Vol. V · Nº 3 · 1983

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

RBCM

PUBLICAÇÃO DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM

EDITORA CAMPUS

ISSN 0100-7386

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr$ 2.115,00 (doi mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 – Rio Comprido – 20261 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas – aproximadamente 21 × 28 cm – para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

Assinaturas

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri 35 Rio Comprido
Tel.: (021) 284 8443 PABX
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.

ISSN 0100-7386

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

Vol. V, nº 3, 1983

EDITORA CAMPUS

quando contactados pela Comissão Organizadora; falta ou insuficiência de justificativas nos pareceres de revisores; falta de uniformidade na conceituação de "originalidade" entre os revisores; pareceres contraditórios de revisores sobre um mesmo trabalho; cartas de autores protestanto contra os pareceres dos revisores dos seus trabalhos; excessiva demora de professores em responder ao convite para a coordenação de sessões, tendo como consequência o atraso na impressão do programa do Congresso e grandes dificuldades na definição dos palestrantes. Mostrou-se, também, inconveniente a época de realização do Congresso (dezembro) em decorrência, tanto da indisponibilidade das verbas orçamentárias para cobrir despesas de viagem de congressistas, como para empresas e instituições da área de ciências mecânicas virem expor os seus produtos. Além disso, o Congresso esta época se superpõe à atividades de encerramento de semestre letivo e às festas de fim de ano.

Finalmente, fica registrada a não apresentação de 50 dos 197 trabalhos incluídos nos anais, em razão do não comparecimento dos seus autores ou de pessoas incumbidas de representá-los. Também deixaram de comparecer vários coordenadores de sessões e os 2 palestrantes convidades da comunidade científica brasileira, sendo que estes últimos designaram substitutos para proferir as palestras.

A ABCM precisa de colaboração de todos para que esses problemas não se repitam. Para tanto, é necessário, por exemplo, que se estabeleça uma uniformização de critérios de revisão dos trabalhos que forem propostos aos próximos COBEMs e que sejam respeitados por todos os revisores e conhecidos de todos os autores, de tal forma que os pareceres, quando desfavoráveis, sejam justos e possam servir de orientação e estímulo para uma nova tentativa, com reais possibilidades de êxito. O autor ausente, por sua vez, frustra as expectativas da interação que se busca nas sessões técnicas, entre pesquisadores de uma mesma área e provoca um vazio que poderia ter sido ocupado por outro trabalho, ou simplesmente eliminado, com evidente economia de tempo e recursos financeiros.

A Comissão Organizadora do VII COBEM espera ter propiciado a cada congressista condições satisfatórias para a consecução dos principais objetivos que o trouxe a Uberlândia, e que a sua permanência em nosso meio tenha lhe proporcionado a mesma satisfação que nos proporcionou.

UM CASO PRÁTICO DE ANÁLISE DE TENSÕES PARA DUTOS COM CURVAS GOMADAS

José Luiz de França Filho
Marco Antonio Sá Campos
NATRON CONSULTORIA E PROJETOS
José Luiz de França Freire
Ronaldo Domingues Vieira
Deptº de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O tema básico deste trabalho é a Análise de Tensões em Tubulações. Um dos problemas relevantes desse assunto é a análise de tubulações com grande relação diâmetro/espessura de parede nas quais utilizam-se com frequência curvas gomadas. Numa tentativa de consolidar os procedimentos de cálculo usualmente utilizados pelas firmas de consultoria, foram aprofundadas análises numéricas e desenvolvidos estudos experimentais cujos resultados são apresentados para discussão.

INTRODUÇÃO

O problema proposto com esse trabalho objetiva discutir os primeiros resultados obtidos da análise teórico-experimental de tensões, que evidenciam para o duto em questão um nível de tensão em muito superior ao limite admitido pelas normas aplicáveis.

Não fossem as dificuldades de aquisição inerentes à solução proposta, introdução de um elemento flexível, o problema agrava-se diante de posição contrária assumida pela licenciadora do projeto básico. Nesses casos, as firmas de consultoria sofrem pressão das companhias estrangeiras que impõem suas experiências anteriores sem maiores esclarecimentos, utilizando a garantia do processo de sua unidade contra as evidências dos cálculos executados.

Por essa razão principal, buscamos aprofundar a análise numérica paralelamente à estudos experimentais do caso prático apresen tado, no sentido de consolidar uma posição definitiva não satisfeita pela simples aceitação da experiência de terceiros.

Desenvolvendo os objetivos acima referidos, foram efetuadas análises numéricas utilizando-se:

. programas de computador pela teoria de viga

. programas de computador pela teoria de cascas.

Da mesma forma, as seguintes técnicas experimentais foram aplicadas:

. termo-fotoelasticidade

. extensômetros elétricos (strain-gages).

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O caso prático em discussão nesse trabalho consta de um duto de gás de 53" de diâmetro e espessura de parede igual a 0,5" que transporta o gás liberado do reator principal de uma unidade de produção de ácido fosfórico, segundo a configuração detalhada abaixo:

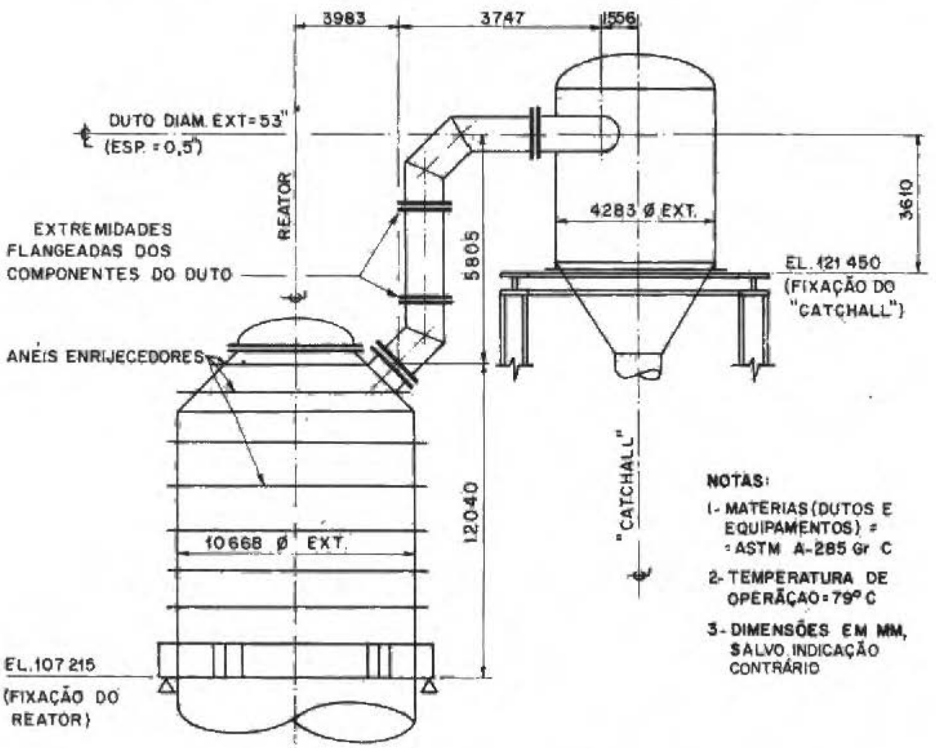


Figura 1. Configuração do conjunto Duto x Equipamentos

Embora a configuração apresente-se simples, a elevada relação diâmetro x espessura de parede do duto em questão (D/t = 106) vem conferir-lhe especial destaque no âmbito da Análise Convencional de Tensões em Tubulações Industriais, denominada comumente de Análise de Flexibilidade. Se analisada contra os recursos habitualmente utilizados, a Análise de Flexibilidade desse duto de gás apresenta como pontos de relevada importância:

- comportamento estrutural comprometido quando calculado com base nas teorias de viga, utilizadas nos programas usuais de cálculo automático de tubulações.
- deformação localizada do vaso ("catchall"), nos pontos de ligação (bocais), comprometida pela construção tangencial e pela elevada rigidez do duto comparada à do equipamento.
- deformação localizada do reator impedida pelo enrijecimento do costado.

Sendo assim, o que apresentamos nesse trabalho resume as principais atividades já executadas até o presente, que deverão culminar com a medição de deformações no modelo real tão logo seja completada a sua montagem.

LIMITES ADMISSÍVEIS DE TENSÃO

Segundo os requisitos das normas aplicáveis, os limites admissíveis de tensão poderão ser distribuídos independentemente entre tensões primárias e secundárias, definidas em função da natureza dos carregamentos presentes. Se levarmos em consideração que as demais solicitações como o recalque diferencial entre as fundações dos equipamentos adjacentes, a pressão interna e o vento foram minimizadas por soluções específicas ou são pouco significativas, restam-nos os seguintes carregamentos principais para análise [1]:

- pêso próprio, originando tensões primárias cujo limite poderá ser aproximado por S1.
- expansão térmica restringida e movimentos dos bocais dos equipamentos adjacentes, originando tensões segundárias e tendo como limite:

$$SA = f(1{,}25\ Sc + 0{,}25\ Sh) \tag{1}$$

significando:

- Sh - tensão admissível básica do material na temperatura máxima de operação do duto (79°C)
- Sc - tensão admissível básica do material na temperatura de instalação do duto (≅ 21°C)
- f - fator de vida cíclica do duto, em nosso caso igual à unidade (f = 1) para 7000 ciclos completos de operação

Visando a obtenção de um limite máximo para as tensões secundárias decorrentes da expansão térmica restringida do duto e dos movimentos impostos pelos bocais de equipamentos, as quais são mandatórias no nosso problema, podemos ainda escrever [1],

$$SA = f \times 1{,}25(Sc + Sh) - Sp \qquad (2)$$

onde:

- Sp - representa a tensão real atuante como consequência da ação do peso próprio dos componentes do duto, no ponto considerado

Utilizando-se as tensões admissíveis no apêndice A da norma ANSI B 31.3, [1], teremos então:

para 79°C, $Sh = 18.300$ psi

para 21°C, $Sc = 18.300$ psi

A expressão do limite máximo admitido para as tensões decorrentes da expansão térmica do duto e equipamentos adjacentes passa a depender somente da tensão real decorrente do peso próprio do duto (Sp) no ponto considerado, da forma:

$$SA = 45750 - Sp \text{ (psi)} \qquad (3)$$

Para simplificar a análise do problema proposto, pode-se ainda assumir um valor máximo para $Sp = \frac{1}{2}$ Sh e resumí-la à verificação das tensões secundárias resultantes da expansão térmica restringida tendo como tensão admissível o valor básico de SA = 36.600 psi.

ANÁLISE PELA TEORIA DE VIGA

Mesmo diante das restrições conhecidas quanto ao emprego desta teoria à tubulações com grande relação diâmetro x espessura, onde as deformações locais podem comprometer o comportamento de viga da "estrutura", foram utilizados programas usuais de cálculo automático de tubulações (com base na teoria de viga) como uma primeira aproximação para o problema.

Modelo Utilizado

A concepção do modelo limitou-se à configuração do duto propriamente dito sobre a qual são definidas as condições de contorno referentes aos deslocamentos dos bocais dos equipamentos adjacentes.

A figura abaixo representa o isométrico de cálculo do modelo utilizado, sobre o qual são destacados os principais parâmetros relativos à sua definição global, cabendo ressaltar que o movimento transversal imposto pelo bocal superior (catchall) devido à sua ligação tangencial como o casco do equipamento foi considerado desprezível.

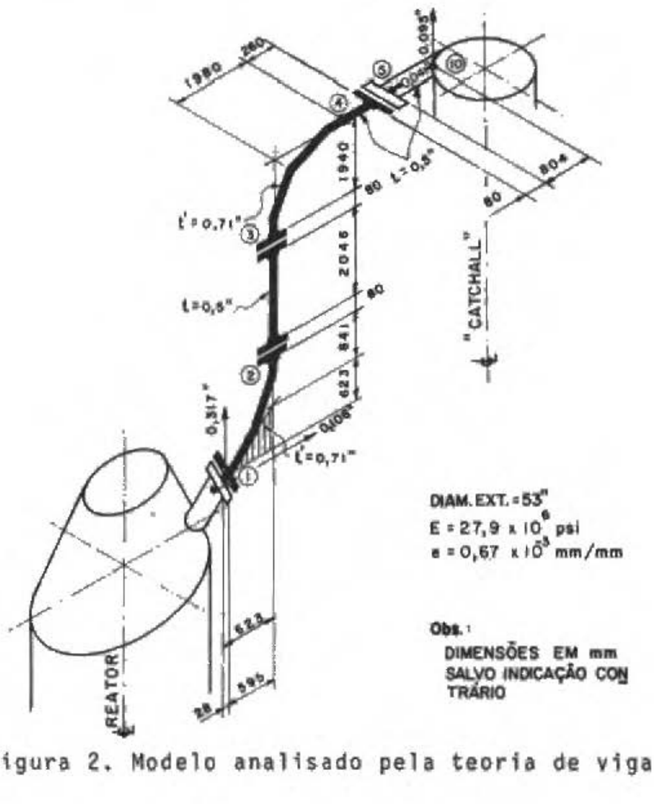


Figura 2. Modelo analisado pela teoria de viga

Espessura equivalente das curvas. Por não permitir a modelagem direta de curvas gomadas, os programas utilizados requerem uma atenção especial para a introdução correta da rigidez real desses elementos, através de curvas forjadas (elbows) equivalentes.

Dois recursos principais poderiam ser utilizados com essa finalidade e são eles:

- determinação de um raio equivalente
- determinação de uma espessura equivalente

O primeiro caso foi considerado inadequado pois ao mesmo tempo que simula a rigidez real da curva gomada, altera o comprimento dos trechos retos adjacentes modificando consequentemente a rigidez global do sistema analisado.

Dessa forma, o artifício de cálculo utilizado teve por objetivo obter uma espessura equivalente para as curvas forjadas representadas no modelo, alterando localmente a rigidez do componente desejado sem influir entretanto nas propriedades globais da "estrutura".

Cabe porém observar, que ao introduzirmos a rigidez real da curva gomada alterando-se os dados geométricos do "elbow" modelado, modifica-se também o fator de intensificação de tensões respectivo obtendo-se resultados irreais para as tensões atuantes nos pontos da curva que necessitam de posterior correção.

De maneira similar, esse fator de correção é determinado comparando-se o fator de intensificação de tensões real da curva gomada com o fator de intensificação calculado para a curva forjada de espessura equivalente, utilizado consequentemente nos cálculos automáticos.

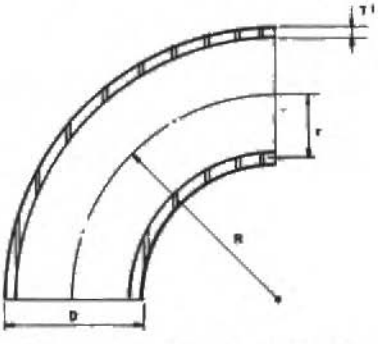


Figura 3. Curva forjada

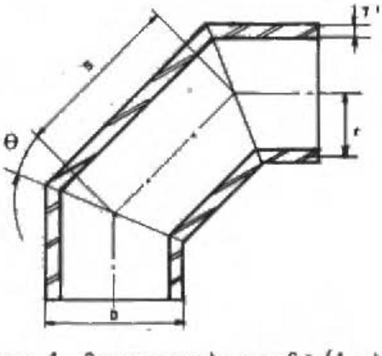


Figura 4. Curva gomada com $S \geq (1 + \text{tg}\ \theta)$

Todo o processo de cálculo da espessura equivalente e do fator para correção de tensões na curva modelada foi desenvolvido com base nas expressões constantes da tabela 1, apêndice D da norma ANSI B 31,3 ... [1], e é apresentado a seguir como sugestão para a modelagem de curvas gomadas em programas deste tipo.

Utilizando-se os parâmetros definidos nas figuras 3 e 4 podemos escrever:

Fator de Flexibilidade da Curva Gomada:

$$K = \frac{1,52}{\left[(1+\text{Cotg }\theta)\,\frac{T}{D-T}\right]^{5/6}} \tag{4}$$

Fator de Flexibilidade da Curva Forjada equivalente:

$$K' = \frac{1,65(D-T')^2}{4\cdot T'\cdot R} \tag{5}$$

Igualando-se (4) e (5) e desprezando-se o termo $(T')^2$, podemos calcular a espessura equivalente por:

$$T' = \frac{1,65\,D^2}{3,30\,D + \dfrac{6,08\,R}{\left[\dfrac{(1+\text{Cotg }\theta)\,T}{D-T}\right]^{5/6}}} \tag{6}$$

Utilizando-se T' como artifício para introduzir a rigidez real da curva gomada no modelo, obteremos automaticamente um fator de intensificação de tensões igual a:

$$i' = \frac{0,9}{\left[\dfrac{4\cdot T'\cdot R}{(D-T')^2}\right]^{2/3}} \tag{7}$$

E o fator de intensificações real a ser aplicado vale:

$$i = \frac{0,9}{\left[(1+\text{Cotg }\theta)\,\frac{T}{D-T}\right]^{2/3}} \tag{8}$$

Logo, a relação i/i' fornece a correção requerida para as tensões obtidas do cálculo automático, desprezando-se mais uma vez o termo $(T')^2$, da forma:

$$\frac{i}{i'} = \left[\frac{4\,T'\,R(D-T)}{D'(D-2T')(1+\mathrm{Cotg}\;\theta)T'} \right]^{2/3} \qquad (9)$$

Aplicando-se finalmente as expressões (6) e (9) ao problema discutido nesse trabalho, obtemos:

$$T' = 0{,}71" \quad \text{e} \quad \frac{i}{i'} = 1{,}50$$

Resultados Obtidos

Para facilitar a análise dos resultados, foram resumidas na tabela abaixo as tensões atuantes nos pontos considerados de interesse, já corrigidos de acordo com o ítem anterior, para a condição de rigidez "infinita" dos engastes (bocais) considerada básica para o nosso problema.

Tratando-se de uma configuração plana e sem movimentos transversais impostos, o fator de intensificação de tensões pode ser aplicado diretamente à tensão calculada [1] em todos os pontos pertinentes as curvas gomadas.

Tabela 1 - Tensões obtidas do cálculo p/teoria de viga

PONTO	TENSÃO EM psi
1	2830.
2	12336.
3	30029.
4	56814.
5	14251.
6	25127.

Obs.: A rigidez denominada "infinita" equivale ao "default" do programa, no caso igual a 10^{8} ℓb/in.

Comentários

Reunimos neste ítem as observações de maior interesse para o problema, relacionadas ao modelo utilizado e resultados obtidos, com o objetivo de consolidar a conclusão final do trabalho.

- Embora tenham sido apresentados somente os resultados para a condição básica de rigidez "infinita" dos engastes, foram feitas diversas tentativas no sentido de melhor aproximar a rigidez real dos equipamentos adjacentes sem no entanto ter-se conseguido redução significativa na tensão máxima atuante no duto.

Com respeito ao reator, os aneis enrijecedores do costado são responsáveis por aproximar a rigidez da restrição do valor assumido pelo programa, não representando realmente uma contribuição significativa para absorver os deslocamentos presentes no sistema.

A rigidez do "catchall" por sua vez também não é significativa em termos locais pela própria construção tangencial do bocal em questão e proporções geométricas relacionadas ao duto. Considerada a rigidez global desse equipamento, principalmente voltada para a flexão no plano da figura, a tensão máxima reduzida ainda se manteve bem acima do limite admissível discutido anteriormente.

• Como a tensão máxima do sistema atua na curva gomada, principalmente responsável pela flexibilidade inerente ao duto, é importante observar que o efeito da ovalização da seção introduzido por um fator de intensificação de tensões tão elevado ($i = 7{,}22$), pode distorcer em muito os resultados finais obtidos.

ANÁLISE PELA TEORIA DE CASCAS

Objetivando uma melhoria dos resultados apresentados no ítem anterior, optou-se pela utilização de programas de cálculo automático de tensões com base na teoria de cascas, mais adequada as proporções geométricas do caso em estudo neste trabalho.

Modelo Utilizado

Apesar da análise anterior ter apontado a curva gomada como o ponto crítico na distribuição de tensões do sistema o modelo utilizado representou mais uma vez a configuração total do duto, conforme esquema a seguir. Pelas razões já discutidas anteriormente e pelo próprio custo envolvido na modelagem, os equipamentos não foram incluídos no modelo analisado.

Como no modelo anterior, foram introduzidos os deslocamentos dos bocais dos equipamentos adjacentes, desta vez distribuídos entre os nós dos elementos extremos.

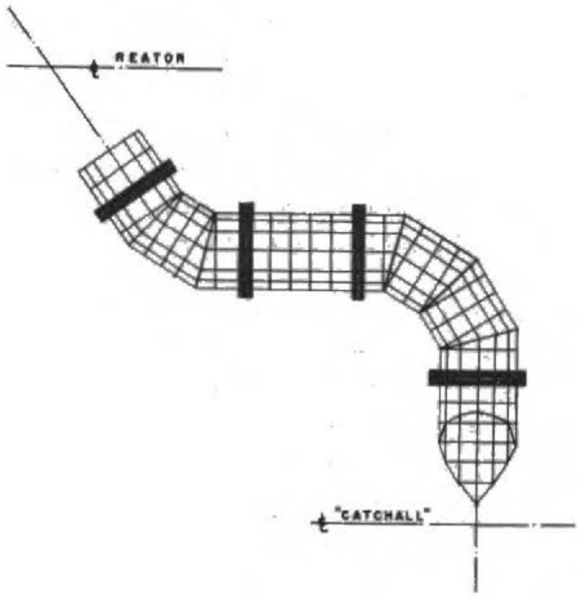


Figura 5. Modelo (Malha) de elementos finitos

O modelo é constituído basicamente de elementos de placa quadrangulares de mesma espessura, não cabendo neste caso nenhuma correção referente à rigidez da curva gomada, sendo o enrijecimento dos flanges representado por elementos de viga de rigidez equivalente. Para melhor aproximar o modelo do caso real, as interseções com os equipamentos foram traçadas com precisão, principalmente aquela referente à ligação tangencial com o "catchall", totalizando 392 elementos.

Resultados Obtidos

Uma vez constatado que o ponto de tensão máxima pertencia também à curva gomada, procuramos dirigir a apresentação dos resultados obtidos para o perfil de tensões existente nessa seção considerada crítica, uma vez que os esforços introduzidos nos bocais são de difícil obtenção e não são importantes para o objetivo principal deste trabalho. Sendo assim, foram plotadas as tensões atuantes nos diversos elementos da seção crítica, calculadas pelo critério de Von Mises, conforme a figura 6.

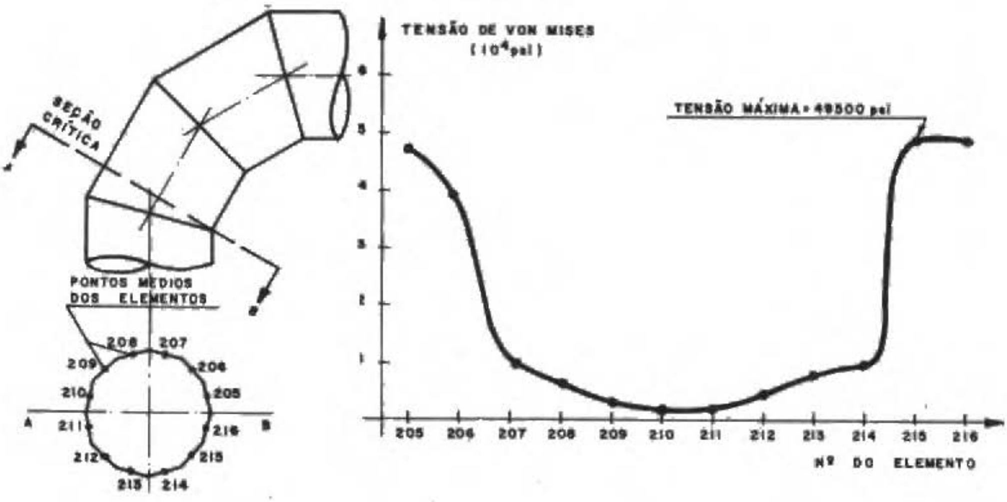


Figura 6. Distribuição de tensões na seção crítica

Analogamente, os resultados apresentados traduzem a condição básica assumida para o modelo, segundo a qual a rigidez real dos equipamentos não contribui para a flexibilidade global do sistema.

Comentários

Visando corroborar mais uma vez a conclusão final do trabalho, apresentaremos aqui uma avaliação intermediária desta fase da análise, voltada para o modelo utilizado e resultados obtidos.

- Para não onerar demasiadamente esta fase de cálculo foi utilizada uma malha uniforme ao longo do modelo, uma vez definido que toda a configuração seria considerada. Dessa forma, perdeu-se a oportunidade de refinar o modelo nas regiões críticas referentes à curva gomada nas quais a priori espera-se as maiores tensões atuantes do sistema. Adicionalmente, a malha resultante em torno da seção crítica mostrou-se pouco eficiente uma vez não termos atingido a compatibilidade de deslocamentos desejada.
- Localizada na superfície interna da curva gomada, a tensão máxima obtida tem valor muito próximo daquela referente aos cálculos pela teoria de viga, mantendo-se ainda muito superior ao limite admissível discutido anteriormente.

ANÁLISE FOTOTERMOELÁSTICA

Esta seção apresenta os resultados de uma análise fototermoelástica [2] plana do problema das tensões geradas por expansão térmica do duto em questão. Foi construído um modelo bi-dimensional em escala 1 : 80 a partir de uma placa de 6,30mm de espessura do material PSM-1, fornecido pela Photolastic Inc., EUA. Um trabalho recente [3] sobre materiais fototermoelásticos fornece suas propriedades mais importantes e limita seu uso até uma temperatura máxima de 55°C. Encontra-se na figura 7 uma fotografia do modelo plano estudado mostrando o aspecto da distribuição das isocromáticas que surgiram quando este modelo foi submetido a uma variação de temperatura e os pontos onde foram feitas leituras das ordens de franjas na análise fototermoelástica.

Figura 7. Modelo para análise fototermoelástica

A tabela seguinte fornece valores da razão entre a tensão no modelo, σ' e a variação de temperatura ΔT_m, para 6 diferentes pontos. Estes valores de $\sigma'_m/\Delta T_m$ são os coeficientes angulares das retas que resultaram da plotagem das tensões σ'_m obtidas para as diversas diferenças de temperaturas utilizadas nos experimentos. As tensões σ'_m foram calculadas a partir das ordens de franjas das isocromáticas, N, usando-se a expressão clássica da fotoelasticidade.

$$\sigma'_m = \frac{N}{h} f_\sigma \quad \text{(para pontos do contorno do modelo)}$$

onde $h = 6{,}35$mm é a espessura do modelo e $f_\sigma = 40$ psi/franja/in é a calibração ótica do material PSM-1.

Tabela 2 - Valores de $\sigma_m'/\Delta T_m$ para os pontos estudados

PONTO	$\sigma_m'/\Delta T_m$
1	7.60
2	7.20
3	25.60
4	25.60
5	13.60
6	18.80

Segundo Hovanesian e Kowalski [4] a lei de similitude que relaciona tensões no modelo e no protótipo em problemas que envolvem apenas restrições à expansão térmica pode ser expressa por:

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_m} = \frac{\alpha_p\, E_p\, \Delta T_p}{\alpha_m\, E_m\, \Delta T_m}$$

onde

subscrito p = protótipo
subscrito m = modelo
a = coeficiente de expansão térmica
$\alpha_m = (1.4 \times 10^{-4} - 11.5 \times 10^{-6})\ {}^oC^{-1}$
$\alpha_p = (11.5 \times 10^{-6})^oC^{-1}$
ΔT = variação de temperatura
$\Delta T_p = 59^oC$
E = módulo de elasticidade
$E_p = 30 \times 10^6$ psi
$E_m = 35 \times 10^4$ psi

Como a tensão σ_m se refere a um modelo com forma geométrica idêntica à do protótipo (embora em escala), deve ser feita uma correção da tensão σ_m' obtida para o modelo fotoelástico que possui seção retangular. Um fator de correção foi calculado a partir da razão entre os fatores de intensificação de tensão para as seções curvas tubular e retangular.

Assim,

$$\sigma_m = \sigma_m' \times \frac{k_t}{k_r}$$

onde

k_t = fator de intensificação de tensão para a seção tubular, segundo [1]. Para a geometria do tubo utilizado, $k_t \cong 6.0$

k_r = fator de intensificação de tensão para a seção retangular segundo [5]. Para a geometria utilizada, $k_r \cong 1.3$

Então,

$$\sigma_m = (4.6)\sigma_m'$$

Antes de se alcançar um resultado numérico para a tensão σ_p, deve-se notar que esta análise é imprecisa se for levado em consideração que a flexibilidade do modelo tubular e também que os estados de tensão em ambos modelo e protótipo são diferentes. Esta distorção entre modelo e protótipo é causada por sua diferença geométrica.

Para o ponto, mais solicitado do modelo, tem-se que a tensão σ_p no protótipo para uma variação de temperatura $\Delta T_p = 59^oC$ é:

$$\sigma_p = 53.300 \text{ psi}$$

MODELO REDUZIDO DO DUTO

Inclui-se este experimento no estudo das tensões térmicas para o duto com afinalidade de se comparar os resultados obtidos a partir das análises numéricas e do método fototermoelástico plano com os resultados obtidos utilizando-se um modelo reduzido que sofreu variações de temperatura onde as deformações foram medidas através de extensômetros elétricos (electrical resistance strain-gages). Deve-se adiantar aqui que os resultados obtidos foram insatisfatórios por diversas razões que estão descritas no final desta seção.

Detalhes gerais da instalação estão mostrados na figura 8.

As seguintes condições foram consideradas na seleção do modelo: 1) escala compatível com o espaço disponível do laboratório e capacidade de aquecimento; 2) o modelo deveria aproximar-se o mais possível do protótipo; 3) as condições de carregamento deveriam ser próximas das reais, assim como as condições de contorno (engastes de tubulação, etc). Em consequência destas condições, as seguintes providências foram tomadas no projeto do modelo: 1) decidiu-se construir modelos do reator e do vaso para simulação apropriada das con dições de contorno impostas aos bocais do duto; 2) manteve-se a escala D/t (diâmetro/espessura da parede) das diversas partes do duto e também das relações D/t do reservatório e vaso; 3) escolheu-se a escala 1 : 25 para o conjunto; 4) as flanges foram simuladas por anéis soldados às paredes do duto; 5) reator e vaso foram fixados ao chão e parede adjacentes do laboratório, simulando as condições de fixação no campo no que se refere aos comprimentos passíveis de sofrerem expansão térmica; 6) água foi aquecida e circulada no interior do conjunto através de uma bomba e um reservatório termicamente isolado foi anexado ao conjunto. A fotografia da figura 8 mostra, em termos gerais, uma visão do conjunto com o aparato para aquecimento e circulação da água. O duto foi construído de uma chapa de aço de baixo carbono com espessura t = 0,5mm e seu diâmetro externo D foi igual a 53mm. O reator e o duto foram construidos de chapas similares, porém com espessuras iguais a 0,6mm. Os anéis de enrijecimento do reator não foram simulados. Todas as uniões dos gomos do duto e chapas do reator e vaso foram soldadas.

Oito extensômetros elétricos uniaxiais tipo FAE-03-12-S6E foram colados a diversos pontos do duto através do adesivo MM Bond--200. Os pontos de medição foram selecionados baseados nas seguintes condições: 1) facilidade de instalação; 2) relativamente longe das juntas soldadas; 3) possibilidade de comparação com os resultados numéricos. Os extensômetros foram instalados em "ponte de 1/4" e os efeitos da elevação da temperatura foram computados a partir da calibração fornecida pelo seu fabricante. As deformações foram lidas através de uma ponte comercial modelo Vishay BAM-1B auxiliada por um conector de 10 canais de modelo Vishay SB-1. Dois termômetros e três termo-pares foram utilizados para a leitura da temperatura da água e das paredes do duto em pontos próximos àqueles onde estavam instalados os extensômetros elétricos. A temperatura da água no reservatório foi aumentada lentamente e esta foi circulada através da bomba. As leituras das deformações aparentes foram feitas, então, a diversas temperaturas com o objetivo final de se construir uma curva $\varepsilon \times T$. As deformações reais nos pontos estudados foram obtidas subtraindo-se das deformações lidas no aparelho as deformações (ε temperatura) causadas nos extensômetros pelos incrementos de temperatura e pela expansão (contração) diferencial entre os extensômetros e o material dos dutos.

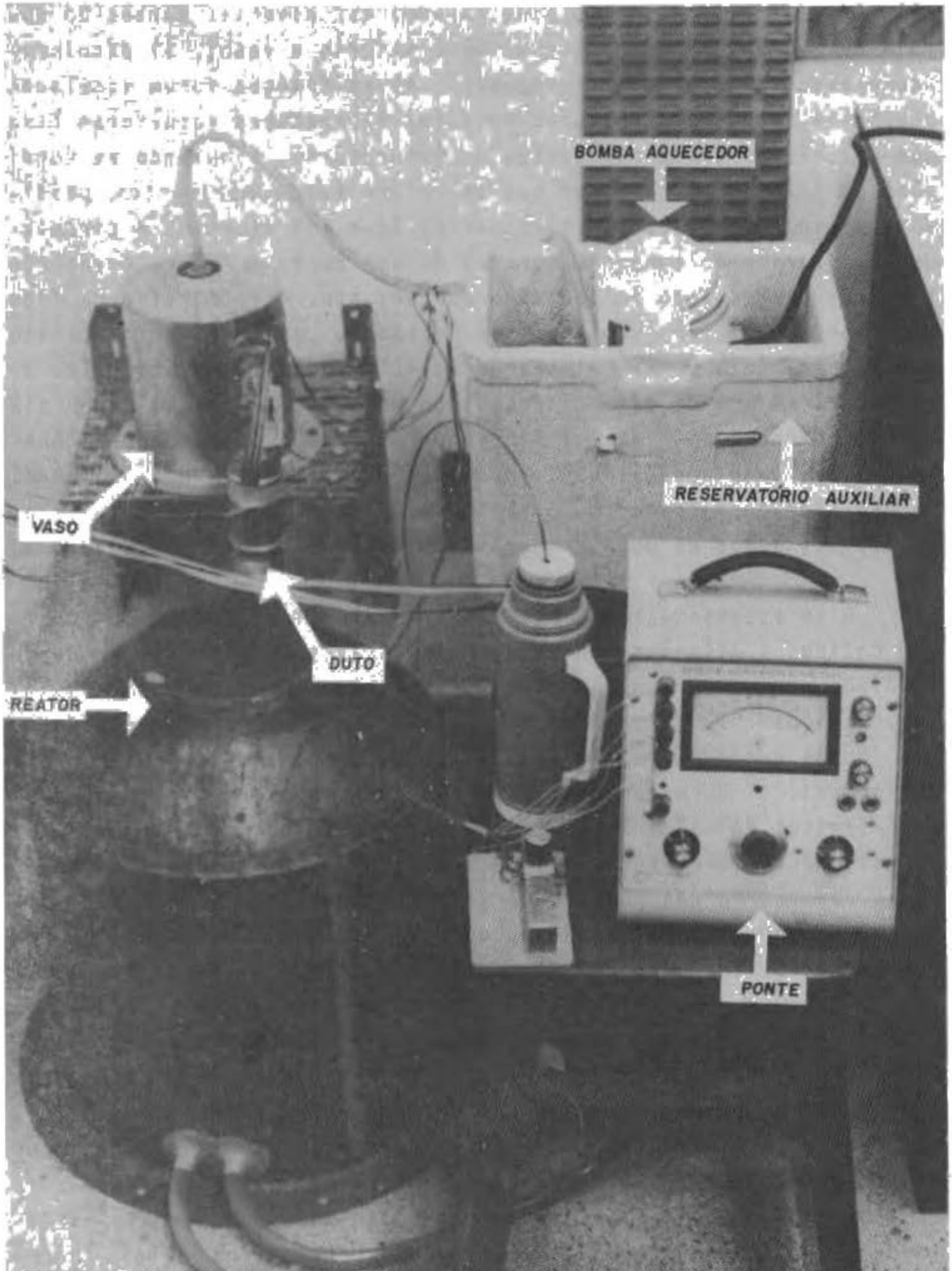


Figura 8. Instalação para medição com extensômetros elétricos

Os níveis de deformação obtidos foram bastante aquém dos resultados encontrados pelos estudos numéricos e fototermoelástico. Apenas três extensômetros (nºs 1, 2 e 5) apresentaram níveis de deformação substancialmente maiores que aqueles causados pela expansão diferencial devido à temperatura para os oito pontos estudados. Ainda assim as deformações reais para estes três pontos, indicaram taxas de deformação reais com a temperatura ($\Delta\varepsilon/\Delta T$) muito baixas em relação aos resultados obtidos dos métodos numéricos. Para estes pontos, considerando-se $T = 79^o$, uma comparação apresenta resultados discrepantes como indicado abaixo:

PONTO	STRAIN-GAGE	MÉTODO NUMÉRICO
1	$-86\ \mu\frac{m}{m}$	$970\ \mu\frac{m}{m}$
2	$-65\ \mu\frac{m}{m}$	$-286\ \mu\frac{m}{m}$
3	$-85\ \mu\frac{m}{m}$	$125\ \mu\frac{m}{m}$

Embora os resultados experimentais devam ser encarados como reais, vários pontos devem ser examinados e discutidos no que se refere à validade da simulação experimento-análise numérica. Uma lista destes pontos está apresentada abaixo e acredita-se que todos tenham contribuído com um peso maior ou menor para o insucesso da simulação.

1. O adesivo utilizado não se revelou bom para temperaturas superiores a 61°C, embora o fabricante indique uma faixa de utilização segura até 65°C.

2. O modelo do duto teve sua rigidez muito aumentada pelos cordões de solda. Isto se deve ao uso de chapas de 0.5mm para a fabricação do duto trazendo dificuldades para a sua soldagem, tanto no sentido longitudinal (confecção do formato tubular) quanto na soldagem das diversas seções gomadas. A espessura do cordão atingiu em alguns pontos espessuras de até 2mm.

3. O não enrijecimento do reator por anéis, que existem no protótipo e o fato que as outras análises consideram o reator e o vaso como rígidos.

CONCLUSÕES

Em vista da convergência dos resultados encontrados para os métodos de elementos finitos utilizados e fototermoelástico e resultados discrepantes encontrados para o ensaio realizado com o modelo reduzido resolveu-se considerar o estudo de Tensões Térmicas no duto ainda em aberto e que este seja refeito e ampliado. Os seguintes ítens de um programa de pesquisa mais intenso, ainda que de forma geral, estão descritos abaixo:

1. Pesquisa de um novo adesivo para trabalho a temperatura mais elevadas que $60^{O}C$. Isto teria consequências imediatas no teste de um novo modelo reduzido e no uso posterior no campo quando da execução de medinções por extensômetros elétricos no duto real, objetivo desta pesquisa. O adesivo MM Bond-610 já foi selecionado com esta finalidade e sua temperatura máxima de trabalho é $315^{O}C$, bastante acima da temperatura máxima de operação do duto ($79^{O}C$). Suas maiores desvantagens são o tempo gasto e as condições especiais necessárias para seu endurecimento e posterior cura. Uma solução para este problema seria utilizá-lo para a colagem de extensômetros elétricos em placas finas (0.1mm) no laboratório. Estas placas seriam posteriormente soldadas (por pontos, utilizando-se técnica especial) no duto real quando do desenvolvimento dos testes no campo. Extensômetros elétricos soldáveis comerciais também poderão ser utilizados em vez de serem desenvolvidos no laboratório.

2. Um estudo comparativo dos resultados dos diversos métodos empregados (elementos finitos, fototermoelasticidade e extensômetros elétricos em modelos) poderia ser melhor entendido e realizado caso modelos mais simples (básicos) pudessem ser estudados. Uma conclusão segura da confiabilidade destes métodos poderia então ser mais facilmente alcançada. Um trabalho foi iniciado com este objetivo utilizando um modelo tubular em C que pode ser mais facilmente modelado através de elementos finitos (asimetria deste modelo ajudaria a redução de custos de computação). Este modelo será construído em escala adequada e testado no laboratório, podendo ser carregado por elevação de temperatura e também por meio de uma máquina de ensaios universal

onde será aplicado compressão aos finais retos do C, tendendo a fechá-lo. É interessante notar-se que resultados analíticos podem ser derivados tanto para curvas lisas quanto para curvas gomadas em C.

3. Um modelo do duto em maior escala deverá ser construído e carregado apenas com o aumento de temperatura, eliminando se neste caso o reator e o vaso. As simulações por elementos finitos serão reformadas para este modelo não se considerando, então, os deslocamentos impostos aos bocais causados pelo reator e pelo vaso.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho registram aqui seus agradecimentos aos engenheiros que contribuiram para a sua realização.

Pela execução dos métodos numéricos:
Aurélio Rebello da Silva e Hierônimo Santos Souza
Pela orientação na execução do modelo para a teoria de cascas:
Prof. Pen J. Fang
Pelo apoio e incentivo ao contato empresa-pesquisa:
Cid do Nascimento Silva e Cláudio Patrone Monteiro de Barros

REFERÊNCIAS

[1] ANSI/ASME B 31.3 – Chemical plant and petroleum refinery piping. 1980.

[2] BURGER, C.P. – Thermal modeling. Exp. Mechanics, November, pp. 430-442, 1975.

[3] MISKIOGLU, I.; GRYZAGORIDES, J. and BURGER, C.P. – Material properties in thermal stress analysis. SESA Spring Meeting, Boston, 1980.

[4] HOVANESIAN, J.D. and KOWALSKI, H.C. – Similarity in thermoelasticity. Exp. Mechanics, February, pp.82-84, 1967.

[5] ROARK, R.J. – Formulas for stress and strain. McGraw Hill, 4º ed., 1965.

RevBrMec, Rio de Janeiro, V. V, nº 3, pp. 25 a 41

DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM REDUÇÕES EXCÊNTRICAS

Hans-Peter Sterkel
Roberto C.A. Travassos
Nuclebrás Engenharia S.A. - NUCLEN

SUMÁRIO

Nos códigos de projeto de Engenharia existem informação apenas sobre as reduções concêntricas para tubulações e a necessidade de conhecimento do nível de tensões para o caso de reduções excêntricas foi o incentivo principal para a realização do presente estudo. Pela utilização do Método de Elementos Finitos, foram estudadas as distribuições de tensões para reduções concêntricas e excêntricas submetidas à pressão interna e a momento, utilizando o elemento de casca e o elemento sólido isoparamétrico.

INTRODUÇÃO

Em projetos de tubulações é comum o uso de reduções concêntricas, mas em certas configurações é aconselhável a utilização de reduções excêntricas, que em vários casos apresentam algumas vantagens, tais como, maior facilidade de drenagem da linha em paradas para manutenção, ou então para simplificação dos suportes.

O nível, a distribuição e os pontos de concentração de tensões são importantes no cálculo de flexibilidade de tubulações, e neste estudo mostra-se as diferenças entre a distribuição de tensões em reduções concêntricas e excêntricas. Com esta finalidade, será calculado um fator F, que considera a relação de tensões como a tensão real atuante em um ponto, dividida pela tensão nominal caso não houvesse a descontinuidade estrutural geométrica.

A necessidade de segurança em qualquer tipo de componente nuclear, e em nosso caso a falta de informações sobre as reduções excêntricas são os principais estímulos para a realização do presente trabalho.

Utiliza-se o método de Elementos Finitos, comparando o comportamento quando é formulado com elementos de casca e com elementos sólidos. É empregada uma redução DN 500 x 400 para ambos os tipos de reduções e utiliza-se o STARDYNE [4,5] para obtenção das tensões máximas a que o modelo está sujeito.

São considerados dois tipos de carregamento: Pressão Interna Unitária e Momento Unitário e comparam-se as tensões máximas obtidas via computador com as tensões nominais.

GEOMETRIA DO MODELO

Neste estudo considera-se uma redução DN 500 x 400 de espessura constante, tanto para os dois tubos quanto para a porção cônica da redução, não obstante, serem as espessuras diferentes de uma região para outra em muitos casos reais.

Assumindo a parte cônica da redução de comprimento "L", são adicionados comprimentos de "10 L" em ambos os lados da redução com a finalidade de serem desprezados os efeitos locais de ponta que surgiriam face à aplicação de cargas ou às restrições impostas ao modelo. Como comprimentos da região cônica são usados 408mm e 267mm, respectivamente para as reduções concêntricas e excêntricas, já que estes representam comprimentos reais comerciais. Uma melhor visualização da geometria proposta é dada na tabela 1 e nas figuras 1(a) e 1(b).

Tabela 1

REDUÇÃO	DN	Do	do	t	L	α
Concêntrica	500 x 400	508.0	406.4	7.1	408.0	7.1^{o}
Excêntrica	500 x 400	508.0	406.4	7.1	267.0	20.8^{o}

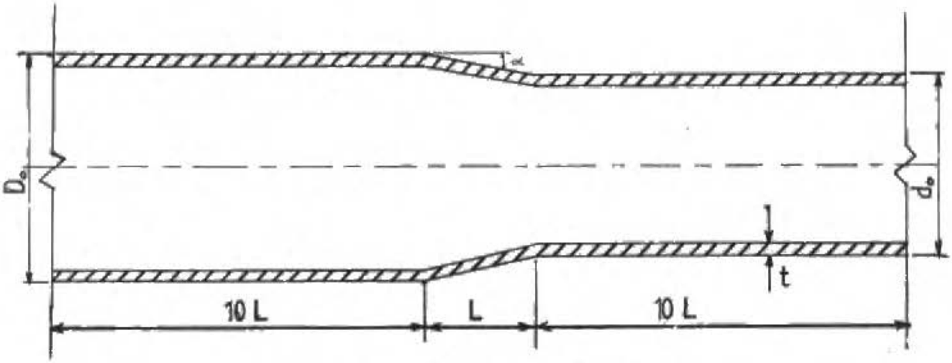


Figura 1(a). Redução concêntrica

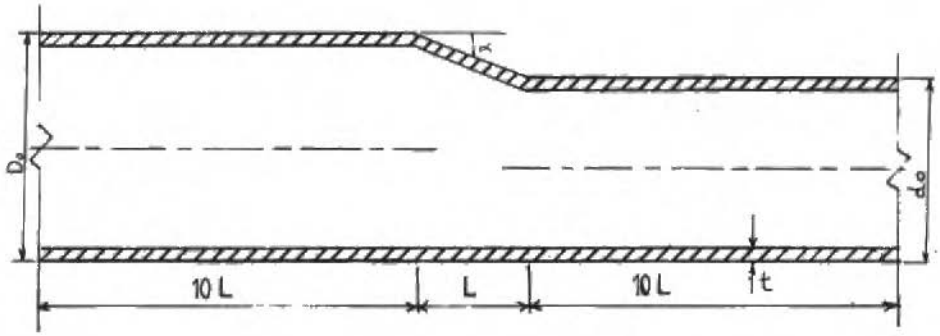


Figura 1(b). Redução excêntrica

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

São usados para estudo dois tipos de elementos: O elemento de casca definida por 4 pontos nodais com 5 graus de liberdade por nó (três translações e duas rotações) e o elemento sólido isoparamétrico definido por 8 pontos nodais tendo 3 graus de liberdade por nó (três translações, não permitindo rotações nestes pontos).

Na direção longitudinal (x) a divisão é formulada conforme as figuras 2(a) e 2(b) e a tabela 2, utilizando-se malhas mais finas nas regiões de descontinuidades geométricas, com o propósito de obtenção de um perfil mais refinado de tensões.

Esta formulação é usada nos dois tipos de reduções e para ambos os tipos de elementos empregados, obtendo-se um total de 30 faixas longitudinais.

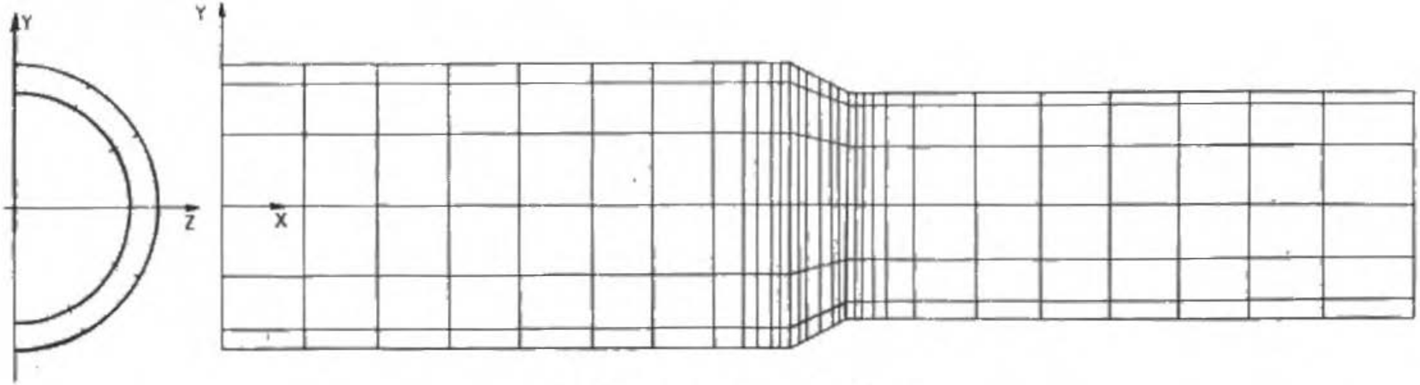


Figura 2(a). Redução concêntrica

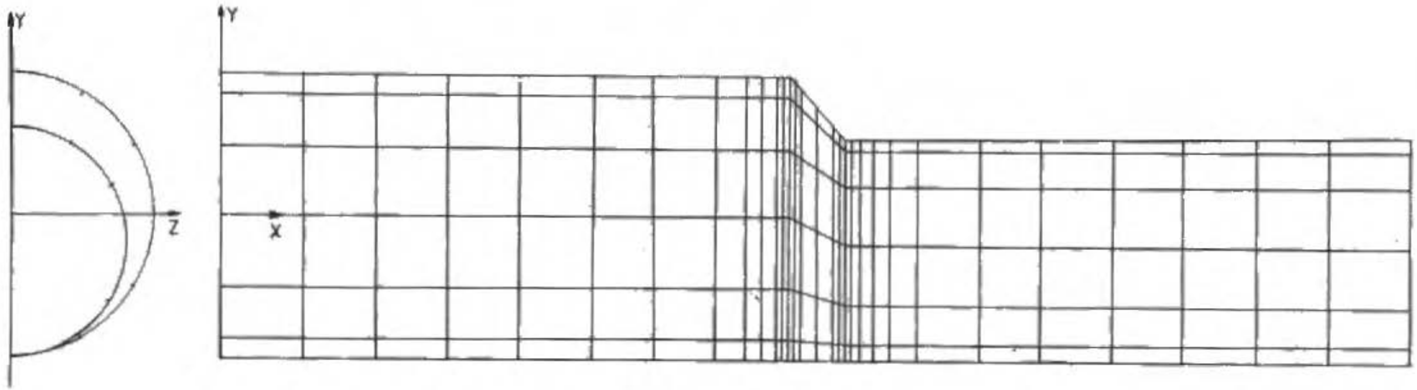


Figura 2(b). Redução excêntrica

Tabela 2 - Divisões ao longo do eixo longitudinal (x)

FAIXA	RAMO MAIOR Comp. = 10 L	FAIXA	REGIÃO CÔNICA Comp. = L	FAIXA	RAMO MENOR Comp. = 10 L
1	1.45L	13	0.125L	19	0.125L
2	1.27L	14	0.125L	20	0.125L
3	1.27L	15	0.25L	21	0.25L
4	1.27L	16	0.25L	22	0.25L
5	1.27L	17	0.125L	23	0.50L
6	1.09L	18	0.125L	24	1.09L
7	1.09L			25	1.09L
8	0.50L			26	1.27L
9	0.25L			27	1.27L
10	0.25L			28	1.27L
11	0.125L			29	1.27L
12	0.125L			30	1.45L

A seção reta do tubo é dividida igualmente em ângulos de 30^{o}. Quando da utilização do elemento sólido, a espessura é dividida em 2 faixas.

São obtidos um total de 372 pontos nodais nas análises com elementos de casca e 1116 pontos nodais com elemento sólido.

Tabela 3 - Resumo do modelo utilizado

Elemento Considerado	Nº Ptos. Longit.	Nº Ptos. Sgdo. Esp.	Nº Ptos. Circunfer.	Nº Total Ptos.	Nº Total Elementos
casca	31	1	12	372	360
sólido	31	1	36	1116	720

PROPRIEDADES DO MATERIAL

O material empregado é o aço WSTE-36 à temperatura ambiente ($20^{o}C$), com as seguintes propriedades.

Módulo de Elasticidade - $E = 2.12 \times 10^{5}$ N/mm²

Coeficiente de Poisson - $\nu = 0.3$
Tensão de Escoamento - $S_y = 355\ N/mm^2$
Tensão de Ruptura - $S_u = 550\ N/mm^2$

CARGAS CONSIDERADAS

Neste trabalho são estudadas as distribuições de tensões para reduções concêntricas e excêntricas sujeitas à pressão interna e à momento fletor, não sendo consideradas cargas térmicas, ou qualquer outro carregamento, em uma primeira avaliação das relações de tensões, devendo serem feitas análises a posteriori, para outros tipos de carregamentos.

Pressão Interna Unitária

Para este carregamento a tubulação é submetida à uma pressão interna unitária ($P = 1.0\ N/mm^2$), fazendo-se ainda a modelagem da tensão longitudinal pela aplicação de forças no terminal direito do tubo. Para cada nó desta seção é aplicada uma força longitudinal na seguinte forma:

$$F_x = \frac{P \times A}{\text{Nº de Nós da Seção}}$$

Um resumo das forças para modelagem da tensão longitudinal é apresentado na tabela 4 abaixo.

Tabela 4 - Forças longitudinais por nó no terminal direito (N)

Tipo de Elemento	Nº de Nós	Força / Nó
Casca	12	10 067.55
Sólido	36	3 355.85

Como o STARDYNE [4,5] não permite a aplicação de pressão interna diretamente em elementos sólidos, há necessidade de formulação de placas retangulares superpostas à face interna dos elementos sólidos. A modelagem destas placas é apenas um artifício para a entrada de dados do programa empregado. Estas placas devem ter espessura muito pequena tais que causem rigidez desprezível, e aqui é considerada como 0.00001mm.

Momento Unitário

A tubulação é sujeita a um momento fletor unitário pela aplicação de forças concentradas nos pontos nodais do terminal direito do tubo. Segue-se o cálculo dessas forças nodais para o elemento de casca, sendo análogo o procedimento quando da utilização do elemento sólido.

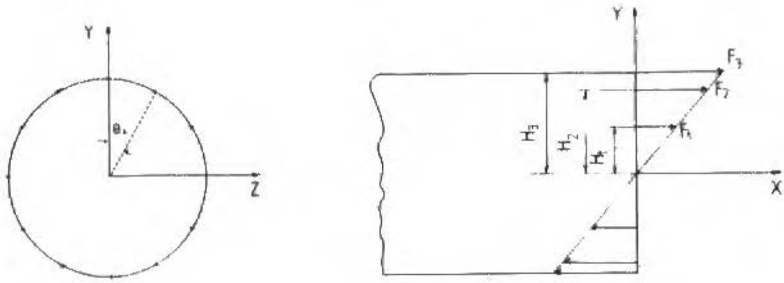


Figura 3. Aplicação de momento unitário

Da figura 3:

$$\frac{F_i}{H_i} = \frac{F_1}{H_1} \quad \therefore \quad F_i = F_1 \frac{H_i}{H_1} \tag{1}$$

Analisando a parte superior:

$$\Sigma F_i H_i = \frac{M}{2} \tag{2}$$

Com (1) e (2) e fazendo: $M = 1$

$$\Sigma F_1 \frac{H_1}{H_1} H_i = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \frac{F_1}{H_1} \Sigma H_i^2 = \frac{1}{2}$$

$$F_1 = \frac{H_1}{2 \Sigma H_i^2} \tag{3}$$

Calculando ΣH_i^2 :

$$H_i = R \cos\theta_i \tag{4}$$

$$\Sigma H_i^2 = 203.2^2 (\cos^2 60^o + \cos^2 30^o + \cos^2 0^o)$$

$$\Sigma H_i^2 = 82580.48 \tag{5}$$

Com (5) em (3), obtêm-se:

$$F_1 = 6.151 \times 10^{-4} \tag{6}$$

Com (6) e (4) em (1):

$$F_2 = 10.650 \times 10^{-4}$$

$$F_3 = 12.303 \times 10^{-4}$$

Como nas alturas H_1 e H_2 existem dois pontos nodais, estas forças devem ser tomadas como a metade, logo:

$$F_1/2 = 3.076 \times 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_2/2 = 5.325 \times 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_3 = 12.303 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Para o elemento sólido, usa-se o mesmo procedimento, com a diferença de haver a necessidade do cálculo de um número maior de parâmetros H_i, já que nesta formulação a espessura da tubulação é dividida em 2 faixas, fornecendo um número maior de pontos nodais por seção reta do tubo.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

São usadas as mesmas condições de contorno em ambas reduções e nos dois tipos de elementos. As figuras a seguir mostram as restrições impostas ao modelo, onde as setas indicam as direções nas quais o movimento é impedido.

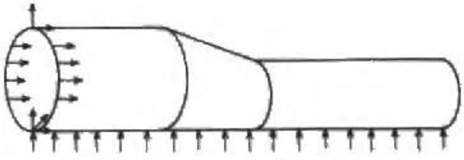


Figura 4(a). Carga: pressão interna

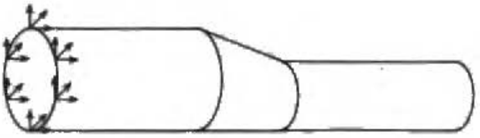


Figura 4(b) Carga: momento fletor

RESULTADOS

Para cada caso de carga analisado, são obtidos os deslocamentos de todos os pontos nodais, obtendo-se ainda as componentes das tensões (S_x, S_y, S_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} e τ_{zy} no centróide de cada elemento sólido) e (S_x, S_y e τ_{xy} nas faces externas e internas de cada elemento de casca). O output do STARDYNE fornece ainda as tensões normais máximas e mínimas e as tangenciais máximas. Nos gráficos seguintes, as linhas de contorno foram determinadas a partir dos valores obtidos para os pontos nodais por interpolação linear. Gráficos de tensões são elaborados para as regiões mais críticas.

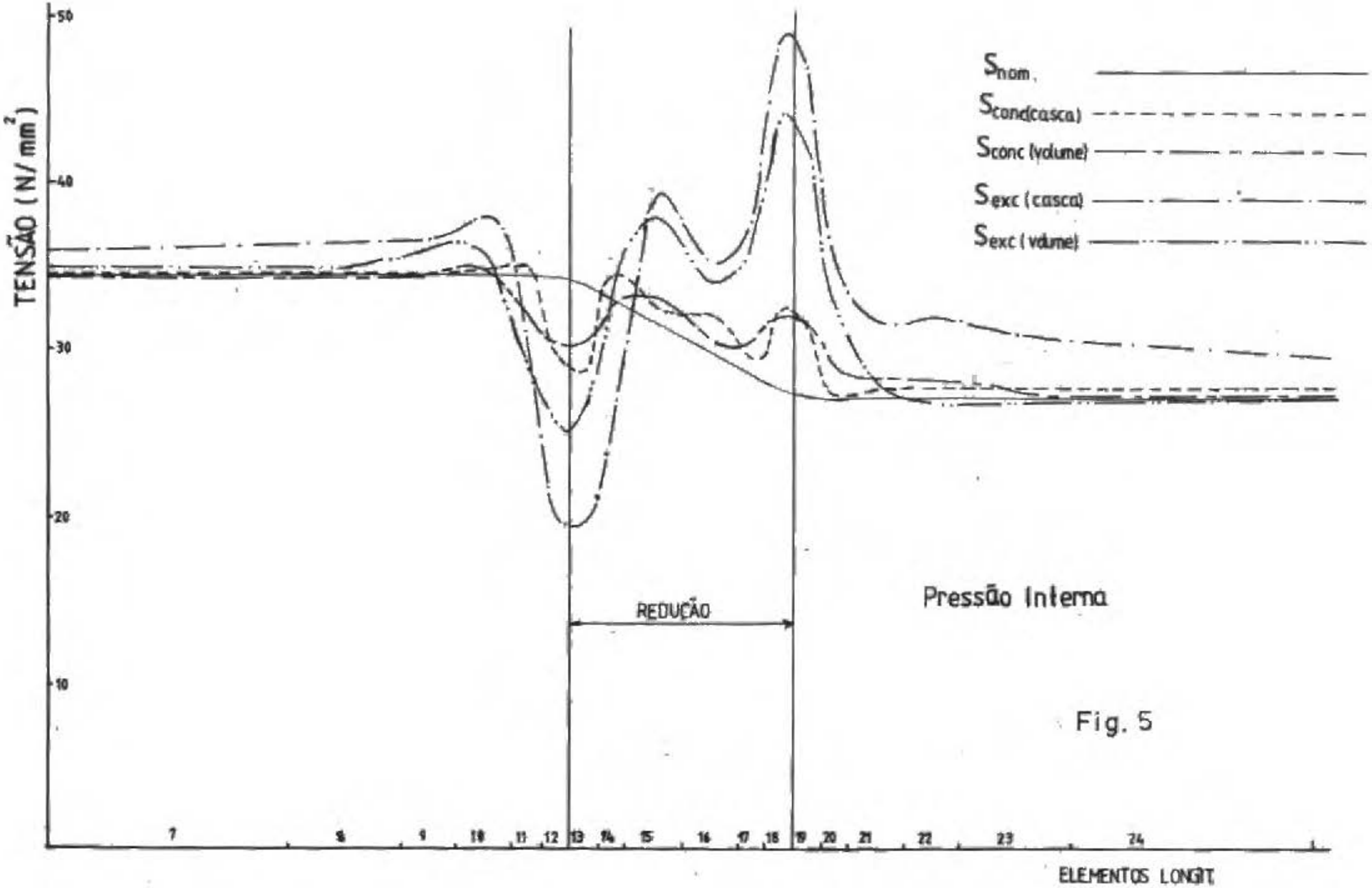
Pressão Interna

O fator de intensificação de tensões máximo é baseado na tensão nominal cricunferencial ou Hoop Stress (S_{nom} = PD/2t).

Na região cônica da redução é considerado o diâmetro médio do elemento, já que o STARDYNE fornece as tensões neste ponto.

Analisando a tubulação no sentido longitudinal nota-se que em pontos distantes da redução as tensões máximas aproximam-se da tensão nominal, aumentando nos pontos de maior descontinuidade geométrica.

Pelas figuras 5 e 6 e tabela 5, tem-se a distribuição de tensões no sentido longitudinal.



TENSÃO (N/ mm²)
50
40
30
20
10
S_{nom}
$S_{cond(casca)}$
$S_{conc\ (volume)}$
$S_{exc\ (casca)}$
$S_{exc\ (volume)}$
REDUÇÃO
Pressão Interna
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
ELEMENTOS LONGIT.

Fig. 5

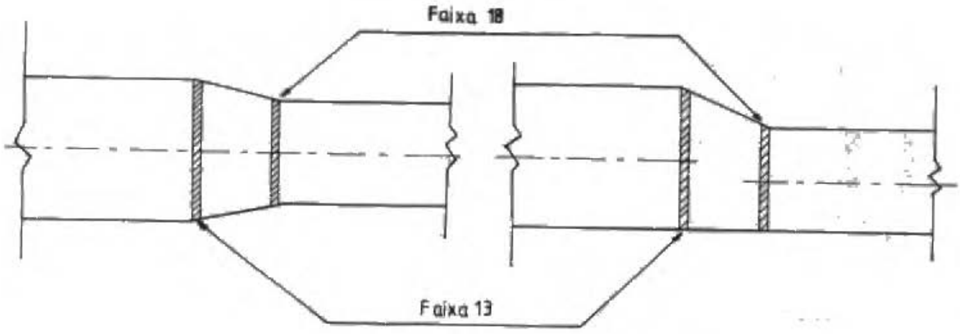


Figura 6. Faixas longitudinais

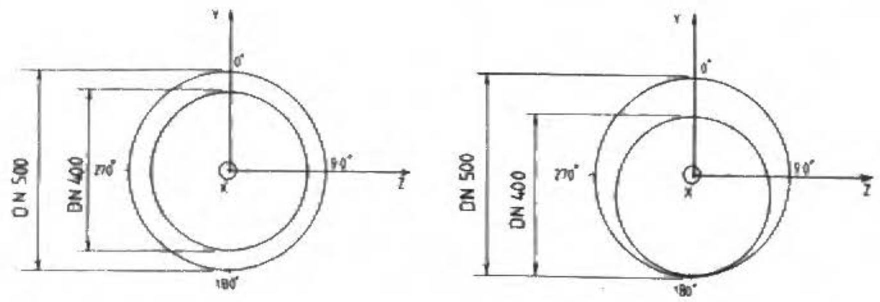
Tabela 5 - Relação de tensões: F = S_{max}/S_{nom} (Press. Int.)
(Tensões em N/mm²)

		PRESSÃO INTERNA UNITÁRIA							
		Red. Concêntrica				Red. Excêntrica			
		El. Casca		El. Sólido		El. Casca		El. Sólido	
	S_{nom}	S_{max}	F	S_{max}	F	S_{max}	F	S_{max}	F
DN 500	34.40	34.50	1.00	34.41	1.00	35.15	1.02	34.51	1.00
Faixa Long. 13	33.96	29.82	0.88	28.73	0.85	19.56	0.58	25.87	0.76
Faixa Long. 18	27.70	32.09	1.16	31.97	1.15	48.35	1.75	44.20	1.60
DN 400	27.25	27.62	1.01	27.36	1.00	27.55	1.01	27.31	1.00

Pela indicação da figura 7, a análise no sentido circunferencial mostra que para a redução concêntrica as tensões máximas tem um comportamento homogêneo (figuras 8(a) e 8(b)). Para redução excêntrica, esta análise mostra que as tensões máximas aparecem na região superior da tubulação ($\theta = 0^o$ ou 360^o)(figuras 8(a) e 8(b)).

Momento Unitário

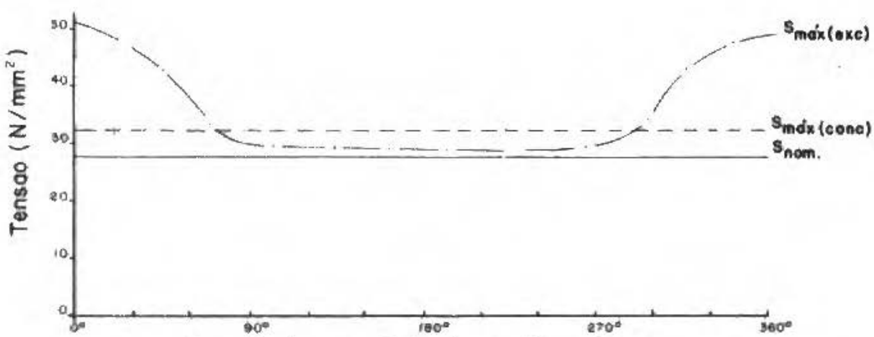
As tensões máximas são comparadas com a tensão de flexão (S_{nom} = MC/I) variável nos sentidos longitudinal e circunferencial. Pelas figuras 6, 7 e 9 analisando 1 elemento, tem-se o valor de "C" para cada elemento.



Redução concêntrica

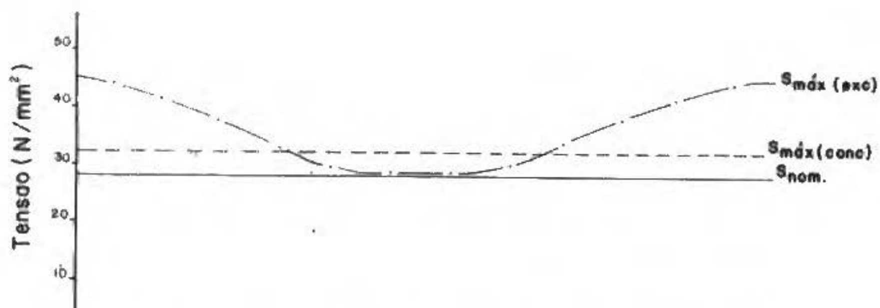
Redução excêntrica

Figura 7



Pressão Interna - Faixa Long.- Elem. Casca

Figura 8(a)



Pressão Interna - Faixa Long.18 - Elem. Sólido

Figura 8(b)

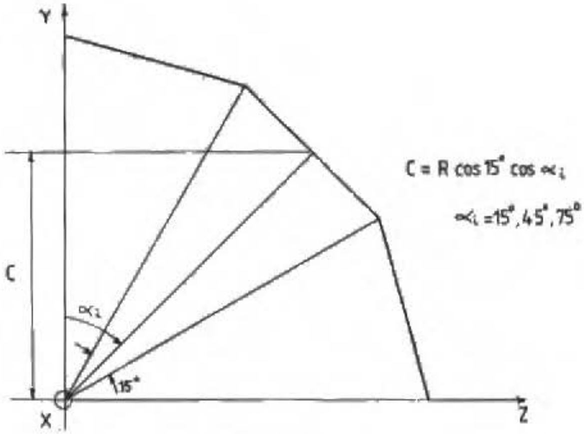
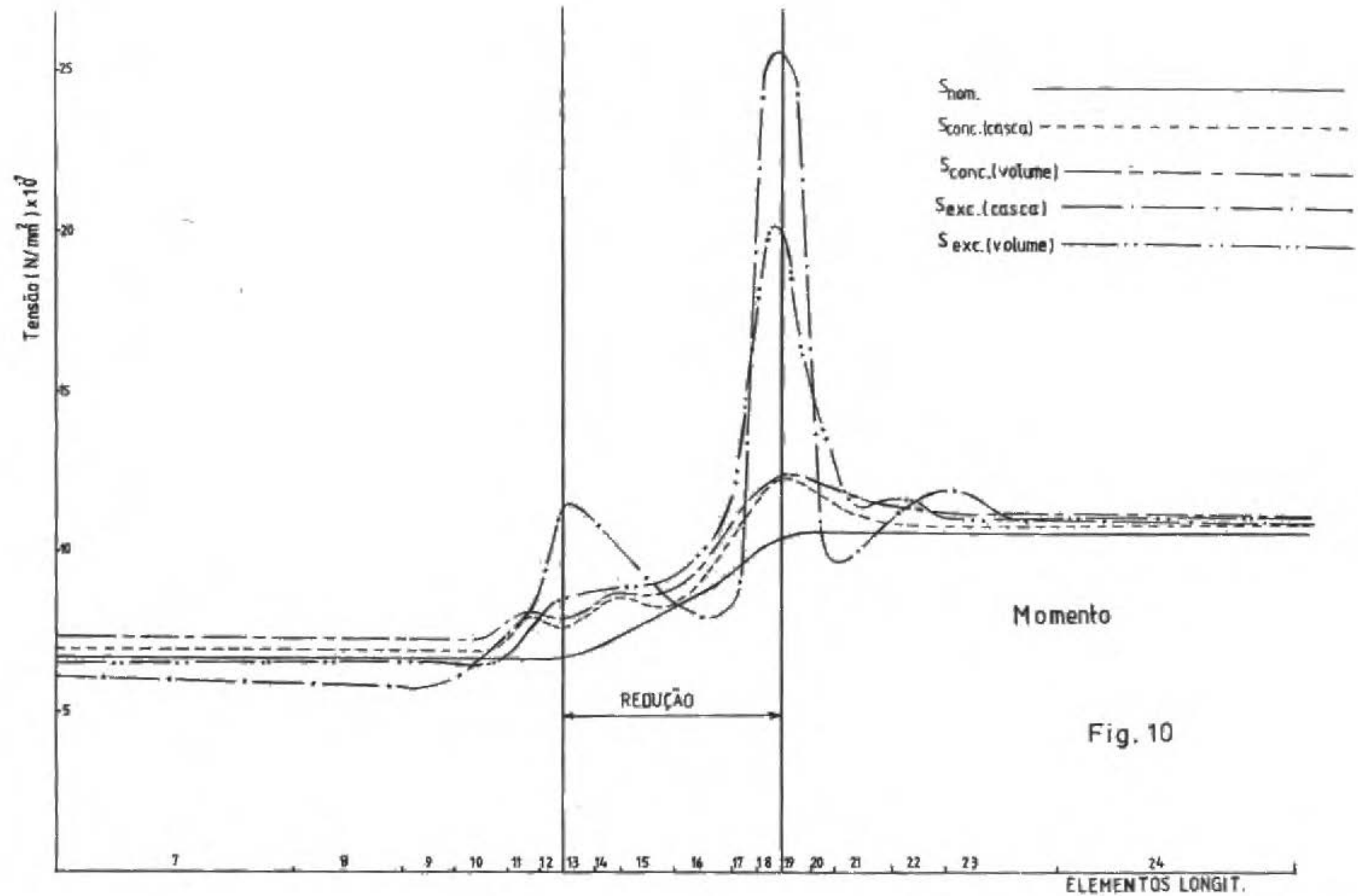


Figura 9

Segue-se gráficos e tabelas para os fatores de concentração de tensões para este carregamento.

Tabela 6 - Relação de tensões $F = S_{max}/S_{nom}$ (momento unitário)
(tensões em $N/mm^2 \times 10^{-7}$)

		MOMENTO UNITÁRIO							
		Red. Concêntrica				Red. Excêntrica			
		El. Casca		El. Sólido		El. Casca		El. Sólido	
	S_{nom}	S_{max}	F	S_{max}	F	S_{max}	F	S_{max}	F
DN 500	6.74	6.96	1.03	7.35	1.09	6.95	1.03	7.31	1.08
Faixa Long. 13	6.91	7.96	1.15	8.09	1.17	10.65	1.54	8.72	1.26
Faixa Long. 18	10.30	14.98	1.45	14.10	1.37	24.90	2.42	19.69	1.91
DN 400	10.63	10.85	1.02	11.20	1.50	10.82	1.02	11.04	1.04



Tensão (N/mm²) x 10
25
20
15
10
5
$S_{nom.}$
$S_{conc.(casca)}$
$S_{conc.(volume)}$
$S_{exc.(casca)}$
$S_{exc.(volume)}$
Momento
REDUÇÃO
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
ELEMENTOS LONGIT.

Fig. 10

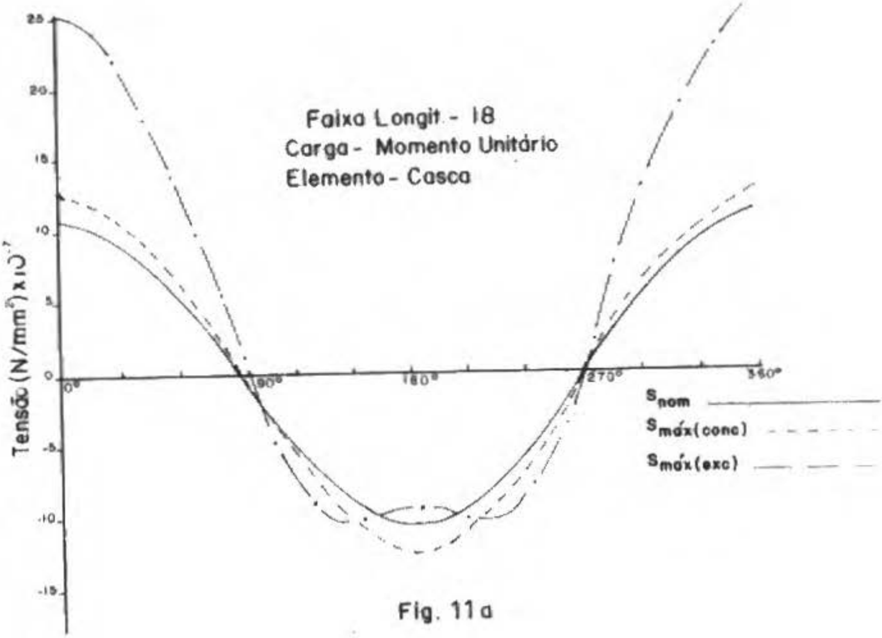


Fig. 11a

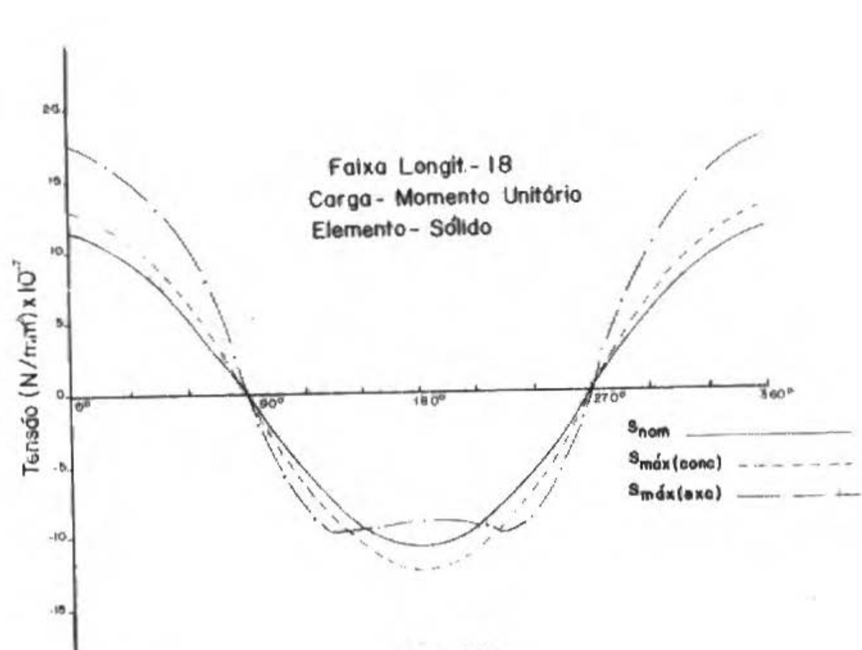


Fig. 11b

Comparação dos Resultados

As maiores relações entre tensões, surgem na transição entre a parte cônica e o tubo menor, tanto para a redução concêntrica quanto para a excêntrica.

Comparando-se o elemento de casca com o elemento sólido, nota-se que foram obtidos menores valores para o segundo tipo de formulação.

Na comparação entre as duas reduções, constata-se que para as excêntricas são obtidos maiores índices que nas concêntricas, o que era de se esperar pois nas excêntricas existe uma descontinuidade estrutural maior.

Um sumário das maiores relações entre a tensão máxima e a tensão nominal, é mostrada na tabela 7, para as diferentes formulações propostas.

Tabela 7

		Red. Conc.	Red. Exc.
Pressão	El. Casca	1.16	1.75
	El. Sólido	1.15	1.60
Momento	El. Casca	1.45	2.42
	El. Sólido	1.37	1.91

CONCLUSÕES

O método de elementos finitos se mostra satisfatório e útil no estudo da distribuição de tensões em reduções concêntricas e excêntricas de diâmetro de tubulações, podendo a formulação proposta ser extendida à outras geometrias, pela variação dos diâmetros, comprimento da região cônica, comprimento das regiões cilíndricas (já que as perturbações são, também governadas pela relação 10L/D), do ângulo de cone, ou mesmo pela variação da espessura nas regiões distintas que é o caso mais frequente em configurações reais.

Em uma extensão deste estudo, devem ser considerados outros carregamentos, (cargas térmicas, momento torçor, cargas transversais e longitudinais, cargas concentradas em alguns pontos e casos combinados).

REFERÊNCIAS

[1] ASME - Boiler and pressure vessel code, Section III, subsection NB, July 1980.

[2] PETERSON, R.E. – Stress concentration design factors. John Wiley and Sons Inc., New York, 1953.

[3] RAJU, P.P. – Development of stress indices for 45^0 lateral connections via 3-D finite element analysis. 6th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Tecnology, Paris, 1981.

[4] STARDYNE – User Information Manual, C.D.C., 1978.

[5] STARDYNE – Theoretical Manual, C.D.C., 1974.

[6] The M.W. Kellog Company – The analysis of piping systems. John Wiley, New York, 1977.

[7] PIPESD – User Manual e Theoretical Manual, C.D.C., 1978.

[8] KWUROHR – User Manual e Theoretical Manual, KWU, 1979.

RevBrMec, Rio de Janeiro, V. V, nº 3, pp. 43 a 64

FISURACION DE TUBERIAS POR TENSIONES TERMICAS PRODUCIDAS POR APERTURAS DE VALVULAS

G. Sánchez Sarmiento
Empresa Nuclear Argentina de Centrales Eléctricas S.A. - Argentina

SUMARIO

Se presenta en este trabajo una solución general, en término de parámetros adimensionales, para las tensiones térmicas y sus correspondientes factores de intensidad de tensiones producidas en un tubo cuya superficie interna es enfriado bruscamente durante la apertura de una válvula, de manera que el caudal del liquido aumenta linealmente en el tiempo. Empleando un código en elementos finitos, se calcula la distribución espacial y temporal de la temperatura suponiendo una variación lineal en el tiempo del número de Biot para la superficie interna, y condición adiabática para la superficie externa. De estos resultados generales se obtiene posteriormente por integración numérica la evolución de las tensiones térmicas correspondientes, y se tabulan sus máximos valores. Finalmente, a partir de éstas, por un procedimiento de superposición se calcula el factor de intensidad de tensiones para fisuras tanto cincunferenciales como axiales, en función de la profundidad de la misma. Los resultados adimensionales presentados son de validez general para el análisis de cualquier problema real del tipo citado.

INTRODUCCION

En los últimos años se han presentado numerosos casos de fisuraciones en tuberías de reactores nucleares [1-9], a pesar de que el diseño y construcción de estas componentes estructurales hayan estado basados en sofisticadas consideraciones de seguridad y performance. En reactores nucleares de potencia tales fallas pueden tener consecuencias catastróficas por la liberación de material radioactivo al exterior.

Entre las causas posibles que producen fallas en tramos de unión de tuberías pertenecientes a circuitos por los que circulan líquidos a diferentes temperaturas, últimamente se están estudiando [9-11]. dos tipos interrelacionados de solicitaciones térmicas:

a) Enfriamiento muy brusco de la superficie interna de la porción de tubería considerada durante una apertura de válvula ("shock térmico"). La consiguiente contracción de capas internas del tubo con respecto a las externas puede traer aparejada la fisuración del material desde dicha superficie [9-10].

b) Formación de dos capas de líquido de elevada diferencia de temperatura con interfaz horizontal ("estratificación térmica") en los casos de pequeños flujos de líquido en porciones inclinadas de tubos cerca de la unión entre dichos circuitos.
La oscilación de la interfaz puede iniciar fisuras por fatiga térmica en las paredes del tubo [11].

La distribución de tensiones térmicas producidas por un enfriamiento instantáneo de la superficie plana de un sólido o de la superficie interna de un cilindro, es un problema suficientemente resuelto en la literatura. Heisler (1953) presenta [12] soluciones generales adimensionalizadas para variaciones instantáneas de la temperatura del líquido y también para variaciones de la misma lineales en el tiempo con coeficiente de transferencia térmica constante. Emery en 1966 [11] también resuelve el problema para un escalón de temperatura y coeficiente de transferencia térmica infinito, y presenta gráficos del factor de intensidad de tensiones inducido por dicha solicitación térmica. Un análisis bastante completo para las hipótesis mencionadas puede verse en refs.[12 y 13], y últimamente Takeuti y Furukawa han analizado [14] el acoplamiento entre los campos térmico y de tensiones.

En cuanto a la propagación de fisuras inducida por solicitaciones térmicas transitorias, merecen citarse los trabajos de Nemat-Nasser y colab.[15-18], de Singh y colab. [19-20], de Stern [21], y de Ting y Jacobs [22].

En el caso de un enfriamiento brusco de la superficie de un tubo producido por la apertura gradual de una válvula, que deja pasar un líquido con temperatura uniforme menor que la inicial de aquél, puede suponerse con validez bastante general que el caudal del líquido aumenta linealmente con el tiempo. Para régimen turbulento, las correlaciones experimentales generalmente proveen relaciones entre los números de Nusselt y de Reynolds que para los fines prácticos pueden considerarse lineales. Resulta entonces un aumento del número de Biot lineal en el tiempo. En este trabajo se presenta entonces una solución general, en término de parámetros adimencionales, para el campo de temperatura y de las correspondientes tensiones térmicas en esa situación. A partir de éstas se calcula el factor de intensidad de tensiones para fisuras tanto circunferenciales como radiales, en función de la profundidad de las mismas.

CALCULO DE LA DISTRIBUCION TRANSITORIA DE LA TEMPERATURA

Se trata de resolver el problema térmico definido en la figura 1, gobernado por la ecuación diferencial:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}(K \frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{K}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{en } r_i \leq r \leq r_o \qquad (1.a)$$

con las condiciones de contorno:

$$h(T - T_b) = K \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{en } r = r_i \; ; \; t > 0 \qquad (1.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = r_o \; ; \; t > 0 \qquad (1.c)$$

y la condición inicial:

$$T = T_o \quad \text{en } r_i \leq r \leq r_o \; ; \; t = 0 \quad (1.d)$$

donde:

- T es la temperatura;
- c es el calor específico del material del tubo;
- ρ es su densidad;
- K es su conductividad térmica;
- t es el tiempo;
- r es la coordenada radial;

r_i, r_o son los radios interior y exterior del tubo respectivamente;

h es el coeficiente de transferencia térmica entre el tubo y el fluido que circula a través del mismo;

T_b es la temperatura "bulk" del líquido; y

T_o es la temperatura inicial uniforme del tubo.

Se adoptan las siguientes hipótesis:

a) La temperatura se supone independiente de las coordenadas axial y circunferencial, lo que fue contemplado en la ecuación (1.a);

b) c, ρ y K se suponen constantes, es decir, independientes de la temperatura;

c) El fluido circula por el interior del tubo durante la apertura gradual de una válvula, de manera que la velocidad media $\bar{v}$ del mismo crece linealmente en el tiempo desde $\bar{v} = 0$ para $t = 0$. Es decir:

$$\bar{v} \propto t \tag{2}$$

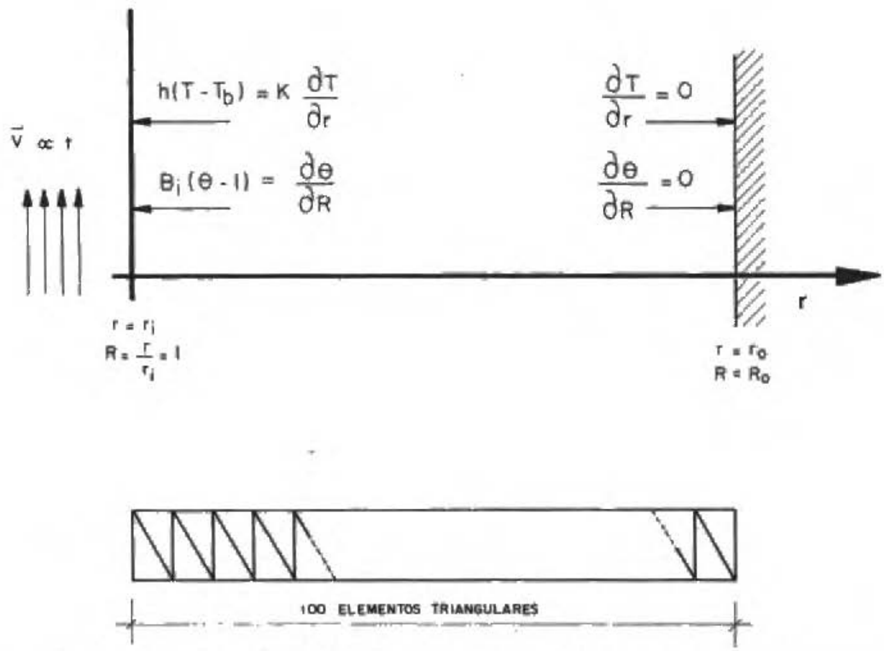


Figura 1. Condiciones de contorno para el campo térmico y red de elementos finitos empleada

A los fines de obtener resultados de validez general, se adimensionaliza el sistema diferencial (1.a-d) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\theta}{\partial R} \qquad \text{en} \quad 1 \le R \le R_o \qquad (3.a)$$

$$Bi(\theta - 1) = \frac{\partial\theta}{\partial R} \qquad \text{en} \quad R = 1 \qquad (3.b)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial R} = 0 \qquad \text{en} \quad R = R_o \qquad (3.c)$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en} \quad 1 \le R \le R_o \ \ y \ \ \tau = 0 \qquad (3.d)$$

donde:

$$\theta(R,\tau) = \frac{T - T_o}{T_o - T_b}, \qquad \text{temperatura adimensional} \ (4)$$

$$R = \frac{r}{r_i} \qquad \text{coordenada adimensional} \ (5)$$

$$\tau = \frac{K}{c\rho r_i^2} \qquad \text{tiempo adimensional} \qquad (6)$$

$$Bi = \frac{r_i\ h}{K} \qquad \text{Número de Biot} \qquad (7)$$

$$R_o = \frac{r_o}{r_i} \qquad (8)$$

Para cada situación particular, la relación entre h y v, y por ende entre Bi y τ, puede obtenerse a partir de correlaciones conocidas entre los números de Reynolds (Re), de Nusselt (Nu) y de Prandtl (Pr):

$$Re = \frac{\rho_b\ v\ D}{\mu_b} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu_b}{\alpha_b} \quad ; \quad Nu = \frac{hD}{K_b} \qquad (9)$$

donde:

ρ_b = densidad del líquido;

D = diâmetro interior del tubo ($D = 2\ R_o$);
μ_b = viscosidad cinemática del líquido;
ν_b = viscosidad cinemática del líquido;
α_b = difusividad térmica del líquido; y
K_b = conductividad térmica del líquido.

Todas las propriedades del líquido se evaluan a la temperatura con que circula.

Situaciones de shocks térmicos se presentan sólo para grandes valores de la velocidad media del líquido, en que el régimen es absolutamente turbulento. Para ese régimen las correlaciones experimentales generalmente proveen relaciones entre los números de Nusselt y de Reynolds que para los fines prácticos pueden considerarse lineales, es decir, proporcionalidades entre h y $\bar{V}$. La hipótesis c) implica entonces un crecimiento del número de Biot lineal en el tiempo ($Bi = A\tau$), por lo cual consideramos en este trabajo solamente la siguiente particularización de la condición de contorno (3.b):

$$A\tau(\theta - 1) = \frac{\partial\theta}{\partial R} \tag{10}$$

Los únicos parámetros adimensionales del problema diferencial (3.a - 10 - 2.c - 2.d) son el coeficiente A de (10) y la relación entre el espesor del tubo y su radio interno.

Una solución analítica general de este problema parece imposible. En este trabajo se resuelve el mismo mediante una formulación en elementos finitos para la variable espacial, y un esquema en diferencias finitas del tipo Crank-Nicolson para la variable temporal, similar al empleado en un programa anterior (CTR[25,26]).

Se han considerado sólo los siguientes conjuntos discretos de valores para los dos parámetros A y δ:

$$A = 10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ 10^6 \text{ y } 10^7 \tag{11}$$

y

$$\delta = 0.50;\ 0.10 \text{ y } 0.20 \tag{12}$$

que prácticamente cubren las situaciones que se presentan en la realidad.

Se empleó la malla unidimensional mostrada en la figura 1, consistente en 100 elementos finitos toroidales de sección triangular y 102 nodos (51 nodos en la dirección r).

En la figura 2 se muestra la variación radial y temporal de la temperatura adimensional obtenida numéricamente para un caso particular típico (δ = 0.1 y A = 10^6), tomando como abscisa la coordenada radial. Alternativamente, en el gráfico superior de la figura 3 se representan las mismas variaciones pero tomando como abscisa la variable temporal adimensional.

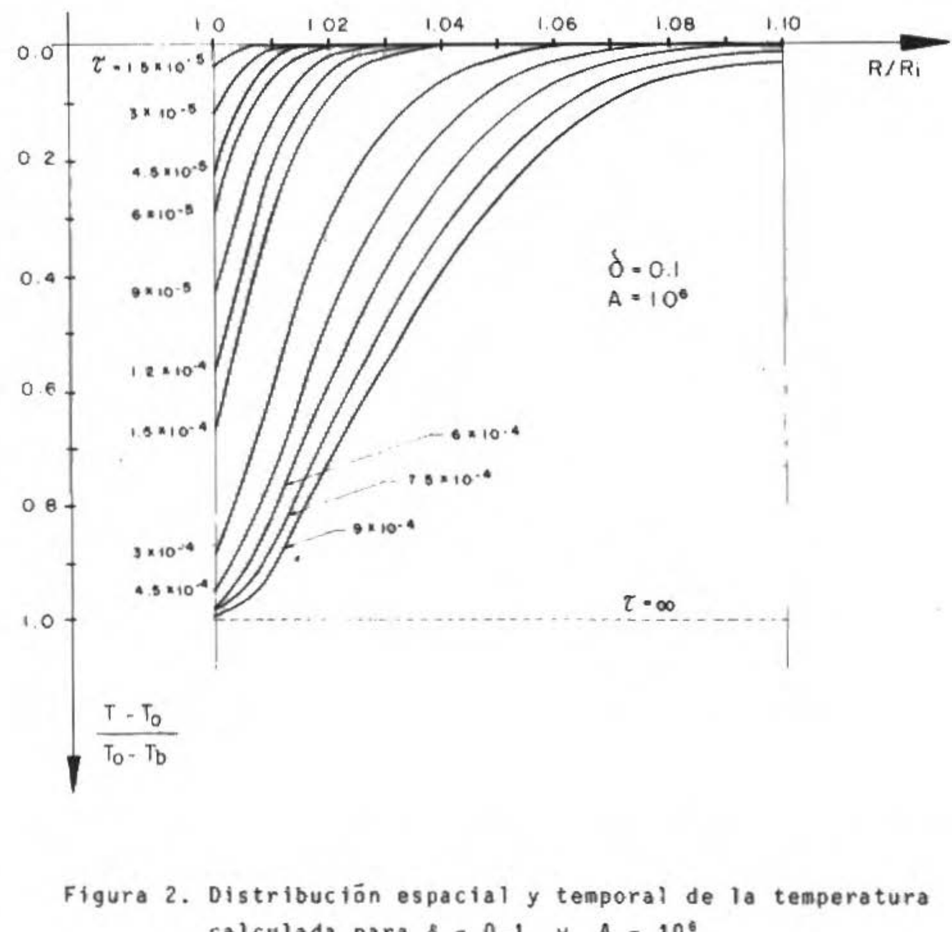


Figura 2. Distribución espacial y temporal de la temperatura calculada para δ = 0.1 y A = 10^6

CALCULO DE TENSIONES TERMOELASTICAS

Dada la extensión de los tiempos en que varían las temperaturas calculadas en la sección anterior, no se presentan ondas inerciales y las tensiones térmicas pueden calcularse a partir de la formulación cuasi estática, es decir, sin acoplamiento termomecánico. Para un cilindro sin presión interna y sin restricción en el desplazamiento axial, tal que a la temperatura $\theta = 0$ se encuentra libre de tensiones, con una distribución de temperatura $\theta(R,\tau)$ en un dado instante τ las correspondientes tensiones térmicas pueden calcularse a partir de las siguientes expressiones [27, pag.412]:

$$\frac{\sigma_\theta(R,\tau)}{E\alpha(T_o - T_b)/(1-\nu)} = \frac{1+1/R^2}{R_o^2 - 1}\int_1^{R_o} \theta(R',\tau)R'dR' + \frac{1}{R^2}\int_1^{R} \theta(R',\tau)R'dR' - \theta(R,\tau) \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_z(R,\tau)}{E\alpha(T_o - T_b)/(1-\nu)} = \frac{2}{R_o^2 - 1}\int_1^{R_o} \theta(R',\tau)R'dR' - \theta(R,\tau) \quad (14)$$

donde E es el módulo de Young, ν el factor de Poisson y α el coeficiente de dilatación térmica lineal del material del tubo.

Con las distribuciones de temperatura $\theta(R,\tau)$ calculadas según lo expuesto en B para ambos casos considerados, resolviendo numéricamente las integrales de (13) y (14) se obtuvieron las correspondientes distribuciones espaciales y temporales de tensiones mostradas en las figuras 3 a 10. Los valores de σ_z difieren muy poco de los de σ_θ, por lo cual sólo se graficaron estos últimos.

En la figura 3 se indica la variación temporal de la tensión σ_θ adimensionalizada sobre ambas superficies del tubo y en cuatro puntos interiores uniformemente espaciados. Interesa fundamentalmente el máximo valor alcanzado sobre la superficie interna ($R = 1$), en cuyo instante (τ_{max}) se tendrá mayor probabilidad de propagación de una fisura desde dicha superficie hacia el interior del material. Para distintos valores del parámetro A, la evolución temporal de esa tensión se grafica en las figuras 4 a 6, respectivamente para las siguientes relaciones espesor/radio interno: $\delta = 0.50, 0.10$ y 0.20.

En las figuras 7 a 9, por su parte, se muestran las distribuciones de la tensión σ_θ a través del tubo para el instante en que ella es máxima sobre la superficie interior y para los mismos valores anteriores de los parámetros. La información básica de tales figuras está sintetizada en la figura 10, donde se ha graficado en término de dichos parámetros sólo el valor máximo de σ_θ en $R = 1$.

En la Tabla 1 se indica, además de los valores numéricos de esta última figura, los tiempos adimensionales τ_{max} correspondientes.

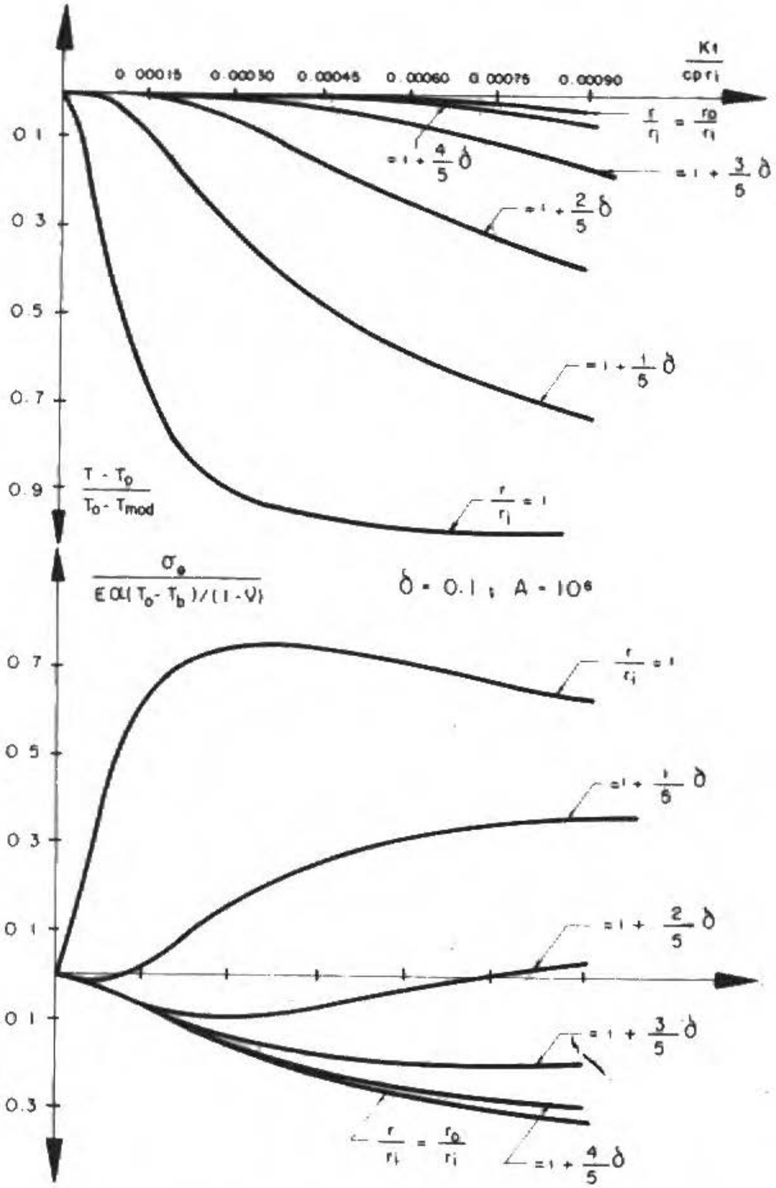


Figura 3. Variación temporal de la temperatura y de la tensión circunferencial adimensionalizadas sobre ambas superficies del tubo y en cuatro puntos equidistantes, para $\delta = 0.1$ y $A = 10^6$

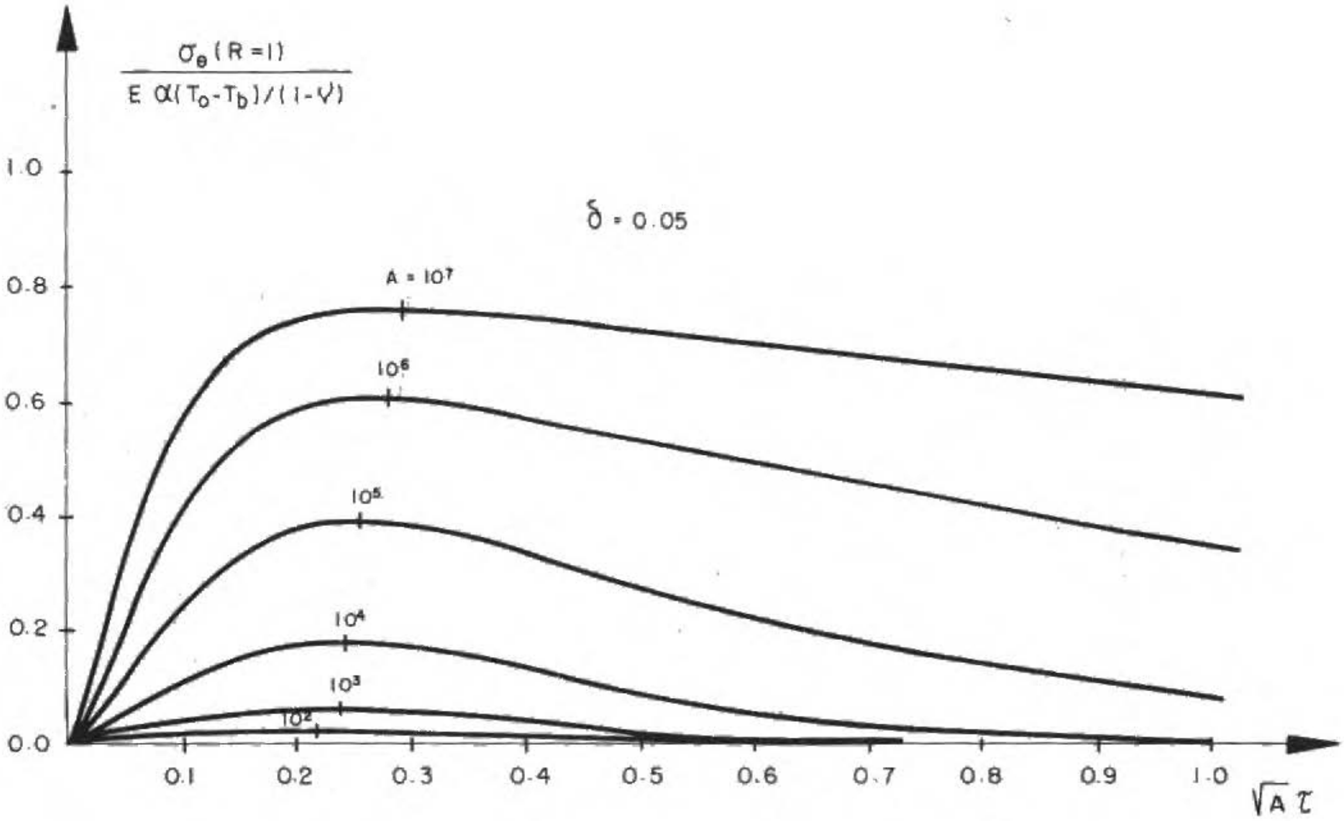


Figura 4. Evolución temporal de la tensión circunsferencial sobre la superficie interna del tubo para $\delta = 0.05$ y para distintos valores del parámetro A

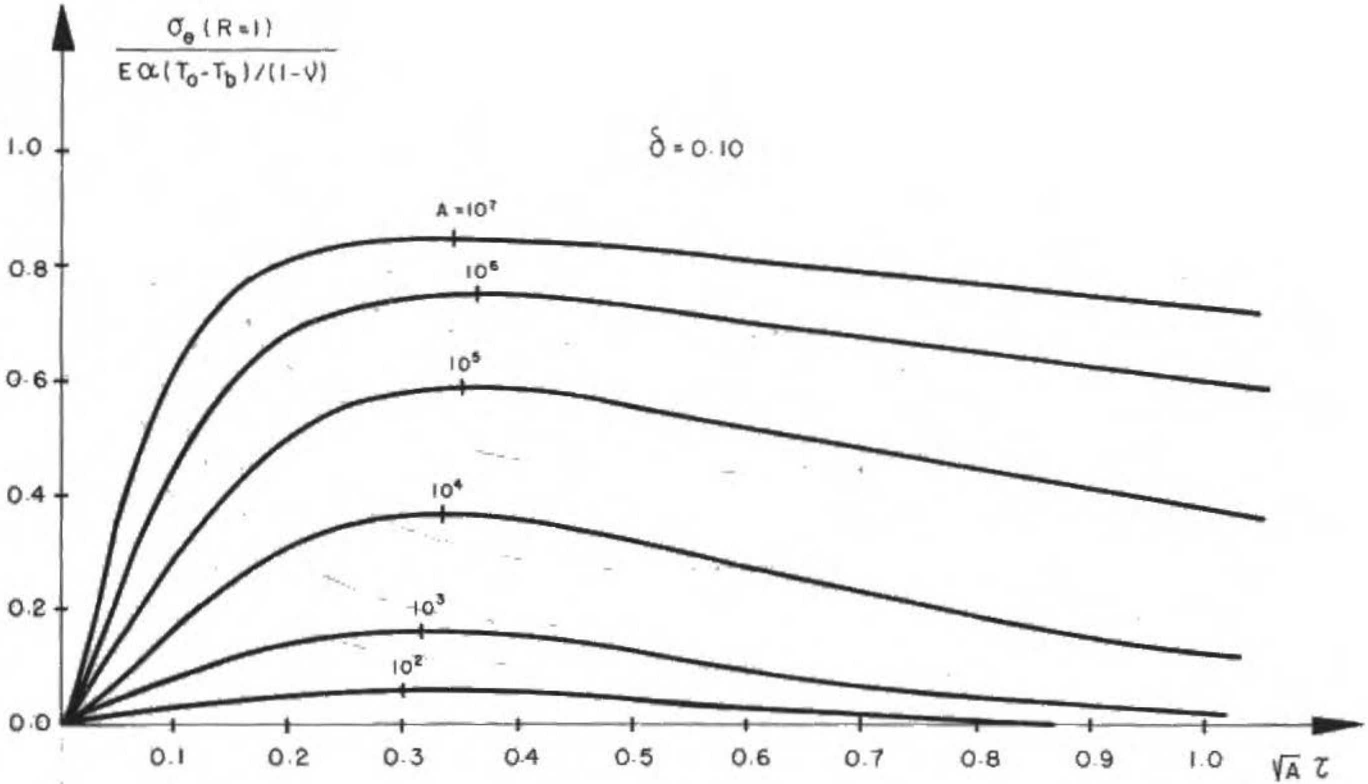


Figura 5. Evolución temporal de la tensión circunsferencial sobre la superficie interna del tubo para $\delta = 0.10$ y para distintos valores del parámetro A

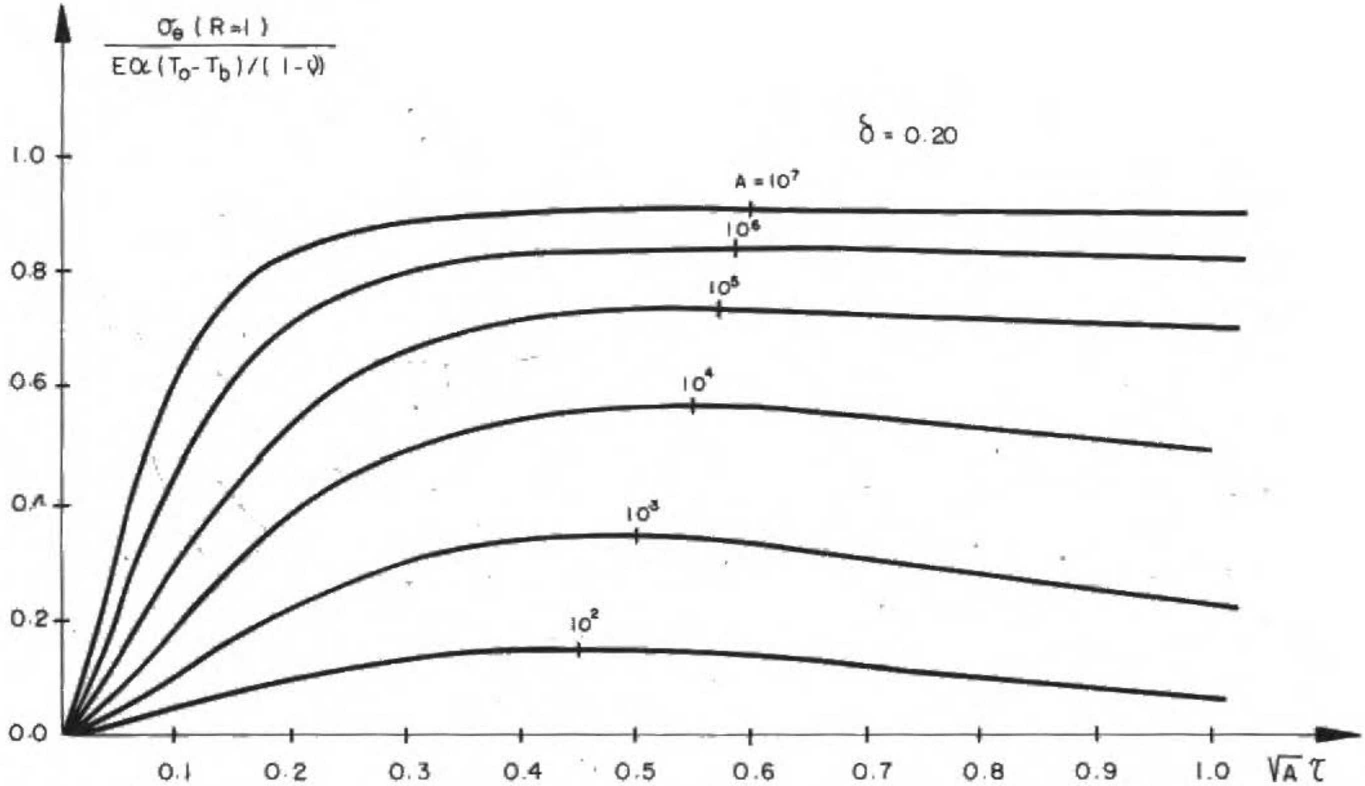


Figura 6. Evolución temporal de la tensión circunsferencial sobre la superficie interna del tubo para $\delta = 0.20$ para distintos valores del parámetro A

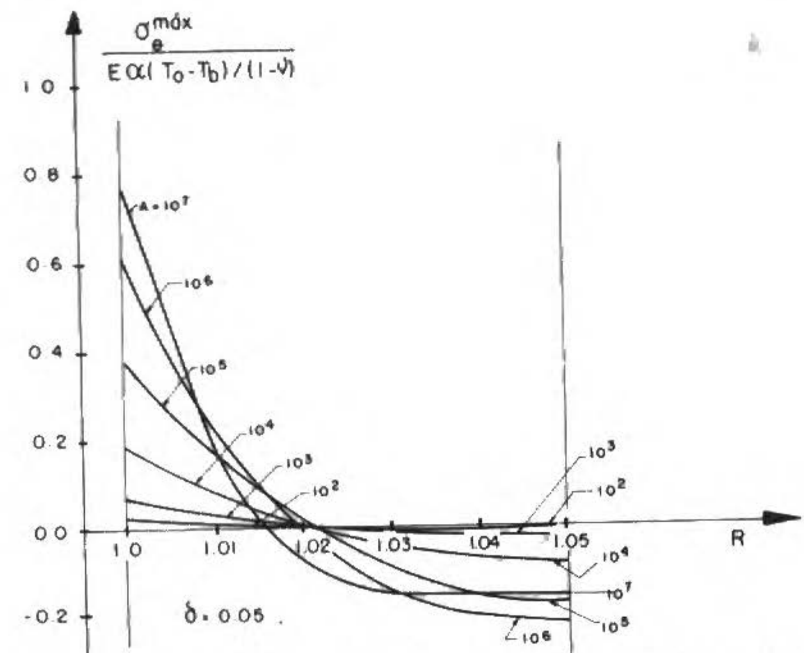


Figura 7. Distribución de la tensión circunsferencial a través del espesor del tubo para el instante en que es máxima sobre la superficie interna (δ=0.05)

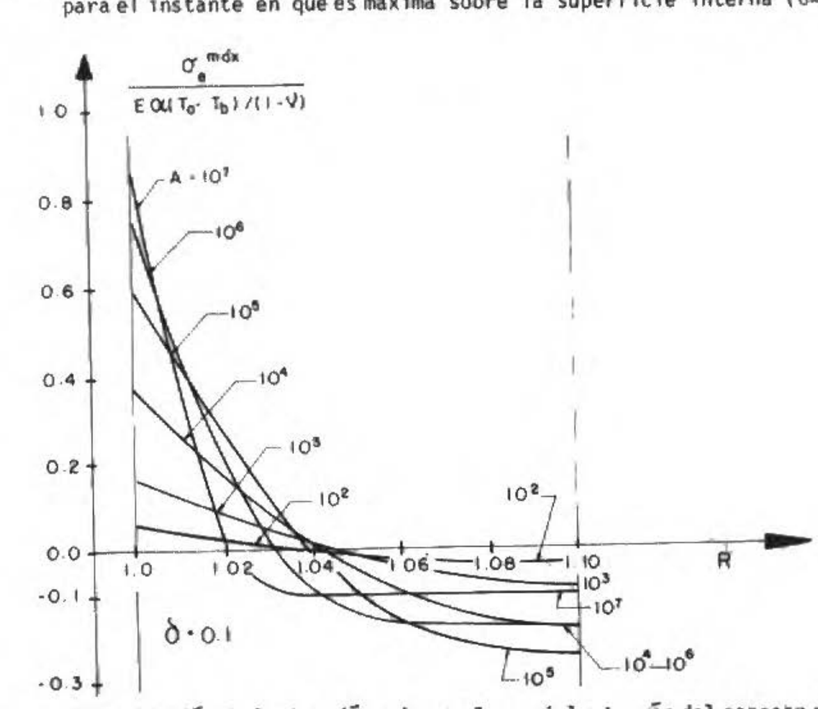


Figura 8. Distribución de la tensión circunsferencial a través del espesor del tubo para el instante en que es máxima sobre la superficie interna (δ=0.10)

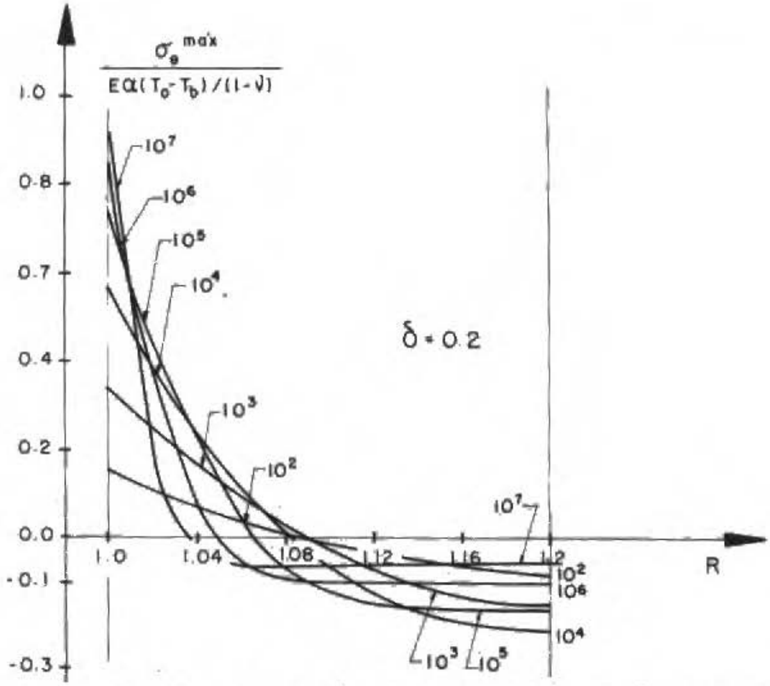


Figura 9. Distribución de la tensión circunsferencial a través del espessor del tubo para el instante en que es máxima sobre la superficie interna (δ=0.20)

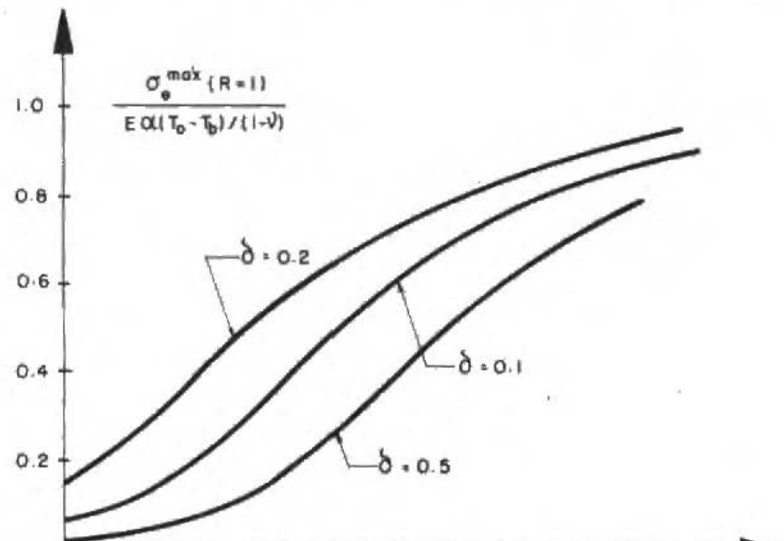


Figura 10. Tensión circunsferencial máxima sobre la superfície interna en término de los parámetros A y δ

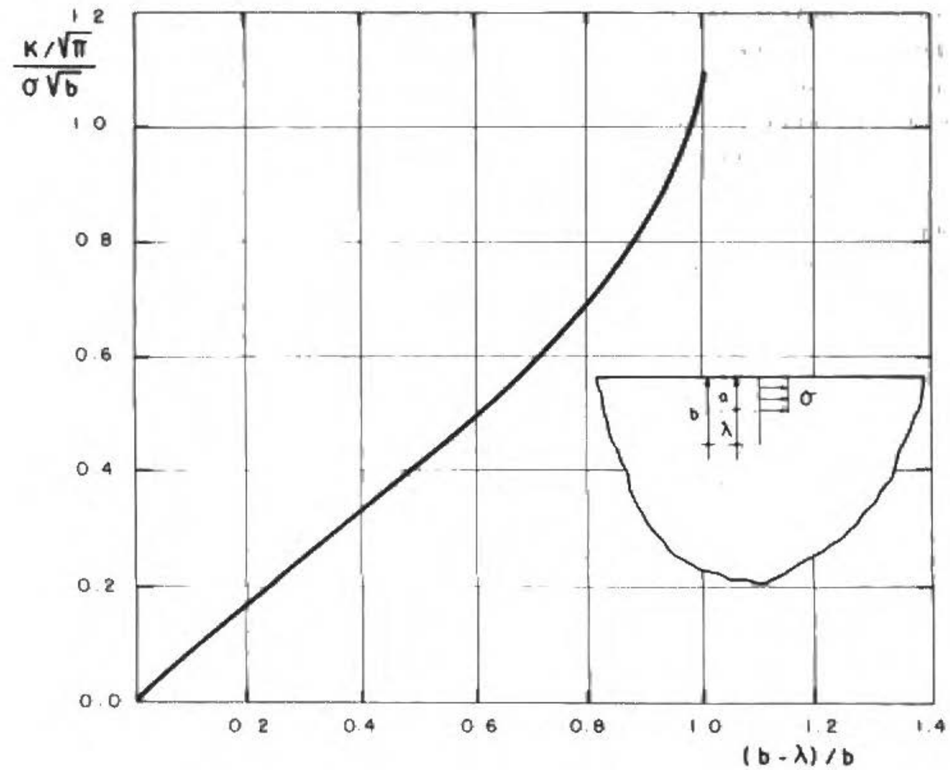


Figura 11. Factor de intensidad de tensiones para una fisura bidimensional de profundidad b en un semiespacio con carga distribuida σ uniforme en una longitud a (de ref.[11])

CALCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Para el cálculo del factor de intensidad de tensiones K_I dependiente del tiempo para fisuras axiales y circunferenciales que se propagan desde la superficie interna del tubo, seguiremos un método de superposición empleado por Emery [13]. Este procedimiento consiste en emplear una solución obtenida por Lachenbruch [28] para el problema de una fisura de profundidad b en un semiespacio indefinido, sobre cuyas paredes actua una presión constante σ en una profundidad $a = b - \lambda$ (ver figura 11). Esta solución, aunque aproximada, es útil porque permite aplicarla al caso de un estado arbitrario de tensiones sobre las paredes de la fisura. Empleando ahora el Teorema de Duhamel (superposición lineal), el factor de intensidad de tensiones para una distribución arbitraria de la tensión sobre una fisura axial (por ejemplo) de profundidad b vale:

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{b}} = 1.1\ \sigma_\theta(R = R_b) + \int_o^b \frac{d\sigma_\theta}{d\lambda}\ f\left(\frac{b-\lambda}{b}\right) d\lambda \tag{15}$$

donde $R_b = 1 + b/R_i$.

Expresaremos a K_I en términos de la función $\theta(R,\tau)$ calculada. Para ello cambiamos la variable de integración λ por R.

$$\lambda = r_i + b - r = r_i + b - R \cdot r_i = b + (1 - R) r_i \tag{16}$$

$$d\lambda = -r_i \cdot dR \tag{17}$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\lambda} = \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial R} \cdot \frac{dR}{d\lambda} = -\frac{1}{r_i} \cdot \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial R} \tag{18}$$

$$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial R} = \frac{E\alpha(T_o - T_b)}{1-\nu}\left[\frac{-2/R^3}{R_o^2 - 1}\int_1^{R_o} \theta(R',\lambda)R'dR' + \frac{1}{R}\ \theta(R,\tau) - \frac{2}{R^3}\int_1^R \theta(R',\tau)R'dR' - \frac{\partial\theta}{\partial R}\right] \tag{19}$$

con lo cual la (15) queda:

$$\frac{K_I(\tau)}{\frac{E\alpha(T_o - T_b)\sqrt{\pi}\ \sqrt{b}}{1-\nu}} = \frac{1.1\ \sigma_\theta(R = R_b)}{E\alpha(T_o - T_b)/(1-\nu)} - $$

$$- \int_1^{R_b}\left[-\frac{2/R^3}{R_o^2 - 1}\int_1^{R_o} \theta(R',\lambda)R',dR' + \frac{1}{R}\ \theta(R,\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{R^3}\int_1^R \theta(R',\tau)R'dR' - \frac{\partial\theta}{\partial R}\right] f\left[(R-1)\ \frac{r_i}{b}\right] dR \tag{20}$$

De una manera análoga resulta la expresión de K_I para una fisura circunferencial (en un plano perpendicular al eje de simetría):

$$\frac{K_I(\tau)}{\dfrac{E\alpha(T_o - T_b)\sqrt{\pi}\ \sqrt{b}}{1-\nu}} = \frac{1.1\ \sigma_z(R = R_b)}{\dfrac{E\alpha(T_o - T_b)}{1-\nu}} + \int_1^{R_b} \frac{\partial\theta}{\partial R}\, f\left[(R-1)\ \frac{r_i}{b}\right] dR \qquad (21)$$

Se han calculado las expresiones (20) y (21) en base a las distribuciones de temperatura obtenidas según lo expuesto en B para los instantes en que se registran las máximas tensiones sobre la superficie interna y por consiguiente, también los máximos valores de K_I. Dado que los valores calculados de σ_θ y de σ_z son muy parecidos, sólo se muestran calculados para fisuras circunferenciales(expresión (21), en función de la profundidad de las mismas, correspondientes a los mismos valores de los parámetros A y δ de las figuras anteriores.

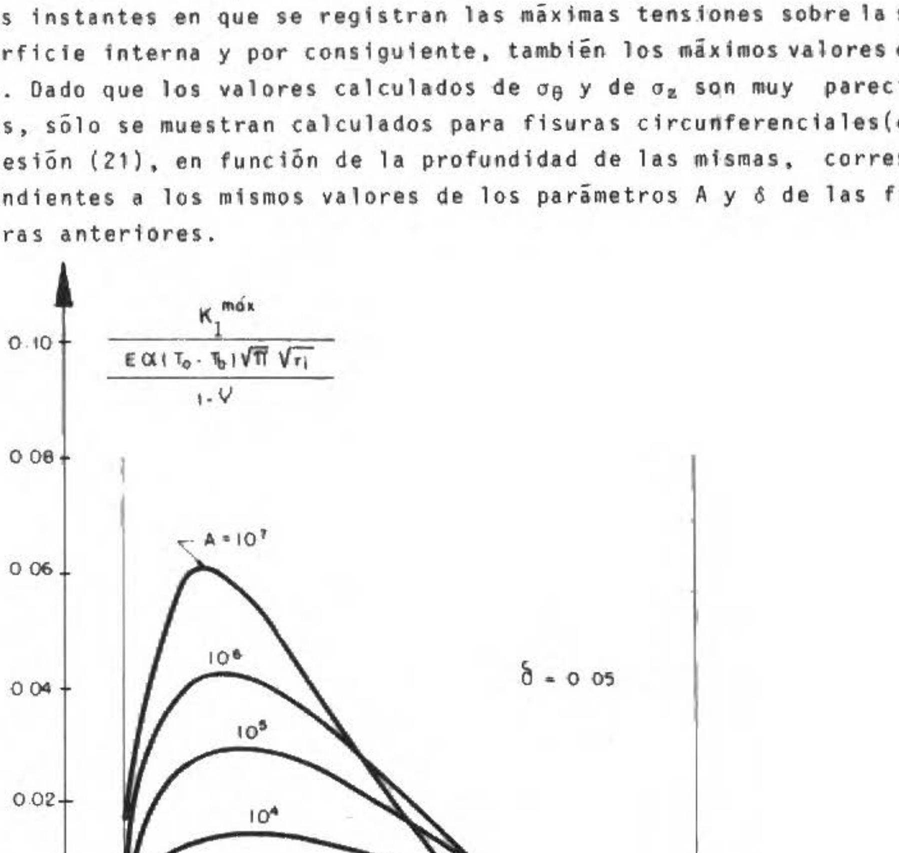


Figura 12. Factor de intensidad de tensiones calculado para fisuras axiales o circunferenciales cuando la tensión es máxima sobre la superficie interna del tubo, en función de la profundidad de la misma (δ = 0.05)

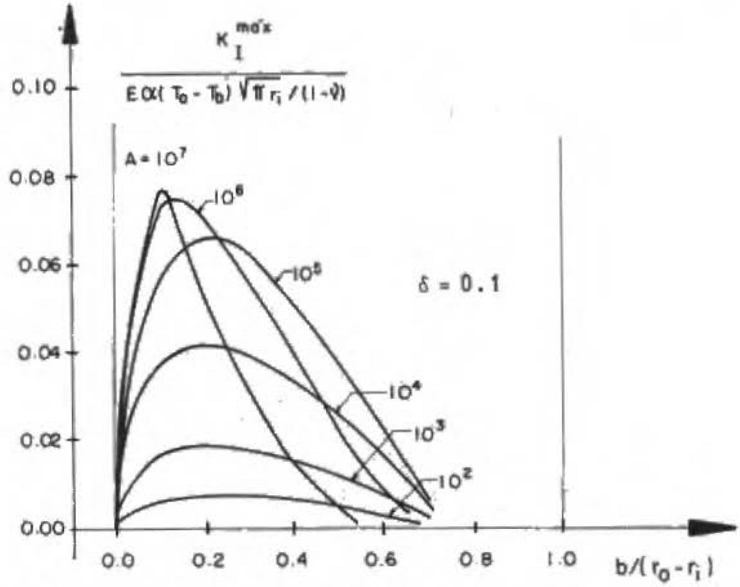


Figura 13. Factor de intensidad de tensiones calculado para fisuras axiales o circunsferenciales cuando la tensión es máxima sobre la superficie interna del tubo, en función de la profundidad de la misma (δ=0.10)

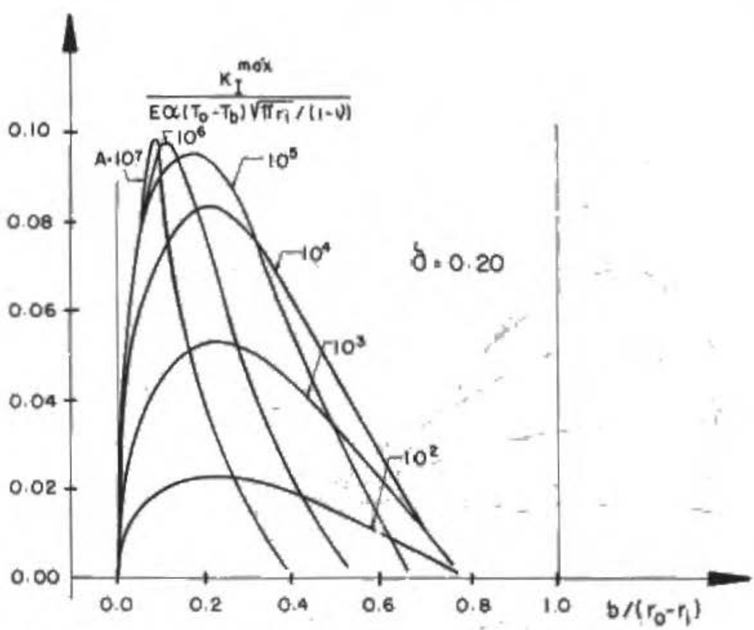


Figura 14. Factor de intensidad de tensiones calculado para fisuras axiales o circunsferenciales cuando la tensión es máxima sobre la superficie interna del tubo, en función de la profundidad de la misma (δ=0.20)

Tabla 1 - Valores máximos calculados para la tensión σ_θ (prácticamente igual a σ_z) sobre la superficie interna del tubo, y los tiempos adimensionales τ_{max} para los que se obtienen dichos valores

δ	A	τ_{max}	$\frac{\sigma_\theta(1,\tau_{max})}{E\alpha(T_o - T_b)/(1-\nu)}$
0.05	10^2	0.0170	0.01945
	10^3	0.00540	0.06010
	10^4	0.00238	0.1808
	10^5	0.000810	0.3877
	10^6	0.000280	0.6043
	10^7	0.000096	0.7595
0.10	10^2	0.0310	0.06301
	10^3	0.0099	0.1675
	10^4	0.0033	0.3715
	10^5	0.001125	0.5988
	10^6	0.000340	0.7541
	10^7	0.000102	0.8483
0.20	10^2	0.0460	0.1511
	10^3	0.0155	0.3434
	10^4	0.00544	0.5687
	10^5	0.00180	0.7364
	10^6	0.000590	0.8438
	10^7	0.000195	0.9104

CONCLUSIONES

Por haberse obtenido resultados adimensionalizados para la tensión térmica máxima sobre la superficie interna y para el factor de intensidad de tensiones inducido por la misma, en término de los únicos dos parámetros adimensionales A y δ del problema planteado, el presente trabajo provee información completamente general para ser aplicado a situaciones reales en forma inmediata. Los rangos de variación de ambos parámetros son suficientemente amplios como para contemplar aplicaciones muy variadas. En refs. [9] y [10] se describe un análisis concreto de este tipo, referente a las sucesivas fallas que ocurrieron en una porción del circuito moderador de la Central Nuclear Atucha I.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa aquí su sincero agradecimiento a los Dres. José Porto y César A. Sciammarella, por las valiosas discusiones mantenidas sobre este trabajo. Además, tanto el desarrollo del programa de computación como en la preparación del trabajo, se ha recibido una colaboración muy valiosa de la Ing. Alicia N. Bergmann.

REFERENCIAS

[1] ASME Publications 81-PVP-2/-3/-4.

[2] Freed water pipework replaced at Ringhals 1; Nuclear Engineering International, March 1982.

[3] Kanninen, M.F.; Broek, D.; Hahn, G.T.; Marschall, C.W.; Rybicki, E.F. y Wilkowski, G.M. – Towards an elastic-plastic fracture mechanics predictive capability for reactor piping. Nuclear Engineering and Design, 48 pp.117-134 (1978).

[4] Kanninen, M.F.; Popelar, C.H. y Broek, D. – A critical survey on the application of plastic fracture mechanics to nuclear pressure vessels and piping. Nuclear Engineering and Design, 67 : 27-55 (1981).

[5] Bush, S.H. – Nuclear Safety (5) : 568-579 (1975).

[6] Frank, L. et al. NUREG - 0679 (Agosto 1980).

[7] Shibata, K.; Oba, T.; Kawamura, T.; Miyazono, S. y Yokoyama, N. – Fatigue and fracture behavior of straight pipe with flaws in inner surface. Nuclear Engineering and Design, 66 : 33-45 (1981).

[8] Ranta-Maunus, A.K. y Achenbach, J.D. – Stability of circunferential through-cracks in ductile pipes. Nuclear Engineering and Design, 60 : 339-345 (1980).

[9] Porto, J. y Sánchez Sarmiento, G. – Analysis of the main causes of failure in the Atucha I PWR moderator circuit branch piping. International Meeting on Thermal Nuclear Reactor Safety, Chicago, Illinois, USA, Agosto 29, Sept. 3, 1982.

[10] Sánchez Sarmiento, G. – Análisis termoelástico de la posibilidad de fisuración del sistema moderador de la CNA I durante una prueba de válvulas. Informe Interno de ENACE - TM-IT-018-82 (Abril 1982).

[11] Idelsohn, S.R.; Costa, L.E. y Ponso, R. – Análisis por elementos finitos de la estratificación en fluidos causada por convección y conducción. I Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia. La Plata, Argentina, 31 Oct. 4 de Noviembro de 1982.

[12] Heisler, M.P. – Transient thermal stresses in slabs and circular pressure vessels. Journal of Applied Mechanics. Paper nº 53 - APM - 8 (1953).

[13] Emery, A.M. – Stress intensity factors for thermal stresses in thich hollow cylinders. Journal of Basic Engineering Transactions of the ASME, 45-52, Marzo 1966.

[14] Manson, S.S. – Thermal stress and low cicle fatigue. McGraw Hill, New York, 1966, pp.273-311.

[15] Skelton, R.P. – Crack propagation in metals during thermal shock. ICM 3, v.2, Cambridge, Inglaterra, Agosto 1979.

[16] Take ti, Y. y Furukawa, T. – Some considerations on thermal shock problems in a plate. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Marzo 1981, v.48, 113-118.

[17] Nemat-Nasser, D.; Keer, L.M. y Parihar, K.S. – Unstable growth of thermally induced interacting cracks in brittle solids. International Journal of Solids and Structures, v.14, pp.409-430 (1978).

[18] Keer, L.M.; Nemat-Nasser, S. y Oranratnachai, A. – Unstable growth of thermally induced interacting cracks in brittle solids: further results. International Journal of Solids and Structures, v.15, pp.111-126 (1979).

[19] Nemat-Nasser, S. y Oranratnachai, A. – Minimum spacing of thermally induced cracks in brittle solids. Journal of Energy Resources Technology Transaction of the ASME. Marzo 1979, v.101, pp.34-40.

[20] Geyer, J.F. y Nemat-Nasser, S. – Experimental investigation of thermally induced interacting cracks in brittle solids. International Journal of Solids and Structures. En impresión (1980).

[21] Singh, B.M.; Rokne, J.; Dhaliwal, R.S. y Hetnarski, R.B. – Thermal stresses in a long elastic cylinder containing a penny-shaped crack and embedded in a thermally conductive elastic infinite medium. Journal of Thermal Stresses, 2 : 449-473 (1979).

[22] Rokne, J.; Dhaliwal, R.S. y Singh, B.M. – Thermal stresses in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid bonded to a cylindrical inclusion. Journal of Thermal Stresses, 3 : 85-116 (1980).

[23] Stern, M. – The numerical calculation of thermally induced stress intensity factors. Journal of Elasticity, 9 : 91-95 (1979).

[24] Ting, V.Ch. y Jacobs, H.R. – Stress intensity factors for transient thermal loadings of a semi-infinite medium. Journal of Thermal Stresses, 2: 1-13 (1979).

[25] Basombrío, F.G. y Cruz, B. – Ecuación cuasiarmónica con derivada temporal. Su resolución por el Método de Faedo Galerkin con elementos finitos (Programas CTR y CTR1). Informe CNEA NT 30/78 (1978).

[26] Basombrío, F.G. y Sánchez Sarmiento, G. – Resolución numérica por elementos finitos de problemas no lineales de difusión dependientes del tiem-

po, Código CTR 1.
Cuartas Jornadas de Matemáticas Aplicadas, Santiago, Chile, 23-27 Julio 1979. SIGMA, v.5, nº 3-4, 37-54 (1979).

[27] Timoshenko, S. y Goodier, J.N. — Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, N.Y., 1951.

[28] Lachenbruch, A.H. — Depth and spacing of tension cracks. Journal of Geophysical Research, 66 (12) (1961).

RevBrMec, Rio de Janeiro, V. V, nº 3, pp. 65 a 89

ANALISIS ELASTOPLASTICO VIA OPTIMIZACION

Raúl Antonino Feijóo
LCC/CNPq
Rua Lauro Müller, 455
22290 - Rio de Janeiro, RJ

Néstor Zouain Pereira
Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453 - Rio de Janeiro, RJ

SUMARIO

Se presentam en este trabajo tres formulaciones variacionales para el análisis de una estructura de material elastoplástico ideal cuando sometida a un proceso de carga conocido. En particular muéstrase que la formulación en términos de tasas de tensiones corresponde al mínimo de un funcional quadrático con restricciones lineales, y la formulación en términos de velocidades corresponde al mínimo sin restricciones de un funcional no diferenciable. Ambas formulaciones adolecen del defecto que en el proceso de evolución no llevan implícita la condición de que el estado de tensiones deve ser plásticamente admisible. La tercera formulación variacional resulta expresada en función del estado de tensiones y corresponde a una inecuación variacional evolutiva. Esta última formulación tiene la ventaja sobre las otras dos de que las restricciones mecánicas siempre están satisfechas. Por último preséntase un ejemplo simple a fin de mostrar el algoritmo para obtener soluciones aproximadas de la inecuación variacional.

SUMMARY

Three variational formulations for the elastoplastic analysis are presented in this paper. One of them is related to the rate of the state of stress tensor field and corresponds to the minimization with linear constraints of a quadratic functional. The second one is related to the velocity field and is expressed as the minimum without constraints of a nondifferentiable functional. These two classical variational formulations are unable to take into account the mechanical constraints that the stress field must be plastically admissible during all the loading process. The third variational formulation is expressed in terms of the stresses and mathematically corresponds to an evolutionary variational inequality. A simple problem is also present in order to show the algorithm for the approximate solution for the last variational formulation.

INTRODUCCION

El objectivo de este trabajo es presentar las diferentes formulaciones variacionales para el análisis de un cuerpo de material elastoplástico ideal sometido a un proceso de carga conocido. Cada una de estas formulaciones variacionales puede ser resuelta a través de diferentes algoritmos numéricos, algunos de los cuales también serán discutidos en este trabajo.

A continuación explicitamos algunas definiciones y notaciones que nos serán útiles más adelante.

Básicamente, la definición del comportamiento elasto-plástico ideal deve ser capaz de atender a dos preguntas fundamentales:

Cuando ? Es decir, para que tensiones tenemos comportamiento elástico y para que tensiones podemos tener comportamiento plástico.

Como ? Es decir, existiendo un comportamiento plástico, como se procesa la deformación plástica.

Así tenemos que el comportamiento de un material elasto-plástico ideal queda definido una vez caracterizados los siguientes elementos.

a) Criterio de plasticidad. A través del criterio de plasticidad podemos definir para que estados de tensiones el material se comporta como elástico. Como es común en la literatura, el criterio de plasticidad para un material elasto-plástico ideal isotrópico está dado por una función f de valor real, convexa, isotrópica, definida en el espacio de las tensiones T y tal que:

$f(T) < 0$ corresponde al dominio elástico

$f(T) = 0$ corresponde a la frontera de este dominio

$f(T) > 0$ corresponde a la región inaccesible, esto es, estados de tensiones que no podrán existir en el cuerpo.

Limitándonos al caso de cuerpos homogéneos, podemos introducir la definición de campos de tensión plasticamente admisibles.

Definición 1. Decimos que el campo de tensiones T es plásticamente admisible si para cada punto x del cuerpo se verifica que $f(T(x)) \leq 0$. Al conjunto de todos los campos plásticamente admisibles lo designaremos con P:

$$P = \{T;\ f(T(x)) \le 0 \quad \forall x \text{ del cuerpo}\}$$

y en particular al conjunto de tensores $T(x)$ tales que $f(T(x)) \le 0$ lo designaremos con $C(x)$. Si en particular el material es homogéneo resulta $C(X) \equiv C$ cualquiera sea el punto del cuerpo.

b) <u>Ley de fluencia</u>. Esta ley establece la correspondencia entre el tensor tasa de deformación D, el estado de tensiones T y la tasa de tensiones $\dot{T}$. En particular vamos a limitarnos al caso de materiales llamados materiales "*standard*". Para estos materiales, si v representa el campo de velocidades en el cuerpo, ∇ el operador gradiente en relación a x, y $f_T(T)$ el gradiente de $f(T)$:

$$D = (\nabla v)^s = \frac{1}{2}\,(\nabla v + \nabla v^T)$$

$$D = D^e + D^p$$

$$D^e(x) = \mathbb{D}^{-1}\,T(x)$$

$$D^p(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad f(T(x)) < 0, \text{ o } \ f(T(x)) = 0 \ \text{ y } \ f_T(T(x)) \cdot \dot{T}(x) < 0 \\ \lambda f_T(T(x)), \quad \text{si} \quad f(T(x)) = 0 \ \text{ y } \ f_T(T(x)) \cdot \dot{T}(x) = 0 \\ \qquad \text{y con} \quad \lambda \ge 0 \quad \text{indeterminado.} \end{cases}$$

donde $\mathbb{D}$ es el tensor de elasticidad que supondremos en lo que sigue simétrico positivo definido.

También nos resultará útil la ecuación constitutiva inversa:

$$\dot{T}(x) = \mathbb{D}\,(D(x) - D^p(x))$$

$$D = (\nabla v)^s$$

$$D^p(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad f(T(x)) < 0, \text{ o } \ f(T(x)) = 0 \ \text{ y } \ f_T(T(x)) \cdot \mathbb{D}D(x) \le 0 \\ \dfrac{f\,(T(x)) \cdot \mathbb{D}D(x)}{f_T(T(x)) \cdot \mathbb{D}f_T(T(x))}\, f_T(T(x)) \qquad \text{si} \\ \qquad\qquad f(T(x)) = 0 \ \text{ y } \ f_T(T(x)) \cdot \mathbb{D}D(x) \ge 0 \end{cases}$$

Como podemos apreciar de las expresiones anteriores la tasa de deformación plástica D^p está siempre orientada según la normal saliente a la hipersuperficie $f(T(x))=0$. A su vez estamos también suponiendo que el criterio plasticidad definido por la función f es suficientemente regular para que su gradiente, f_T, sea siempre bien definido. Caso esto no ocurra (existencia de puntos angulosos) podemos generalizar los conceptos anteriores si admitimos que la región elástica queda definida por la intersección de un número finito de regiones convexas dadas por funciones f^α, $\alpha=1,2,\ldots,n$, suficientemente regulares. De esta manera en un punto anguloso la tasa de deformación plástica D^p estará orientada según una combinación lineal de las normales salientes a las superficies $f^\alpha(T(x))=0$ que pasan por ese punto (Koiter [1]).

Por otra parte y también como consecuencia de la ley constitutiva es conveniente introducir el concepto de tasa de tensión plásticamente admisible.

<u>Definición 2</u>. Dado el campo de tensiones T, decimos que el campo de tasas de tensiones $\dot{T}$ es plásticamente admisible para ese estado de tensiones T si se verifica que para todo x del cuerpo en el cual $f(T(x))=0$ resulta $f_T(T(x))\cdot\dot{T}(x)\leq 0$. En particular al conjunto de todos los campos de tasas de tensiones plásticamente admisibles relativos al campo T lo designaremos con $\dot{P}$. Como resulta fácil verificar $\dot{P}$ es una región convexa.

Una forma más compacta para formular esta ecuación constitutiva consiste en establecer que para cada punto x del cuerpo y para cada instante del proceso de carga se tiene

$$T(x)\in C=\{T;f(T)\leq 0\}$$

$$[D(x)-\mathbb{D}^{-1}\dot{T}(x)](T^*-T)\leq 0 \qquad \forall T^*(x)\in C$$

La expresión anterior no es otra cosa que el principio maximal de Hill, ($T(x)\in C$, y $D^p\cdot(T^*-T)\leq 0 \quad \forall T^*(x)\in C$) y en ella está implícita toda la información de la ecuación constitutiva. En efecto si en un punto x del cuerpo y para un instante t del proceso de carga el estado de tensiones T(x) es interior a la región elástica, tendremos que el único $D^p(x)$ que satisface el principio es $D^p(x)=0$, es decir en ese punto no tenemos comportamiento plástico incipiente, si por el contrario T(x) es tal que $f(T(x))=0$ podremos tener una tasa de deformación plástica D^P, orientada según la normal saliente a la frontera del criterio de plasticidad en el punto T(x) si es regular, o caso sea un punto singular, estará contenida en el cono positivo formado por las normales adyacentes al punto singular.

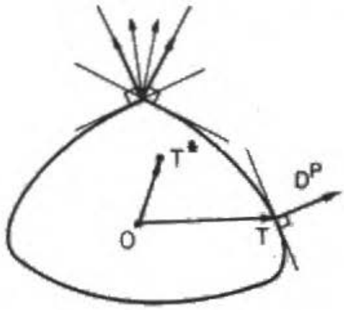


Figura 1

El principio de Hill escrito en la forma anterior es una descripción local de la ecuación constitutiva, es decir, válido para cada punto x del cuerpo. Podemos pasar a escribir un principio de potência máxima global equivalente al local, estableciendo que para cada instante t resulta:

$$\begin{cases} T \in P \\ \langle D - \mathbb{D}^{-1}\dot{T}, T^* - T \rangle \leq 0 \qquad \forall T^* \in P \end{cases}$$

donde:

$$\langle A,B \rangle = \int_\Omega A(x) \quad B(x)dx$$

siendo Ω la región ocupada por el cuerpo en la configuración inicial (estamos admitiendo pequeñas deformaciones).

De la misma manera que hemos definido una ecuación constitutiva global pasamos ahora a definir el concepto de equilibrio también de una manera global.

Para ello, haremos uso del princípio de la potência virtual, Germain [2], que establece.

Dado el sistema de cargas definido por $b = b(x,t)$ y $a = a(x,t)$ donde:

b: densidad de fuerzas de cuerpo

a: densidad de fuerzas de superficie prescriptas en la parte Γ_T de la frontera Γ de la región $\Omega \subset E^3$ ocupada por el cuerpo

decimos que el estado de tensiones T está en equilibrio con dichas cargas si, supuesto restricciones cinemáticas bilaterales, satisface:

$$<D(\hat{v}),T> = L(\hat{v}) \qquad \forall \hat{v} \in Var_v$$

donde:

$\hat{v}$: campo de velocidades virtuales cinemáticamente admisibles (es decir satisfacen condiciones homogêneas en la parte Γ_v de Γ donde el movimiento está prescripto. Se supone además que $\Gamma_T \cap \Gamma_v = \emptyset$ y $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_v$.

Var_v : espacio vectorial de campos de velocidades virtuales cinemáticamente admisibles.

$D(\hat{v}) = (\nabla\hat{v})^S$: campo de tasas de deformación virtual compatible en el sentido que existe el campo $\hat{v}$ que la define.

$L(\hat{v}) = \int_\Omega b\cdot\hat{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_T} a\cdot\hat{v}\, d\Gamma$: potencia externa virtual de las cargas actuantes asociada al campo $\hat{v}$.

En la definición anterior hemos omitido los términos de inercia en virtud de considerar que las cargas son aplicadas de tal manera que esta contribución sea despreciable. En particular, el conjunto de todos los campos T que para el instante t satisfacen el principio de la potência virtual (P.P.V.) lo designaremos con Est_t:

$$Est_t = \{T = T(x,t); \text{ para cada t satisfacen el P.P.V.}\}$$

De la propia definición de equilibrio vemos que si T_1 y T_2 pertenecen a Est_t resulta:

$$<D(\hat{v}),\, T_1 - T_2> = 0 \qquad \forall \hat{v} \in Var_v$$

es decir, para el instante t, $T_1 - T_2$ es un campo de tensiones autoequilibrada o en otras palabras, equilibradas con la carga nula. Al conjunto de todos los campos autoequilibrados los designaremos con Var_T que, como podemos comprobar facilmente, es un espacio vectorial.

De lo anterior se sigue también que:

$$Est_t = T^* + Var_T \quad \text{con} \quad T^* \in Est_t \text{, arbitratio.}$$

Es decir, Est_t es una variedad lineal del espacio vectorial Var_T.

Así como definimos el equilibrio entre el estado de tensiones T y las cargas aplicadas, b y a, también podemos definir el equilibrio entre la tasa de tensiones $\dot{T}$ y la tasa de las cargas aplicadas $\dot{b}$ y $\dot{a}$. De esta manera $\dot{T}$ estará en equilibrio si:

$$\langle D(\hat{v}),\dot{T}\rangle = \dot{L}(\hat{v}) \qquad \forall \hat{v} \in Var_v$$

donde:

$$\dot{L}(\hat{v}) = \int_{\Omega} \dot{b}\cdot\hat{v}\; d\Omega + \int_{\Omega_T} \dot{a}\cdot\hat{v}\; d\Gamma$$

En particular al conjunto de todos los campos $\dot{T}$ en equilibrio con $\dot{b}$ y $\dot{a}$ lo designaremos con $\dot{E}st_t$ que también es una variedad lineal del espacio vectorial de todas las tasas de tensiones autoequilibradas.

Por último, podemos notar que si v_1 y v_2 son dos campos arbitrarios de velocidades cinemáticamente admisibles, es decir son suficientemente regulares y satisfacen las restricciones al movimiento en Γ_v, tendremos:

$v_1 - v_2 = \hat{v}$ es un campo virtual de velocidades, arbitrario ya que también lo son v_1 y v_2.

luego:

$$\langle D(v_1 - v_2),T\rangle = 0 \qquad \forall T \in Var_T$$

En otras palabras, dadas dos tasas de deformaciones compatibles $D_1 = D(v_1)$ y $D_2 = D(v_2)$, arbitrarias, y para todo T autoequilibrado se verifica que:

$$\langle D_1,T\rangle = \langle D_2,T\rangle \qquad \forall T \in Var_T$$

PROBLEMA DE EVOLUCION DE UN CUERPO DE MATERIAL ELASTIPLASTICO IDEAL

En esta sección primero formularemos desde un punto de vista mecánico el problema de evolución de un cuerpo de material elastoplastico ideal para, psteriormente, pasar a establecer las diferentes formulaciones variacionales.

Para ello, consideremos nuestro cuerpo ocupando la región $\Omega \subset E^3$, constituído por un material elastoplástico ideal "*standard*" (ecuaciones constitutivas discutidas en la sección anterior) cuyo estado inicial es conocido, y sometido a un programa de carga durante el intervalo $[0,t_o]$ caracterizado por las cargas aplicadas $b = b(x,t)$ y $a = a(x,t)$ definidas, respectivamente, en el cuerpo y la parte Γ_T de la frontera Γ de Ω.

Luego, a cada instante de tiempo t el estado de tensiones $T = T(x,t)$ deve estar en equilibrio (estático) con las cargas aplicadas, en otras palabras deverá satisfacer el principio de la poténcia virtual.

Por otra parte dado que el material es elastoplástico ideal el estado de tensiones para cada instante t deverá ser también plasticamente admisible, es decir

$$T \in P \quad \text{para todo} \quad t \in [0,t_o]$$

A su vez, para cada instante t el campo de velocidades $v=v(x,t)$ debe ser cinemáticamente admisible, es decir suficientemente regular en Ω y satisfaciendo las restricciones cinemáticas impuestas en la parte Γ_v de la frontera Γ de Ω.

Este campo de velocidades también deberá estar asociado con la tensión T y su tasa $\dot{T}$ de manera tal que la ecuación constitutiva correspondiente a este material sea satisfecha en todo punto del cuerpo. En otras palabras para cada t deberá tenerse que:

$$D = D(x,t) = (\nabla v)^s = \mathbb{D}^{-1}\dot{T}(x,t) + D^p(x,t)$$

donde $D^p(x,t)$ está definido según ya explicitado en la Introdución.

En base a todo lo anterior podemos decir que el problema de la evolución de un cuerpo de material elastoplastico ideal consiste en:

Determinar para el intervalo $[0,t_o]$ la evolución de los campos de tensión T y de velocidades v tales que satisfagan las condi ciones iniciales, T esté en equilibrio con las cargas aplicadas b y a, v sea cinemáticamente admisible y estén relacionados a través de la ley constitutiva.

INECUACION VARIACIONAL EVOLUTIVA EN TENSIONES

A continuación vamos a mostrar que el problema anterior puede ser formulado a través de una inecuación variacional evolutiva (Moreau [3], Duvaut-Lions [4]) expresada únicamente en términos del estado de tensiones. Esta formulación variacional nos asegura la unicidad del estado de tensiones a partir de un estado inicial y proceso de carga conocidos, y también define de una manera natural el algoritmo numérico para la obtención de soluciones aproximadas.

Para formular esta inecuación variacional, supongamos primero que tenemos un cuerpo idéntico al de nuestro problema sometido al mismo sistema de cargas y a las mismas restricciones pero de material ilimitadamente elástico. Como ya es bien conocido, la evolución de este cuerpo ficticio nos define un único campo de tensiones que lo distinguiremos con T^E. En otras palabras T^E es el estado de tensiones correspondientes al proceso de carga dado y supuesto el material puramente elástico.

A su vez, el campo de tasas de deformaciones

$$\mathbb{D}^{-1}\,\dot{T}^E$$

será sin lugar a duda un campo de tasas de deformaciones compatibles, es decir proviene de un campo de velocidades cinemáticamente admisible v^E, solución del problema ficticio anterior.

Supongamos ahora que exista una solución de nuestro problema de evolución planteado en la sección anterior. Llamemos con T al campo de tensiones y con D^p a la tasa de deformación plástica asociada con éste y solución del problema de evolución planteado.

Llamemos ahora T^* a otro campo de tensiones arbitrario que sea estáticamente admisible.

Como T y T^* son campos estáticamente admisibles, su diferencia será un campo de tensión autoequilibrada:

$$T - T^* \in Var_T \qquad \forall T^* \in Est_t$$

La tasa de deformación total:

$$D = \mathbb{D}^{-1}\,\dot{T} + D^P$$

solución del problema evolutivo elastoplástico ideal será un campo de tasas de deformaciones compatibles.

De lo anterior y aplicando la última igualdad de la Introducción, tenemos:

$$<\mathbb{D}^{-1}\dot{T} + D^P,\, T - T^*> = <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^E, T - T^*> \qquad \forall T^* \in Est_t$$

sumiendo ahora que T^* es, además de equilibrado, también plásticamente admisible, y aplicando el principio de potência máxima global, de la expresión anterior se deduce que

$$<\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, T - T^*> \leq <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^E, T - T^*> \qquad \forall T^* \in K_t$$

o sea

$$<\mathbb{D}^{-1}(\dot{T}^E - \dot{T}), T - T^*> \geq 0 \qquad \forall T^* \in K_t$$

donde

$$K_t = Est_t \cap P$$

es el conjunto de campos de tensiones estática y plásticamente admisibles con las cargas aplicadas en el instante t. Observemos que P es convexo y Est_t una variedad lineal luego K_t es convexo si no es vacío. Puede mostrarse (Salençon [5]) que K_t resulta vacío si para el instante t las cargas aplicadas son cargas no soportables por la estructura.

Dado que también $T \in K_t$ la inecuación variacional evolutiva nos dice que para todo instante el campo:

$$\mathbb{D}^{-1}(\dot{T}^E - \dot{T}) \in Y$$

donde Y es el cono de (campos) normales exteriores al convexo K_t en T.

Vemos así, que la solución del problema de evolución elastoplastica de un cuerpo es solución de la inecuación variacional evolutiva, a partir de la condición inicial del problema. Recíprocamente podemos plantear que:

La solución del problema de evolución elastoplástica ideal consiste en determinar el campo T tal que:

$$\begin{cases} T \in K_t \\ <\mathbb{D}^{-1}(\dot{T}^E - \dot{T}), T - T^*> \geq 0 \qquad \forall T^* \in K_t \\ \text{para cada instante } t \in (0, t_o], \text{ y con} \\ \text{la condición inicial } \; T = T_o \text{ en } t = 0 \end{cases}$$

En efecto:

1. Moreau [3] ha establecido que si K_t es de interior no vacío existe una solución de la inecuación variacional evolutiva anterior.

2. Si existe solución es <u>única</u> y como la solución del problema de evolución elastoplastica vimos era solución de esta inecuación variacional tendremos por tanto que ambas coindiden. Con esto queda demostrada la equivalencia entre el problema de evolución elastoplastico ideal y el problema variacional (inecuación variacional) evolutivo. Veamos como probar la unicidad. Para ello suponga T_1 y T_2 dos soluciones de la inecuación variacional evolutiva luego se verifica:

$$<\mathbb{D}^{-1}\dot{T}_1, T_1 - T_2> \leq <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^E, T_1 - T_2>$$

y

$$<\mathbb{D}^{-1}\dot{T}_2, T_2 - T_1> \leq <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^E, T_2 - T_1>$$

Sumando miembro a miembro ambas inecuaciones, tenemos:

$$<\mathbb{D}^{-1}(\dot{T}_1 - \dot{T}_2), T_1 - T_2> \leq 0$$

o su equivalente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} <\mathbb{D}^{-1}(T_1 - T_2), T_1 - T_2> \leq 0$$

e introduciendo la norma definida a través del producto escalar anterior:

$$\| T \| = \langle \mathbb{D}^{-1} T, T \rangle^{1/2}$$

tendremos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| T_1 - T_2 \|^2 \leq 0$$

De esta manera vemos que la distancia entre las dos soluciones T_1 y T_2 es una función decreciente en el tiempo. Como en el instante inicial ambas soluciones satisfacen la misma condición inicial, la distancia es nula en $t = 0$ u como no puede ser negativa deberá continuar nula para todo $t \in [0, t_o]$. Es decir la solución es única.

FORMULACION VARIACIONAL PARA EL ANALISIS INCREMENTAL DE LA EVOLUCION ELASTOPLASTICA

Si observamos la ecuación constitutiva del material elastoplastico ideal podemos notar que la misma relaciona el estado actual de tensiones T, la tasa de tensiones $\dot{T}$ y la tasa de deformaciones D. De esta manera, resulta natural pensar que la evolución elastoplastica la podemos hacer paso a paso es decir, conocido T para un instante t, establecer una formulación variacional que nos permita calcular $\dot{T}$ y $\dot{D}$. Conocidos estos campos podemos pasar a un nuevo instante T + "dt" donde nuevamente repetiríamos el proceso.

Esta fue la manera clásica en que se planteó el análisis elastoplastico ideal y que dio origen a las llamadas formulaciones variacionales de la elastoplasticidad incremental (Hill [6], Koiter [1], Feijóo-Taroco [7]).

El problema incremental de la elastoplasticidad ideal consiste por tanto en lo siguiente. Dado un cuerpo sometido al sistema de cargas $b = b(x,t)$, $a = a(x,t)$ a partir del estado inicial conocido en $t = 0$ y durante el período $t \in [0, t_o]$, suponga conocido el estado en que el cuerpo se encuentra en el instante t luego, el problema de la elastoplasticidad incremental consiste en determinar los campos $\dot{T}$, D y v tales que:

$\dot{T} \in \dot{Est}_t \cap \dot{P} = \dot{K}_t$ es decir $\dot{T}$ sea equilibrado con las tasas $\dot{b}$ y $\dot{a}$ de las cargas aplicadas, y también plasticamente admisible para el estado de tensiones T conocido. En particular supues ta la intersección no vacía, $\dot{K}_t$ es convexo en virtud de que $E\dot{s}t_t$ es una variedad lineal y $\dot{P}$ un convexo.

v campo de velocidades cinemáticamente admisible, es decir satisface la regularidad necesaria y la restricción cinemática $v = \bar{v}$ en la parte Γ_v del Γ donde está prescrito el campo de velocidades.

$D = (\nabla v)^s$ compatibilidad de la tasa de deformación.

$\dot{T}$, D y T estén relacionados a través de la ecuación constitutiva para el material elastoplastico ideal.

En base a lo anterior no resulta dificil plantear los principios de mínimo enunciados en los items siguientes.

<u>Principio de Mínimo en Tasas de Tensiones</u>. Supuesto conocido el estado en que se encuentra el cuerpo en el instante t, de todos los campos de tasas de tensiones estáticamente admisibles con las tasas de cargas aplicadas y plásticamente admisibles, y si $\dot{K}_t = E\dot{s}t_t \cap \dot{P}$ es no vacío ($\dot{K}_t$ puede ser vacío toda vez que el sistema de cargas actuantes sobre el cuerpo en el instante t corresponda a una carga de colapso o insoportable para el cuerpo (Zouain [8], Zouain-Feijóo-Taroco [9]) luego, aquel campo $\dot{T}$ que hace que el funcional:

$$\Pi^*(\dot{T}^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbb{D}^{-1}\dot{T}^* \cdot \dot{T}^* \, d\Omega - \int_{\Gamma_v} \dot{T}^* n \cdot \bar{v} \, d\Gamma$$

alcance un mínimo (absoluto) es la solución del problema de la elastoplasticidad incremental. Por otra parte el campo $\dot{T}$ así determinado es único.

<u>Demostración</u>. Sea $\dot{T}$ solución del problema incremental de la elastoplasticidad luego:

$$\dot{T} \in E\dot{s}t_t \cap \dot{P} = \dot{K}_t$$

y sea $\dot{T}^*$ un campo arbitrario de tasa de tensión en equilibrio con la tasa de cargas $\dot{b}$, $\dot{a}$ y plásticamente admisible para T, es decir:

$$\dot{T}^* \in E\dot{s}t_t \cap \dot{P} = \dot{K}_t$$

En base a lo anterior se sigue que $\dot{T} - \dot{T}^*$ es un campo de tensiones autoequilibrado, luego, llamando D a la tasa de deformación solución del problema incremental de la elastoplasticidad ideal y en razón del principio de la potência virtual resulta:

$$<D, \dot{T} - \dot{T}^*> = \int_{\Gamma_v} (\dot{T} - \dot{T}^*) n \cdot \overline{v} \, d\Gamma$$

donde n es el vector unitario según la normal saliente a la parte Γ_v de la frontera.

Por otra parte:

$$\Pi^*(\dot{T}) - \Pi^*(\dot{T}^*) = \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, \dot{T}> - \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^*, \dot{T}^*> - \int_{\Gamma_v} (\dot{T} - \dot{T}^*) n \cdot v \, d\Gamma$$

que según la expresión anterior puede reescribirse como:

$$\Pi^*(\dot{T}) - \Pi^*(\dot{T}^*) = \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, \dot{T}> - \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^*, \dot{T}^*> - <D, \dot{T} - \dot{T}^*> =$$

$$= \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, \dot{T}> - \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}^*, \dot{T}^*> - <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, \dot{T} - \dot{T}^*> - <D^p, \dot{T} - \dot{T}^*> =$$

$$= -\frac{1}{2} [\| \dot{T} \|^2 + \| \dot{T}^* \|^2 - 2 <\mathbb{D}^{-1}\dot{T}, \dot{T}^*> + 2 <D^p, \dot{T}> - 2 <D^p, \dot{T}^*>] =$$

$$= -\frac{1}{2} [\| \dot{T} - \dot{T}^* \|^2 + 2 <D^p, \dot{T}> - 2 <D^p, \dot{T}^*>]$$

Ahora bien, por ser D^p y $\dot{T}$ soluciones del problema incremental y por ser $\dot{T}^*$ plásticamente admisible para T se tiene:

$$<D^p, \dot{T}> = 0$$

$$<D^p, \dot{T}^*> = \int_\Omega \lambda f_T(T) \cdot \dot{T}^* dx \leq 0$$

luego:

$$\Pi^*(\dot{T}) \leq \Pi^*(\dot{T}^*) \qquad \forall \dot{T}^* \in \dot{K}_t$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\dot{T}^* \equiv \dot{T}$. Como podemos apreciar si existe solución del problema de mínimo, ésta es única y coincide con la solución del problema de la elastoplasticidad ideal incremental.

Resumiendo, el problema de la elastoplasticidad consiste en determinar la solución del siguiente problema variacional.

$$\min_{\dot{T}^* \in \dot{K}_t} \{\Pi^*(\dot{T}^*) = \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}T^*, T^*> - \int_{\Gamma_v} \dot{T}^* n \cdot \bar{v}\}$$

que como vemos se trata de encontrar el mínimo de un funcional cuadrático con restricciones (lineales) que definen el convexo $\dot{K}_t$.

Principio de Mínimo en Velocidades. De la misma manera que hicimos en el item anterior, supongamos conocido el estado en que el cuerpo se encuentra en el instante t.

Llamemos Kin_v al conjunto de todos los campos de velocidades cinemáticamente admisibles para el instante t, en particular, suponiendo restricciones del tipo bilateral, Kin_v será una variedad lineal. Luego, el problema de la elastoplasticidad ideal incremental consiste en determinar el campo $v \in Kin_v$ tal que haga que el funcional:

$$\Pi(v^*) = \frac{1}{2} <\mathbb{D}\, D(v^*), D(v^*)> - \frac{1}{2} <\mathbb{D}\, D^p(T, v^*), D(v^*)> - \dot{L}(v^*)$$

alcance un mínimo en Kin_v, donde:

$$D(v^*) = (\nabla v^*)^s$$

$$D^p(T, v^*) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(t) < 0 \quad \text{o} \quad f(t) = 0 \quad \text{y} \quad f_T(T)\mathbb{D}D(v^*) \le 0 \\ \dfrac{f_T(T) \cdot \mathbb{D}D(v^*)}{f_T(T) \cdot \mathbb{D} f_T(T)}\, f_T(T) & \text{si} \quad f(t) = 0 \quad \text{y} \quad f_T(T) \cdot \mathbb{D}D(v^*) \ge 0 \end{cases}$$

Podemos notar que el problema variacional consiste en determinar el mínimo de un funcional no diferenciable sobre una variedad lineal. Demostración. Para mostrar el principio anterior llamemos nuevamente v, $D = D(v)$ y $\dot{T}$ a la solución del problema de la elastoplasticidad incremental, luego:

$$\Pi(v) - \Pi(v^*) = \frac{1}{2} <\dot{T}, D> - \frac{1}{2} <\dot{T}^*, D^*> - \dot{L}(v - v^*)$$

donde $D^* = D(v^*)$.
Ahora bién, del principio de la potência virtual y por ser $\dot{T} \in \dot{E}st_t$ y $v - v^* \in Var_v$ resulta:

$$\langle \dot{T}, D - D^* \rangle = \dot{L}(v - v^*)$$

que sustituída en la expresión anterior conduce a:

$$\Pi(v) - \Pi(v^*) = \frac{1}{2} \langle \dot{T}, D \rangle - \frac{1}{2} \langle \dot{T}^*, D^* \rangle - \langle \dot{T}, D - D^* \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} \langle \dot{T}, D \rangle - \frac{1}{2} \langle \dot{T}^*, D^* \rangle + \langle \dot{T}, D^* \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} [\langle \dot{T}, \mathbb{D}^{-1} \dot{T} \rangle + \langle \dot{T}^*, \mathbb{D}^{-1} \dot{T}^* \rangle - 2 \langle \dot{T}, D^* \rangle] =$$

$$= -\frac{1}{2} [\langle \dot{T} - \dot{T}^*, \mathbb{D}^{-1}(\dot{T} - \dot{T}^*) \rangle - 2 \langle \dot{T}, D^{P^*} \rangle]$$

donde con D^{P^*} estamos representando la tasa de deformación plástica asociada al estado T de tensiones y a la tasa $\dot{T}^*$, es decir $D^{P^*} = D^P(T, \dot{T}^*)$. Ahora bien, por ser $\dot{T}$ una tasa de tensión plásticamente admisible, $\dot{T} \in \dot{P}$, se sigue que:

$$\langle T, D^{P^*} \rangle \leq 0$$

De lo anterior se concluye:

$$\Pi(v) - \Pi(v^*) \leq 0 \quad \text{o} \quad \Pi(v) \leq \Pi(v^*)$$

y donde la igualdad nuevamente se verifica si y sólo si $\dot{T} = \dot{T}^*$.

Debemos resaltar aquí que si bien un principio de mínimo es establecido, no podemos concluir de éste la unicidad del campo de velocidades. Las mismas pueden diferir en un campo de velocidades puramente plástico, es decir, la tasa de deformación asociada a la diferencia de los campos de velocidades es una tasa de deformación plástica.

El fenómeno de colapso plástico, caracterizado por la ocurrencia de tasas de deformación (puramente plástica) bajo carga constante es el ejemplo más importante de no unicidad.

TECNICAS NUMERICAS DE RESOLUCION

Algoritmos para las Formulaciones en Tasas. En general las técnicas más frecuentemente utilizadas para resolver el problema de la elastoplasticidad ideal consiste en la resolución de los problemas variacionales planteados en términos de tasas.

El problema en tasas de tensiones consiste en determinar el mínimo de un funcional diferenciable cuadrático con restricciones lineales que definen el cono convexo $\mathring{R}_t$.

Si el espacio de tensiones es de dimensión finita, como en el caso de los ejemplos tratados en este trabajo, este problema se resuelve por un algoritmo de programación cuadrática (Luenberger [10]). Para el caso de dimensión infinita tendremos primero que aproximar el espacio de campos de tasas de tensiones por métodos tales como el de los elementos finitos.

La formulación en velocidades consiste en la minimización sin restricciones de un funcional no diferenciable. Para evitar este problema de la no diferenciabilidad generalmente se recurre a técnicas iterativas en las que el funcional se asume diferenciable en cada paso (Zienckiewicz [11]), o bien técnicas de regularización (Glowinski et. al. [12]).

Debemos resaltar sin embargo que ambas formulaciones adolecen de un defecto común. En efecto, calculadas las tasas, los algoritmos no proporcionan ningún criterio para garantizar que al evolucionar en el tiempo la condición de admisibilidad plástica sea satisfecha.

Algoritmo para la Formulación Variacional Evolutiva. La integración en el tiempo de la inecuación variacional evolutiva en tensiones presentada anteriormente puede realizarse aproximando mediante un operador en diferencias finitas la tasa de tensiones $\dot{T}$ en el instante $t + \Delta t$:

$$\dot{T} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Sustituyendo esta aproximación, en la inecuación variacional evolutiva se plantea:

$$\begin{cases} \text{Dado } T_t \text{ determinar } T_{t+\Delta t} \in K_{t+\Delta t} \text{ tal que:} \\ <\mathbb{D}^{-1}(\dot{T}^E_{t+\Delta t} - \dfrac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}),\ T_{t+\Delta t} - T^*> \geq 0 \qquad \forall T^* \in K_{t+\Delta t} \end{cases}$$

Con la condición inicial $T = T_o$ en $t = 0$.

Operando sobre la expresión anterior tenemos:

$$\begin{cases} \text{Dado } T_t \text{ determinar } T_{t+\Delta t} \in K_{t+\Delta t} \text{ tal que:} \\ <\mathbb{D}^{-1}T_{t+\Delta t}, T_{t+\Delta t} - T^*> - <\mathbb{D}^{-1}(\Delta t\ \dot{T}^E_{t+\Delta t} + T_t), T_{t+\Delta t} - T^*> \leq 0 \qquad \forall T^* \subset K_{t+\Delta t} \end{cases}$$

Aplicando los resultados enunciados en el apéndice se reconoce que lo anterior es la caracterización del siguiente problema de mínimo:

$$\min_{T \in K_{t+\Delta t}} \left\{ \frac{1}{2} <\mathbb{D}^{-1}T, T> - <\mathbb{D}^{-1}(\Delta t\ \dot{T}^E_{t+\Delta t} + T_t), T> \right\}$$

donde $\dot{T}^E_{t+\Delta t}$ y T_t son conocidos.

Este problema también corresponde a minimizar un funcional diferenciable cuadrático y cohercivo (Apéndice) pero, ahora, con restricciones generalmente no lineales que definen la región convexa $K_{t+\Delta t}$.

Para el caso de restricciones lineales este problema resulta formalmente idéntico al algoritmo para $\dot{T}$ discutido en la seccion anterior. Sin embargo, tanto para el caso de restricciones lineales como no lineales tiene la ventaja de que ahora la formulación garante que la solución siempre sea plásticamente admisible.

EJEMPLO NUMERICO

En esta sección vamos a mostrar, a través de un ejemplo simple, la estructura del problema de programación matemática planteado en la sección anterior. Como el ejemplo es de dimensión finita haremos uso de la notación matricial. Es interesante resaltar aquí que para la obtención de las matrices correspondientes a problemas más complejos podemos recurrir a métodos como, por ejemplo, el método de los elementos finitos.

Consideremos dos tubos concéntricos (Figura 2) cargados axialmente por la fuerza F y designemos con A_i, E_i, T_i, σ_{yi}, para $i=1,2$ las áreas, módulos de elasticidad, esfuerzo axial y tensión límite de plasticidad de cada tubo. De esta manera, los esfuerzos interiores de la estructura están caracterizados por el vector $T \in \mathbb{R}^2$ dado por:

$$T = [T_1 \ T_2]^T$$

Como hemos adoptado como esfuerzo interior la fuerza axial soportada por cada cilindro, tendremos que el tensor de elasticidad $\mathbb{D}^{-1} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ que actuando sobre T nos proporcionará los alargamientos (o acortamientos) que sufre cada cilindro, luego:

$$\mathbb{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2 A_2} \end{bmatrix}$$

A su vez, la respuesta ilimitádamente elástica para la carga F está dada por:

$$T^E = M F$$

donde:

$$T^E = [T_1^E \ T_2^E]^T \ , \qquad M = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} & \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \end{bmatrix}^T$$

Por otra parte, el esfuerzo interior T es estáticamente equilibrado con $F (T \in Es_t)$ si:

$$B^T T = F \quad , \quad B^T = [1 \quad 1]$$

A su vez, diremos que T es plásticamente admisible si $T \in P$ donde P está representado por el rectángulo de la Figura 2 y caracterizado matemáticamente por:

$$N^T T - R \leq 0$$

donde:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} , \qquad R = [A_1\sigma_{y1} \ \ A_1\sigma_{y1} \ \ A_2\sigma_{y2} \ \ A_2\sigma_{y2}]^T$$

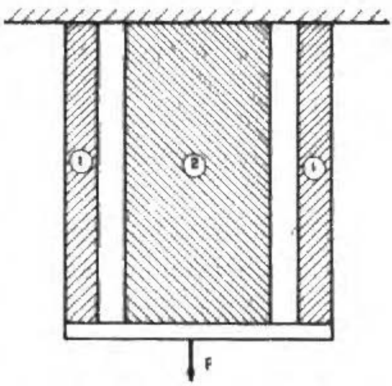


Figura 2

La evolución elastoplástica de los cilindros debido al proceso de carga $F = F(t)$ está caracterizada por el problema variacional planteado en la sección que trata del algoritmo. Llamando con $t = 0, t^1, \ldots, t^n, \ldots \in [0, t_o]$ cada uno de los instantes de tiempo en que deseamos conocer la respuesta de la estructura y designando con:

$$T^{n+1} = T(t^{n+1}) = [T_1^{n+1} \quad T_2^{n+1}]^T$$

$$\Delta F^{n+1} = F(t^{n+1}) - F(t^n)$$

$$K_{n+1} = K_{t_{n+1}}$$

tendremos que el problema de evolución elastoplástica puede ser colocado matricialmente de la siguiente forma:

Conocido el estado inicial T^o, determinar para $n = 0, 1, \ldots$ la solución del siguiente problema de mínimo:

$$\begin{cases} \min\limits_{T^{n+1} \in K_{n+1}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbb{D}^{-1} T^{n+1} \cdot T^{n+1} - \mathbb{D}^{-1}(M \Delta F^{n+1} + T^n) \cdot T^{n+1} \right\} \\ \text{donde } K_{n+1} \text{ está caracterizado por las restricciones:} \\ B^T\, T^{n+1} = F^{n+1} \quad (T^{n+1} \text{ estáticamente admisible con } F^{n+1}) \\ N^T\, T^{n+1} \le R \quad (T^{n+1} \text{ plásticamente admisible}) \end{cases}$$

En particular, utilizando los siguientes valores numéricos:

$$E_1A_1 = E_2A_2 \quad , \quad A_1\sigma_{y1} = 1 \quad , \quad A_2\sigma_{y1} = 2$$

vamos a mostrar la respuesta de la estructura para dos pasos de carga definidos por:

$$T^o = 0 \quad , \quad F^o = 0 \quad , \quad \Delta F^1 = 2.5 \quad , \quad \Delta F^2 = -1$$

i) Primer Paso n = 0. El problema consiste en determinar T solución de:

$$\begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\,[(T_1^1)^2 + (T_2^1)^2] - 1.25(T_1^1 + T_2^1)\right\} \\ \text{con las restricciones:} \\ T_1 + T_2 = 2.5 \\ -1 \le T_1^1 \le 1 \\ -2 \le T_2^1 \le 2 \end{cases}$$

En la Figura 3 hemos representado las curvas de nivel de la función objetivo (círculos con centro en (1.25, 1.25)). Como puede apreciarse el mínimo en este caso es de frontera y corresponde al estado:

$$T^1 = [1 \quad 1.5]^T$$

Obsérvese que la formulación permite, en un paso, realizar un camino elástico seguido de un elastoplástico.

ii) Segundo Paso n = 1. Consiste en determinar T^2 solución de:

$$\begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\,[(T_1^2)^2 + (T_2^2)^2] - (0.5T_1^2 + T_2^2)\right\} \\ \text{con las restricciones:} \\ T_1^2 + T_2^2 = 1.5 \\ -1 \le T_1^2 \le 1 \\ -2 \le T_2^2 \le 2 \end{cases}$$

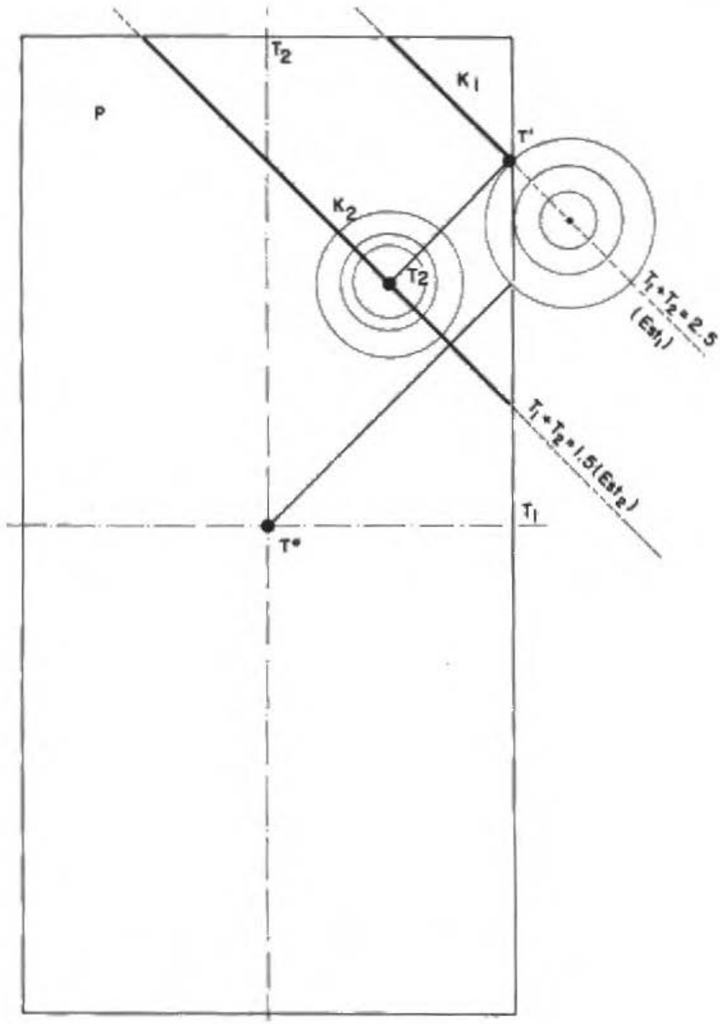


Figura 3

Nuevamente la Figura 3 muestra las curvas de nivel para esta función objetivo (círculos con centro en (0.5,1)). En este caso el mínimo es libre, o sea el punto crítico T^2 es interior al convexo K_2 y está dado por el punto:

$$T^2 = [0.5 \quad 1]^T$$

Nótese que esta formulación permite un proceso de descarga (elástico).

CONCLUSIONES

Como ya hicimos notar, el modelo para el análisis elastoplástico via una inecuación variacional evolutiva nos proporciona siempre, caso exista, una solución que satisface todas las restricciones mecánicas del problema. Contrasta de esta manera con los otros dos procedimientos que durante la evolución pueden violar alguna de ellas.

Si bien el ejemplo resuelto fue realizado de una manera explícita, para estructuras más complejas el M.E.F. permite la construcción de la función objetivo y la caracterización del convexo de programación matemática nos proporcionan los algoritmos necesarios para la obtención de soluciones del problema de mínimo planteado que, para estos casos, son de mayor porte.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al IEN y CNEN por el auxilio financiero que permitió realizar parte de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Koiter, W.T. – "General Theorems for Elastic-Plastic Solids", Progress in Solid Mechanics, Ed. Sneddon y Hill, vol.1, 165-221, North-Holland,1960.

[2] Germain, P. – "Course de Méchanique", École Polytechnique, Tomo I y II, París, 1980.

[3] Moreau, J.J. – "Rafle par un Convexe Variable", Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971.

[4] Duvaut, G.; Lions, J.L. – "Les Inéquations en Mécanique et en Physique", Dunod, 1972.

[5] Salençon, J. – "Application of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics", John Wiley, 1977.

[6] Hill, R. – "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press,1950.

[7] Feijóo, R.A.; Taroco, E. – "Introducción a Plasticidad y su Formulación Variacional", II Escola de Mat. Aplic., Vol.2, 1-156, Laboratório de Computação Científica-CNPq, Rio de Janeiro, 1980.

[8] Zouain, N. – "Análise Limite de Cascas via Otimização", Tese de Doutorado, Prog. Eng. Mecânica, COPPE, 1982.

[9] Zouain, N.; Feijóo, R.A.; Taroco, E. – "Análise de Cascas Plásticas", I Curso de Mec. Teórica e Aplicada, Módulo II, 177-250, Laboratório de Computação Científica-CNPq, Rio de Janeiro, 1983.

[10] Luenberger, D.G. – "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley, 1969.

[11] Zienckiewicz, O.C. - "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1971.
[12] Glowinski, R.; Lions, J.L.; Tremoliers, R. - "Analyse Numerique des Inéquations Variationelles", Vol.1-2, Dunod, 1976.

APÉNDICE

En este apéndice vamos a presentar en forma resumida algunos resultados matemáticos que nos proporcionan las condiciones para las cuales es posible establecer la equivalencia entre la solución de una inecuación variacional y la solución del mínimo de un funcional. El lector interesado en más detalles deberá consultar las obras de Duvaut et. al. y Glowinski et. allí ya citadas en la Referencias y la obra de J. Cea "Optimisation, Théorie el Algorithmes" (Dunod, 1971).

Consideremos un funcional $J: V \to \mathbb{R}$, donde V es un espacio Banach, y un subconjunto U de V.

Definición 1.

i) Decimos que $J(\bar{u})$ es un mínimo relativo de J en U si $\bar{u} \in U$ y si existe una vecindad $V(\bar{u})$ de $\bar{u}$ tal que:

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad \forall u \in U \cap V(\bar{u})$$

ii) Decimos que $J(\bar{u})$ es un mínimo absoluto de J en U si $\bar{u} \in U$ y si:

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad \forall u \in U$$

Teorema 1. Si V es un espacio Banach reflexivo, si J es débilmente semicontinuo inferiormente y si U es un subconjunto limitado y débilmente cerrado en V luego, existe al menos un mínimo absoluto en U.

Observación. En el caso de ser V de dimensión finita el teorema nos dice que toda función continua sobre un conjunto cerrado y limitado alcanza al menos una vez su mínimo.

Teorema 2. Si V es un espacio Banach reflexivo, J es débilmente semicontinuo inferiormente y si:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty$$

luego, existe al menos un mínimo absoluto.

Teorema 3. Sea U un abierto de V

i) Si $\bar{u} \in U$ es un mínimo relativo de J en U y si J es Gateaux-diferenciable, luego:

$$J'(\bar{u},\phi) = 0 \qquad \forall\phi \in V$$

ii) Si J es convexo y una vez diferenciable, luego:

. todo mínimo local es un mínimo global

. las dos expresiones siguientes son equivalentes.

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \qquad \forall u \in V \quad , \quad \bar{u} \in V$$

$$J'(\bar{u},\phi) = 0 \qquad \forall\phi \in V \quad , \quad \bar{u} \in V$$

. si además J es estrictamente convexo las dos expresiones anteriores admiten una única solución $\bar{u}$.

Vamos a presentar ahora algunos resultados correspondientes al caso del mínimo de un funcional convexo cuando las variables están sometidas a restricciones también convexas (pocos resultados se conocen cuando no existe convexidad).

Teorema 4.

i) Si J es Gateaux-diferenciable en U, si U es un subconjunto convexo del espacio Banach V y si $u \in U$ es tal que:

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in U$$

luego:

$$J'(u,v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in U$$

ii) Si J es convexo las dos expresiones anteriores son equivalentes.

RevBrMec, Rio de Janeiro, V. V, nº 3, pp. 91 a 94

EXPLICIT EXPRESSIONS FOR NATURAL FREQUENCIES OF SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS

Luis A. Godoy
Departamento de Estructuras, F.C.E.F.N.
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

SUMMARY

This note includes simplified linear dynamic equations and relations for eigenfrequencies and eigenfunctions of simply support cylindrical shells. From these simplified equations it is shown how explicit expressions may be obtained for natural frequencies and modes of vibration, which could be conveniently used in design.

The evaluation of the free vibration characteristics of thin cylindrical shells is of great importance in engineering design due to the frequent application of such shell forms in the aerospace and, more recently, in the marine off-shore industries. Early work on the subject was presented by Arnold and Warburton [1], from which most of the following research has been developed.

Two simplifications are commonly introduced in the analysis: (a) a simplified shell theory (i.e. Donnell's theory) is used; and (b) tangential inertia is neglected. Dymm [2], and El-Raheb and Babcock [3] gave detailed discussions on the errors associated to those approximations. The adoption of both simplifying assumptions (a) and (b) will be here shown to derive in simple expressions, and explicit forms for modes of vibration and natural frequencies will be obtained for the case of simply support boundaries. Such explicit equations are similar in form to those obtained by Croll and Batista [4] for buckling loads of axially loaded cylinders.

The dynamic equilibrium equations for a cylindrical shell modelled by Donnell's theory and neglecting tangential inertia may be written as

$$
\begin{aligned}
& r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + r \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \qquad (1) \\
& \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right) + \frac{1}{r^2}\left(w + \mu r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\frac{\rho}{E}(1+\mu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

in which u, v and w are the displacement components in the in plane (x , θ) and the out-of-plane (radial) directions; E, μ and ρ are the modulus of elasticity, Poisson's ratio and density of the constitutive material; h, r and ℓ are the thickness, radius and lenght of the shell; and t is the time.

For a simply supported boundary condition, the following displacement field satisfies eq.(1):

$$
\begin{aligned}
u &= u_{ij} \cos i\theta \cos j\pi x/\ell \cos 2\pi f t \\
v &= v_{ij} \sin i\theta \sin j\pi x/\ell \cos 2\pi f t \qquad (2) \\
w &= w_{ij} \cos i\theta \sin j\pi x/\ell \cos 2\pi f t
\end{aligned}
$$

in which u_{ij}, v_{ij} and w_{ij} are the amplitudes of the modes of vibration, with i the number of circunferential full waves and j the number of meridional half waves; and f is the natural frequency associated to mode (i,j). Replacement of (2) into (1) allows the tangential components of the modal amplitude to be expressed as

$$
\begin{aligned}
u_{ij} &= -\frac{\lambda(i^2 - \mu\lambda^2)}{(i^2+\lambda^2)^2} w_{ij} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\
v_{ij} &= -\frac{i[i^2 + (2+\mu)\lambda^2]}{(i^2+\lambda^2)^2} w_{ij}
\end{aligned}
$$

where $\lambda \equiv \pi j/L$, $L \equiv \ell/r$ and $R \equiv r/h$. The natural frequency is obtained from the last of eq.(1), and may be written as:

$$f_{ij}^2 = \frac{E}{4\pi^2 r^2 \rho}\left[\frac{(\lambda^2+i^2)^2}{12R^2(1-\mu^2)} + \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+i^2)^2}\right] \tag{4}$$

The lowest value of natural frequency, f_{min}, may be obtained from eq.(4) by inspection. However, f_{min} may also be calculated by extremizing eq.(4) with respect to (i,j). The minimum frequency has been shown to occur for j = 1 in isotropic cylindrical shells [1], so that by equating to zero the first derivative of (4) with respect to variable i, the following is obtained:

$$i^* = (\pi/L)^{1/2}\left\{\left[12R^2(1-\mu^2)\right]^{1/4} - \pi/L\right\}^{1/2} \tag{5}$$

Notice that in very thin shells, or for medium to long cylinders, $R^{1/2} \gg 1/L$, and eq.(5) reduces to

$$i^* = (\pi/L)^{1/2}\left[12R^2(1-\mu^2)\right]^{1/8} \tag{6}$$

Since i has been taken as a continuous variable, eq.(5) will not result in integer values, and the mode associated to the lowest natural frequency will be given by the closest integer to i^*. An approximate expression for the lowest natural frequency f_{min} will next be obtained by replacing eq.(5) into eq.(4):

$$f_{min}^2 = \frac{E\,h}{\rho\, r\, \ell^2}\,\frac{[3(1-\mu^2)]^{-1/2}}{4} \tag{7}$$

For a steel shell ($\mu = 0.3$), eq.(7) reduces to

$$f_{min}^2 = 0.15\,\frac{E\,h}{\rho\, r\, \ell^2}$$

or else

$$f_{min} = \frac{2000}{\ell(m)\,\sqrt{R}} \tag{8}$$

Equation (7) is an approximation to the minimum of (4) in the sence that the continuous (real) minimum i^* has been used, instead of the discrete (integer) value. The error involved in this simplification is less than 3% for shells in which $L \geq 1$. Due to their simplicity, equations (5) and (7) may be conveniently used is design.

It is interesting to notice that for an axially loaded cylinder, the classical critical stress, σ_{cl}, is given as

$$\sigma_{cl} = \frac{E}{R}[3(1-\mu^2)]^{-1/2} \tag{9}$$

The explicit expression for the lowest natural frequency, eq.(7), may be compared with eq.(9), so that the following relation results:

$$f^2_{min} = \frac{\sigma_{cl}}{4\rho\ell^2} \tag{10}$$

Eq.(10) relates the lowest natural frequency of an unloaded cylinder with the axial stress necessary to reduce its natural frequency to zero. The analogy between the free vibrations and the static buckling of a cylindrical shell has been pointed out by Dymm [2]. This analogy, however, is only of theoretical interest, due to the fact that although f_{min} is not very sensitive to small imperfections, buckling is a highly imperfection-sensitive phenomenon and σ_{cl} is never achieved in practice.

REFERENCES

[1] Arnold, R.N. and Warburton, G.B. – Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends. Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, 197 : 238-256, 1949.

[2] Dymm, C.L. – Some new results for the vibrations of circular cylinders. Journal of Sound and Vibration, 29 (2) : 189-205, 1973.

[3] Raheb, M. El- and Babcock Jr., C.D. – Some approximations in the linear dynamic equations of thin cylinders. Journal of Sound and Vibration, 76 (4) : 543-559, 1981.

[4] Croll and Batista, R.C. – Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders. Int. J. Mech. Sci., 23 : 331-343, 1981.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda. sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and tecnological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and paste-up of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

Prof. Rubens Sampaio
PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of U$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda. with the manuscripts.

When the manuscripts is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies — approx. 210 X 280 mm — with a letter containing title of the papers, name(s) of the institution(s) and author(s)' address(es).

Together with the letter, the author(s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author(s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

Subscriptions

Editora Campus Ltda.
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil
End. Telegráfico: CAMPUSRIO