontoux, B. Gilly e B. Roux, *J. Comp. Phys.* 36, 417 (1980).
- [8] B. Carnahan, H.A. Luther e J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley, 1969.
- [9] M.M. Gupta e R.P. Manohar, *J. Comp. Phys.* 33, 236 (1979).
- [10] W. Braga, Tese de doutoramento, The University of Michigan, em preparação.
- [11] P.J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, N.M. 1976.

## APENDICE I

Como discutido no texto, a obtenção de relações como (2) ou (3) é feita por meio de Série de Taylor. O objetivo é a determinação dos coeficientes de uma expressão como:

$$a u_i + b u_{i-1} + c u_{i+1} + d h F_i + e h F_{i-1} + g h F_{i+1} + h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} + o(h^n) = 0$$

onde  $u$  é a função e  $f$ , a primeira derivada, por exemplo. Expandindo  $u_{i\pm 1}$  e  $f_{i\pm 1}$  em torno de  $u_i$  e  $f_i$ , obtêm-se:

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm F_i h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h^3}{6} + \dots$$

$$F_{i\pm 1} = F_i \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{h^3}{6} + \dots$$

Substituindo-se estas expansões na relação anterior, obtêm-se um sistema de 6 equações a 6 incógnitas ( $a+g$ ), que para uma malha uniforme tem por solução:

$$\begin{array}{ll} a = -24 & d = 0 \\ b = 12 & e = 6 \\ c = 12 & f = -6 \end{array}$$

e assim, a expressão (2) é determinada e o erro de truncamento é:

$$E_t = \frac{h^2}{15} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$$

Eliminação da 1ª derivada:

$$g_i - g_{i+1} + g_i' h + \frac{h}{6} (2 g_i'' + g_{i+1}'') + O(h^4) = 0$$

Eliminação da 2ª derivada:

$$g_i - g_{i+1} + \frac{h}{8} (2 g_i' + g_{i+1}') + \frac{h^2}{6} (g_i'') + O(h^4) = 0$$

## APÊNDICE II

Como se sabe, o método de direções alternadas é mais eficiente que o método fortemente implícito desde que convenientes parâmetros de aceleração sejam obtidos. Como este foi o caso no presente estudo, resolveu-se sugerir seu uso, de forma que o mesmo método generalizado de Thomas pudesse ser utilizado. A dificuldade adicional do emprego daquele método é referente à consideração da derivada cruzada. Um estudo numérico feito indicou que a maneira mais eficiente para a sua consideração consiste no parcelamento do termo, como melhor indicado abaixo:

Considere:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{w_{xx}(i,j+1) + w_{xx}(i,j-1) - 2 w_{xx}(i,j)}{h_y^2}$$

na 1ª etapa do método,  $w^*$ , tem-se:

$$\rho_n (w^* - w^n) + \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} - \frac{4 w_{xx}^*(i,j)}{h_y^2} = - \frac{\partial^4 w^n}{\partial y^4} - \frac{2}{h_y^2} \left[ w_{xx}^n(i,j+1) + w_{xx}^n(i,j-1) \right]$$

e, na etapa final,  $n+1$ , tem-se:

$$\rho_n (w^{n+1} - w^*) + \frac{\partial^4 w^{n+1}}{\partial y^4} + \frac{2}{h_y^2} \left[ w_{xx}^{n+1}(i,j+1) + w_{xx}^{n+1}(i,j-1) \right] = - \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + \frac{4 w_{xx}^*}{h_y^2}$$

Aqui, como os termos  $w_{xx}^{n+1}(i,j\pm 1)$  não são conhecidos, tem-se várias opções:

$$w_{xx}^{n+1}(i,j\pm 1) = \alpha w_{xx}^n + (1-\alpha) w_{xx}^*$$

O estudo numérico indicou que  $\alpha = 1$  garante uma convergência mais rápida. Esta é uma questão ainda em estudo, porém.

# ANÁLISE DINÂMICA ELASTOPLÁSTICA DE TUBULAÇÕES

**Djalma Veloso Filho**

Fundação Universidade Federal do Piauí

**Abimael Dourado Loula**

**João Nisan Guerreiro**

LCC/CNPq

## SUMÁRIO

*Apresenta-se um modelo para análise estrutural de tubulações espaciais, constituídas por material de comportamento elastoplástico perfeito e sujeitas a solicitações dependentes do tempo. Admite-se a hipótese das seções planas e desprezam-se as deformações associadas ao esforço cortante. A redução ao modelo unidimensional (teoria de vigas) é feita através de uma integração numérica na seção transversal, verificando-se o critério de plasticidade e a lei de fluência nos pontos de integração da seção. A discretização espacial é feita utilizando-se o Método dos Elementos Finitos e para a integração no tempo das equações do movimento utiliza-se um algoritmo de diferenças finitas incondicionalmente estável.*

## INTRODUÇÃO

Principalmente em tubulações nucleares, ocorrem situações em que uma análise dinâmica elastoplástica é necessária. Por exemplo, no caso do problema do chicoteamento de tubulações onde a consideração das deformações plásticas, tanto da tubulação quanto dos seus suportes, possibilitam uma melhor avaliação da capacidade de dissipação de energia do sistema. Nos casos de análise sísmica e de resposta a transientes termo hidráulicos, o confronto entre a análise dinâmica elastoplástica e uma análise puramente elástica, pode dar maiores informações sobre o comportamento dinâmico da estrutura.

Neste trabalho, apresenta-se um modelo para análise dinâmica elasto-plástica de estruturas aperticadas. O modelo é obtido partindo-se de uma formulação geral do problema da plasticidade e das hipóteses clássicas da teoria de vigas.

A solução do problema é obtida numericamente utilizando-se um algoritmo de diferenças finitas incondicionalmente estável para a discretização no tempo. Para a discretização espacial, utilizou-se o método dos elementos finitos através de um elemento de viga/tubo de eixo reto, com seis graus de liberdade por nó.

Finalmente, o procedimento apresentado foi implementado no SISTEMA TUBO e com o objetivo de testá-lo, apresentam-se alguns resultados de exemplos analisados.

#### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Apresenta-se aqui, inicialmente, a formulação geral do problema da dinâmica de corpos elasto-plásticos, na forma do Princípio dos Trabalhos Virtuais. A seguir, utilizando-se as hipóteses clássicas da teoria de vigas, reduz-se este problema a um problema unidimensional (teoria elasto-plástica de vigas).

Dinâmica de Corpos Elastoplásticos - Na forma do Princípio dos Trabalhos Virtuais, a equação de movimento de um corpo  $\underline{B}$ , de densidade de massa  $\rho$ , sujeito a campos de forças de massa  $\underline{b}$  e forças de superfície  $\underline{t}$ , é:

$$\int_{\underline{B}} \rho \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dv + \int_{\underline{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \, dv = R \quad (1)$$

onde  $\hat{R} = \int_{\underline{B}} \underline{b} \cdot \underline{\hat{u}} \, dv + \int_{\partial \underline{B}} \underline{t} \cdot \underline{\hat{u}} \, dA$  representa o trabalho virtual das forças externas (excluídas as forças de inércia),  $\underline{\hat{u}}$  representa o campo de deslocamentos virtuais compatível com os vínculos do corpo,  $\underline{\sigma}$  o tensor de tensões e  $\underline{\hat{\epsilon}}$  o tensor de deformações virtuais, da do por:

$$\underline{\hat{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla \underline{\hat{u}} + (\nabla \underline{\hat{u}})^T]$$

No caso de materiais com comportamento elasto-plástico, a deformação  $\underline{\epsilon}$  se decompõe em:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p$$

onde  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  é a parcela da deformação elástica e  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  é a parcela da deformação plástica.

A equação constitutiva elastoplástica do material é obtida a partir das hipóteses seguintes:

a) todo incremento de tensão é devido apenas a incrementos de deformações elásticas, ou seja,

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^e d\underline{\underline{\epsilon}}^e$$

onde  $\underline{\underline{D}}^e$  representa o tensor de elasticidade;

b) existe uma função convexa  $F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, k)$ , chamada função de fluência ou convexo de plasticidade, tal que os estados possíveis do corpo se caracterizam por  $F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, k) \leq 0$ , sendo o início da plastificação caracterizado por  $F(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, k) = 0$ . O parâmetro  $k$  está relacionado com o endurecimento e geralmente depende das deformações plásticas;

c) existe um potencial plástico  $G$ , tal que  $d\underline{\underline{\epsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ .

No caso de lei de fluência associativa,  $G \equiv F$  e tem-se:

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

A partir das hipóteses acima, a equação constitutiva incremental, que relaciona incrementos de tensão com incrementos de deformação totais, é ([1],[2],[3]):

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{ep} d\underline{\underline{\epsilon}} \quad (2)$$

onde

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \underline{\underline{D}}^e - \frac{\underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{Q}} \otimes \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{Q}}}{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{Q}}} \quad (3)$$

sendo

$$\underline{\underline{P}} = - \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^p} \quad \underline{\underline{Q}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

Modelo Elastoplástico para Vigas – Para a adaptação da formulação apresentada no item anterior ao caso de vigas, admite-se que as únicas componentes do tensor de tensões não nulas sejam  $\sigma_x$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{xz}$ , sendo  $x$  o eixo da viga e  $y, z$  eixos ortogonais situados no plano da seção transversal.

Desta forma a equação constitutiva elastoplástica é particularizada fazendo-se uma condensação estática para que sejam consideradas apenas as tensões não nulas e as deformações correspondentes. Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{xy} \\ d\sigma_{xz} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{\sim 11}^{ep} & \mathbb{D}_{\sim 12}^{ep} \\ \hline \mathbb{D}_{\sim 21}^{ep} & \mathbb{D}_{\sim 22}^{ep} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_{xx} \\ d\epsilon_{xy} \\ d\epsilon_{xz} \\ \vdots \\ d\epsilon_{yy} \\ d\epsilon_{zz} \\ d\epsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

resulta portanto que

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{xy} \\ d\sigma_{xz} \end{pmatrix} = \bar{\mathbb{D}}_{\sim 11}^{ep} \begin{pmatrix} d\epsilon_{xx} \\ d\epsilon_{xy} \\ d\epsilon_{xz} \end{pmatrix}$$

sendo

$$\bar{\mathbb{D}}_{\sim 11}^{ep} = \mathbb{D}_{\sim 11}^{ep} - \mathbb{D}_{\sim 12}^{ep} (\mathbb{D}_{\sim 22}^{ep})^{-1} \mathbb{D}_{\sim 21}^{ep}$$

Uma vez que o tensor de elastoplasticidade  $\bar{\mathbb{D}}_{\sim 11}^{ep}$  depende das tensões atuantes em cada ponto, a redução ao modelo unidimensional não pode ser feita imediatamente como no caso em que o material tem comportamento elástico. Utilizou-se então um procedimento de integração numérica na seção transversal, com pontos de integração igualmente espaçados ao longo da seção. O número de pontos de integração deve ser definido de forma adequada a cada problema a ser resolvido.



## MÉTODO NUMÉRICO DE RESOLUÇÃO

Tendo em vista que o problema apresentado não possui solução fechada, serão utilizadas técnicas numéricas para a obtenção de soluções aproximadas. Optou-se por uma discretização de diferenças finitas no tempo, e uma discretização de elementos finitos no domínio espacial.

Discretização no Tempo — Como já ressaltado anteriormente as equações do movimento são resolvidas através de um algoritmo de diferenças finitas incondicionalmente estável [4].

Para a obtenção da forma deste algoritmo, parte-se da equação (1):

$$\int_{\mathbb{B}} \rho \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dv + \int_{\mathbb{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \, dv = \bar{R}$$

Chamando  $\underline{\sigma}_0$  a diferença entre a tensão atuante em determinado instante e a tensão que atuaria se o estado de deformação fosse totalmente elástico, tem-se:

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{\sigma} - \mathbb{D}^e \underline{\epsilon}$$

e substituindo em (1), vem:

$$\int_{\mathbb{B}} \rho \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{\hat{u}} \, dv + \int_{\mathbb{B}} (\mathbb{D}^e \underline{\epsilon} + \underline{\sigma}_0) \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \, dv = \bar{R}$$

Particularmente a equação acima para o instante  $n$  e usando a aproximação

$$(\underline{\epsilon})_n = \theta \underline{\epsilon}_{-n+1} + (1-2\theta) \underline{\epsilon}_n + \theta \underline{\epsilon}_{-n-1}$$

onde  $0 < \theta < \frac{1}{2}$  é um escalar, segue que:

$$\int_{\mathbb{B}} \rho \underline{\ddot{u}}_n \cdot \underline{\hat{u}} \, dv + \int_{\mathbb{B}} \left\{ \mathbb{D}^e \left[ \theta \underline{\epsilon}_{-n+1} + (1-2\theta) \underline{\epsilon}_n + \theta \underline{\epsilon}_{-n-1} \right] + \underline{\sigma}_{0n} \right\} \cdot \underline{\hat{\epsilon}} \, dv = \bar{R}_n$$

e introduzindo a aproximação de diferenças finitas

$$\underline{\ddot{u}}_n = \frac{u_{-n+1} - 2u_n + u_{-n-1}}{\Delta t^2}$$

juntamente com

$$\underline{\sigma}_{0n} = \underline{\sigma}_n - \mathbb{D}^e \underline{\epsilon}_n$$

chega-se a

$$\int_{\mathbb{B}} \rho \underline{u}_{n+1} \cdot \underline{\bar{u}} \, dV + \theta \Delta t^2 \int_{\mathbb{B}} \underline{\mathbb{D}}^e \underline{\varepsilon}_{n+1} \cdot \underline{\bar{\varepsilon}} \, dV = \Delta t^2 (\hat{R}_n - \int_{\mathbb{B}} \underline{\sigma}_{-n} \cdot \underline{\bar{\varepsilon}} \, dV) + \\ + \int_{\mathbb{B}} \rho (2\underline{u}_{-n} - \underline{u}_{n-1}) \cdot \underline{\bar{u}} \, dV + \theta \Delta t^2 \int_{\mathbb{B}} \underline{\mathbb{D}}^e (2\underline{\varepsilon}_{-n} - \underline{\varepsilon}_{n-1}) \cdot \underline{\bar{\varepsilon}} \, dV \quad (4)$$

Como indica a expressão acima, a resolução em cada passo requer o conhecimento das tensões  $\underline{\sigma}_{-n}$  referentes ao passo anterior. Para isto, torna-se necessária a atualização do estado de tensões o que é feito da seguinte forma:

a) calcula-se o incremento de deformações, através de

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{-n} = \underline{\varepsilon}_{-n} - \underline{\varepsilon}_{n-1}$$

b) supõe-se comportamento elástico e calcula-se

$$\Delta \underline{\sigma}_{-n} = \underline{\mathbb{D}}^e \Delta \underline{\varepsilon}_{-n}$$

c) determina-se a tensão em n (supondo comportamento elástico):

$$\underline{\sigma}_{-n}^* = \underline{\sigma}_{n-1} + \Delta \underline{\sigma}_{-n}$$

d) calcula-se o valor da função de fluência  $F$  para o estado  $\underline{\sigma}_{-n}^*$ . Podem ocorrer os casos seguintes:

- 1-  $F(\underline{\sigma}_{-n}^*) \leq 0$  e portanto a hipótese de comportamento elástico é verificada. Faz-se então  $\underline{\sigma}_{-n} = \underline{\sigma}_{-n}^*$ .
- 2-  $F(\underline{\sigma}_{-n}^*) > 0$ , quando deve-se verificar se o estado anterior era plástico ou não.

Se o estado anterior era plástico,  $F(\underline{\sigma}_{n-1}) = 0$ , todo o incremento de deformação foi elasto-plástico e deve-se seguir para a etapa (f), com  $\underline{\sigma}_{-n}^* = \underline{\sigma}_{n-1}$ .

Se o estado anterior era elástico, houve uma transição de um estado elástico para um estado elasto plástico. Neste caso, a deformação total compõe-se de uma parte totalmente elástica  $\Delta \underline{\varepsilon}_{-n}^e = \gamma \Delta \underline{\varepsilon}_{-n}$  e uma parte elasto-plástica  $\Delta \underline{\varepsilon}_{-n}^{eP} = (1 - \gamma) \Delta \underline{\varepsilon}_{-n}$ , onde  $0 \leq \gamma \leq 1$  satisfaz a

$$F(\underline{\sigma}_{n-1} + \gamma \Delta \underline{\sigma}_{-n}) = 0$$

e) redefine-se  $\underline{\sigma}_n^*$  como o estado de tensão correspondente ao início da plastificação:

$$\underline{\sigma}_n^* = \underline{\sigma}_{n-1} + \gamma \Delta \underline{\sigma}_n$$

f) para a obtenção do valor final de  $\underline{\sigma}_n$ , deve-se adicionar a  $\underline{\sigma}_n^*$  as tensões correspondentes ao incremento elastoplástico  $\Delta \underline{\epsilon}^{ep}$ . Tendo em vista que a lei do material depende das tensões atuais, divide-se  $\Delta \underline{\epsilon}^{ep}$  em intervalos iguais e  $\underline{\sigma}_n^*$  é atualizado em cada intervalo, usando-se a matriz  $\underline{D}^{ep}$  correspondente ao último estado de tensão. Ao final, faz-se  $\underline{\sigma}_n = \underline{\sigma}_n^*$ .

Discretização Espacial – A discretização espacial, através do Método dos Elementos Finitos, é feita através de um elemento de dois nós, com seis graus de liberdade por nó, conforme indica a figura abaixo.

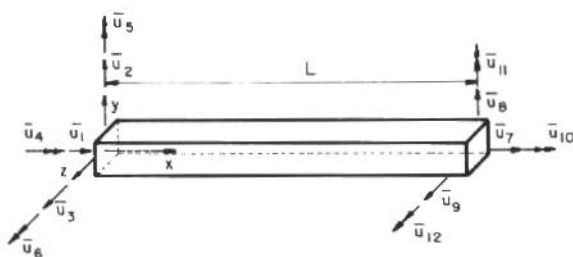


Fig. 1. Elemento finito utilizado na discretização espacial

O campo de deslocamentos assumido tem a forma:

$$u_1 = u_1(x, y, z) = \sum_{i=1}^{12} h_i^x \bar{u}_i$$

$$u_2 = u_2(x, z) = \sum_{i=1}^{12} h_i^y \bar{u}_i$$

$$u_3 = u_3(x, y) = \sum_{i=1}^{12} h_i^z \bar{u}_i$$

sendo as funções de interpolação  $h_i^x$ ,  $h_i^y$ ,  $h_i^z$  construídas de modo que não há a consideração da deformação por cortante, as seções pla

nas antes da deformação permanecem planas após a deformação, não havendo empenamento devido à torção.

Estas funções são enumeradas a seguir; em termos dos polinômios de Hermite:

(i) direção x:

$$h_1^x = 1 - \frac{x}{L}$$

$$h_2^x = -6 \phi_4(x) \frac{xy}{L}$$

$$h_3^x = -6 \phi_4(x) \frac{xz}{L}$$

$$h_4^x = h_{10}^x = 0$$

$$h_5^x = \phi_2'(x)z$$

$$h_6^x = \phi_2'(x)y$$

$$h_7^x = \frac{x}{L}$$

$$h_8^x = -h_2^x$$

$$h_9^x = -h_3^x$$

$$h_{11}^x = \phi_4'(x)z$$

$$h_{12}^x = -\phi_4'(x)y$$

(ii) direção y:

$$h_i^y = 0 \text{ para } i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$$

$$h_2^y = \phi_1(x)$$

$$h_4^y = \left(\frac{x}{L} - 1\right)z$$

$$h_6^y = \phi_2(x)$$

$$h_8^y = \phi_3(x)$$

$$h_{10}^y = -\frac{x}{L}z$$

$$h_{12}^y = \phi_4(x)$$

(iii) direção z:

$$h_i^z = 0 \text{ para } i = 1, 2, 6, 7, 8, 12$$

$$h_3^z = \phi_1(x)$$

$$h_4^z = \left(1 - \frac{x}{L}\right)y$$

$$h_5^z = -\phi_2(x)$$

$$h_9^z = \phi_3(x)$$

$$h_{10}^z = \frac{x}{L}y$$

$$h_{11}^z = -\phi_4(x)$$

onde as funções polinomiais de Hermite são dadas por:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$\phi_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$\phi_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$\phi_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Determinadas as funções de interpolação, são feitas as operações usuais do Método dos Elementos Finitos sobre a equação (4), resultando o seguinte sistema de equações algébricas.

$$(\underline{M} + \theta \Delta t^2 \underline{K}) \underline{U}_{-n+1} = (\underline{M} + \theta \Delta t^2 \underline{K})(2\underline{U}_{-n} - \underline{U}_{-n-1}) + \Delta t^2 (\underline{F}_{-n} - \underline{P}_{-n})$$

onde  $\underline{M}$  é a matriz de massa,  $\underline{K}$  a matriz de rigidez,  $\underline{U}_{-n}$  o vetor dos deslocamentos nodais no instante  $n$ ,  $\underline{F}_{-n}$  o vetor de forças externas no instante  $n$  e  $\underline{P}_{-n}$  o vetor de forças internas resultante da discretização do termo relativo às tensões  $\sigma_{-n}$ .

## RESULTADOS

Com o objetivo de testar o procedimento desenvolvido e implementado no SISTEMA TUBO, alguns exemplos foram analisados e são apresentados aqui resultados relativos a três estruturas distintas: uma viga simplesmente apoiada, uma tubulação plana e uma tubulação espacial.

Em todos os casos admite-se que o material tem comportamento elasto-plástico perfeito e utilizou-se o critério de plasticidade de von Mises.

Viga Simplesmente Apoiada — Foi obtida a resposta de uma viga bi-apoiada com um carregamento uniformemente distribuído, aplicado instantaneamente, e com intensidade igual a 75% da carga estática de plastificação total da seção a meio vão.

Na discretização espacial foram utilizados 6 elementos de igual comprimento e considerada a simetria da estrutura. Para a discretização do tempo utilizou-se um intervalo de integração  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$  s. As características geométricas e as propriedades físicas do mate-

rial da viga estão indicados na Fig. 2, onde são apresentadas as histórias no tempo do deslocamento a meio vão, correspondentes à resposta elástica e elasto-plástica do material. A resposta elasto-plástica obtida com o programa TUBO é comparada com resultados apresentados na referência [1].

É interessante observar que [1] utiliza um modelo bi-dimensional no qual a viga é simulada como um estado plano de tensões, usando 6 elementos finitos isoparamétricos quadráticos com um total de 50 graus de liberdade. Este modelo automaticamente considera os efeitos devidos a deformação por corte e inércia de rotação o que não acontece com o modelo de viga aqui apresentado.

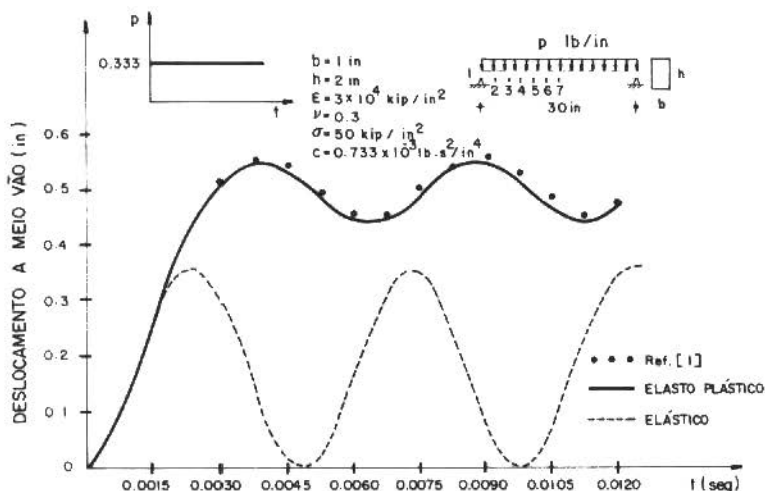


Fig. 2. História dos deslocamentos a meio vão de uma viga bi-apoiada

Tubulação Plana – As propriedades físicas e geométricas da estrutura, o carregamento aplicado e o modelo de elementos finitos utilizado neste exemplo, estão apresentados na Fig. 3. Utilizou-se  $\Delta t = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$ .

A história no tempo do deslocamento vertical do nó 4, obtida com o TUBO, considerando-se um comportamento elasto-plástico do material, é comparada com as histórias apresentadas nas referências [7] e [8], obtidas através do programa ANSYS e com o programa desenvolvido pelos autores destas referências.

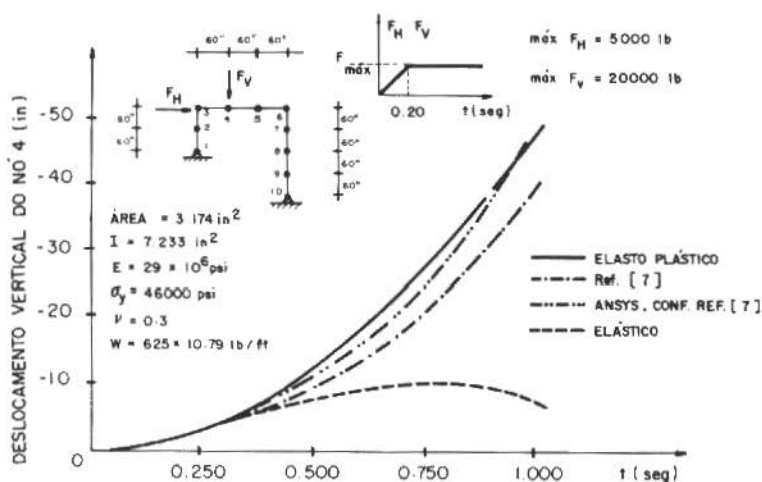


Fig. 3. Tubulação plana: deslocamentos verticais do nó 4

Tubulação Espacial – Finalmente, obteve-se a resposta no tempo para a tubulação espacial representada esquematicamente nas Figs. 4, 5 e 6, onde também são apresentadas a discretização de elementos finitos utilizada e os carregamentos aplicados em cada um dos casos. Tomou-se  $\Delta t = 1.42 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

A tubulação tem diâmetro externo de 16", espessura da parede de 0,5" e peso por unidade de comprimento igual a 6,9017  $\text{lb}/\text{in}$ . O seu material tem módulo de Young igual a  $29 \times 10^6 \text{ lb}/\text{in}^2$ , tensão de escoamento igual a  $3 \times 10^4 \text{ lb}/\text{in}^2$  e coeficiente de Poisson 0.3.

Na Fig. 4 estão traçadas as histórias dos deslocamentos do nó 5, na direção z, quando o carregamento corresponde a forças aplicadas nos três cantos da tubulação e atuando em intervalos de tempo distintos, conforme indicado nesta mesma figura.

É interessante notar que inicialmente o deslocamento correspondente ao comportamento elasto-plástico é maior que o correspondente ao comportamento puramente elástico. Quando todas as cargas param de atuar, o comportamento da estrutura é vibratório e a amplitude da vibração do sistema elasto-plástico é inferior à do sistema elástico.

Nas Figs. 5 e 6, apresentam-se as histórias dos deslocamentos do nó 5, na direção x, quando dois carregamentos com histórias no tempo distintas atuam sobre a estrutura.

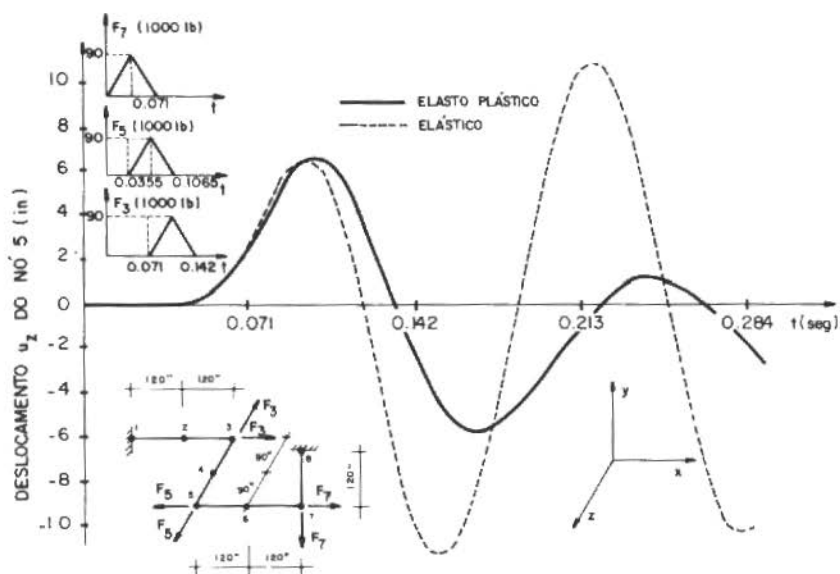


Fig. 4. Tubulação espacial: deslocamentos do nó 5, na direção z

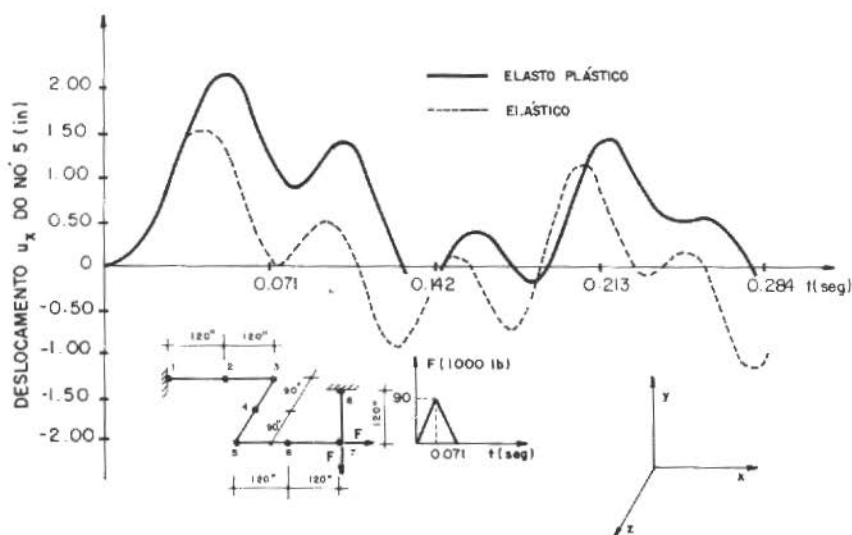


Fig. 5. Tubulação espacial: deslocamento do nó 5, na direção x  
Carregamento: função triangular aplicada no nó 7



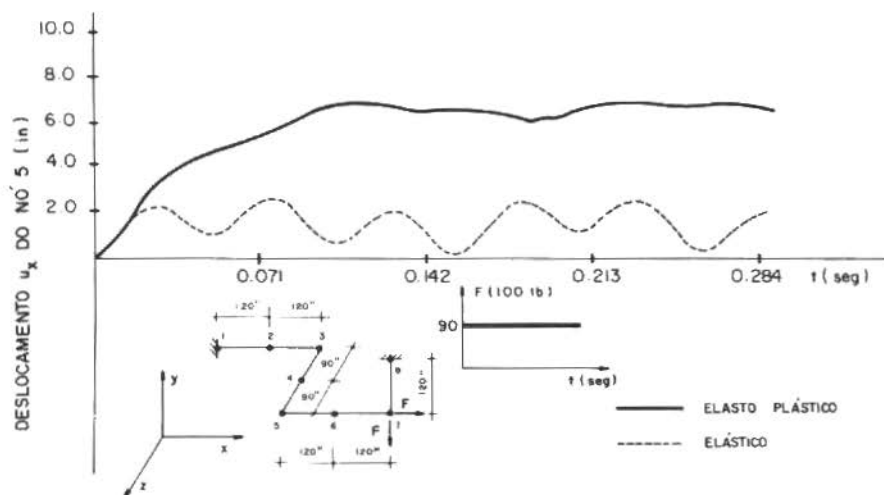


Fig. 6. Tubulação espacial: deslocamento do n° 5, na direção x  
Carregamento: função step aplicado no n° 7

## CONCLUSÕES

A utilização de um critério local (tensão-deformação) de plasticidade implica na verificação da lei constitutiva em cada ponto das seções transversais do elemento de viga. Este procedimento mesmo quando feito de uma forma aproximada (uma forma exata seria impossível) verificando-se a lei constitutiva elasto-plástica apenas em alguns pontos, pode induzir a um processamento bastante demorado. Torna-se, interessante portanto o desenvolvimento de critérios generalizados relacionando tensões generalizadas (momentos, forças) com deformações generalizadas (rotações, deslocamentos) do eixo de referência do elemento de viga.

O algoritmo utilizado para a discretização no tempo, além de dispensar a atualização da matriz de rigidez, tem a característica de ser incondicionalmente estável o que possibilita uma integração com intervalos de tempo maiores que aqueles possíveis com o algoritmo de diferenças finitas convencional. Por outro lado este algoritmo não pode ser particularizado para o caso estático e pode conduzir a resultados imprecisos nos casos em que ocorra plastificação acen tuada com formação de rótulas plásticas.

Para uma melhor adequação do programa desenvolvido a problemas reais, torna-se necessária a introdução de critérios de endurecimento e o desenvolvimento de um elemento curvo com comportamento elasto-plástico.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho teve o apoio financeiro da FINEP, CNEN e IEN.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Bathe, K.-J. — "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis using ADINA", Cambridge (Mass.), 1977.
- [ 2 ] Feijão, R.A. & Taroco, E. — "Introducción a Plasticidad y su Formulaci3n Variacional", II Escola de Matemática Aplicada, vol. II, Rio de Janeiro, 1980.
- [ 3 ] Kachanov, L.M. — "Fundamentals of the Theory of Plasticity", Mir Publishers, Moscow, 1974.
- [ 4 ] Loula, A.F.D. & Guerreiro, J.N.C. — "Algoritmos para Integraç3o no Tempo das Equaç3es da Elastoplasticidade", III Simp3sio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, vol. I, pp. 55-69, Porto Alegre, 1979.
- [ 5 ] Guerreiro, J.N.C.; Gale3o, A.C. & Loula, A.F.D. — "Análise Dinâmica Elastoplástica de Vigas", Anais das XX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, vol. II, Córdoba (Argentina), 1979.
- [ 6 ] Bathe, K.-J. and Wilson, E.L. — "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [ 7 ] Heifetz, J. and Flanagan, P. — "Nonlocalized Yielding and Strain Hardening in the Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Space Frames", in Pressure Vessel Technology, 1977, pp. 247-255.
- [ 8 ] Heifetz, J. et alii — "Dynamic Analysis of Elasto-Plastic Piping Systems Undergoing Large Deformations", in Computers and Structures, vol. 13, 1981, pp. 257-262.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

*Prof. Rubens Sampaio*  
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea  
22453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US\$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscripts is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies - approx. 210 x 280 mm - with a letter containing title of the papers, name(s) of the institution(s) and author(s)' address(es).

Together with the letter, the author(s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

*Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.*

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author(s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1983 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means - electronic, mechanical, photographic, recording or any else - is allowed without written permission.

### Subscriptions

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telefónico: CAMPUSRIO

