

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciência Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended a vehicle for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i.e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done in plain white drawing paper in reduced size in a way to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

PUC — Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

The final typing will be done in the secretary of RBCM according to our norms.

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.**



**EDITOR
RESPONSÁVEL**

Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**

J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijer
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zampieri
Duraíd Mahrus
E. O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guilherme Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jarsy T. Sielawa
J. J. Espíndola
Liu Hsu
Maurício N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Nestor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

**COMPOSIÇÃO
GRÁFICA**

Rosângela L. Almeida

Editorial

**Use of Photoplasticity to Predict
Large Strains in Forming Problems**

José Luiz de França Freire

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Jorge Dias Lage

Instituto Tecnológico – PUC/RJ

Ronaldo Domingues Vieira

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Instituto Tecnológico – PUC/RJ

Análise não Linear de uma Torre Via Otimização

Bernardo Horowitz

Prof. Adjunto

Departamento de Engenharia Civil – UFPE

Diogenes Cabral do Vale Junior

Aluno de Graduação – Assistente de Pesquisa

Departamento de Engenharia Mecânica – UFPE

Torque Util e Torque de Atrito em Modelos de Cataventos

Philemon Melo Cunha

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Antonio da Silva Castro Sobrinho

Departamento de Física – PUC/RJ

**Escoamento Vertical e Horizontal de
Misturas Sólido-Líquido em Seção Variável**

Sandra C. S. Rocha

Professora e Pesquisadora

Departamento Engenharia Química – UNICAMP

Cesar C. Santana

Professor e Pesquisador

Departamento Engenharia Química – UNICAMP

**Análise da Troca de Calor por Radiação
entre um Arranjo Simétrico Formado
Por "N" Superfícies e o Meio Ambiente**

Rogério Martins Saldanha da Gama

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

EDITORIAL

Prezados Colegas,

Estamos iniciando com este número uma nova fase da RBCM. Os altos custos editoriais, as incertezas e demora dos financiamentos tornaram inviável o nosso acordo com a Editora Campus. Assim, nós mesmos produziremos a Revista, contando com a participação da Editora J. Di Giorgio & Cia Ltda., na impressão da mesma. Além disso tivemos de apelar também para a solução de angariar fundos através de anúncios a serem inseridos entre os trabalhos apresentados.

Gostaríamos de receber maior número de trabalhos a partir deste primeiro número, desta nova fase, a fim de que tenhamos condições de assegurar uma publicação com maior regularidade.

Agradeceríamos o pronunciamento mais imediato por parte dos revisores dos trabalhos com o fim de tornar o processo mais dinâmico e de posse dos respectivos pareceres nos possibilitar o julgamento mais rápido da qualidade dos mesmos.

Dessa maneira teríamos condições de prever um possível aumento do número de revistas a partir deste ano, desde que recebamos logo os referidos pareceres emitidos.

Verificamos no último COBEM um progresso no nível da maioria dos trabalhos apresentados o que vem demonstrar a capacidade da nossa comunidade científica em manter uma Revista como a RBCM.

Entretanto, é consenso que a comunidade científica nacional atravessa momentos difíceis, com o aviltamento dos salários, falta de incentivo à pesquisa, inadequação das bolsas de pós-graduação não só em número como em valor, etc.

Esses fatores adversos poderão certamente influir na produção científica, mas, ainda devemos fazer um grande esforço no sentido de que não percamus tudo aquilo que conquistamos.

Acreditamos porém que apesar de todas as dificuldades que o nosso país atravessa, não podemos prescindir da esperança de que com o nosso trabalho melhores dias virão. . .

USE OF PHOTOPLASTICITY TO PREDICT LARGE STRAINS IN FORMING PROBLEMS

José Luiz de França Freire

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Jorge Dias Lage

Instituto Tecnológico – PUC/RJ

Ronaldo Domingues Vieira

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Instituto Tecnológico – PUC/RJ

SUMMARY

The unloaded photoplastic method is described and several important topics (material selection, mechanical and optical properties, modelling, accuracy, advantages and limitations) are discussed regarding its application to predict large strains in forming problems such as extrusion, forging, and rolling.

SUMÁRIO

O método fotoplástico que analisa modelos deformados plasticamente e após seu descarregamento é descrito. Vários tópicos importantes (seleção de materiais, propriedades mecânicas e óticas, similitude, vantagens e limitações) são discutidos envolvendo sua aplicação na predição de campos de grandes deformações em problemas de conformação mecânica de materiais tais como: extrusão, forjamento e laminação.

INTRODUCTION

The use of different birefringent materials and analysis procedures has generated different photoplasticity techniques to predict distributions of plastic strains in small or large regions of models, which are or were stressed beyond their elastic limit [1,2]. The development of these application techniques and the attempt to give an analytical and experimental explanation to the

mechanical and optical response of the birefringent polymers have been the main objectives of photoplasticity and non-linear photomechanics [3,4] (see Table 1 for general references). Research in these two fields has been directed to:

- 1) fully understand the optical and mechanical behaviors of birefringent polymers;
- 2) use these polymers as model materials to verify newly developed or the extension of established non-linear analytical or numerical methods;
- 3) determine stress and strain concentration factors in small strain elastoplastic structural problems;
- 4) predict finite strain distributions in metal forming processes like upset-forging, piercing, extrusion and rolling.

Table 1. Selected references on photoplasticity

S U B J E C T	R E F E R E N C E S
- Photoplasticity and Nonlinear Photomechanics General References	Freire ¹ , Burger ² , Doyle ³ , Toughi et al. ⁴ , Freire et al. ⁵ , Javornicky ⁶ , Unksov & Safarov ⁷
- Application of Unloaded Photoplasticity to Forming Problems	
- Upset-forging	
. of cylinder	Dally & Mulc ⁸ , Freire ⁹ , Freire et al. ¹⁰
. of ring	Oyinlola ¹¹ , Gomide & Burger ¹²
. of bar	Freire & Vieira ¹³
- Extrusion	Burger & Koenig ¹⁴ , Freire et al. ¹⁵
- Hot-rolling	Oyinlola ¹¹ , Gomide & Burger ¹⁶
- Indentation	
. of bar by symmetrical punches	Freire ⁹ , Freire & Lage ¹⁷
. of semi-infinite planes	Freire & Lage ¹⁷
. ball indentation	Freire & Lage ¹⁷
- Compression of Wedge	Nisida et al. ¹⁸
- 4-point bending	Zachary & Riley ¹⁹ , Freire et al. ⁵
- Diametric Compression of Discs	Freire et al. ⁵ , Gomide & Burger ¹² , Burger & Koenig ¹⁴

The objective of this paper is to present in a very simple manner a whole field and three-dimensional photoplastic technique attempting to cover the fourth point mentioned above. It has been called unloaded photoplasticity and some of its application references are listed in Table 1. Unloaded photoplasticity employs mixtures of polyester resins as model materials which are unloaded after having been permanently deformed. The models are then sliced (if it is a 3-D study) and analysed in a polariscope. The permanent fringe distribution is then related to the true principal strain differences through the isochromatics and to the principal strain directions through the isoclinics [5].

POLYESTER MODEL MATERIALS

Polyester resins have been widely used in photoplasticity since they are cheap and easy to obtain, to cast and to machine. They are commercially available both as a flexible resin (Laminac 4134, USA - Crystic 279, Brazil) and as a rigid resin (Laminac 4116, USA - Crystic 199, Brazil). These resins are mixed in pre-determined proportions to match desired properties at room or test temperature, such as low or high elastic modulus, toughness and ductility. The final products are identified from their proportions of rigid and flexible resins. For example, a 70-30 material means that it contains 70% of rigid resin.

Casting and Machining. Plates of mixtures of polyester resins sizing 280 mm x 200 mm and with thickness ranging from 4 to 12 mm have been easily cast in vertical glass molds. For each 100g of the viscous mixture of rigid and flexible resins are added 0.2 to 1.0 ml of the liquid curing agent methyl-ethyl-ketone-peroxide (MEKP) and 0.5 to 1.0 ml of styrene monomer. Additions of naphthanate or octonate of cobalt are avoided, since rigid resins are generally furnished pre-accelerated by these components. The amount of MEKP depends on the volume and on the thickness of the desired plate. Thick plates tend to harden very fast and generate large amount of heat if high proportions (1.0 ml/100 g) of MEKP are used. A hardening time of about 8 hours seems to be reasonable and indicates a low exothermic reaction. This extended hardening time allows the expulsion of air or gas bubbles and it is adequate for obtaining plates with good surface finishing, similar to the glass mold surfaces. Adherence to the mold surfaces is prevented

by polishing the glass surfaces with a releasing agent such as WD-40. Correct spacement of the glass walls is achieved by aluminum or wood spacers wrapped by masking tape. Pressure to closely and partially sealing the molds is obtained with C-clamps. External final sealing is obtained with any type of molding clay. The viscous mixture is poured into the molds vertically positioned after 10 minutes of slow mixing to homogenize it and to prevent the formation of bubbles. The plates are taken out from the molds after a 8-hour hardening at room temperature and submitted to final curing for 24 hours at 80 to 90°C.

Polyester resins are easy to machine if compared to other photoplastic or photoelastic materials such as for example, polycarbonate. Specimens may be easily routed, milled or turned. Slices 1mm thick or thinner may be cut by milling using circular saws and abundant cooling.

Mechanical and Optical Behavior, Strain-optical Law. Experimental observations have revealed important points on the mechanical and optical behavior of polyester mixtures. These are:

- 1) Young's modulus, proportional limit, yield strength, brittle or ductile behavior are dependent on temperature, strain-rate and mixture composition [5,20].
- 2) The material viscoelastic behavior may be mathematically represented by a model proposed by Brinson and DasGupta [5,21,22].
- 3) Compressive and tensile strengths, C and T respectively, are different, the ratios C/T varying from 1.5 to 4.5, depending on mixture composition, test temperature and strain-rate [21,22].
- 4) The initial yield locus for these materials is well predicted by a modified von Mises criterion [21].
- 5) The sum of true principal plastic strains, $(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)_p$, may be assumed to be zero, as compared to some small expected experimental error [9,12].
- 6) The loaded relationship between the total true principal strain difference, $\epsilon_1 - \epsilon_2$, and isochromatic fringe order, N, is multivaluated and dependent on temperature and strain-rate [5-19].
- 7) From tension, compression, 4-point bending, and diametrically compressed disc specimens, the unloaded

relationship between $\epsilon_1 - \epsilon_2$ and N was found to be linear; at most weakly dependent on mixture proportion; independent from strain-rate or test temperature where plastic deformation took place; independent from temperature observation if strain recovery does not take place, i.e., fringe order is the same for after-unloading (at the temperature) and for after-cooling (room temperature) conditions [1,5,19].

The strain-optical law in unloaded photoplasticity is then rationalized in the following way: if the isochromatic fringe order at a point of an unloaded specimen related to the elastic residual strains, N_e , is negligible as compared to the plastic fringe order, N_p , then N_p may be considered approximately equal to the total remanent fringe order, N . Therefore, the principal true plastic strain difference at the point is determined in the following way:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_p = \frac{N}{t} f_{\epsilon p}$$

where $N = N_e + N_p \approx N_p$, t is the specimen thickness at the point being studied and $f_{\epsilon p}$ is the plastic fringe value obtained from calibration tests which generate plots as the one shown in Figure 1. The plastic fringe value is determined for each cast plate using 3 to 5 diametrically compressed discs which have small circumferences inscribed on their centers [5]. This calibration procedure is illustrated in Figure 1.

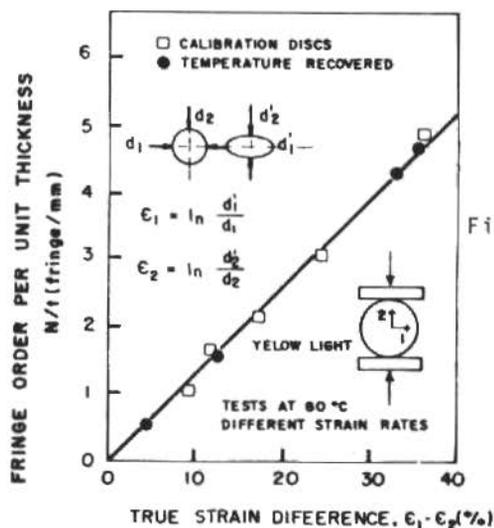


Figure 1. Data to determine the unloaded material fringe values, $f_{\epsilon p}$, for a 100% rigid polyester resin model. Tests were performed at 80°C. Fringe orders and strains measured after unloading and cooling to room-temperature

Evidence on the achievement of low or negligible residual elastic isochromatic fringes is presented in Figure 2. This figure shows a photograph of a meridional slice of a plane strain compression specimen [1] broken during the slicing process at room temperature, 24 hours after its indentation by symmetrical punches at a test temperature of 80°C. No variation can be seen of the fringe orders, due to the possible releasing of residual elastic strains. A possible explanation for this is that at high temperatures, the elastic fringe value is very high, the material presenting very low elastic birefringence. When the specimens are cooled, a higher elastic birefringence is achieved but, at the same time, very low residual elastic strains are necessary to maintain force or momentum equilibrium, since the material elastic constants are much higher at room temperature than at test temperature (Young's modulus ratios may range from 3 to 15, times [22,23] depending on test temperature). This makes test temperature a very important parameter, concerning the interpretations of unloaded birefringence at room temperature and the material mechanical behavior at test temperature.

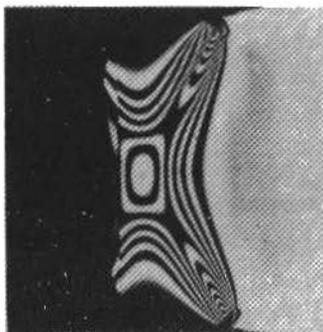


Figure 2. Picture showing a broken slice of a 100% rigid polyester resin plane strain compression model [1,9]. There is no change of the fringe pattern near the ruptured zone due to a possible release of residual elastic strains

An important topic to be mentioned when unloaded photoplasticity is focused is the strain recovery (also called springback or relaxation) [12,16] effect which happens during the

unloading process and after the deformed model is unloaded. Strain recovery during unloading depends on the rates at which the loading-unloading procedure takes place and, ideally, in the case of an unloaded photoplastic study, it should be related only to the elastic strains induced by the loading process. Strain recovery after unloading depends on the specimen temperature. Experimental observations revealed that total strain recovery can be achieved if the specimens are kept at test temperature for a few hours or for less time at higher temperatures. In contrast, strain recovery may be very low or negligible if the specimen is cooled to room temperature right after having been unloaded. Minimum strain recovery is achieved if:

- 1) the unloaded specimen (or part of it as it is the case of an extrusion process) is rapidly cooled to room temperature.
- 2) for the same loading-deflection behavior at test temperature a more rigid material is preferred [22]. The reason for this is that test temperature will be higher, thus implicating in a large differential relating test temperature (easy to deform plastically and easy to recover) and room temperature.

While the mechanical strain recovery had been already quantified [1,9,22,24], isochromatic fringe recovery was measured for only one material (100% rigid) by means of a disc specimen which was initially loaded and unloaded at 80°C to a true principal strain difference $(\epsilon_1 - \epsilon_2)_p = 36\%$ at its center [5,22]. The specimen was again placed in the oven under no loading and at a temperature of 80°C. After some time the specimen was cooled to room temperature and the strains ϵ_1 and ϵ_2 for the inscribed circumference were measured together with fringe order. This procedure was repeated four times. The resulting data points relating to remanent fringe order and principal strain differences are plotted in Figure 1. It can be concluded that plastic strains can be recovered after exposing the specimen a certain time to a temperature sufficient to activate the recovery mechanism and that the true plastic strain difference recovery, $\Delta(\epsilon_1 - \epsilon_2)_p$, is related to the recovered isochromatic fringe order, ΔN , by the plastic fringe values, $f_{\epsilon p}$.

MODELLING

Good modelling in photoplasticity is very difficult to be achieved, once microstructures of model and prototype materials are generally different. Besides, the mechanical macrobehavior of polyester materials presents some difficulty to quantitative analysis as they are strain-rate dependent and have different yield limits in compression and tension. However, these drawbacks do not prevent the extraction of numerical results from qualitative studies if similitude laws are relaxed [9]. The only similitude conditions that have been adopted are:

- 1) geometric similarity before deformation [9];
- 2) similar parametric loading-deflection curves for model and prototype, when possible [12];
- 3) same final unloaded deformation for one important and controllable geometric dimension for comparison purposes. For example, in the cases of the upset-forging of cylinders [9,10], rings [12] and bars [13], the final height deformation was chosen as the comparative parameter;
- 4) same loading and unloading histories [9], identical displacement constraints [9] and same friction coefficient between contacting surfaces [10,13].

Still other points deserve attention, when the best possibility of modelling a specific problem is being studied. First, experiments have to be performed to decide whether it is possible to model the problem and what is the ideal test or working temperature. This test temperature will be the one which [9,22]:

- 1) generates negligible residual elastic fringes in the unloaded model;
- 2) better approaches the loading-deflection curves of model and prototype;
- 3) generates minimum possibility of strain recovery while and after cooling the model to room temperature;
- 4) generates minimum C/T ratios (ideally, $C/T = 1.0$).

Examples of the influence of test temperature on the mechanical and optical response of photoplastic models are shown in Figures 3 and 4. Figure 3 shows different responses of two deformed and unloaded 4-point bending specimens [15] tested at temperatures of 30°C and 50°C. These specimens had transversal

slices cut to show the influence of test temperature on the generation of elastic residual fringes. In contrast to the lower temperature one, the higher temperature specimen does not show any elastic fringe variation due to the slicing cuts; its plastic region spreads over a large region due to the material rubbery behavior; unloaded fringe spacing is almost uniform and fringe distribution is symmetrical with relation to the neutral axis (zero fringe order), showing little influence of strain-rate and of the C/T ratio on the unloaded fringe distribution.

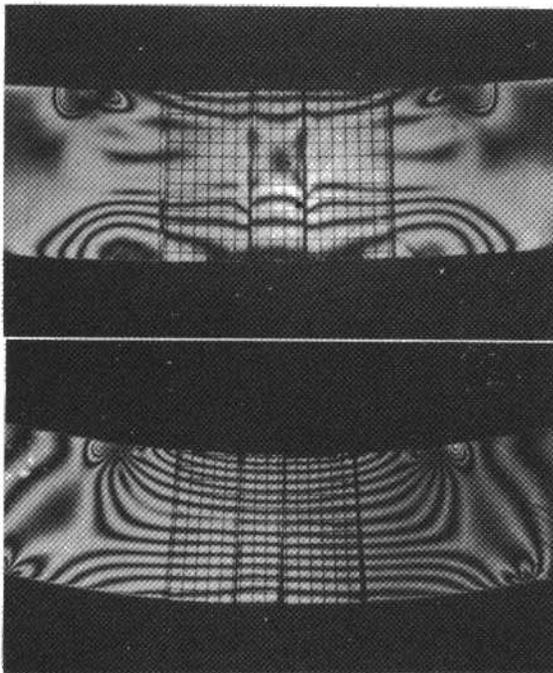


Figure 3. Unloaded and sliced 4-point bending specimens [5]: variation (above) and no variation (below) of fringe patterns due to release of residual elastic strains after slicing

In Figure 4, different behaviors are presented by two large plates loaded in their planes by prismatic punches [17,23]. The differences in fringe distributions presented in the two pictures are due to 50-50 material tested at 50°C (above) and 70-30 material

tested at 50°C (below). The 50-50 material test picture shows a specimen worked in its rubbery state, unloaded elastic and plastic deformations spreading far from the indentation region. A careful analysis [23] of the 70-30 material test indicated that plastic strains occurred only near the indentation zone and that only little residual elastic fringes were generated in this region.

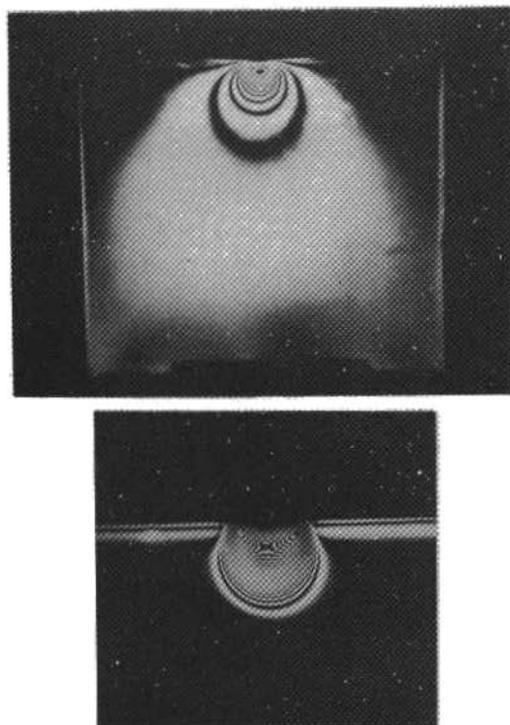


Figure 4. Indentation of plates by cylindrical punches [23]. Pictures show specimens after unloading and cooling. Above: plastic deformation spreaded in a large region of specimen tested in its rubbery behavior (50-50 material tested at 50°C). Below: small zone of plastic deformation for a specimen tested at a relatively lower temperature (70-30 material tested at 50°C)

ANALYSIS AND ACCURACY OF PHOTOPLASTICITY RESULTS

The unloaded photoplasticity technique can be employed in a large variety of applications, such as plane stress, plane strain,

axisymmetric and general 3-D problems. Depending on the type of application, different sets of results may be obtained, for example: distributions of plastic strain differences [8,9,15], principal strain directions (isoclinics) [9,15,25], slip-lines directions [9,18,25] and elastoplastic boundaries [9,17,23]. This section of the paper is intended to present a few examples of how the accuracy of photoplastic solutions can be or have been verified.

Example 1. Comparison of overall displacements calculated by integration of strains determined by photoplasticity, with displacements measured by a micrometer directly over the models or slices analysed [1,9,10,12,13]. Figure 5 shows the isochromatic fringe distribution of a meridional slice cut from a cylinder which was permanently deformed to 84% of its initial height [10]. Since

$$(\epsilon_z + \epsilon_\theta + \epsilon_r)_p = 0$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_r > 0 \quad ,$$

for the Z symmetry axis, and

$$\epsilon_z - \epsilon_r = \frac{N}{t} f \epsilon_p \quad ,$$

then

$$\epsilon_z = \frac{2}{3} \frac{N}{t} f \epsilon_p$$

along the Z symmetry axis. The distribution of ϵ_z along Z is plotted in Figure 5. If ϵ_z is integrated along Z the total displacement upset of 16% must be found. Care should be taken in this integration, since it is performed over the final deformed length [1,9]. Using the natural logarithm definition of strain, the total final displacement ΔZ may be found in the following way (see Figure 5 for notation). For each small segment dz_i or dz_f along Z,

$$\epsilon_z = \lambda n \frac{dz_f}{dz_i}$$

$$\Delta d_z = dz_f - dz_i = \left(1 - \frac{dz_i}{dz_f}\right) dz_f = \left(1 - \frac{1}{e^{\epsilon_z}}\right) dz_f$$

$$\Delta Z = \int \Delta dz = \int \left(1 - \frac{1}{e^{\epsilon_z}}\right) dz_f$$

The integration of ϵ_z along one final height gives 16%, deviating only 4.3% from the micrometer measurements. Comparisons using this procedure in the plane strain indentation of bars, plane strain upset of bars and the upset of cylinders indicated a mean error of 7% with a standard deviation of 5% in about 50 models or slices.

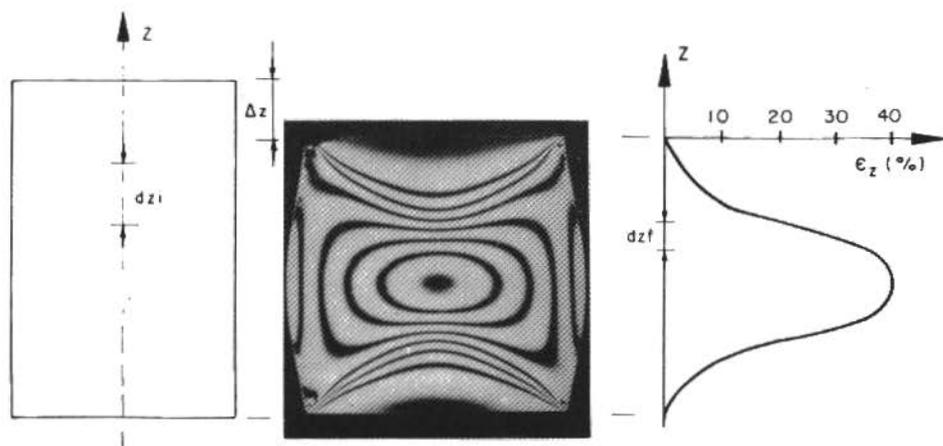


Figure 5. Initial and final shapes of a cylinder submitted to a compression test [10]

Example 2. Point by point comparison of displacements determined by photoplasticity and by a non-linear finite element program [1,9,10,22]. Such comparisons were made for the indentation of bars [9] and for the upset of bars [22] and cylinders [9]. Small deviations were found in cases where large strains but small displacements occurred. Large deviations were obtained in cases where the shapes of the models changed very much, probably due to the non capability of the finite element program of reforming the initial geometry. Attempts to compare overall deformed shapes suffered from this same limitation of the finite element code used [22]. An example of this type of comparison is given in Figure 6, where different C/T ratios and yield criteria were used by the finite element program [22].

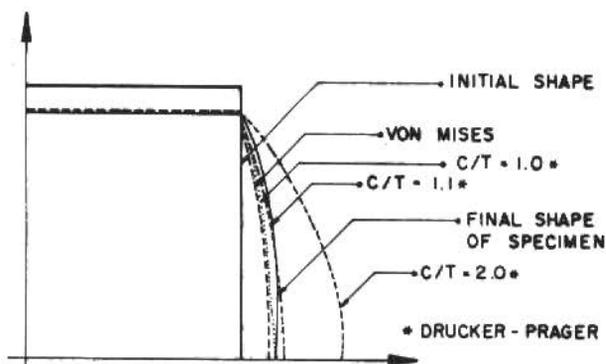


Figure 6. First quadrant of transversal section of a rectangular bar submitted to a plane strain compression test. Final shape of the 70-30 specimen is compared to final shapes predicted by a nonlinear finite element program employing two different yield criteria [22]

Example 3. Point by point comparison of strains determined by photoplasticity and by other experimental techniques applied to the same specimen [15]. Figure 7 shows the results for a plane strain extrusion specimen [15]. The unloaded but deformed specimen was observed in a transmission polariscope and the isochromatic and isoclinic fringe patterns were recorded, respectively determining true principal strain differences and principal strains directions.

Surface permanent strains ϵ_x , and γ_{xy} were determined from measurements over the deformed grid made with a micrometer adjustable XY table mounted in a 10x magnification optical projector. Principal true strains and their differences, $\epsilon_1 - \epsilon_2$, together with an angle α analogous to the isoclinic angle, were computed using the strains ϵ_x , ϵ_y and γ_{xy} and the expressions derived by Brill [26] for finite strains. The three plots in Figure 7 present values of $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ and α computed from photoplasticity and from the grid method for two chosen directions of the extruded specimen. A very good agreement can be noticed, although photoplastic results are relative to the whole specimen thickness, while the grid method furnishes results determined only for the specimen surface.

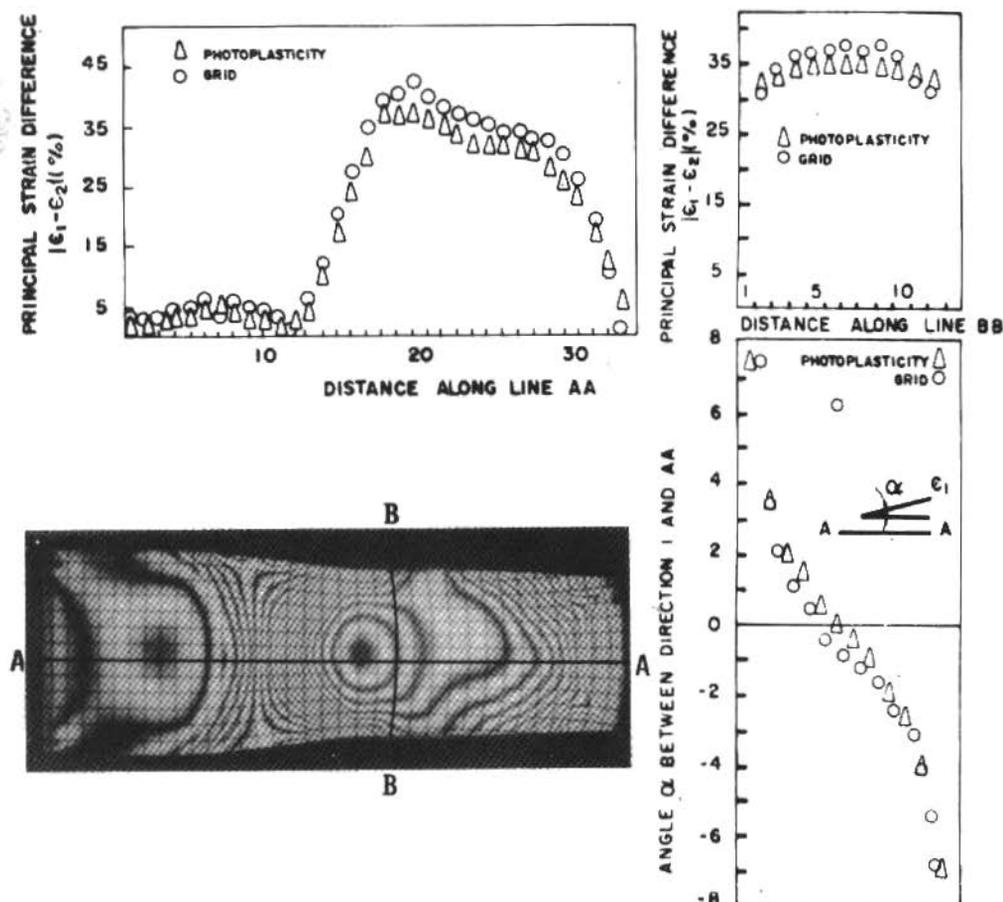


Figure 7. Plane strain extrusion example showing validity of the strain-optical law. Principal strains and their directions were determined by photoplasticity and by measurements over the grid cemented to the specimen

Example 4. Qualitative comparison of photoplastic solutions and analytical or experimental solutions applied to other model materials [1,9,14,22,23]. Two examples for this comparison are shown below. The first example refers to the indentation of blocks by spherical punches [17,23] (Brinell Hardness). It can be seen from Figure 8 that the isochromatic fringes (loci of constant $(\epsilon_1 - \epsilon_2)_p$) have comparable shapes with the isostress and isotrain lines of references [27] and [28], respectively. The same observation is valid for the elastoplastic boundaries predicted by the three

different solution methods. The second example refers to the plane strain indentation of a bar by symmetrical punches with a ratio width of the punch, h , to thickness of the bar, b , equal to 1.0 (Figure 9) [17,23]. For this geometry, the theory of plasticity [29] predicts two straight slip lines intersecting orthogonally at the center thickness of the specimen and joining the opposite corners of the symmetrical punches. Very concentrated regions of plastic strains are shown by the sequence of photoplastic results localizing the zones where slipping took place. These regions tend to spread as indentation continues and h/b becomes large than 1, as Siebel [30] predicted using steel models and visualizing slip lines by Fry's reagent (Figure 9).

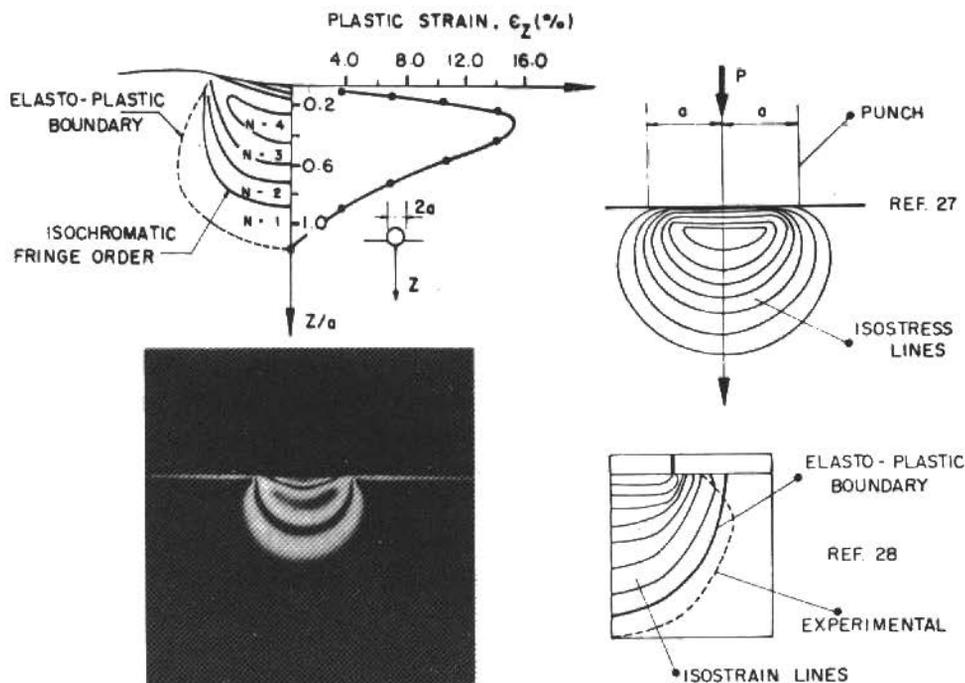


Figure 8. Brinell hardness example [17,23]. Distribution of plastic strains along z axis determined by photoplasticity. Qualitative comparison of shapes of elastoplastic boundaries and curves of constant stress (Ref.[27]), constant strain (Ref. [28]) and constant principal strain difference (isochromatics).

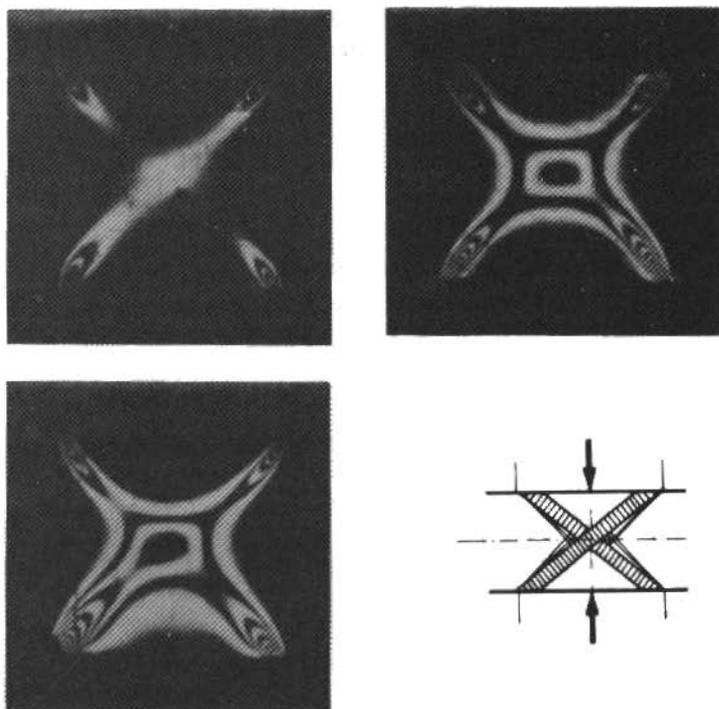


Figure 9. Plane strain compression of slabs [1,9]. Progression of left to the right shows increase of plastic strain differences (isochromatics) with indentation depth. Note qualitative similarity of these pictures with slip-lines and elastoplastic boundaries determined by Siebel [30] using Fry's reagent in steel specimens

CONCLUSIONS

The objective of this paper was to present the unloaded photoplasticity technique as a simple tool to predict finite strain distributions for some manufacturing processes. From the optical response analysis, distributions of true principal plastic strain differences and other types of results may be predicted with good accuracy for the employed model materials. The extension of these results to metal prototypes is intended to be only qualitative due to differences in microstructure and mechanical macrobehavior between polymers and metals. However, these qualitative results may be very useful to designers and researchers once no other whole field and 3-D technique is available in that field of plasticity.

REFERENCES

- [1] Freire, J.L.F. — "Studies on the yield behavior of photoplastic materials," Ph.D. Dissertation, Iowa State University, 1979.
- [2] Burger, C.P. — Nonlinear photomechanics. Experimental Mechanics, 20,(11), 381, 1980.
- [3] Doyle, J.F. — Constitutive relations in photomechanics. Int. J. Mech. Sci., 22 : 1-8, 1980.
- [4] Toughi, A.; Gamby, D.; Lagarde, A. and Brinson, H.F. — Nonlinear Photo-viscoelasticity: Theory and measurement. Experimental Mechanics, 23, (3): 314-321, 1983.
- [5] Freire, J.L.F.; Lage, J.D. and Vieira, R.D. — Loaded and unloaded optical response of polyester model materials. SESA-JSME Joint Spring Meeting, Hawaii, 1982, Experimental Mechanics, 23 (12): 450-457, 1983.
- [6] Javornicky, J. — Photoplasticity. New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1974.
- [7] Unksov, E.P. and Safarov, Y.S. — Photoelastic investigations on initial plastic straining. Int. J. Mech. Sci., 17 : 545-549, 1975.
- [8] Dally, J.W. and Mulc, A. — Polycarbonate as a model material for three-dimensional photoplasticity. Trans. ASME, J. App. Mech., Ser. E, 95: 600-605, 1973.
- [9] Freire, J.L.F. — Application of three-dimensional photoplasticity to plane strain and axisymmetric compression problems. IV SESA Int. Congress on Exp. Mech., Boston, 1980.
- [10] Freire, J.L.F.; Gomide, H.A. and Riley, W.F. — Photoplastic study of uniaxially compressed cylinders. V Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 241-251, 1979.
- [11] Oyinlola, A.K. — Strain distribution analysis in ring upset forging and hot-rolling by photoplasticity. Ph.D. Dissertation, Iowa State University, 1976.
- [12] Gomide, H.A. and Burger, C.P. — Three-dimensional strain distributions in upset rings by photoplastic simulation. Experimental Mechanics, 10: 361-370, 1981.
- [13] Freire, J.L.F. and Vieira, R.D. — Plane-strain upset of bars by photoplasticity. SESA Spring Meeting, Dearborn, 1981.
- [14] Burger, C.P. and Koenig, L.N. — Photoplastic modelling of strains in the hot forming of aluminum. SESA Paper no.WR-19, 1975.
- [15] Freire, J.L.F.; Vieira, R.D. and Abinader, F. — Application of photoplasticity to an extruded polyester specimen. Proceedings of the SESA Spring Meeting, 1983, pp.93-97.

- [16] Burger, C.P. and Gomide, H.A. — Three-dimensional strain in rolled slabs by photoplastic simulation. Experimental Mechanics, 22 (12) : 441-446, 1982.
- [17] Lage, J.D. and Freire, J.L.F. — Estudo de problemas de indentação através de fotoplasticidade. VII Brazilian Congress of Mechanical Engineering, B-22, 221-232, 1983.
- [18] Nisida, M.; Hondo, M. and Hasunuma, T. — Studies of plastic deformation by the photoplastic method. Jap. Nat. Cong. App. Mech. Proc., 6, 137-140, 1956.
- [19] Zachary, L.W. and Riley, W.F. — Optical response and yield behavior of a polyester model material. Experimental Mechanics, 17 (9) : 321-326, 1977.
- [20] Freire, J.L.F. and Riley, W.F. — Yield behavior of photoplastic materials. Experimental Mechanics, 20 (4) : 118-125, April 1978.
- [21] Brinson, H.F. and DasGupta, A. — The strain-rate behavior of ductile Polymers. Experimental Mechanics, 15 : 458-463, December 1975.
- [22] Vieira, R.D. — Caracterização mecânica e ótica de misturas de resinas poliéster para sua aplicação em fotoplasticidade tridimensional. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1982.
- [23] Lage, J.D. — Fotoplasticidade em modelos de resina poliéster sob carregamento e após descarregamento. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1982.
- [24] Argon, A.S. and Bessonov, M.I. — Plastic flow in glassy polymers. Polymer Eng. and Sci., 17 (3) : 174-182, 1977.
- [25] Nishitani, T. and Ito, H. — Construction of a slip-line field in photoviscoplastic model test. Experimental Techniques, 7 (3) : 26-27, 1983.
- [26] Brill, W.A. — Basic studies in photoplasticity. Ph.D. Dissertation, Stanford University, 1966.
- [27] Shaw, M.C. and De Salvo, G.L. — On the plastic flow beneath a blunt axisymmetric indenter. Journal of Engineering for Industry, May 1970, pp.480-494.
- [28] Lee, C.H.; Masaki, S. and Kobayashi, S. — Analysis of ball indentation. Int. J. Mech. Sci., 14 : 417-426, 1972.
- [29] Ford, H. — Advance mechanics of materials. Longmans, 1963.
- [30] Siebel, E. — The application to shapping processes of Hencky's laws of equilibrium. J. Iron Steel Institute, 155 : 526-534, 1947.

ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA TORRE VIA OTIMIZAÇÃO

Bernardo Horowitz

Prof. Adjunto

Dept.^o de Engenharia Civil – UFPE

Diogenes Cabral do Vale Junior

Aluno de Graduação – Assistente de Pesquisa

Dept.^o de Engenharia Mecânica – UFPE

SUMÁRIO

A análise não linear geométrica de uma torre reforçada com cabos protendidos é realizada através da técnica da minimização do funcional potencial total. O problema resultante é de otimização restrita não linear resolvido com um algoritmo Quase-Newtoniano. O comportamento força/deslocamento é obtido fixando o deslocamento e achando o valor da força diretamente do vetor de multiplicadores de Lagrange. Imperfeições iniciais são também levadas em consideração.

INTRODUÇÃO

Uma solução eficiente para pilares esbeltos onde o índice estrutural P/L^2 assume valores muito baixos é a torre da Figura 1.a [7,11]. É fácil verificar que o sistema cabos/montantes restringe elasticamente as deformações do eixo aumentando assim sua carga crítica, quer a flambagem se dê no modo simétrico como no antissimétrico, Figura 1.b,c. A protensão dos cabos é essencial pois faz com que os cabos aliviados também contribuam para a rigidez da estrutura.

Análises do tipo bifurcação linear são conhecidas para estruturas semelhantes, tanto com montantes articulados ao eixo [2], como rigidamente ligados ao eixo [1,13,14]. Aqui, o comportamento de uma torre com a forma da Figura 1.a, construída no DEMEC/UFPE para suporte de sistemas sensores e geradores em energia eólica [6],

é analisado para situações imediatamente pós-críticas. Devido a grande esbeltez, tanto os cabos como o eixo permanecem linearmente elásticos. Assim sendo, apenas não linearidades geométricas são levadas em consideração. É possível mostrar também que, para esta estrutura é suficiente estudar deslocamentos num plano que contenha dois cabos [11].

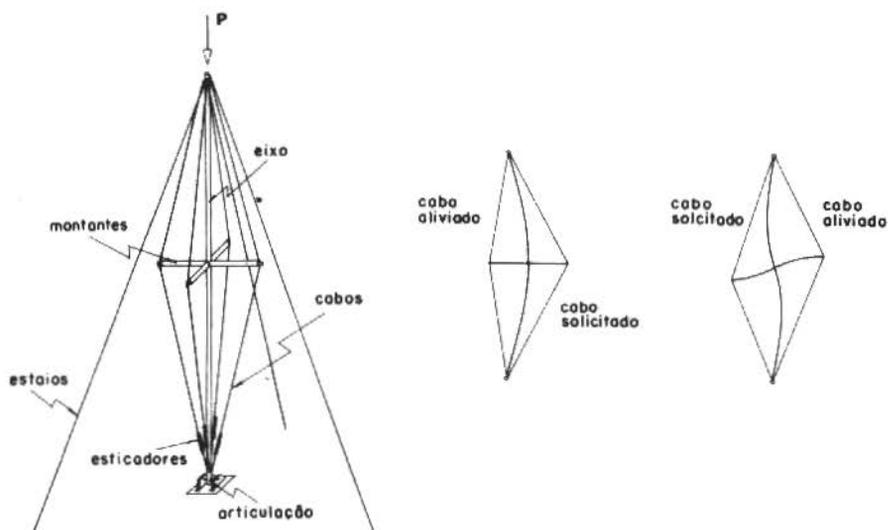


Figura 1. Torre reforçada com cabos

A técnica de análise empregada é a da minimização direta do funcional potencial total [10]. Sua eficiência é reconhecida em problemas de pequeno porte, com grande grau de não linearidade [8]. A técnica é não incremental, não necessitando do conhecimento da matriz de rigidez tangente, apenas da soma escalar instantânea da energia de deformação dos elementos componentes. Pode assim acomodar mudanças bruscas de configuração do tipo bifurcação de barras ou inatividade de cabos [12].

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja uma estrutura de volume não deformado V , sujeita a deslocamentos finitos definidos por \underline{x} , onde se prescrevem esforços na porção S_1 do contorno, e deslocamentos na porção S_2 . O funcional

potencial total, Π , é dado por:

$$\Pi(\underline{x}) = \iiint_V [U(\underline{x}) + \phi(\underline{x})] dV + \iint_{S_1} \psi(\underline{x}) dS \quad (1)$$

onde:

U → energia de deformação

ϕ → potencial das forças de volume

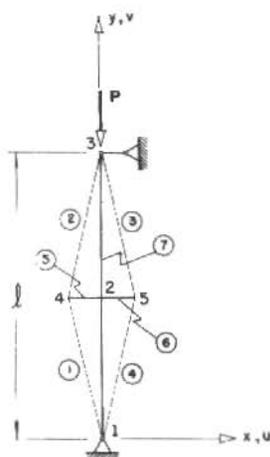
ψ → potencial das forças de superfície.

É possível mostrar que [15]:

• dentre todos os deslocamentos geometricamente admissíveis aqueles que tornam estacionário o valor de Π satisfazem as condições de equilíbrio e as condições mecânicas de contorno;

• configurações para as quais Π assume um mínimo local, são de equilíbrio estável.

Aplicando ao caso em apreço notamos primeiramente que as funções U e ψ existem pois o material permanece elástico e o carregamento externo é conservativo. Utilizaremos quatorze graus de liberdade para definir a configuração da estrutura, Figura 2. Os cinco primeiros provêm do desenvolvimento em série de Fourier do deslocamento do eixo, e os demais são deslocamentos nodais.



GRAUS DE LIBERDADE

$x_1 - x_5$: desenvolvimento em série do deslocamento do eixo

nó	u	v
1	-	-
2	x_6	x_7
3	-	x_8
4	x_9	x_{10}
5	x_{11}	x_{12}

x_{13} : rotação do nó 2 do elem. 5

x_{14} : rotação do nó 2 do elem. 6

Figura 2. Graus de liberdade

Conclui-se que a análise da torre \bar{e} um problema da forma:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\underline{x}) \\ \text{Sujeito a:} & h_j(\underline{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{array}$$

A função objetiva, f , vale:

$$f(\underline{x}) = \Pi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^7 U_i(\underline{x}) + Px_8 \quad (2)$$

sendo U_i a energia de deformação do i -ésimo elemento. As restrições h_j impõem condições de compatibilidade de deslocamentos:

$$h_1(\underline{x}) = \sum_{r=1}^5 x_r \sin \frac{r\pi}{2} - x_6 = 0; \quad h_2(\underline{x}) = x_7 - x_8/2 = 0 \quad (3)$$

h_1 impõe a igualdade dos deslocamentos laterais do eixo e do n $^{\circ}$ 2. Para deformações nos modos simétrico ou antissimétrico, os únicos de real interesse [6], o deslocamento vertical do n $^{\circ}$ 2 \bar{e} a metade daquele do n $^{\circ}$ 3. Isto \bar{e} o que impõe h_2 . No caso de montantes rigidamente soldados ao eixo, acrescentam-se:

$$h_3(\underline{x}) = \pi/l \sum_{r=1}^5 rx_r \cos \frac{r\pi}{2} - x_{13} = 0; \quad h_4(\underline{x}) = x_{13} - x_{14} = 0 \quad (4)$$

A solução \underline{x}^* do problema (P) acima \bar{e} uma configuração de equilíbrio estável da estrutura correspondente a aplicação da carga P .

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Como a intenção \bar{e} acompanhar o comportamento pós-crítico da estrutura, convém fixar o deslocamento vertical, δ , do n $^{\circ}$ 3, e determinar a configuração de equilíbrio e a carga P correspondentes. Para este fim, as alterações necessárias na formulação anterior são:

- eliminar da função f em (2) o termo em P , pois o n $^{\circ}$ 3 passa a integrar a porção S_2 do contorno;

- adicionar a restrição: $h_{m+1}(\underline{x}) = x_8 + \delta = 0$.

O valor de P na solução do problema acima \bar{e} dado pelo multiplicador de Lagrange, λ_{m+1} , correspondente à restrição adicional h_{m+1} . De fato, considere o problema perturbado (PP) do problema (P):

$$(PP) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\underline{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \underline{h}(\underline{x}) = \underline{c} \end{array}$$

onde \underline{c} é o vetor de perturbação. Chamaremos $\underline{x}(\underline{c})$ a solução de (PP), notando que $\underline{x}(0) = \underline{x}^*$, solução do problema (P) original. Pelo teorema da sensibilidade [9]:

$$\partial/\partial c_j f[\underline{x}(0)] = -\lambda_j \quad (5)$$

Aplicando ao presente caso, e fazendo uso do primeiro teorema de Castigliano, cuja validade independe do princípio da superposição, vem:

$$P = -\partial/\partial x_8 U(\underline{x}^*) = \lambda_{m+1} \quad (6)$$

ALGORITMO QUASE-NEWTONEANO

O algoritmo empregado na solução de (P) é devido a Han [4]. Abaixo segue uma descrição muito breve do algoritmo. Detalhes podem ser encontrados na referência [5]. Considere a definição do problema (Q) antes da enumeração dos passos do núcleo do algoritmo:

$$(0) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \nabla^T f(\underline{x}) \underline{d} + 1/2 \underline{d}^T \underline{B} \underline{d} \\ \text{Sujeito a:} & \underline{d}^T \nabla \underline{h}_j(\underline{x}) + h_j = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{array}$$

(1) Forneça o ponto inicial \underline{x} e uma matriz \underline{B}

(2) Ache a solução \underline{d} de (Q). O novo estimador da solução é $\bar{\underline{x}} = \underline{x} + \underline{d}$.

(3) Se $|f(\bar{\underline{x}}) - f(\underline{x})| + \sum_{i=1}^m |\lambda_i h_i(\bar{\underline{x}})| \leq \text{TOL}$, pare.

(4) Atualize \underline{B} obtendo $\bar{\underline{B}}$. Isto é feito utilizando a técnica Quase-Newtoniana de modo a aproximar a matriz Hessiana da função Lagrangeana do problema (P). Faça $\underline{x} \leftarrow \bar{\underline{x}}$, $\underline{B} \leftarrow \bar{\underline{B}}$ e volte a (2).

Na solução \underline{x}^* , os multiplicadores de Lagrange do subproblema quadrático (Q) são idênticos ao de (P). Portanto a obtenção da carga P na equação (6) não envolve qualquer esforço numérico adicional. Foi tomado para TOL o valor de 10^{-10} .

A FUNÇÃO OBJETIVA

Resta agora construir as expressões das energia de deforma-

ções dos elementos, $U_1(\underline{x})$. São serão consideradas pequenas deformações e a formulação empregada é Lagrangeana.

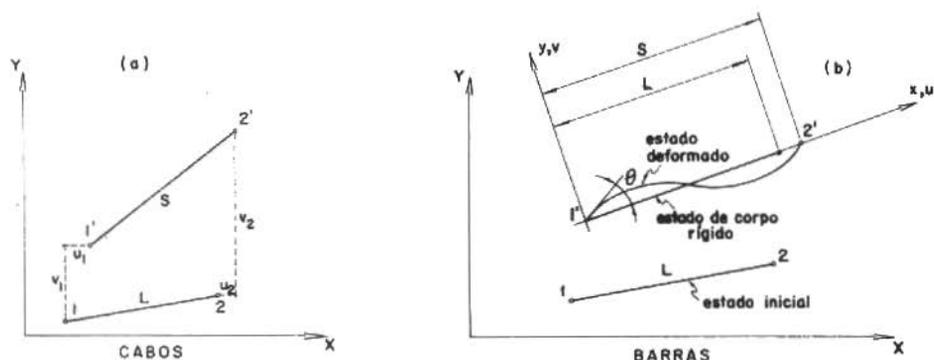


Figura 3. Cabos e barras

Cabos

Sejam L e A_c o comprimento e a área originais do cabo, Figura 3.a. Sendo S o comprimento deformado, e ϵ_{pt} a deformação inicial de protensão, tem-se:

$$\epsilon = \epsilon_{pt} + (S/L - 1) \quad (7)$$

Se $\epsilon > 0$, então:

$$N = E_c A_c \epsilon; \quad U = 1/2 E_c A_c L \epsilon^2 \quad (8)$$

Barras

Para o cálculo da energia de deformação das barras a configuração inicial é o estado de corpo rígido da Figura 3.b, a partir do qual são medidos os deslocamentos u e v . Admitindo que:

- o deslocamento v seja da ordem da altura da seção, as rotações em relação à corda sejam pequenas e que a hipótese de Bernoulli-Euler seja satisfeita, vem [15]:

$$\epsilon_x = u' + 1/2(v')^2 - zv''; \quad N = EA[u' + 1/2(v')^2] \quad (9)$$

- não haja carregamento externo paralelo ao eixo da barra entre as extremidades; tem-se que $N' = 0$ [15]. Portanto:

$$k = u' + 1/2(v')^2 = \text{constante} \quad (10)$$

Sendo constante ao longo da peça, k é igual ao seu valor médio:

$$k = \left(\frac{S}{L} - 1\right) + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2}(v')^2 dx; \quad U = \frac{EA}{2} \left[k^2 L + \frac{I}{A} \int_0^L (v'')^2 dx \right] \quad (11)$$

Portanto, é necessário estabelecerem-se funções de interpolação univariadamente para o deslocamento v .

Montantes. Devido a sua rigidez foi tomado para interpolar v um polinômio do terceiro grau. Impondo as condições de bordo, e sendo θ a rotação, em relação à corda, da extremidade ligada ao eixo central, vem:

$$k = \left(\frac{S}{L} - 1\right) + \frac{\theta^2}{10}; \quad U = \frac{EA}{2} \left(k^2 L + \frac{I}{A} \frac{3}{L} \theta^2 \right) \quad (12)$$

Eixo. A interpolação neste caso é $v = \sum_{r=1}^5 x_r \sin(r\pi x/l)$. Logo, para deformações nos modos simétricos ou antissimétrico, vem:

$$k = \frac{x_8}{l} + \frac{\pi^2}{4l^2} \sum_{r=1}^5 (rx_r)^2; \quad U = \frac{EA}{2} \left[k^2 l + \frac{1}{2A} \frac{\pi^4}{l^3} \sum_{r=1}^5 (r^2 x_r)^2 \right] \quad (13)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

O método discutido acima é utilizado na análise do protótipo construído no DEMEC/UFPE [6]. O eixo é um tubo DIN 2440, $\phi 2''$ ($A = 6,627 \text{ cm}^2$; $I = 26,326 \text{ cm}^4$; $E = 21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$), com 10m de altura. Os montantes, rigidamente soldados ao eixo, são do mesmo tubo com 50cm de comprimento. Os cabos são cordoalhas de $7\phi^1/4''$ ($A_c = 0,232 \text{ cm}^2$, $E_c = 19,5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$).

Eixo Inicialmente Reto

A Figura 4a mostra curvas força/deslocamento para diferentes valores da protensão, ϵ_{pt} . Observa-se que:

- Em todos os casos a flambagem se dá no modo simétrico.
- Para $\epsilon_{pt} = 5 \times 10^{-4}$ há dois pontos angulosos. O primeiro resulta de bifurcação, já o segundo é devido ao afrouxamento de cabos. A mesma observação é válida para $\epsilon_{pt} = 10 \times 10^{-4}$.
- Para os dois maiores valores de ϵ_{pt} o ponto de bifurcação

ocorre quando δ atinge o mesmo valor de 0,295cm. Em ambos os casos, portanto, o eixo está sujeito ao mesmo esforço normal.

A última observação é explicada notando que o ponto de bifurcação se dá quando o eixo, considerado como simplesmente apoiado com uma mola no centro, flamba no modo simétrico. A mola resulta da ação dos cabos, sendo sua rigidez, $k = 4E_c A_c / l \text{sen} \beta \text{sen} 2\beta$, onde β é o ângulo dos cabos com o eixo. A carga crítica neste caso é dada pela equação:

$$\text{tg } z = -(cz^3 - z) \quad (14)$$

onde $z = \lambda/2 \sqrt{P/EI}$, e $c = 16EI/k\lambda^3$. Resolvendo a equação chega-se a $P_{cr} = 4100\text{kg}$. Este é também o valor máximo de carga vertical que a torre pode suportar. Corresponde a uma protensão que se anula exatamente quando P atinge o valor máximo. Esta protensão, que a literatura denomina de "ótima" [3], vale neste caso $\epsilon_{pt} = 2,9 \times 10^{-4}$.

Eixo com Imperfeição

A curva mais externa da Figura 4b representa o comportamento da torre, considerada inicialmente reta, para o valor "ótimo" de ϵ_{pt} , achado na seção anterior. Nota-se que a estrutura atinge a carga máxima de 4100kg. Porém, a grande falta de ductilidade pós-crítica sugere que imperfeições podem diminuir a capacidade portante da estrutura.

Consideremos agora que o tubo central contém uma imperfeição inicial de forma senoidal: $v_0(x) = v_0 \text{sen} \pi x / l$. Sejam:

$$u_f(x) = u_0(x) + u(x) ; \quad v_f(x) = v_0(x) + v(x) \quad (15)$$

As deformações que geram energia são, de acordo com (9):

$$\epsilon = \epsilon_f - \epsilon_0 = (u_f' - u_0') + 1/2[(v_f')^2 - (v_0')^2] - z(v_f'' - v_0'') \quad (16)$$

que, com o uso de (15), fica:

$$\epsilon = u' + 1/2[2v_0' v' + (v')^2] - zv'' \quad (17)$$

Utilizando para v expansão idêntica a anterior, conclui-se que a única alteração na análise para consideração da imperfeição

senoidal é a mudança de k na expressão (13) para:

$$k = \frac{x_8}{\ell} + \frac{\pi^2}{4\ell^2} [2v_0 x_1 + \sum_{r=1}^5 (rx_r)^2] \quad (18)$$

Os valores iniciais das coordenadas nodais devem ser também ajustados.

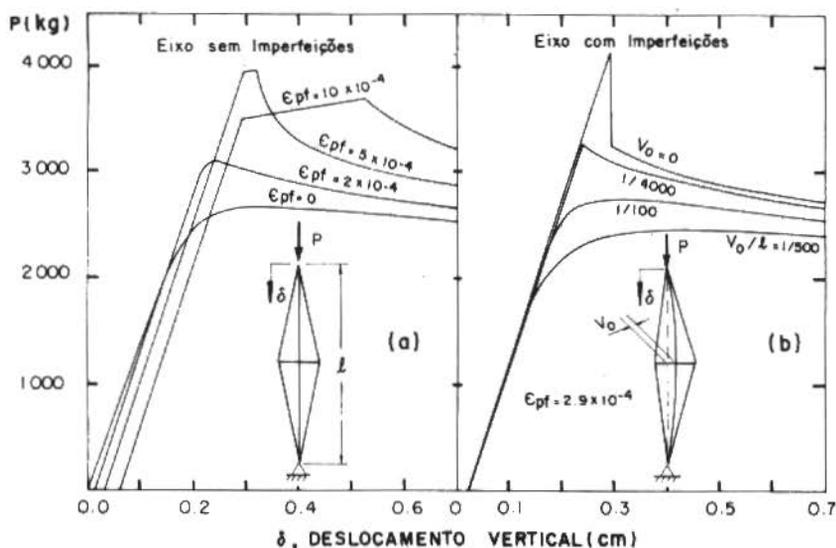


Figura 4. Curvas força/deslocamento

Como se vê na Figura 4.b a redução de capacidade na protensão "ótima" pode ser substancial. De fato, para $v_0/\ell = 1/1000$ a redução é de 33%. Resultados experimentais, em condições excepcionais onde a protensão é ajustada diretamente pelo valor da tensão, indicam que a menor redução obtida é de 24% [3]. Como é patente da Figura 4.a para $e_{pt} = 10 \times 10^{-4}$ a dutilidade pós-crítica é bem maior. Resultados da análise com imperfeição de mesma ordem indicam, neste caso, uma redução de 8% em relação à torre inicialmente reta. É interessante notar que a força máxima correspondente é 24% maior que a da torre imperfeita na protensão "ótima".

CONCLUSÕES

A torre reforçada com cabos protendidos, com montantes rigidamente soldados ao eixo, é uma solução eficiente para pilares com valores pequenos do índice P/L^2 . Devido à falta de ductilidade pós-crítica a carga admissível e o nível de protensão não devem ser baseados unicamente na carga crítica máxima. É necessário uma análise que leve em conta possíveis imperfeições do eixo.

A técnica da minimização direta se comportou de forma encorajadora acomodando, sem problemas de convergência, pontos angulosos de bifurcação e inatividade de cabos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu suporte do CNPq através de bolsa de pesquisa, e da Coordenadoria de Energia do Governo do Estado de Pernambuco.

REFERÊNCIAS

- [1] Belenya, E. — "Prestressed Load-Bearing Metal Structures", MIR Publishers, Moscow, 1977.
- [2] Chu, K-H and Berge, S.S. — "Analysis and Design of Struts with Tension Ties", ASCE, ST1, 1963, pp.127-163.
- [3] Hafez, H.H.; Temple, M.C. and Ellis, J.S. — "Pretensioning of Single-Crossarm Stayed Columns", ASCE, ST2, 1979, pp.359-375.
- [4] Han, S.P. — "Superlinear Convergent Variable Metric Algorithm for General Nonlinear Programming Problems", Math. Prog., 11 (1976), pp.263-282.
- [5] Horowitz, B. — "Um Método Quase-Newtoniano para Otimização Estrutural", Anais do II Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Curitiba, 1980, pp.172-189.
- [6] Horowitz, B. & Vale, D.C. — "Projeto de uma Torre Reforçada com Cabos Protendidos", DEMEC-RT-01/83, Deptº de Engenharia Mecânica, UFPE, Recife, 1983.
- [7] Horowitz, B. & Vale, D.C. — "Flambagem de uma Torre Reforçada com Cabos Protendidos", Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 83, Uberlândia, 1983. v.B, p.177-186.
- [8] Kamat, M.P. and Hayduk, R.J. — "Energy Minimization versus Pseudo Force Technique for Nonlinear Structural Analysis", Computers & Structures, 11 (1980), pp.403-309.
- [9] Luenberger, D.G. — "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, Reading, 1973.

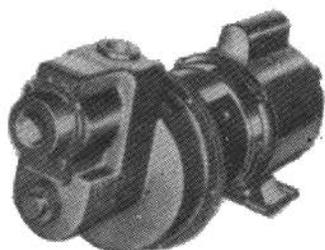
- [10] Mallett, R.H. and Schmit, L.A. — "Nonlinear Structural Analysis by Energy Search", ASCE, ST3, 1967, pp.221-234.
- [11] Mauch, R.H. and Felton, L.P. "Optimum Design of Columns Supported by Tension Ties", ASCE, ST3, 1967, pp.201-220.
- [12] Monforton, G.R. and El-Hakim, N.M. — "Analysis of Truss-Cable Structures", Computers & Structures, 11 (1980), pp.327-335.
- [13] Smith, R.J.; McCaffrey, G.T. and Ellis, J.S. — "Buckling of a Single-Crossarm Stayed Column", ASCE, ST1, 1975, pp.249-268.
- [14] Temple, M.C. — "Buckling of Stayed Columns", ASCE, ST4, 1977, pp.839-851.
- [15] Washizu, K. — "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon, 1974.



DANCOR S.A. INDÚSTRIA MECÂNICA
FÁBRICA DE BOMBAS HIDRÁULICAS

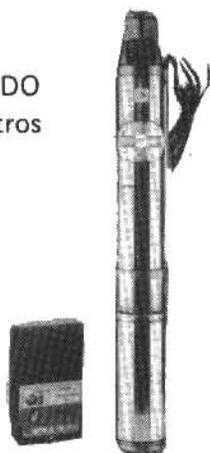
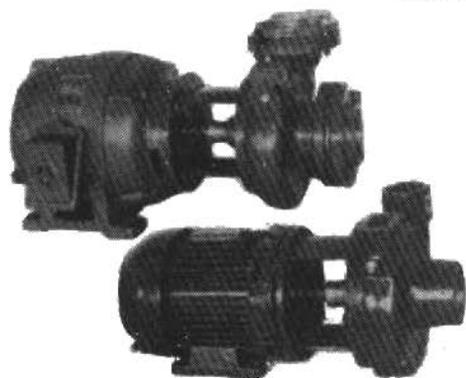
BOMBAS CENTRÍFUGAS
BOMBAS AUTO-ASPIRANTES
BOMBAS COM EJETOR
elétricas
a gasolina
diesel

BOMBAS PARA INCÊNDIO
BOMBAS PARA IRRIGAÇÃO



BOMBAS VERTICAIS
EJETORES PARA POÇOS PROFUNDOS

BOMBAS SUBMERSÍVEIS
PARA DRENAGEM
BOMBAS SUBMERSAS
PARA POÇO PROFUNDO
até 400 metros



DANCOR

Rua Jardim Botânico, 635 s/302 a 306 — Tel. 294-9332
Fábrica II — Av. Brasil 49.259—C. Grande — Tel. 397-6266
End. Teleg. "DANCOR" — C.Postal 200 — ZC — 13
CEP 20.000 — Rio de Janeiro — RJ

TORQUE ÚTIL E TORQUE DE ATRITO EM MODELOS DE CATAVENTOS

Philemon Melo Cunha

Dept^o de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

Antonio da Silva Castro Sobrinho

Dept^o de Física – PUC/RJ

SUMÁRIO

Este trabalho trata da medição do torque útil e do torque de atrito em modelos de cataventos. Para a medição do torque útil foi desenvolvido um torquímetro para a faixa de 3-50 grama força-centímetro ($2,9 \times 10^{-4}$ a $4,9 \times 10^{-3}$ Newton-metro). Na medição do torque de atrito aplica-se um método que determina o torque resistente dos mancais do catavento. Tais técnicas de medição são utilizadas na determinação da curva Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades de um modelo de catavento, demonstrando a aplicabilidade do instrumento e do método.

INTRODUÇÃO

A potência gerada pelas pás de um catavento não pode ser utilizada integralmente, pois parte dessa potência é perdida por atrito nos mancais do eixo do catavento.

A modelagem de cataventos tem por objetivo determinar a curva adimensional do Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades e através desta curva prever o comportamento do catavento em escala natural. Para o levantamento desta curva é necessário a medição do torque gerado pelas pás do catavento. No entanto, analogamente à potência, este torque é composto de duas parcelas: o torque de atrito e o torque útil.

Para medição do torque de atrito desenvolveu-se um processo

indireto que consta do levantamento da curva de desaceleração angular do catavento e, pela aplicação da 2ª Lei de Newton, determina-se o torque de atrito em função da rotação do catavento. Neste método, faz-se a simulação da carga de arraste sobre as pás do catavento, onde tenta-se aproximar as condições de funcionamento durante a obtenção da curva de desaceleração angular do catavento.

O torque útil é medido por um torquímetro que mede torque na faixa requerida pela modelagem. O Micro-Torquímetro Dinâmico como foi denominado, é um instrumento de princípio de funcionamento mecânico e de fácil manuseio.

O MICRO-TORQUÍMETRO DINÂMICO

O Micro-Torquímetro Dinâmico é um instrumento destinado à medição de torques em eixos girantes e estáticos. Seu princípio de funcionamento é mecânico e baseia-se na torção de uma barra de torção de seção retangular (Figura 1), a qual guarda uma proporcionalidade linear entre o torque aplicado e o ângulo de giro.

O acoplamento do instrumento com o eixo é feito pelo Sistema de Atrito mostrado na Figura 1. Este sistema possibilita o acoplamento sem adicionar carga axial e radial ao eixo onde está sendo medido o torque, isto não altera as condições de funcionamento do mecanismo ao qual pertence o eixo, durante a medição. Além disso, este acoplamento permite frear o eixo durante a medição, variando o torque resistente. Isto é feito pela variação da distância "d" (Figura 1) por simples ajuste dos parafusos vistos no Sistema de Atrito. O aumento do torque resistente é proporcionado pelo aumento da distância "d" e vice-versa.

O valor do torque é obtido diretamente pela leitura da escala, a qual fornece valores de 3 a 50 gramas força-centímetro com divisão da escala de 1 grama força-centímetro.

Calibração do Instrumento. A calibração do instrumento é feita estaticamente com a aplicação de torques através de um sistema de alavanca-peso e determinação do ângulo de giro. Tal procedimento é feito enrolando-se uma linha de seda em redor do eixo do Sistema de Atrito (Figura 1) e pendurando-se pesos nesta linha, até completar-se o ângulo de giro de 90° . O torque aplicado fica determinado pois conhece-se o diâmetro do eixo e o peso aplicado. Assim, determina-se a constante de proporcionalidade (k) da barra de torção. O valor obtido numa média de medidas feitas nos dois sen-

tidos de giro foi de $K = 0,164 \text{ g} \cdot \text{cm}/\text{grau}$.

Conhecida a constante de proporcionalidade da barra de torção, constrói-se a escala de torque (Figura 1) por simples considerações geométricas.

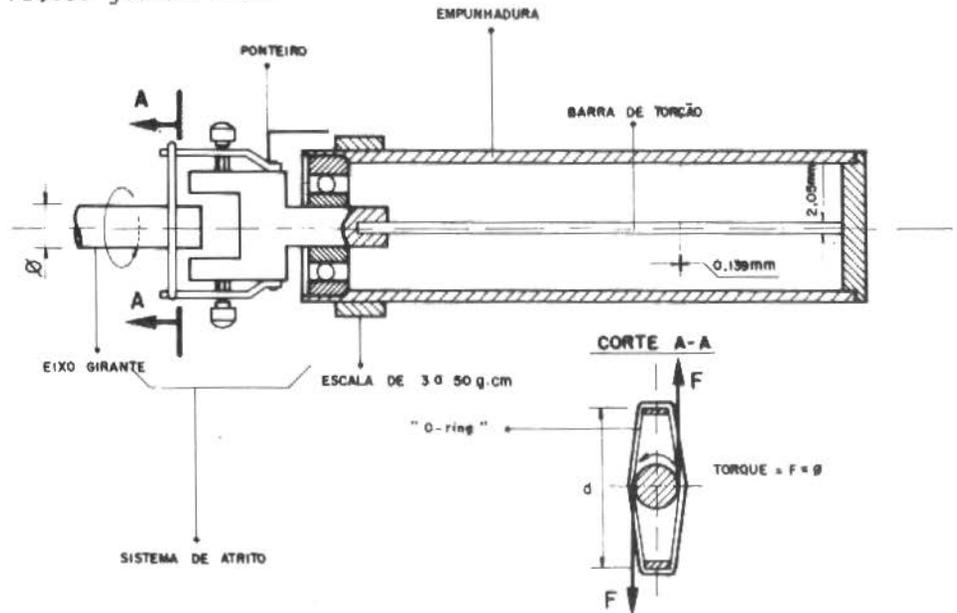


Figura 1. Micro-Torquímetro Dinâmico

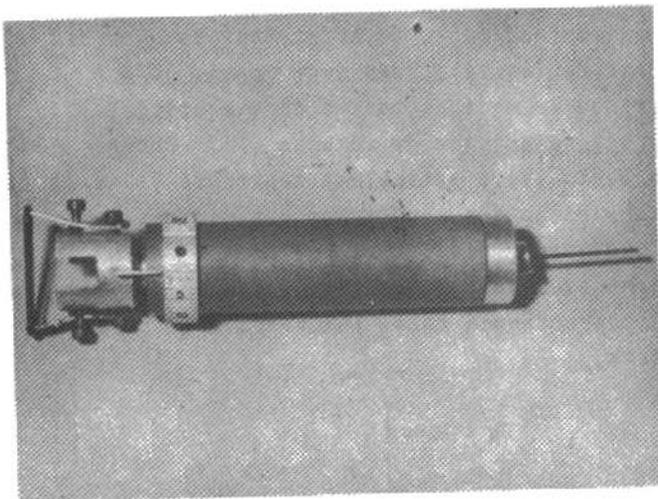


Figura 2. Micro-Torquímetro Dinâmico (comprimento: 174 mm)

Os limites da escala são determinados pelas limitações do sistema de fixação da barra de torção e pelo torque máximo que o Sistema de Atrito pode transmitir. O sistema de fixação da barra de torção possui uma folga necessária à contração da barra durante a torção. Esta folga fornece um giro em torno do zero da escala que limita o torque mínimo lido na escala em 3 g.cm.

É importante notar que a calibração estática garante o funcionamento dinâmico do instrumento. Isto porque o termo "Dinâmico" refere-se a propriedade do Micro-Torquímetro Dinâmico de medir torque em eixos girantes, porém à cada tomada de leitura do instrumento é necessário que a velocidade de rotação do eixo seja constante.

GRANDEZAS CARACTERÍSTICAS DO CATAVENTO

Na análise de um modelo de catavento são envolvidas grandezas que definem sua curva característica Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades [4], os quais serão definidos a seguir.

O catavento utilizado para a demonstração das técnicas de medição e a definição da Razão de Velocidades são vistos na Figura 3, bem como o valor da velocidade do vento no túnel de vento usado durante os testes.

Este catavento possibilita a análise do comportamento das suas características de funcionamento com a variação do ângulo de inclinação das pás da hélice (β). Isto é útil para o projeto de catavento de pás móveis, os quais variam o ângulo das pás para possibilitar o máximo rendimento do catavento nas diversas velocidades de rotação e para várias velocidades do vento.

As grandezas medidas são: o torque útil (T_u), o torque de atrito (T_a) e a velocidade de rotação (w). Observe que a velocidade média do vento (V) é estipulada constante (10 m/s), para possibilitar a comparação dos resultados das medidas feitas para os dois ângulos de inclinação das pás da hélice.

As grandezas calculadas são: potência útil (P_u), potência de atrito (P_a) e a potência total absorvida (P_t) pelas pás dos cataventos. Assim,

$$\left. \begin{array}{l} P_u = T_u \cdot w \\ P_a = T_a \cdot w \end{array} \right\} \rightarrow P_t = P_u + P_a$$

As grandezas adimensionais são: Coeficiente de Potência (CP) e Razão de Velocidade (λ), sendo:

$$CP = \frac{Pt}{\frac{1}{2} \rho_{ar} A V^3}$$

onde: ρ_{ar} - densidade do ar no túnel de vento

A - área gerada pela rotação da hélice do catavento (πR^2)

V - velocidade do vento (10 m/s)

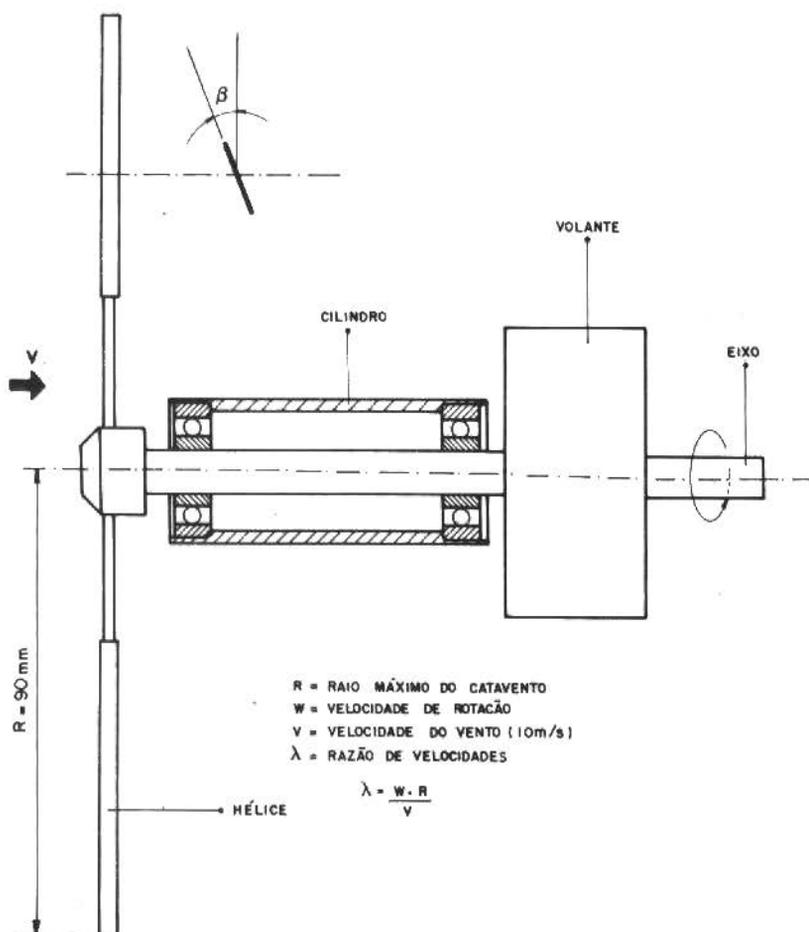


Figura 3. Catavento

O Coeficiente de Potência representa o rendimento do catavento. No entanto, o seu valor máximo é de:

$$CP = \frac{16}{27} = 59,3\%$$

Este valor é determinado teoricamente [5].

MEDIÇÃO DO TORQUE DE ATRITO

O processo de medição do torque de atrito consta basicamente de duas partes. A primeira é o levantamento da curva de desaceleração angular do catavento (Figura 4). Para isto eleva-se a rotação do catavento a um valor determinado e mede-se o tempo que ele leva para parar, uma vez livre para girar. As pás das hélices são postas em ângulo de inclinação nulo, o que não oferece resistência significativa ao giro, pois as pás são duas lâminas delgadas. A sua finalidade é de, apenas, simular a carga de arraste sobre a hélice em funcionamento [9]. Tal simulação requer ainda alguns aperfeiçoamentos, como precisar o erro pela existência do torque adicional gerado pelas pás da hélice com ângulo de inclinação nulo [2]. Este procedimento pode ser visto na Figura 5, onde o aparato para o processo é mostrado. O sistema acoplado ao catavento proporciona a implementação da velocidade de rotação desejada.

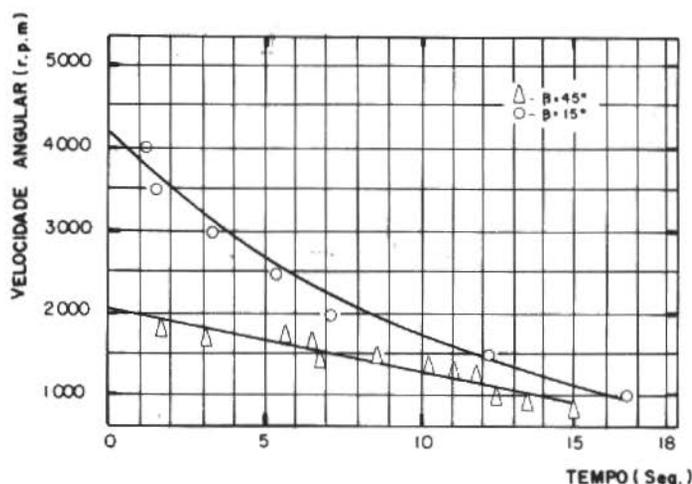


Figura 4. Curva de desaceleração angular

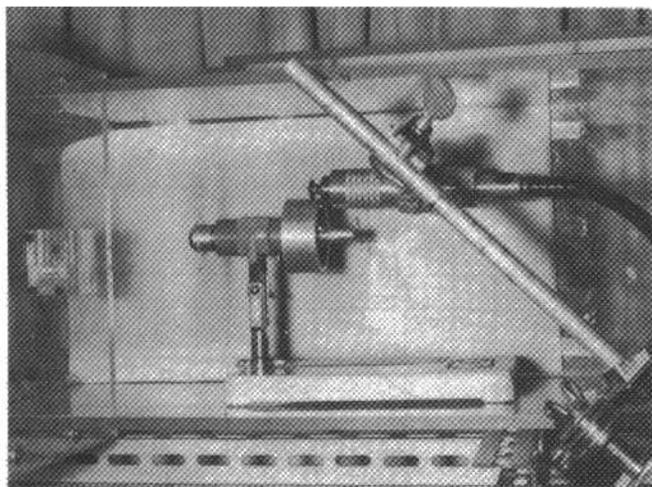


Figura 5. Aparato para o levantamento da curva de desaceleração angular do catavento

A força de arraste é previamente medida por um sistema composto de um dinamômetro, um carro de fixação do catavento e um sistema de freio que regula a velocidade de rotação do catavento. Este sistema pode ser visto na Figura 6. O freio permite a obtenção da força de arraste para diversas velocidades de rotação (Figura 7).

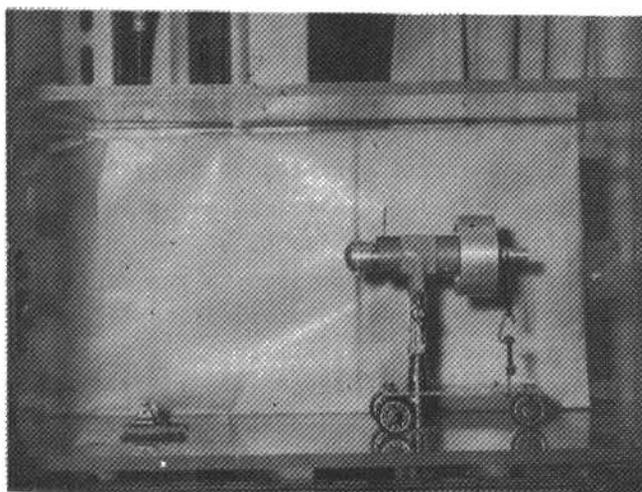


Figura 6. Medição da força de arraste

Para o processo, utiliza-se a força de arraste média, a qual é simulada sobre o catavento regulando-se a velocidade do vento no túnel de vento, durante a obtenção da curva de desaceleração do catavento. A adoção deste valor médio da força de arraste mostrou-se satisfatório no processo adotado [2].

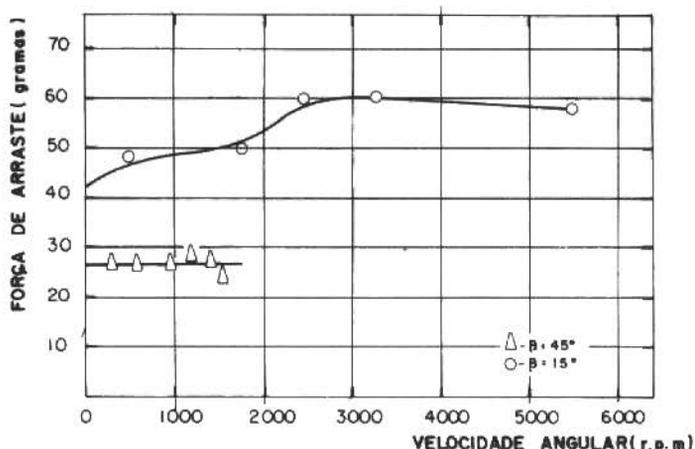


Figura 7. Força de arraste sobre a hélice do catavento

A segunda parte é o levantamento da curva do torque de atrito versus Razão de Velocidades. O torque de atrito fica determinado, uma vez conhecida a curva de desaceleração angular ($w(t)$) e o momento de inércia das partes girantes do catavento (I), assim:

$$T_a = I \frac{dw}{dt}$$

O resultado é uma curva como as das Figuras 8 e 9.

É importante notar, que o Volante da Figura 3 tem a finalidade de ampliar a escala de tempo da curva de desaceleração do catavento, possibilitando o aumento dos valores da escala de tempo. Isto facilita na medição do tempo.

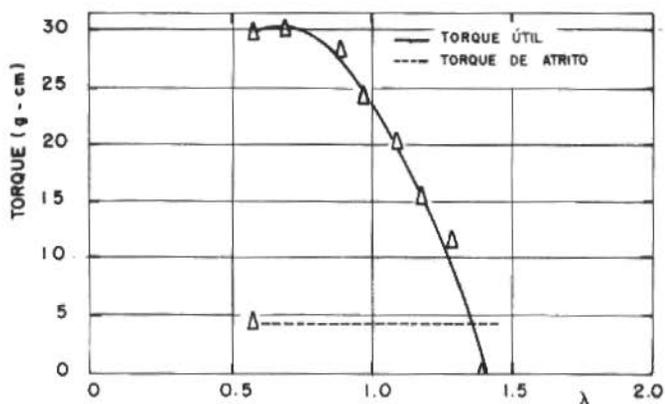


Figura 8. Torque útil e torque de atrito para $\beta = 45^\circ$

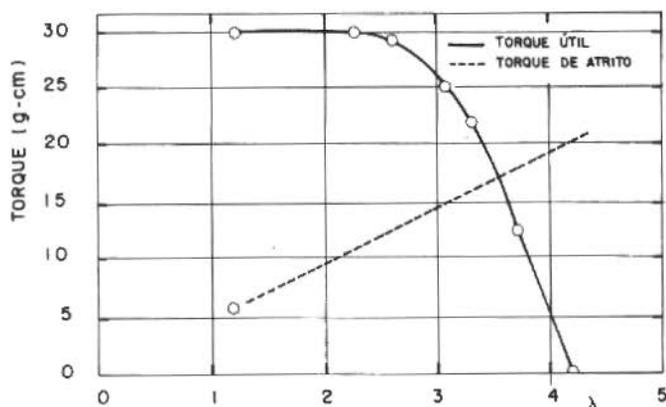


Figura 9. Torque útil e torque de atrito para $\beta = 15^\circ$

MEDIÇÃO DO TORQUE ÚTIL

O Micro-Torquímetro Dinâmico é o instrumento destinado a medir o torque útil no modelo do catavento. Sua utilização é simples. Pela Figura 10 vê-se que o instrumento adapta-se ao eixo do catavento sem perturbar, significativamente, a forma do escoamento em torno do modelo. Além disso, sua fixação não requer nenhum aparato sofisticado, podendo até ser usado manualmente.

Assim, com a regulagem do torque resistente no Sistema de Atrito, obtêm-se a variação do torque útil com a velocidade de rotação e, conseqüentemente com a Razão de Velocidades. O resultado pode ser visto nas Figuras 8 e 9.

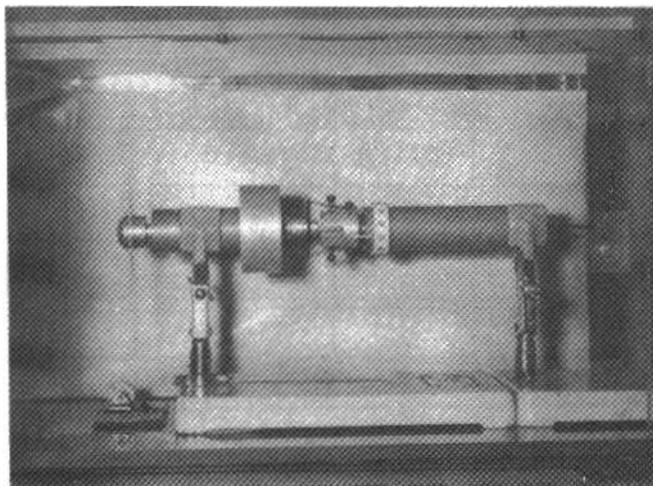


Figura 10. Medição do torque útil com o Micro-Torquímetro Dinâmico

ANÁLISE DO MODELO DO CATAVENTO

A análise do modelo baseia-se no levantamento da curva Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades. Para verificar-se a eficiência e aplicabilidade do método de medição do torque de atrito e do Micro-Torquímetro Dinâmico, foram feitas medidas para o ângulo de inclinação das pás da hélice do catavento (β) de 45° e 15° , tal ângulo está definido na Figura 3.

Resultados para $\beta = 45^\circ$. Seguindo a metodologia descrita, mede-se primeiro a força de arraste e, simulando seu valor médio sobre as pás da hélice com $\beta = 0^\circ$, determina-se a curva de desaceleração angular do modelo do catavento. Os resultados são vistos nas Figuras 7 e 4. A variação de força de arraste é pequena, não podendo ser detectada pelo método usado, isto porque para $\beta = 45^\circ$ a velocidade de rotação é baixa não causando grande obstrução do vento pela hélice do modelo.

Em seguida determina-se o torque de atrito, o qual não apresenta variações sensíveis, por causam também, da baixa velocidade de rotação do catavento (Figura 8).

Finalmente com estes resultados, levanta-se a curva do Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades do modelo do catavento (Figura 11). A curva obtida possui o formato tipo das curvas encontradas na literatura, no entanto para fins de comparação dos resultados, repetiu-se o procedimento para $\beta = 15^\circ$ [4].

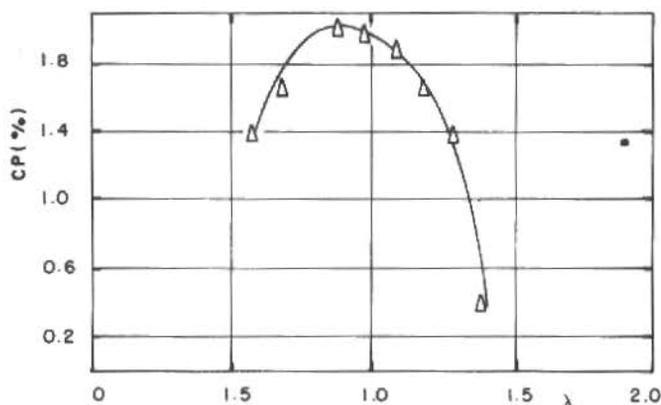


Figura 11. Coeficiente de potência para $\beta = 45^\circ$

Resultados para $\beta = 15^\circ$. Com o mesmo procedimento usado, determinou-se as curvas de força de arraste (Figura 7) e da desaceleração angular do modelo (Figura 4). Em seguida obteve-se a curva do torque de atrito (Figura 9). Neste caso observou-se tanto a variação da força de arraste como a do torque de atrito. Isto é explicado pela alta velocidade de rotação que o modelo atinge, causando um aumento na força de arraste, pela obstrução do escoamento pelo catavento, e o aumento do torque de atrito, o qual é função direta da carga gerada pela força de arraste e da velocidade de rotação do catavento.

Assim, determina-se a curva do Coeficiente de Potência versus Razão de Velocidades (Figura 12). Como era esperado, o valor máximo do Coeficiente de Potência e a faixa da Razão de Velocidades aumentaram em comparação ao resultado de $\beta = 45^\circ$. Deve-se este aumento a maior absorção de energia pela hélice do catavento, uma vez que o aumento da velocidade de rotação aumenta, de uma forma geral, a potência total absorvida pelo catavento, além de aumentar a faixa da Razão de Velocidades na qual o catavento opera.

Nesta análise do modelo do catavento ficou demonstrado a eficiência e aplicabilidade do método de medição do torque de atrito e do Micro-Torquímetro Dinâmico como instrumentação para a obtenção da curva característica de tais modelos.

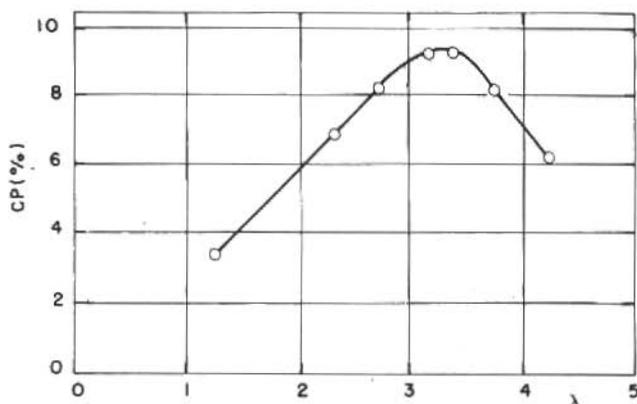


Figura 12. Coeficiente de potência para $\beta = 15^\circ$

CONCLUSÃO

A análise de modelos de cataventos requer técnicas de instrumentação capazes de medir torques de pequena magnitude. O método de medição do torque de atrito e o Micro-Torquímetro Dinâmico demonstraram ser de grande aplicabilidade em tal análise feita com os modelos.

O Micro-Torquímetro Dinâmico é um instrumento capaz de medir torque na faixa requerida pela modelagem. Além disso, pelo seu princípio de funcionamento mecânico e sua calibração estática, ele pode ser visto como padrão na medição de torques de pequena magnitude em eixos girantes ou estáticos.

REFERÊNCIAS

- [1] Cunha, P.M. & Castro Sobrinho, A.S. — Micro-Torquímetro Dinâmico. In: VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, 1983. Anais do VII COBEM, UFU, Uberlândia, MG, 1983. v.C, p.191-200.
- [2] Castro Sobrinho, A.S. — Medição de torque de atrito e torque útil - Torquímetro dinâmico, em modelos de cataventos. (Projeto de Graduação), DEM-PUC/RJ, Março de 1983, Orientador: Prof. Philemon Melo Cunha.
- [3] Cunha, P.M. & Castro Sobrinho, A.S. — Micro-Torquímetro Dinâmico. (Relatório Interno - DEM-01/83), PUC/RJ, Março de 1983.
- [4] Merrill, R. — Energy primer: solar, water, wind and biofuels. Ed. by Richard Merrill and Thavas Gage. Rev. ed. Merlo Park, California, Portola Institute, 1978.
- [5] Vernnard, J.K. — Elementos de mecânica dos fluidos. 5ª edição, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.

- [6] Scieszko, J.L. & Zoratto, D.L. - Determinação experimental do torque de atrito em rotores cilíndricos. In: VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1981. Anais do VI COBEM, PUC/RJ, Rio de Janeiro, RJ, 1981. v.C, p.269-277.
- [7] National Academy of Sciences - Energy for rural development, Washington, DC, 1976.
- [8] Crandall, S.H.; Dahl, N.C. & Larther, T.J. - An introduction to the mechanics of solids. McGraw-Hill Kogakushs Ltda., Second Edition with SI Units, 1978.
- [9] Fox & McDonald - Introdução à mecânica dos fluidos. 2ª edição, Editora Guanabara Dois, 1981.

ESCOAMENTO VERTICAL E HORIZONTAL DE MISTURAS SÓLIDO-LÍQUIDO EM SEÇÃO VARIÁVEL

Sandra C. S. Rocha

Professora e Pesquisadora

Dept.^o Eng. Química – UNICAMP

Cesar C. Santana

Professor e Pesquisador

Dept.^o Eng. Química – UNICAMP

SUMMARY

Based upon the conservation equations for particulated systems, formulations of vertical and horizontal transport in variable sections were achieved. Solutions of these equations were obtained for uniform and non-uniform concentration and velocity profiles. Simulating several flow configurations, axial profiles of local velocity of fluid and particles, porosity and pressure were obtained.

SUMÁRIO

Com base nas equações de conservação em sistemas particulados, foram realizadas as formulações para o transporte horizontal e vertical de partículas em seção variável. Foram obtidas soluções dos sistemas de equações para os casos de perfis uniformes e não uniformes de concentração e velocidades. Com a simulação de várias configurações do escoamento foram obtidos os perfis longitudinais de velocidades locais do fluido e da partícula, de porosidade e de pressão.

NOMENCLATURA

A - área da seção transversal

D - diâmetro da tubulação

d_p - diâmetro médio da partícula sólida

g - aceleração da gravidade

- L - comprimento do medidor
 m - força resistiva sólido-fluido
 P - pressão
 R - raio
 u - velocidade local do fluido
 v - velocidade local do sólido
 V_M - velocidade da mistura
 W_f - vazão mássica do fluido
 u^* - velocidade adimensional do fluido = u/V_M
 v^* - velocidade adimensional do sólido = v/V_M
 e - porosidade
 ρ_f - massa específica do fluido
 ρ_s - massa específica do sólido
 μ - viscosidade do fluido

Os índices 1 e 2 se referem à entrada e garganta do Venturi, respectivamente.

INTRODUÇÃO

Para um melhor entendimento das equações que regem o escoamento simultâneo de fluido e partículas, é importante o estudo de fenômenos onde ocorram os termos de aceleração nas equações do movimento, como consequência da variação da seção transversal do escoamento.

Uma aplicação importante para esse tipo de estudo é a formulação matemática de um medidor Venturi, no qual tem-se a aceleração da mistura devido à variação de área. O objetivo principal é a obtenção dos perfis longitudinais de porosidade, de velocidades locais e também de pressão, o qual permitirá ainda a predição da queda de pressão.

MODELOS UTILIZADOS NA FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Com a suposição de um escoamento isotérmico, as equações básicas para a simulação consistem das equações da continuidade e da quantidade de movimento para o fluido e o sólido, obtendo-se um sistema de quatro equações ordinárias.

Com relação ao posicionamento do dispositivo, foram estudados, neste trabalho, os casos horizontal e vertical. É necessário distinguir entre esses casos, o efeito da uniformidade ou não dos perfis em cada seção transversal do medidor, devido à ação do campo gravitacional.

Modelo Uniforme

Considerando o caso de um Venturi vertical, no qual o campo gravitacional atua uniformemente em cada seção, pode-se supor uma distribuição uniforme de concentração em cada uma daquelas seções.

Supondo ainda um escoamento unidimensional e permanente, tem-se a conservação da massa, para o caso de área variável:

Para o fluido:

$$\frac{d}{dz} (\rho_f \epsilon A u) = 0 \quad (1)$$

Para a partícula:

$$\frac{d}{dz} [\rho_s (1 - \epsilon) A v] = 0 \quad (2)$$

Para as equações do movimento, foram adotadas as formas propostas por Telles [1], as quais tem sido utilizadas com êxito na formulação de vários fenômenos em sistemas particulados [2], em aplicações onde os termos de aceleração são nulos e serão aqui aplicados para uma configuração onde ocorrem os termos de aceleração devido à variação da seção transversal de escoamento. Assim, segundo esses autores, as equações do movimento se apresentam nas seguintes formas, para escoamento unidimensional e permanente:

Para o fluido:

$$\rho_f \epsilon u \frac{du}{dz} = - \frac{dP}{dz} - m + \rho_f g \quad (3)$$

Para o sólido:

$$\rho_s (1 - \epsilon) v \frac{dv}{dz} = m + (1 - \epsilon)(\rho_s - \rho_f) g \quad (4)$$

Nessas equações, ρ_f e ρ_s são as massas específicas do fluido e do sólido, respectivamente, u e v as velocidades locais do fluido e do sólido, A a área da seção transversal, ϵ a porosidade, P a pressão e m a força resistiva sólido-fluido.

As equações (1) e (4) formam o sistema de equações diferenciais a ser resolvido para a obtenção dos perfis longitudinais em um Venturi vertical.

As formas explícitas nas derivadas das variáveis u , v , ϵ e P podem ser obtidas por eliminação entre as 4 equações e são apre-

sentadas a seguir:

$$\frac{du}{dz} = -\frac{u(1-\epsilon)}{\epsilon} \frac{dA}{A} \frac{dz} + \frac{m}{\rho_s v^2} + \frac{(1-\epsilon)(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s v^2} - \frac{u}{A} \frac{dA}{dz} \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{m + (1-\epsilon)(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s(1-\epsilon)v} \quad (6)$$

$$\frac{d\epsilon}{dz} = \frac{(1-\epsilon)}{A} \frac{dA}{dz} + \frac{m}{\rho_s v^2} + \frac{(1-\epsilon)(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s v^2} \quad (7)$$

$$\frac{dP}{dz} = -m - \rho_f \epsilon u - \frac{u}{\epsilon} \left[\frac{(1-\epsilon)}{A} \frac{dA}{dz} + \frac{m}{\rho_s v^2} + \frac{(1-\epsilon)(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s v^2} \right] - \frac{u}{A} \frac{dA}{dz} + \rho_f g \quad (7)$$

Por considerações geométricas, podemos escrever a área variável A , em termos da coordenada axial z :

$$A = A_1 \left[1 - 2 \frac{(R_1 - R_2)}{R_1} \frac{z}{L} + \frac{(R_1 - R_2)}{R_1} \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Para a resolução do sistema de equações diferenciais (5) a (8), é necessário ainda adotar uma expressão para a força resistiva sólido-fluido, m , em função das propriedades dinâmicas do sistema. Massarani e Santana [3] desenvolveram recentemente expressões adequadas da força resistiva para sistemas particulados de porosidade elevada. Essas expressões já foram aplicadas com bons resultados ao transporte hidráulico com seção constante e foram adotadas neste trabalho devido à lacuna existente na literatura sobre expressões da força resistiva que incluam a dependência da aceleração de fluido e partículas.

Para $\epsilon < 0,75$,

$$\vec{m} = \left\{ \frac{18 \mu(1-\epsilon) \left[1 + (1-\epsilon)^{1/3} \right] e^{\frac{1-\epsilon}{0,6\epsilon}}}{\epsilon d_p^2} + \rho_f \frac{44(1-\epsilon)}{d_p e^{4,74\epsilon}} \|\vec{u} - \vec{v}\| \right\} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \quad (10)$$

Para $\epsilon > 0,75$ e $Re = \frac{|\vec{u} - \vec{v}| \rho_f d_p}{\mu} < 70$,

$$\vec{m} = \left\{ \frac{18 \mu(1-\epsilon) \left[1 + (1-\epsilon)^{1/3} \right] e^{\frac{1-\epsilon}{0,6\epsilon}}}{\epsilon d_p^2} + 1,5(1-\epsilon)\epsilon^{9/5} \frac{\mu \rho_f^{1/5}}{d_p^6} \|\vec{u} - \vec{v}\|^{4/5} \right\} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \quad (11)$$

Para $\epsilon > 0,75$ e $Re > 70$,

$$\vec{m} = \left\{ \frac{44 \rho_f (1-\epsilon)}{d_p \cdot e^{4,74\epsilon}} |\vec{u} - \vec{v}| \right\} (\vec{u} - \vec{v}) \quad (12)$$

Nessas equações $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \vec{u} - \vec{v}$ e d_p é o diâmetro médio da partícula sólida.

Resultados Obtidos com o Modelo Uniforme

Foram utilizados na simulação dados experimentais da literatura obtidos por Shook & Masliyah [4] e também pelos autores deste trabalho [5], para escoamento de suspensões de chumbo, areia, quartzo e alumina, cujas características são colocadas na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1 - Características das partículas utilizadas

Elemento	Massa Específica (g/cm ³)	Diâmetro Médio (mm)
Chumbo	10,92	2,03
Areia	2,45	0,43
Quartzo	2,45	1,08
Alumina	4,00	0,44

O sistema de equações (5) a (8) foi resolvido pelo método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem. Nesse tipo de resolução são necessárias as condições iniciais, ou seja, condições à entrada do medidor para as variáveis u , v , ϵ e p . Esses valores foram calculados pela formulação proposta por Santana [6], já comprovada experimentalmente por Restini e Massarani [7]. Dessa maneira foram obtidos os perfis longitudinais para as velocidades locais do fluido e do sólido, a porosidade e a pressão. Um quadro típico de resultados é mostrado na Tabela 2.

A partir dos valores da pressão à entrada e à garganta do medidor, obtêm-se os resultados da queda de pressão $(\Delta P)_{sim}$, obtidos pela simulação. Esses resultados foram comparados com valores experimentais da queda de pressão, apresentando desvios aleatórios e com um valor médio e desvio padrão de 27% e 0,20, respectivamente, para 80 condições experimentais verificadas.

Tabela 2 - Simulação do Venturi vertical-suspensão de chumbo

Z (cm)	v (cm/s)	u (cm/s)	ϵ	$P \cdot 10^{-6}$ (bária)
0,000	192,94	264,26	0,9420	2,030
0,792	202,40	486,22	0,9401	2,024
1,584	312,37	310,82	0,9384	2,017
2,376	226,13	338,31	0,9368	2,008
3,160	240,93	368,87	0,9354	1,997
3,960	257,97	402,65	0,9342	1,983
4,752	227,41	439,64	0,9333	1,966
5,554	299,31	479,72	0,9326	1,945
6,336	323,66	522,54	0,9322	1,921
7,128	350,32	567,57	0,9319	1,893
7,920	379,05	614,04	0,9320	1,861

As Figuras 1 e 2 mostram perfis adimensionais de velocidades, u^* e v^* , obtidos com a simulação do Venturi vertical.

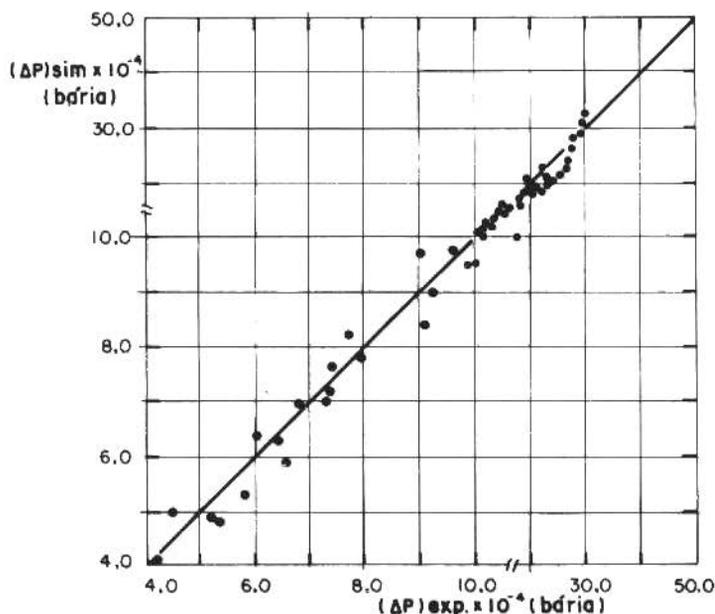


Figura 1. Comparação entre os valores calculados e experimentais para a queda de pressão no venturi horizontal

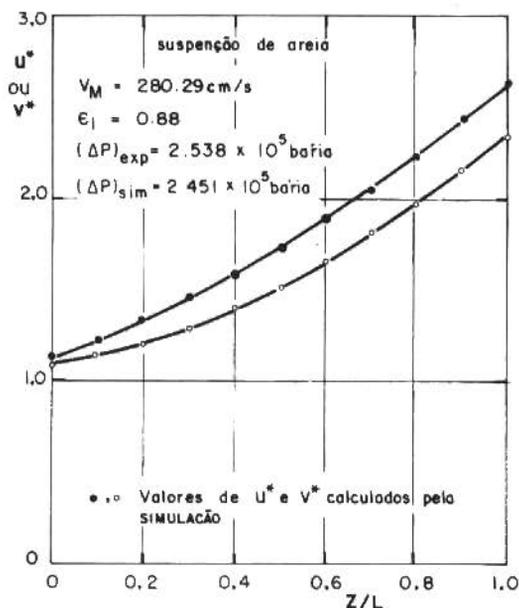


Figura 2. Perfis de velocidades no venturi vertical

Modelo Não Uniforme

Para o caso de um Venturi horizontal, não podemos considerar perfis uniformes em cada seção transversal, devido à influência do campo gravitacional.

Uma possibilidade de adaptação das equações diferenciais obtidas no modelo uniforme, consiste na utilização de valores médios a partir de perfis locais em cada seção. De acordo com essa linha de idéias, pode-se estabelecer:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{A} \int_A \epsilon \, dA \quad (13)$$

$$\bar{u} = \frac{W_f}{\rho_f A \bar{\epsilon}} \quad (14)$$

$$\bar{v} = \frac{W_s}{\rho_f A (1 - \bar{\epsilon})} \quad (15)$$

Necessita-se, portanto, calcular a média de uma distribuição de porosidades não uniforme na seção. Utilizando as distribuições

de porosidades e velocidades propostas por Gandhi [8], foram calculados numericamente os valores de $\bar{\epsilon}$, \bar{u} e \bar{v} . O mesmo sistema de equações diferenciais (5) a (8) foi resolvido, utilizando agora as propriedades médias descritas acima, obtendo-se os perfis longitudinais de $\bar{\epsilon}$, \bar{u} , \bar{v} e p .

Resultados Obtidos com o Modelo Não Uniforme

Utilizando-se a queda de pressão no Venturi como variável de comparação, foram verificados 63 pontos experimentais, obtendo-se um desvio médio de 13% e um desvio padrão de 0,11.

Nas Figuras 3 e 4 são apresentados alguns dos perfis adimensionais obtidos para o escoamento bifásico em um Venturi horizontal.

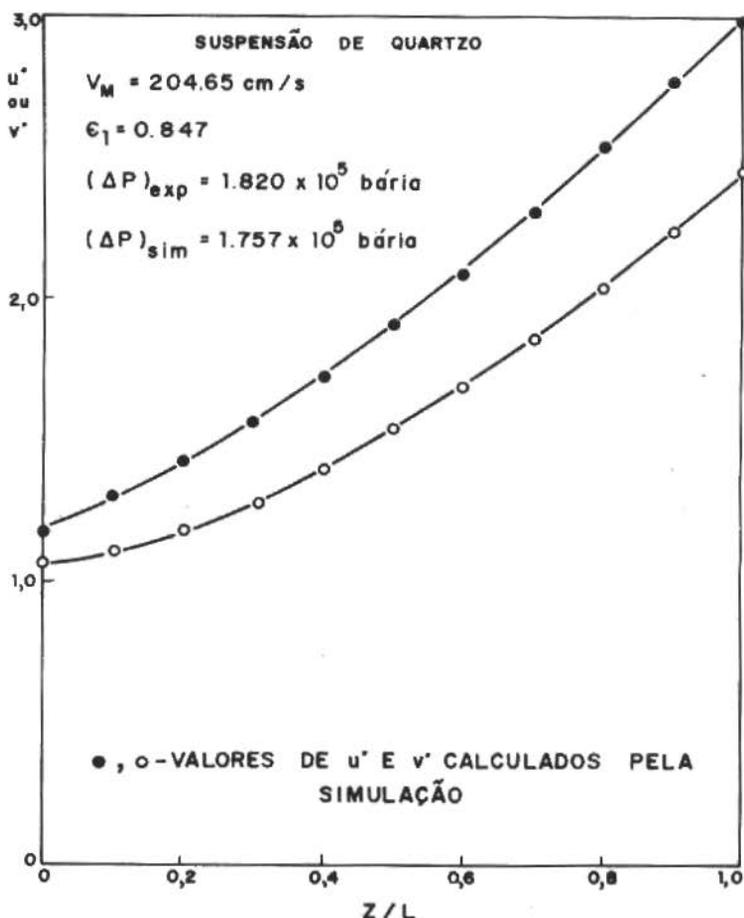


Figura 3. Perfis de velocidades no venturi horizontal

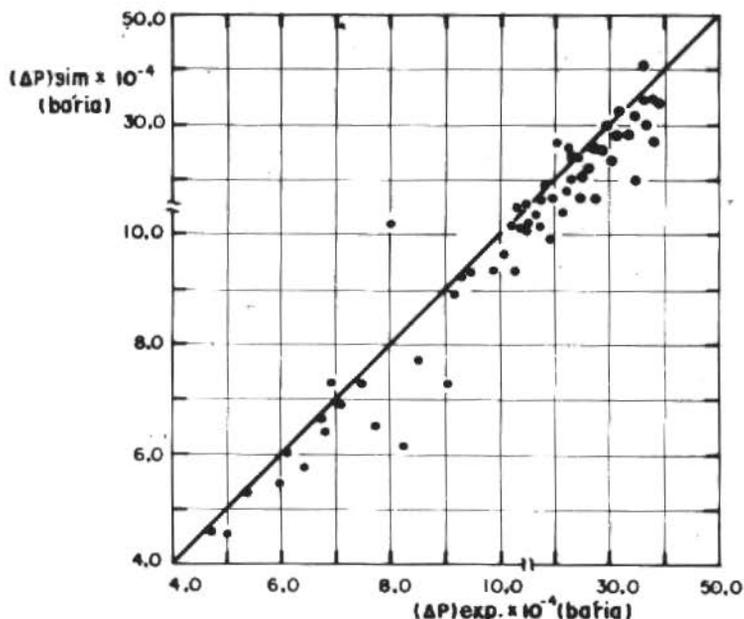


Figura 4. Comparação entre os valores calculados e experimentais para a queda de pressão no venturi vertical

CONCLUSÕES

Na verificação dos resultados obtidos com a formulação matemática, foram cobertas as faixas de concentrações volumétricas de 3 a 24% e números de Reynolds, $Re_{M1} = \frac{V_{M1} D_1 \rho_f}{\mu}$ de $6,0 \times 10^4$ a $2,0 \times 10^5$.

A comparação entre resultados obtidos com a simulação e dados experimentais foi feita através da queda de pressão no medidor, $(\Delta P)_M$.

Pelos desvios apresentados e pela complexidade do sistema, os resultados obtidos são satisfatórios, podendo as formulações ser utilizadas para obtenção dos perfis $u(z)$, $v(z)$, $\epsilon(z)$ e $P(z)$, sendo necessários apenas os valores das variáveis à entrada do medidor e propriedades físicas do fluido e da partícula.

REFERÊNCIAS

- [1] Telles, A.S. — "Fenômenos de dispersão em meios porosos", Anais do II ENEMP, v.1, Rio Claro, SP.
- [2] Santana, C.C.; Massarani, G. & Ismail, K.A.R. — "Modelo matemático e verificação experimental do transporte hidráulico horizontal". Revista Bra-

sileira de Tecnologia, v.11, 1980.

- [3] Massarani, G. & Santana, C.C. — "Força resistiva sólido-fluido em sistemas particulados de porosidade elevada". Revista Brasileira de Tecnologia, v.11, 1980.
- [4] Shook, C.A. & Masliyah, J.H. — "Flow of a slurry through a venturimeter". The Canadian Journal of Chemical Engineering, v.52, 1974.
- [5] Rocha, S.C.S. — "Escoamento sólido-fluido em seção variável: medidor venturi para misturas sólido-líquido", Tese de Mestrado, UNICAMP, 1983.
- [6] Santana, C.C. — "Transporte hidráulico de partículas sólidas", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1979.
- [7] Massarani, G. & Restini, C.V. — "Transporte vertical de partículas sólidas II: Análise experimental", I Congresso Brasileiro de Engenharia Química, São Paulo, 1976.
- [8] Gandhi, R.L. — "An analysis of hold up phenomena in slurry pipelines", Proc. Hydrotransport 4, B.H.R.A., 1976.

ANÁLISE DA TROCA DE CALOR POR RADIAÇÃO ENTRE UM ARRANJO SIMÉTRICO FORMADO POR "N" SUPERFÍCIES E O MEIO AMBIENTE

Rogério Martins Saldanha da Gama
Dept^o de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

SUMÁRIO

É feita uma análise da troca de energia radiante térmica difusa entre um arranjo simétrico formado por "N" superfícies cinzas isotérmicas planas e alongadas e o meio ambiente. Serão mostrados que o sistema de equações integrais que governa o fenômeno pode ser reduzido a uma equação integral de Fredholm de Segunda Espécie com kernel simétrico. São resolvidos alguns exemplos através da utilização de um princípio variacional.

SUMMARY

This work is an analysis of the diffuse radiant energy interchange between "N" elongated plane surfaces, disposed symmetrically, and the environment. It will be shown that the system of integral equations that governs the phenomena can be reduced to a Fredholm integral equation of second kind with symmetrical kernel. Some examples are solved by using a variational principle.

INTRODUÇÃO

A troca de calor por radiação entre superfícies que emitem e refletem energia difusamente é um fenômeno de transferência governado por sistemas de equações integrais. Quando conhecemos as distribuições de temperaturas sobre as superfícies envolvidas este sistema de equações é linear e pode ser representado em termos de

operadores lineares compactos auto-adjuntos.

Em particular se a troca de energia radiante se processa entre "N" superfícies reais, dispostas de tal forma que o efeito externo sobre cada uma seja o mesmo, temos que o sistema de equações integrais pode ser reduzido a uma única equação integral a qual possuirá kernel simétrico e contínuo.

Dentro da classe de problemas simétricos estudaremos aqueles onde temos "N" superfícies reais planas e alongadas (infinitas numa certa direção) as quais, quando prolongadas, formam polígonos regulares de "N" lados. Além das hipóteses até aqui feitas supomos também que as superfícies reais são cinzas, possuem todas a mesma temperatura T_w e a mesma emissividade ϵ_w .

Alguns arranjos típicos são apresentados na Figura 1. As linhas cheias representam as superfícies cinzas (reais) e as linhas tracejadas representam as aberturas (superfícies imaginárias) que serão tratadas como superfícies negras a uma temperatura efetiva de de corpo negro T_e .



Figura 1. Arranjos típicos

Para a determinação da troca de calor local sobre cada uma das "N" superfícies reais é necessária a solução da equação integral que representa o balanço de energia.

Esta solução em geral não pode ser obtida analiticamente e sendo assim é necessária a utilização de métodos numéricos para a obtenção de uma solução aproximada.

Em geral, na literatura, problemas desta natureza são resolvidos por diferenças finitas [8] ou por métodos variacionais onde são propostas soluções contínuas [2].

Apresentaremos um método simples e eficiente para a obtenção de soluções aproximadas das equações integrais que surgirão nos problemas aqui estudados. Este método consiste em se supor que a fun

ção incôgnita é formada por degraus, que serão determinados através da utilização de um princípio variacional.

ANÁLISE TEÓRICA

Basearemos nosso estudo em arranjos geométricos formados por "2N" superfícies, sendo "N" superfícies cinzas e "N" superfícies imaginárias, estas últimas tratadas como negras. Na Figura 1 temos situações típicas para $N = 3$, $N = 4$ e $N = 6$ onde as superfícies cinzas são representadas por linhas cheias e as aberturas para o exterior (superfícies negras fictícias) são representadas por linhas tracejadas.

Vamos supor que as superfícies emitem e refletem energia ra diante térmica difusamente, o que faz com que não se possa distinguir energia emitida de energia refletida. Desta forma torna-se conveniente trabalhar com a radiosidade, que é uma medida de toda a energia radiante que deixa uma superfície, num certo ponto, por unidade de tempo e de área. Representaremos a radiosidade no ponto \mathbf{r}_i sobre a superfície "i" por $B_i(\mathbf{r}_i)$.

Se o espaço compreendido entre as "2N" superfícies não participar do processo de transferência de energia temos que toda a energia que deixar a superfície "i" atingirá às "2N" superfícies, que compõem o arranjo.

Mais especificamente falando temos que a energia radiante incidente sobre a área dA_i da superfície "i" é dada por

$$dA_i H_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^{2N} \int_{A_j} B_j(\mathbf{s}_j) dA_j dF_{dA_j-dA_i} \quad (1)$$

onde $H_i(\mathbf{r}_i)$ é a energia incidente, por unidade de tempo e área, no ponto \mathbf{r}_i da superfície "i", $B_j(\mathbf{s}_j)$ é a radiosidade no ponto \mathbf{s}_j da superfície "j" e $dF_{dA_j-dA_i}$ é o fator de forma diferencial de dA_j para dA_i . Deve ser notado que $\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i$, para todo "i", sendo a letra "s" utilizada para as variáveis de integração.

O fator de forma diferencial é definido como

$$dF_{dA_j-dA_i} = \frac{\text{Energia radiante que deixa } dA_j \text{ e atinge } dA_i}{\text{Toda energia radiante que deixa } dA_j}$$

e, pela primeira relação de reciprocidade [1]

$$dF_{dA_j-dA_i} dA_j = dF_{dA_i-dA_j} dA_i \quad (2)$$

Assim concluímos que a energia incidente, por unidade de tempo e área, no ponto r_i é dada por

$$H_i(r_i) = \sum_{j=1}^{2N} \int_{A_j} B_j(s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad (3)$$

Voltando agora à definição de radiosidade podemos escrever que

$$B_i(r_i) = \rho_i H_i(r_i) + \epsilon_i \sigma T_i^4 \quad (4)$$

onde estamos supondo que a temperatura T_i , a reflectância ρ_i e a emissividade ϵ_i , para a superfície "i", são constantes. Combinando (3) com (4) temos o balanço de energia, em função das radiosidades locais, dado por

$$B_i(r_i) = \epsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i \sum_{j=1}^{2N} \int_{A_j} B_j(s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad i = 1, 2N \quad (5)$$

onde " σ " é a constante de Stefan-Boltzmann.

Uma vez que as temperaturas são conhecidas, o sistema (5) é um sistema linear de equações integrais o qual tem como incógnitas as funções $B_i(r_i)$ (ou $B_i(s_i)$), para "i" entre "1" e "2N" no caso mais geral.

Para as "N" superfícies cinzas temos que

$$T_i = T_w \quad 1 \leq i \leq N \quad (6)$$

$$\epsilon_i = 1 - \rho_i = \epsilon_w \quad 1 \leq i \leq N \quad (7)$$

e para as "N" superfícies negras fictícias

$$B_i(r_i) = \sigma T_e \quad N+1 \leq i \leq 2N \quad (8)$$

onde em (6), (7) e (8) T_w é a temperatura das superfícies cinzas, ϵ_w a emissividade e T_e a temperatura efetiva de corpo negro das superfícies imaginárias. T_w , ϵ_w e T_e são supostos constantes.

Assim, como a radiosidade é conhecida para as superfícies "i", com $N+1 \leq i \leq 2N$, o sistema de "2N" equações integrais pode ser reduzido para um sistema de "N" equações integrais onde as incógnitas serão exatamente as radiosidades locais sobre as "N" superfícies cinzas. Considerando (6), (7) e (8) escrevemos (5) como

$$B_i(\mathbf{r}_i) = \epsilon_w \sigma T_w^4 + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\mathbf{s}_j) dF_{dA_i-dA_j} + \\ + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=N+1}^{2N} \int_{A_j} \sigma T_e^4 dF_{dA_i-dA_j} ; \quad i = 1, N \quad (9)$$

Pela "conservação" do fator de forma num espaço fechado temos que

$$\sum_{j=1}^{2N} \int_{A_j} dF_{dA_i-dA_j} = 1 \quad \text{para todo } i ; \quad 1 \leq i \leq 2N \quad (10)$$

A equação (10) nos permite escrever (9) como

$$(B_i(\mathbf{r}_i) - \sigma T_e^4) = \epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4) + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} (B_j(\mathbf{s}_j) - \sigma T_e^4) dF_{dA_i-dA_j} ; \quad i=1, N \quad (11)$$

ou ainda, como ϵ_w , σ , T_w e T_e são constantes

$$\frac{B_i(\mathbf{r}_i) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} = 1 + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \frac{B_j(\mathbf{s}_j) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} dF_{dA_i-dA_j} ; \quad i=1, N \quad (12)$$

Uma vez que as superfícies são alongadas podemos escrever a radiosidade sobre cada superfície como função de uma variável escalar.

Vamos utilizar então as variáveis x_i no lugar de \mathbf{r}_i (e y_i no lugar de \mathbf{s}_i). Estas variáveis terão sua origem na interseção dos prolongamentos de cada duas superfícies consecutivas, como mostra a Figura 2.

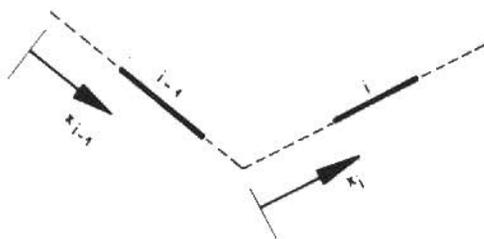


Figura 2. Variáveis " x_i " (e " y_i ")

O sistema de equações (12) passa a ser dado por

$$\frac{B_i(x_i) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} = 1 + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \frac{B_j(y_j) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} dF_{dA_i-dA_j} ; i=1, N \quad (13)$$

onde a integração sobre "A_j" é na verdade uma integração sobre apenas uma variável.

Estamos interessados em determinar as funções B_i(x_i) que satisfazem (13). Não é necessário no entanto resolver um sistema de equações integrais para isto. Uma vez que, pela simetria, cada superfície é sujeita ao mesmo efeito externo, a radiosidade local sobre cada superfície é também a mesma, ou seja

$$B_i(x_i) = B_i(y_i) = B_j(x_j) = B_j(y_j) , \text{ para todo } i \text{ e } j, \text{ se } x_i = x_j = y_i = y_j \quad (14)$$

o que nos permite utilizar a notação B_w(x_i) (ou B_w(y_i)) para a radiosidade sobre a superfície "i". Tomando então uma das equações que compõem (13) (a primeira por exemplo) escrevemos que

$$B_w^+(x_1) = 1 + (1 - \epsilon_w) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_w^+(y_j) dF_{dA_1-dA_j} \quad (15)$$

onde poderíamos ter escolhido, ao invés da superfície "1", qualquer outra como referência. Deve ser notado que qualquer superfície pode ser escolhida como a nº 1.

A função radiosidade adimensional B_w⁺ é dada por

$$B_w^+(x) = \frac{B_w(x) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} \quad (16)$$

Resolvendo a equação (15) temos a função B_w⁺, que é a mesma sobre todas as "N" superfícies cinzas. O conhecimento desta função nos permite determinar a troca de calor local, por unidade de tempo e área. Esta taxa líquida de troca de energia é exatamente a diferença entre a radiosidade e a energia incidente, por unidade de tempo e área, ou seja

$$q_i(x_i) = B_i(x_i) - H_i(x_i) \quad (17)$$

Considerando as hipóteses já feitas e as equações (3), (4), (7) e (14) temos o calor trocado localmente dado por

$$q_w(x) = \frac{\epsilon_w}{1 - \epsilon_w} (\sigma T_w^4 - B_w(x)) \quad (18)$$

Podemos definir também o calor trocado adimensional como

$$q_w^+(x) = \frac{q_w(x)}{\sigma(T_w^4 - T_e^4)} = \frac{\epsilon_w}{1 - \epsilon_w} (1 - \epsilon_w B_w^+(x)) \quad (19)$$

O calor total, por unidade de tempo, trocado por cada superfície é dado por

$$Q_w = \sigma(T_w^4 - T_e^4) \int_A q_w^+ dA \quad (20)$$

onde "A" é a área da superfície em questão. Deve ser notado que devido ao fato das superfícies serem alongadas se está em geral interessado no calor total trocado por unidade de comprimento.

O FATOR DE FORMA DIFERENCIAL $dF_{dA_1-dA_j}$

Pelo fato de estarmos considerando apenas superfícies alongadas podemos expressar o fator de forma diferencial $dF_{dA_1-dA_j}$ como

$$dF_{dA_1-dA_j} = K_j(x_1, y_j) dy_j ; \quad j = 1, N \quad (21)$$

onde a variável y_j aparecerá nas equações sempre como variável de integração.

Para duas superfícies alongadas, como as que são esquematizadas na Figura 3, o fator de forma diferencial é dado por [1,2].

$$dF_{dA_1-dA_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_j} (\text{sen}\theta(x_1, y_j)) dy_j \quad (22)$$

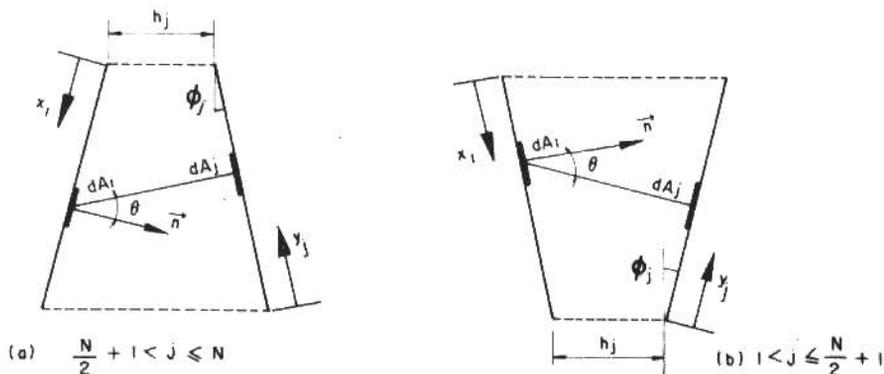


Figura 3. Esquema para o cálculo do fator de forma

Dois lados de um polígono regular inscrito num círculo de raio R podem ser vistos sempre como duas superfícies alongadas dispostas simetricamente. Assim sendo se o prolongamento das superfícies cinzas, no arranjo geométrico considerado, formar um polígono regular de " N " lados inscrito num círculo de raio R , o "espaçamento mínimo" h_j e o ângulo ϕ_j serão dados por

$$h_j = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{j-2}{N} \pi\right), \quad 1 < j \leq \frac{N}{2} + 1, \quad j \in \mathbb{N} \quad (23)$$

$$h_{N+2-j} = h_j, \quad 1 < j \leq N \quad (24)$$

$$\phi_j = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{N} - \frac{j}{N} \right| \quad (25)$$

Deve ser observado que $K_1(x_1, y_1)$ é nulo já que a energia que deixa uma superfície plana não pode atingi-la diretamente.

Depois de efetuados alguns cálculos podemos escrever as funções $K_j(x_1, y_j)$, utilizando (22), como [7]

$$K_j(x_1, y_j) = \frac{P_j(x_1, y_j)}{Q_j(x_1, y_j)}, \quad 1 < j \leq \frac{N}{2} + 1 \quad (26)$$

$$K_j(x_1, y_j) = \frac{R_j(x_1, y_j)}{S_j(x_1, y_j)}, \quad \frac{N}{2} + 1 < j \leq N \quad (27)$$

onde as funções P_j , Q_j , R_j e S_j são dadas por

$$P_j(x_1, y_j) = (h_j^3 + 4(L-x_1)y_j(L-x_1+y_j)\operatorname{sen}^3\phi_j + 2h_j((L-x_1)^2+y_j^2 + 4(L-x_1)y_j)\operatorname{sen}^2\phi_j + 3h_j^2(L-x_1+y_j)\operatorname{sen}\phi_j)\cos^2\phi_j \quad (28)$$

$$Q_j(x_1, y_j) = 2(h_j^2 + (L-x_1-y_j)^2 + 2h_j(L-x_1+y_j)\operatorname{sen}\phi_j + 4(L-x_1)y_j\operatorname{sen}^2\phi_j)^{3/2} \cdot ((L-x_1+y_j)\operatorname{sen}\phi_j + h_j) \quad (29)$$

$$R_j(x_1, y_j) = (h_j^3 + 4(L-y_j)x_1(L-y_j+x_1)\operatorname{sen}^3\phi_j + 2h_j((L-y_j)^2+x_1^2 + 4(L-y_j)x_1)\operatorname{sen}^2\phi_j + 3h_j^2(L-y_j+x_1)\operatorname{sen}\phi_j)\cos^2\phi_j \quad (30)$$

$$S_j(x_1, y_j) = 2(h_j^2 + (L-x_1-y_j)^2 + 2h_j(L-y_j+x_1)\text{sen}\phi_j + 4(L-y_j)x_1\text{sen}^2\phi_j)^{3/2} \cdot \\ \cdot ((L-y_j+x_1)\text{sen}\phi_j + h_j) \quad (31)$$

A equação (15) pode ser então reescrita como

$$B_W^+(x_1) = 1 + (1 - \epsilon_W) \sum_{j=2}^N \int_{\xi_1}^{\xi_2} B_W^+(y_j) K_j(x_1, y_j) dy_j \quad (32)$$

Uma vez que os " y_j " são variáveis de integração podemos escrever a equação acima como

$$B_W^+(x) = 1 + (1 - \epsilon_W) \sum_{j=2}^N \int_{\xi_1}^{\xi_2} B_W^+(y) K_j(x, y) dy \quad (33)$$

onde x pode representar a posição sobre qualquer das " N " superfícies cinzas consideradas, e $K_j(x, y)$ é dado por

$$K_j(x, y) = K_j(x_1, y_j) \quad (34)$$

Das equações (26), (27), (28), (29), (30) e (31) temos que

$$K_j(x, y) + K_{N+2-j}(x, y) = K_j(y, x) + K_{N+2-j}(y, x); \quad j=1, N \quad (35)$$

o que implica em

$$\sum_{j=2}^N K_j(x, y) = \sum_{j=2}^N K_j(y, x) \quad (36)$$

Uma vez que o somatório comuta com a integral temos que o kernel da equação (33) é simétrico e dado por

$$K(x, y) = K(y, x) = \sum_{j=2}^N K_j(x, y) \quad (37)$$

e a equação (33) é uma "Equação Integral de Fredholm de Segunda Espécie" com Kernel simétrico [3,4].

É importante observar que para os casos estudados h_j é sempre maior do que zero o que implica na continuidade do Kernel da equação (33).

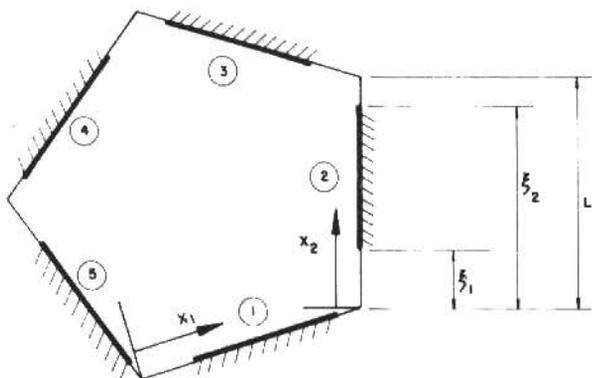


Figura 4. Um arranjo típico formado por 5 superfícies

UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA O PROBLEMA

A função que satisfaz a equação (33) é a que torna extremo o funcional π , onde

$$\pi = (1 - \epsilon_w) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_{j=2}^N K_j(x,y) B_w^+(x) B_w^+(y) dx dy + 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} B_w^+(x) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (B_w^+(x))^2 dx \quad (38)$$

O espaço de funções admissíveis é o $L^2[\xi_1, \xi_2]$.

Tomando a primeira variação do funcional π e levando em conta que o kernel da equação é simétrico ficamos com

$$\delta\pi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[(1 - \epsilon_w) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_{j=2}^N K_j(x,y) B_w^+(y) dy - B_w^+(x) + 1 \right] \delta B_w^+(x) dx = 0 \quad (39)$$

logo, como $\delta B_w^+(x)$ é arbitrário, recaímos em (33).

SOLUÇÃO FORMADA POR DEGRAUS

A forma mais simples de se obter uma solução para o tipo de problema estudado, utilizando o princípio variacional apresentado na seção anterior, é supor que a radiosidade adimensional $B_w^+(x)$ é uma função formada por "M" degraus de mesma largura [5,6].

$$B_w^+(x) = B_w^+ \quad \xi_1 + (i-1)\Delta \leq x < \xi_1 + i\Delta \quad i=1, M \quad (40)$$

onde

$$\Delta = \frac{\xi_2 - \xi_1}{M} \quad (41)$$

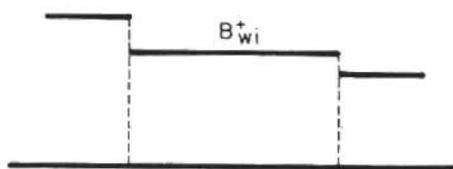


Figura 5. Esquema de solução

Para este tipo de função o extremo do funcional π é obtido por

$$\frac{\partial \pi}{\partial B_{W_i}^+} = 0 = \frac{\partial}{\partial B_{W_i}^+} \sum_{i=1}^M \left[2 \int_{\xi_{1+(i-1)\Delta}}^{\xi_{1+i\Delta}} B_{W_i}^+ dx - \int_{\xi_{1+(i-1)\Delta}}^{\xi_{1+i\Delta}} (B_{W_i}^+)^2 dx + \right. \\ \left. + (1 - \epsilon_w) \int_{\xi_{1+(i-1)\Delta}}^{\xi_{1+i\Delta}} \sum_{k=1}^M \int_{\xi_{1+(k-1)\Delta}}^{\xi_{1+k\Delta}} \sum_{j=2}^N K_j(x,y) B_{W_i}^+ B_{W_k}^+ dx dy \right] \quad (42)$$

ou seja

$$\Delta - \Delta B_{W_i}^+ + (1 - \epsilon_w) \sum_{k=1}^M B_{W_k}^+ \int_{\xi_{1+(i-1)\Delta}}^{\xi_{1+i\Delta}} \int_{\xi_{1+(k-1)\Delta}}^{\xi_{1+k\Delta}} \sum_{j=2}^N K_j(x,y) dx dy = 0 \quad i=1, M \quad (43)$$

que é um sistema algébrico de equações que tem os $B_{W_i}^+$'s como incógnitas.

Podemos escrever uma expressão para a integral dupla de cada parcela $K_j(x,y)$ do kernel utilizando o método de Hottel ou método das "cordas cruzadas" [1].

Definindo o vetor \vec{v}_{ij} como

$$\vec{v}_{ij} = \left[R \cos \frac{2(j-1)\pi}{N} - (\xi_{1+(i-1)\Delta}) \sin \frac{(2j-1)\pi}{N} \right] \vec{e}_x + \\ + \left[R \sin \frac{2(j-1)\pi}{N} - (\xi_{1+(i-1)\Delta}) \cos \frac{(2j-1)\pi}{N} \right] \vec{e}_y \quad (44)$$

onde $\vec{e}_x = (1,0)$ e $\vec{e}_y = (0,1)$ podemos escrever que

$$I_{ikj} = \int_{\xi_{1+(i-1)\Delta}}^{\xi_{1+i\Delta}} \int_{\xi_{1+(k-1)\Delta}}^{\xi_{1+k\Delta}} K_j(x,y) dx dy = \\ = \frac{1}{2} \left[\|\vec{v}_{i+1j} - \vec{v}_{k+1j}\| + \|\vec{v}_{ij} - \vec{v}_{kj}\| - \|\vec{v}_{ij} - \vec{v}_{k+1j}\| - \|\vec{v}_{i+1j} - \vec{v}_{kj}\| \right] \quad (45)$$

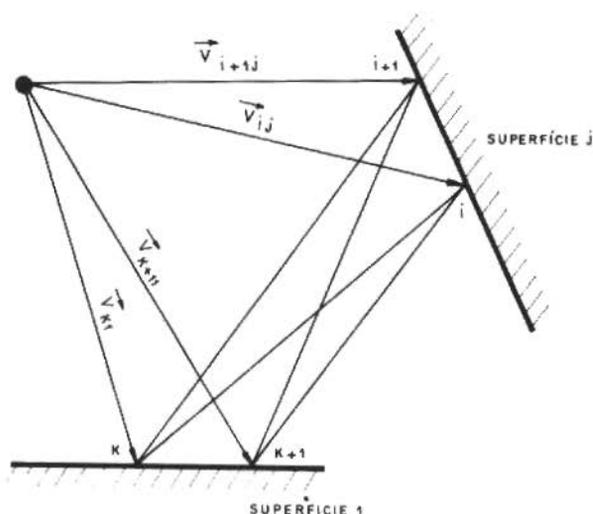


Figura 6. O método das cordas cruzadas

O índice "1" surge por ter sido escolhida a superfície "1" como referência. Na equação (44) "R" é o raio do círculo no qual o polígono que contém o arranjo é inscrito. Na equação (45) a notação "||" representa a norma do vetor.

Uma vez que a determinação das integrais duplas pode ser facilmente realizada através da equação (45) o problema está praticamente resolvido já que se resume na solução do sistema algébrico linear abaixo

$$\Delta - \Delta B_{w_i}^+ + (1 - \epsilon_w) \sum_{k=1}^M \sum_{j=2}^N I_{ikj} B_{w_k}^+ = 0; \quad i=1, M \quad (46)$$

onde "M" é o número de degraus que forma a solução $B_w^+(x)$ e "N" o número de superfícies cinzas. É interessante ressaltar que a matriz de coeficientes do sistema (46) é simétrica.

SOLUÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

Uma vez que o kernel da equação é uma função contínua no intervalo considerado este pode ser calculado ponto a ponto. Assim este problema pode ser resolvido por um método de diferenças finitas. O método é simples e consiste em se discretizar a integral que surge na equação (33) armando um sistema algébrico de equações onde as incógnitas são os valores da função radiossidade adimensional nos pontos correspondentes à discretização [7].

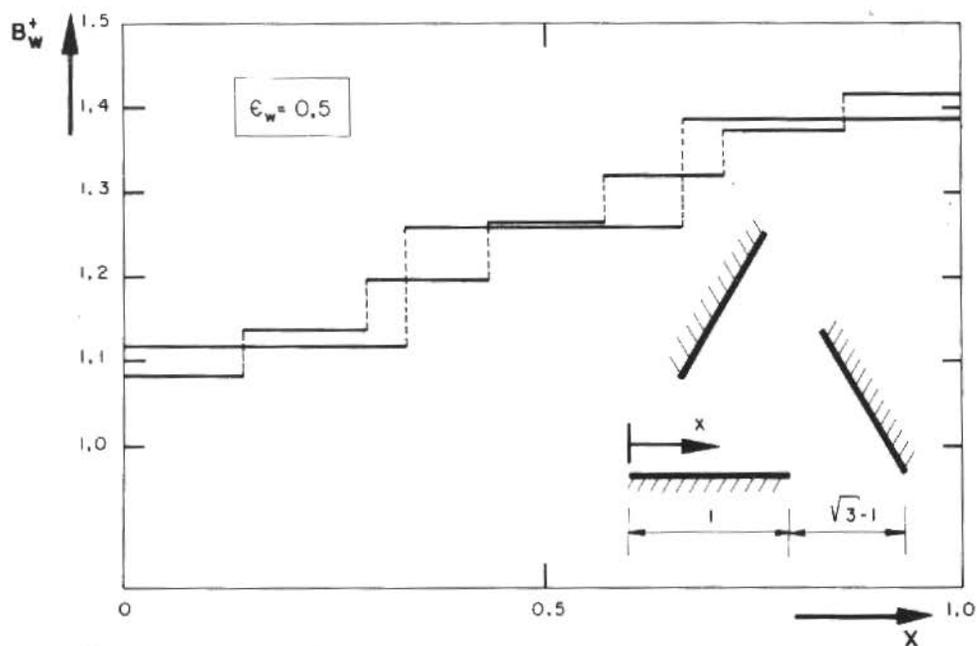


Figura 7. 3 superfícies, solução com 3 e 7 degraus - $\epsilon_w = 0,5$

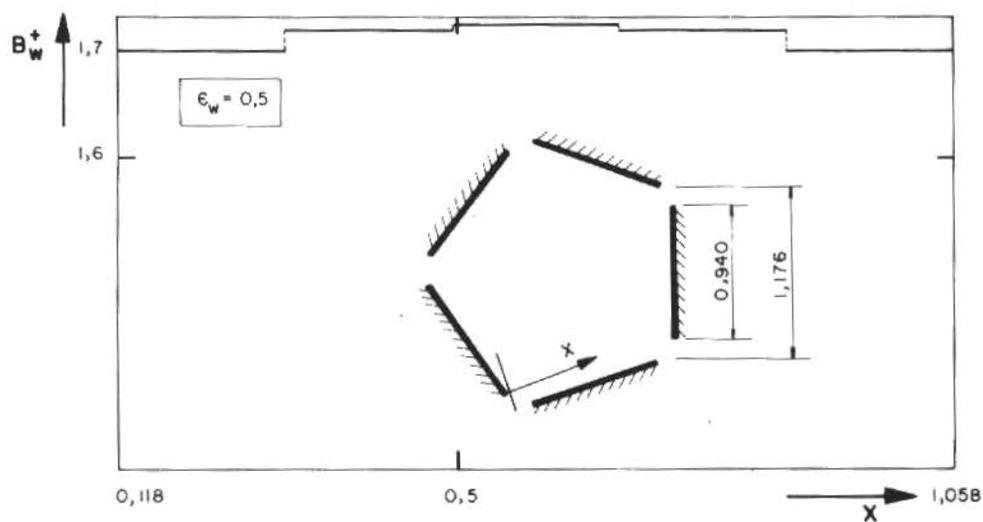
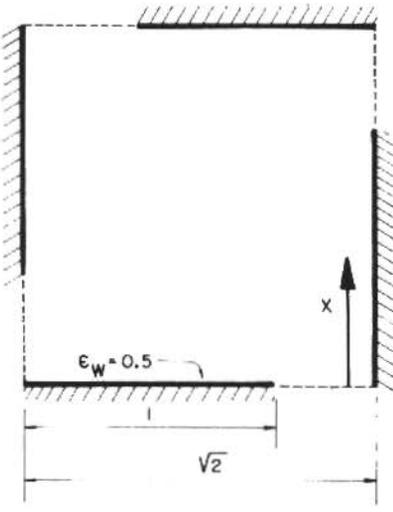


Figura 8. 5 superfícies, solução com 5 degraus - $\epsilon_w = 0,5$

TABELA 1. Resultados obtidos para um arranjo simétrico formado por quatro superfícies cinzas com $\epsilon_w = 0,5$

Nº DE DEGRAUS	$B_w^+(x)$	INTERVALO	
3	1,358	$0,00 < x < 0,33$	
	1,510	$0,33 < x < 0,67$	
	1,576	$0,67 < x < 1,00$	
4	1,331	$0,00 < x < 0,25$	
	1,472	$0,25 < x < 0,50$	
	1,541	$0,50 < x < 0,75$	
	1,584	$0,75 < x < 1,00$	
5	1,313	$0,00 < x < 0,20$	
	1,442	$0,20 < x < 0,40$	
	1,513	$0,40 < x < 0,60$	
	1,556	$0,60 < x < 0,80$	
6	1,588	$0,80 < x < 1,00$	
	1,301	$0,00 < x < 0,17$	
	1,417	$0,17 < x < 0,33$	
	1,489	$0,33 < x < 0,50$	
7	1,534	$0,50 < x < 0,67$	
	1,565	$0,67 < x < 0,83$	
	1,591	$0,83 < x < 1,00$	
	1,291	$0,00 < x < 0,14$	
	1,396	$0,14 < x < 0,29$	
	1,468	$0,29 < x < 0,43$	
	1,514	$0,43 < x < 0,57$	
	1,546	$0,57 < x < 0,71$	
	1,571	$0,71 < x < 0,86$	
	1,593	$0,86 < x < 1,00$	

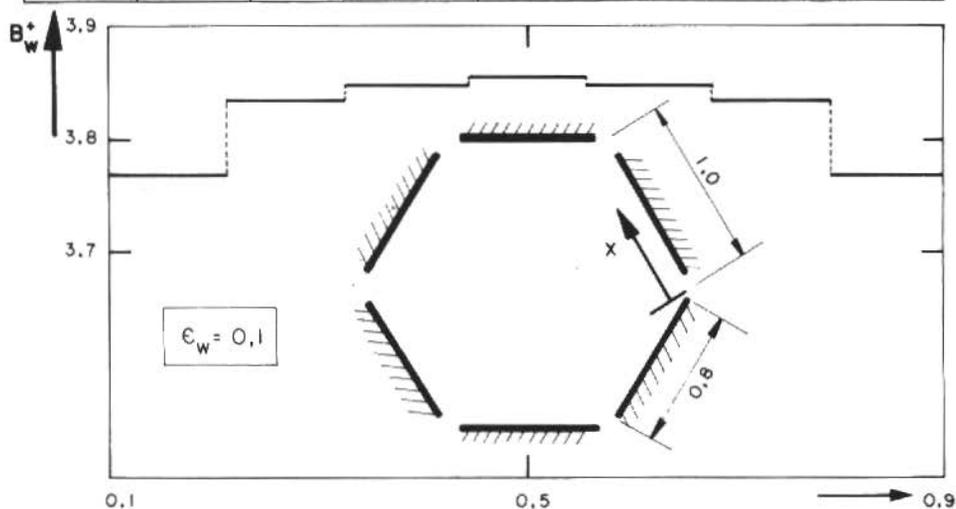


Figura 9. 6 superfícies, solução com 7 degraus - $\epsilon_w = 0,1$

RESULTADOS TÍPICOS

As Figuras 7, 8 e 9 e a Tabela 1. apresentam resultados obtidos para arranjos formados por 3, 4, 5 e 6 superfícies cuja posição relativa é mostrada em cada figura e na tabela.

Foram obtidos resultados supondo que a função radiosidade adimensional $B_W^+(x)$ era formada por 3, 4, 5, 6 e 7 degraus.

Resultados com um número maior de degraus e para outros arranjos podem ser facilmente obtidos com o método apresentado na seção 5.

COMENTÁRIOS FINAIS

O aumento do número de degraus faz com que a solução aproximada se aproxime mais da solução exata, a qual é sempre uma função contínua.

Os resultados foram apresentados em termos da radiosidade adimensional local. Para a determinação da troca de calor local adimensional utilizamos (19)

$$q_{W_i}^+ = \frac{\epsilon_W}{1 - \epsilon_W} (1 - \epsilon_W B_{W_i}^+) \quad 1 \leq i \leq M \quad (47)$$

o que mostra que, aproximando a radiosidade por degraus, temos o calor trocado local dado também por degraus.

A formulação apresentada neste trabalho pode ser estendida de forma a ser aplicada a arranjos simétricos formados por superfícies não cinzas e não isotérmicas. Para que esta extensão seja possível é necessário que possamos garantir que o que ocorre sobre uma superfície ocorrerá sobre todas as outras.

REFERÊNCIAS

- [1] Sparrow, E.M. and Cess, R.D. — Radiation heat transfer. Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California (1970).
- [2] Wiebelt, J.A. — Engineering radiation heat transfer. Holt, Rinehart & Winston, New York (1966).
- [3] Lovitt, W.V. — Linear integral equations. McGraw-Hill, New York (1954).
- [4] Hildebrand, F.B. — Methods of applied mathematics. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1952).
- [5] Gama, R.M.S. — Métodos numéricos na solução de problemas de radiação pura. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil (1981).

- [6] Gama, R.M.S. e Saboya, F.E.M. — A variational method for radiant emission from diffuse V-Groove cavities. VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol.D, p.307-317 (1981).
- [7] Gama, R.M.S. e Saboya, F.E.M. — Troca de energia radiante térmica entre duas superfícies planas alongadas dispostas simetricamente e o meio ambiente. VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol.A, p. 407-416 (1983).
- [8] Sparrow, E.M. and Lin, S.H. — Absortion of thermal radiation in V-Groove cavities. Int. J. Heat and Mass Transfer, 5, p.1111-1115 (1962).

CADASTRO NACIONAL DE DESENHO INDUSTRIAL

A indústria brasileira necessita de profissionais para criar e melhorar os nossos produtos. Conhecer estes profissionais é a tarefa proposta.

Se você é um desenhista industrial, atuante ou não, procure nas Entidades abaixo os formulários de cadastramento.



CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO
CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

Brasília:
Av. W/3 Norte - Quadra 511 - 19 andar
70750 - Brasília - DF

Agência Rio de Janeiro
Praia do Flamengo, 200 - 3º andar
22210 - Rio de Janeiro - RJ

Agência São Paulo
Av. 9 de julho, 4-400
01406 - São Paulo - SP

Agência Nordeste
Largo das Cinco Pontas, 321
50000 - Recife - PE

Apoio:

DETEC/Departamento de Tecnologia/
FIESP/CIESP (antigo NDI/CIESP)
Av. Paulista, 1313 - 13º andar
01311 - São Paulo - SP

APD/INS/RJ
Associação dos Profissionais de
Desenho Industrial de Nível Superior
Rua Bombina, 158
22251 - Rio de Janeiro - RJ

Escolas de Desenho Industrial

CNPq FAZ CADASTRO NACIONAL DE DESENHO INDUSTRIAL

O Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq, está promovendo o cadastramento nacional de profissionais de Desenho Industrial.

Esta iniciativa tem por objetivo fazer um levantamento da disponibilidade de recursos humanos da área, bem como a quantidade e tipo de projetos desenvolvidos nos últimos anos. O resultado deste cadastro, inédito no país, será amplamente divulgado por meio de uma publicação especial, distribuída aos principais sindicatos patronais, instituições de pesquisa e entidades públicas e privadas, ofertando à indústria nacional de recursos humanos capacitados a desenvolver e aprimorar nossos produtos.

Até 30 de março de 1984, os profissionais da área poderão encontrar formulários específicos nas faculdades de desenho industrial associação de classe, no DETEC/CIESP e no próprio CNPq (sede e agências regionais de Recife, São Paulo e Rio de Janeiro).

**CNPq**

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

NÚMERO

CADASTRO NACIONAL DE DESENHO INDUSTRIAL**1 - IDENTIFICAÇÃO (FAVOR PREENCHER A MÁQUINA OU LETRA DE FORMA)**

NOME COMPLETO			
NACIONALIDADE		NATURALIDADE	
		DATA NASCIMENTO	

2 - ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA

ENDEREÇO					
CIDADE	UF	CEP	DDD	TELEFONE	RAMAL

3 - TÍTULO ACADÊMICO DE MAIS ALTO NÍVEL

TÍTULO		
TÍTULO DA TESE		
INSTITUIÇÃO		PAÍS
		ANO CONCLUSÃO

4 - ATIVIDADES DOCENTES

INSTITUIÇÃO			
DISCIPLINA	NÍVEL	PERÍODO - MÊS - ANO	
	<input type="checkbox"/> 1 GRADUAÇÃO <input type="checkbox"/> 2 PÓS-GRADUAÇÃO	B	
DISCIPLINA	NÍVEL	PERÍODO - MÊS - ANO	
	<input type="checkbox"/> 1 GRADUAÇÃO <input type="checkbox"/> 2 PÓS-GRADUAÇÃO	B	

5 - ATIVIDADE PROFISSIONAL - (ATUAL)

EMPRESA			
DEPARTAMENTO			
CARGO OU FUNÇÃO	ADMISSÃO	DEDICAÇÃO	
		<input type="checkbox"/> 1 INTEGRAL <input type="checkbox"/> 2 PARCIAL	

6 - ESPECIALIDADES EM QUE PODE PRESTAR ASSESSORAMENTO TÉCNICO EM DESENHO INDUSTRIAL

CÓD. ÁREA	ESPECIALIDADE (ESPECIFICAR)
CÓD. ÁREA	ESPECIALIDADE (ESPECIFICAR)

CÓDIGOS DAS ÁREAS DE ESPECIALIDADE EM DESENHO INDUSTRIAL

- | | |
|--|--|
| 01 - ADAPTAÇÃO E TRANSFERÊNCIA DE TECNOLOGIA/ | 12 - EQUIPAMENTOS MÉDICO-HOSPITALARES |
| 02 - ASSISTÊNCIA TÉCNICA E GERENCIAL À PEQUENA E MÉDIA EMPRESA | 13 - ERGONOMIA |
| 03 - AVALIAÇÃO TÉCNICA E ECONÔMICA DE NOVOS PRODUTOS | 14 - FASHION DESIGN/VESTUÁRIO |
| 04 - BENS DE CAPITAL OU EQUIPAMENTOS PESADOS | 15 - FURNITURE DESIGN/MÓVEIS E OBJETOS DE DECORAÇÃO |
| 05 - BENS DE CONSUMO EM GERAL | 16 - GRAPHIC DESIGN/COMUNICAÇÃO VISUAL |
| 06 - CÁLCULO, DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO TÉCNICO PARA FABRICAÇÃO | 17 - INSTRUMENTOS E EQUIPAMENTOS LABORATORIAIS E DE PRECISÃO |
| 07 - DESIGN DE JÓIAS | 18 - MAQUETES E CONSTRUÇÕES DE MODELOS E PROTÓTIPOS |
| 08 - DESIGN TÊXTIL | 19 - RENDERING (TÉCNICAS DE VISUALIZAÇÃO) |
| 09 - ELETRÔNICA E MICROELETRÔNICA (PRODUTOS E PROCESSOS) | 20 - TECNOLOGIA APROPRIADA |
| 10 - EMBALAGENS | 21 - TEORIA E PESQUISA DO DESIGN |
| 11 - EQUIPAMENTOS AGRÍCOLAS | 22 - TRANSPORTE (VEÍCULOS E EQUIPAMENTOS) |
| | 23 - URBAN DESIGN/EQUIPAMENTOS DE MOBILIÁRIO |
| | 24 - DESENVOLVIMENTO DE PRODUTOS EM GERAL |
| | 25 - ÁREAS NÃO ESPECIFICADAS ANTERIORMENTE |

