

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

REVISTA

BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS

Vol. VI. nº 3, 1984



Associação Brasileira de Ciências Mecânicas
MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM

Luiz Bevilacqua (Presidente)
Tito Luiz da Silveira (Vice-Presidente)
Raúl A. Feijóo (1º Secretário)
Antonio MacDowell (2º Secretário)
Augusto Galeão (1º Tesoureiro)
Arno Blass (2º Tesoureiro)

**EDITOR
RESPONSÁVEL**

Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**

J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijer
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zampieri
Duraid Mahrus
E. O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guilherme Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jersy T. Sielawa
J. J. Espíndola
Liu Hsu
Mauricio N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Nestor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

**COMPOSIÇÃO
GRÁFICA**

Rosangela L. Almeida
Tamara P. Souza

Editorial 171

Ligações Flangeadas – Um Estudo Comparativo
entre Normas de Dimensionamento 173

Estevam Barbosa de Las Casas
Joaquim Fernando Paes de Barros Leães
José Augusto Ramos do Amaral
Nuclen – Nuclebrás Engenharia S/A

Aplicação do Método das Cordas Cruzadas
na Solução Local de Problemas Simétricos
de Radiação Pura 199

Rogério Martins Saldanha da Gama
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ

On the Complexity of Polynomial Evaluation
Schemes and the Acceleration of the
Convergence of Numerical Solutions of
Partial Differential Equations 211

H. Helman
(UFMG)
E. L. Ortiz
(ICCT)

Analysis of Forced Convection Along
Flat Plates with Variable Properties 229

Paulo Roberto de Souza Mendes
Francisco Eduardo Mourão Saboya
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ



J. DI GIORGIO EDITORES
TEL.: 261-5042 (PABX)

Atenção: Colar este lado em cima da pág. 236 da RevBrMec, Rio de Janeiro, V. VI, no 3, 1984 em face de ter havido omissão da figura 1 e respectivo texto.

Note: Please insert the text and figures that follow by covering p. 236 of the number 3, volume VI, 1984 publication of the RevBr Mec with this side of the paper. Figure number 1 and some text are missing in the published article.

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading the of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

PUC — Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.**

EDITORIAL

Prezados Colegas,

Estamos completando com este número 3, a série do volume VI de 1984 e por isso queremos agradecer a todos que colaboraram, durante este ano, para que concluíssemos ainda em tempo, o que havia sido programado, logo que iniciamos a nova fase com a J. DI GIORGIO EDITORES.

Está decidido que o volume VII será constituído de quatro números, que deverão ser publicados nos meses de Fevereiro, Maio, Agosto e Novembro, respectivamente, para o que necessitamos receber com certa urgência um número expressivo de contribuições.

Gostaríamos que a revista fosse composta de trabalhos de associados de todos os Estados do país, o que não vem acontecendo, havendo uma predominância até o presente momento de certas regiões.

Como o nosso Conselho Editorial é formado de 26 membros de todo o país esperamos que os mesmos se empenhem a fundo no sentido de que seja submetido maior número de trabalhos com o fim de proporcionar uma melhor distribuição.

LIGAÇÕES FLANGEADAS - UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE NORMAS DE DIMENSIONAMENTO

Estevam Barbosa de Las Casas
Joaquim Fernando Paes de Barros Leães
José Augusto Ramos do Amaral
Nuclen - Nuclebrás Engenharia S/A

SUMÁRIO

O objetivo deste artigo é descrever os métodos de cálculo de ligações flangeadas de acordo com as normas DIN2505, AD-Merkblaetter B7-B8, BS5500 e ASME - Seção VIII, e comparar os resultados obtidos para uma amostragem de 16 flanges. Descreve-se inicialmente as partes constituintes de uma ligação flangeada. A seguir, são apresentados os aspectos principais dos métodos de cálculo, e finalmente são analisados os resultados obtidos para cada norma.

SUMMARY

The objective of this paper is to describe the calculation methods for flanged connections according to the norms DIN2505, AD-Merkblaetter B7-B8, BS5500 and ASME - Section VIII, and compare the results obtained for a group of 16 flange specimens. At first the parts of a flanged connection are described. Then, the main characteristics of the calculation methods are presented and the obtained results are commented.

INTRODUÇÃO

Uma junta flangeada é composta de parafusos, vedação (gaxeta) e flanges. Estes elementos devem ser dimensionados de forma a possibilitar que a junta transmita os esforços que ocorrem durante a operação, mantendo a estanqueidade. Serão considerados neste ar

tigo juntas flangeadas tipo "de pescoço com transição" (welding neck), com gaxetas de face plana de amianto (It) ou metálicas em espiral com amianto (spiral wounded) e parafusos tipo "de máquina". Este tipo de junta é largamente utilizado em equipamentos de processo e tubulações que requeiram uma fácil desmontagem durante sua vida útil.

Pretende-se aqui demonstrar a interação entre os elementos e estudar os métodos de cálculo descritos nas normas DIN2505 (Vornorm e Entwurf) [1,2], AD-Merkblaetter [3], ASME - Seção VIII [4], e British Standard 5500 [5], através de uma análise da formulação utilizada e de uma comparação por meio de alguns exemplos. Apesar destes métodos haverem sido desenvolvidos há pelo menos 20 anos, são ainda hoje objeto de polêmica - (ainda não existe uma norma DIN definitiva sobre o assunto).

ELEMENTOS DE UMA JUNTA FLANGEADA

Flange

O flange tipo "welding neck" caracteriza-se por apresentar uma transição de espessura variável (pescoço) entre a casca cilíndrica a que está soldado (tubulação ou equipamento) e o anel.

Esta transição gradual de espessura minimiza as tensões de descontinuidade, aumentando a resistência do flange aos esforços oriundos do pré-aperto dos parafusos (condição de montagem) e da pressão interna e esforços externos (condição de operação).

O flange deve ser suficientemente rígido para manter o paralelismo entre suas faces quando sujeito a estes carregamentos. Desta forma, estará assegurado um bom contato entre flange e gaxeta, minimizando-se assim as possibilidades de vazamento.

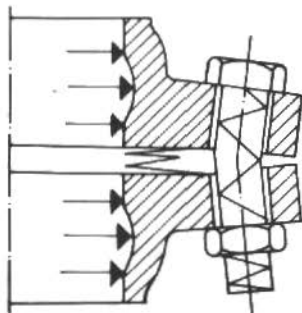


Figura 1. Modo de deformação de uma conexão flangeada

Parafuso

Os parafusos ou estojos da conexão devem ser submetidos a um prē-aperto para que se efetue o "assentamento" da gaxeta, ou seja, a compressão que permitirá a adaptação micrométrica entre as faces do flange e da gaxeta.

Além disso, os parafusos deverão ser dimensionados de forma a suportar os esforços devido à pressão interna e eventuais carregamentos externos (p.ex., forças e momentos provenientes de tubulação), nas condições de operação mantendo sempre uma compressão mínima sobre a gaxeta para que não ocorram vazamentos.

Deve-se dar especial atenção ao prē-tensionamento aplicado aos parafusos durante a montagem, pois as imprecisões inerentes ao processo utilizado no prē-aperto (manual, por meio de mecanismos pneumáticos ou hidráulicos) podem sobrecarregar os parafusos e a junta flangeada ou aplicar uma carga aquêm da mínima necessária ao assentamento da gaxeta. Também as condições de lubrificação e rugosidade superficial entre porca e o anel do flange e entre parafuso e porca devem ser observadas, e através destas características se definir os coeficientes de atrito a serem utilizados na determinação do prē-aperto dos parafusos. Este problema é analisado detalhadamente na referência [6]. Além disto, o tamanho da porca deve ser determinado em função do diâmetro do parafuso, para se evitar ruptura da rosca por cisalhamento.

Gaxeta

A gaxeta ou vedação é talvez o elemento mais importante de uma junta flangeada, pois de sua performance dependerá a estanqueidade da mesma. O material da gaxeta deve apresentar propriedades muito especiais, plastificando-se na superfície de contato com o flange para se amoldar às rugosidades de suas faces e evitar assim vazamentos. Ao mesmo tempo deve ser suficientemente elástico para não escoar quando submetido a altas pressões e flutuações de carga. Estas propriedades são obtidas em muitos casos através da conjugação de materiais elásticos e inelásticos (como aço e amianto). As gaxetas do tipo espiral com amianto são um exemplo característico desta solução para pressões internas elevadas. Para pressões menores, gaxetas planas de amianto (It) apresentam um comportamento satisfatório.

Outros fatores que devem ser levados em conta quando da seleção da gaxeta são: a possibilidade de ataque químico da mesma pe

lo fluido, a dureza do material da gaxeta em relação ao do flange (flanges emborrachados devem ter gaxetas especiais), e as condições de operação, como altas variações de temperatura e ocorrência de forças externas. Deve-se também certificar se a pressão aplicada à gaxeta não é excessiva para o material escolhido. A tendência atual é de se dar grande importância ao comportamento da gaxeta no cálculo de juntas flangeadas, e estudos estão sendo realizados na Alemanha (Ref.[7]), visando a atualização dos critérios de cálculo e a edição de uma norma DIN definitiva de projeto.

MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

Do ponto de vista mecânico-estrutural, o cálculo das juntas flangeadas se resume à solução de um cilindro com uma transição de espessura variável ou não e um anel de reforço. Como carregamentos tem-se a pressão interna e as forças de ligação que são descritas mais adiante.

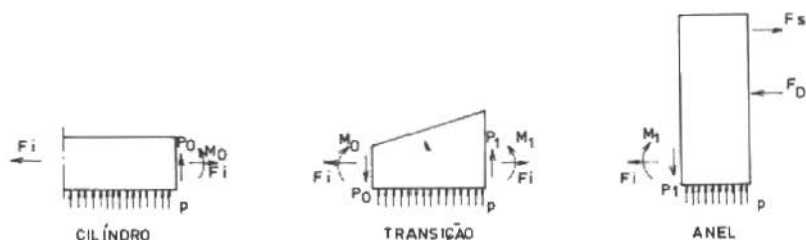


Figura 2. Esforços no flange

Nas normas mais empregadas pode-se distinguir dois métodos de cálculo: o método Taylor Forge, que originou as prescrições das normas BS e ASME e o método alemão da DIN, no qual se baseia também a AD. Em ambos os métodos o efeito da pressão interna é desprezado em presença das forças de ligação a menos da força F_i (Figura 2). Estas forças de ligação são representadas pelo seu momento resultante.

Método Taylor Forge

Este método baseia-se na solução "elástica" do problema. Ele envolve trabalhosos cálculos matemáticos que fogem aos limites deste artigo. Tentaremos descrever o modelo de cálculo e esclarecer suas hipóteses básicas. Informações mais detalhadas podem ser en-

contradas nas refs. [8] e [9], nas quais nos baseamos. As soluções dadas, tanto para a casca cilíndrica quanto para a transição, recaeem no problema análogo de viga sobre base elástica. O anel é calculado como uma placa anular submetida a um binário W (ver Figura 3). Este binário é obtido a partir do momento de ligação M . A força F_i é considerada no cálculo do momento de ligação, mas não é levada em conta no cálculo da transição e da casca cilíndrica. Não é considerada nenhuma redução de resistência devido aos furos dos parafusos. Tanto no cálculo do cilindro quanto da transição, a superfície média é tomada como sendo a face interna dos mesmos. Um elemento infinitamente rígido faz a ligação entre a transição e a placa que representa o anel. Como mais uma hipótese simplificadora, é considerado que o deslocamento radial na junção da transição com anel é nulo.

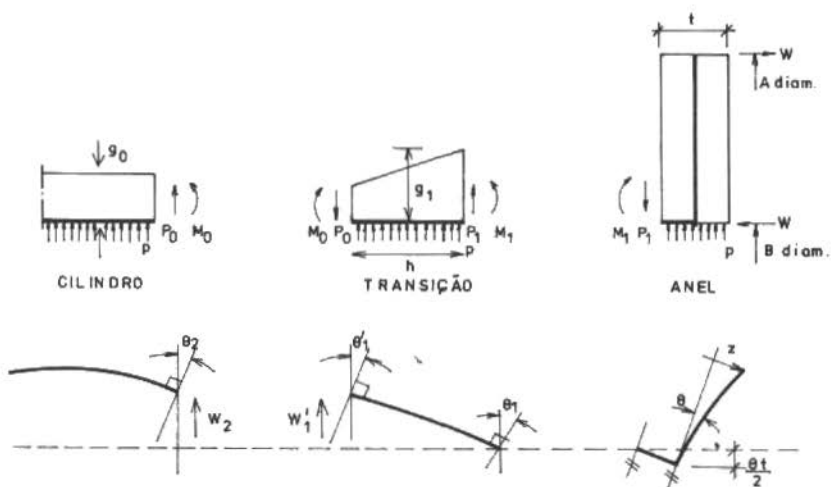


Figura 3. Modelo de cálculo - Taylor Forge

A solução da parte cilíndrica pode ser escrita em termos de duas constantes C_1 e C_2 a serem determinadas a partir das condições de contorno. Na transição a solução exata iria requerer o uso de funções de Bessel e envolveria 4 constantes de integração. Como, por hipótese, o deslocamento radial na ligação transição-anel é nulo, e usando uma solução aproximada baseada na minimização da energia total de deformação (Ref. [10]), é possível escrever a solução em termos das três condições de contorno desconhecidas P_0 , M_0 e M_1

e da força conhecida P_1 . Esta força é, por hipótese, a necessária para produzir um deslocamento radial nulo, sendo basicamente função da geometria e do momento M_1 . O anel é resolvido com um modelo de placa anular submetida ao binário W-W em que foi transformado o momento de ligação. Com as condições de contorno pode-se então calcular os momentos radiais e tangenciais na placa. No seu raio interno, eles atingem seus valores máximos e são funções basicamente da geometria, do binário W-W e da rotação θ_1 . É possível então iniciar-se as compatibilizações nas interseções. Na junção do cilindro com a transição, do lado da casca, tanto a flecha quanto as suas três derivadas são funções das constantes C_1 e C_2 ; na transição estas mesmas relações podem ser escritas em termos de P_0 , M_0 e M_1 . A constante C_2 é função de M_0 , portanto o sistema fica determinado, podendo o problema ser resolvido em termos de M_1 , da geometria e propriedades elásticas. Pode-se definir uma "rigidez" V proporcional a θ_1/M_1 em função da geometria e que foi plotada para diferentes valores adimensionais g_1/g_0 e $h/\sqrt{B \cdot g_0}$. Com estes mesmos parâmetros geométricos é definida uma função F proporcional a P_1/M_1 . Na junção da transição com o anel, devido ao elemento infinitamente rígido de conexão, o momento radial no anel pode ser escrito como:

$$M_{r1} = M_1 - P_1 \cdot \frac{t}{2} \quad (1)$$

Com esta equação e o coeficiente F , a rotação na placa pode ser escrita em termos de M_1 , W e dos coeficientes F e K (K - relação entre os raios interno e externo no anel). Compatibilizando as rotações e sabendo que $\theta_1 = VM_1$, obtém-se o valor de M_1 . Novamente este cálculo é facilitado empregando-se outras funções auxiliares T e U , dependentes de K . As equações continuam de difícil manuseio e uma nova grandeza auxiliar X função de T, U, F e V permite maiores simplificações. Assim, a tensão na junção da transição com o anel pode ser calculada por:

$$f_h = \frac{M \cdot X}{B \cdot g_1^2} \quad (2)$$

No entanto, algumas vezes a máxima tensão longitudinal não ocorre na ligação da transição com o anel, mas sim na ligação daquela com a casca cilíndrica. Para corrigir esta distorção é intro

duzido um fator corretivo f' (ver Ref.[14], pg.166):

$$f_h = f' \cdot \frac{M \cdot X}{B \cdot g_1^2} \quad (3)$$

A máxima tensão radial ocorre na face interna do anel. Com os valores de M_1 e P_1 , ela pode ser calculada pela fórmula:

$$f_r = \frac{X \cdot M}{B \cdot t^2} \left[1 + 1,33 \cdot F \cdot \frac{t/g_0}{\sqrt{B/g_0}} \right] \quad (4)$$

Da mesma maneira a tensão tangencial \bar{e} obtida utilizando-se duas funções dependentes da geometria do anel, Y e Z :

$$f_t = \frac{YM}{t^2} - Z f_r \quad (5)$$

Na formulação do ASME é empregada uma nova função $L=X^{-1}$ que permite maiores simplificações nas equações das tensões, as quais, para flanges de pescoço, resumimos abaixo:

$$f_h = \frac{f' \cdot M}{L \cdot g_1^2 \cdot B} \quad (6)$$

$$f_r = \frac{(4/3 \cdot t \cdot e + 1)M}{L \cdot t^2 \cdot B} \quad (7)$$

$$f_t = \frac{Y \cdot M}{t^2 \cdot B} - Z f_r \quad (8)$$

Assim, tem-se as tensões no ponto mostrado na Figura 4.

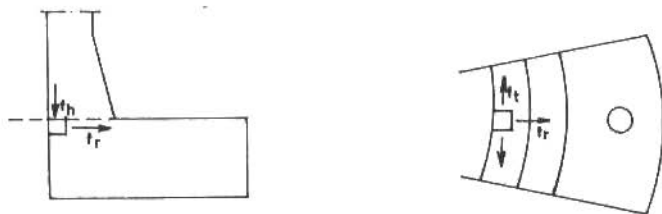


Figura 4. Tensões na ligação anel-transição.

No método Taylor-Forge admite-se certa plastificação, sendo preferível que esta ocorra na transição e não no anel. Assim a máxima tensão longitudinal é limitada a 1,5 da tensão admissível (isto é, a relação entre o módulo resistente plástico e o elástico). Como temos um estado tri-axial de tensões na transição, devemos verificar se esta margem adicional de tensão não causará uma redistribuição de esforços de maneira a levar o anel à plastificação. Um novo limite é introduzido, aparentemente inspirado no critério de Tresca, restringindo a média entre as tensões longitudinais e radiais (ou tangenciais) (ver Figura 5).

$$f_h \leq 1,5 f_y \quad (9.a)$$

$$f_t \text{ e } f_r \leq f_y \quad (9.b)$$

$$f_h + f_t \leq f_y \quad (9.c)$$

$$f_h + f_r \leq f_y \quad (9.d)$$

onde f_y é a tensão admissível do material segundo a Ref. [4].

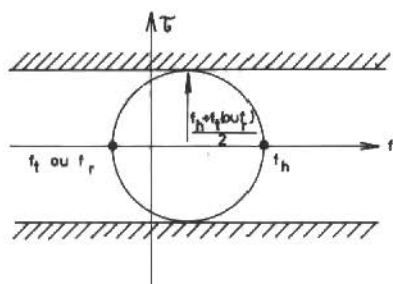


Figura 5. Tensões admissíveis

Aparentemente, pois nem sempre a máxima tensão longitudinal ocorrerá na ligação transição e anel, além disso o limite a ser comparado seria $f_y/2$, transformando esta verificação mais num preceito de ordem prática que teórica.

Além disso, no trabalho de Taylor Forge é sugerida uma fórmula empírica para controlar o espaçamento dos parafusos. Este dispositivo é incorporado pelo BS, mas não pelo ASME. Ele se resume basicamente em aumentar o valor de M por um fator corretivo (F.C.) dado pela fórmula:

$$F.C. = \sqrt{\frac{\text{espaçamento dos parafusos}}{2 d t}} \quad (10)$$

Método Alemão

O método alemão baseia-se no "teorema do limite inferior" da teoria da plasticidade. Segundo ele, qualquer estado de tensões estatisticamente admissível e que não viole as condições de plastificação, conduz a uma carga menor ou igual à carga última. Será considerado inicialmente o caso de flanges sem transição, e desenvolve-se depois as fórmulas para o caso com transição. Temos então o cilindro com anel enrijecedor mostrado na Figura 6, submetido a um momento tangencial \underline{m} e a uma força anular distribuída \underline{p} . É definida uma força P_i e um momento M iguais à integral da força distribuída p e do momento distribuído m , respectivamente.

$$P_i = \pi (d_i + S) \times p \quad (11)$$

$$M = \pi \frac{(d_i + d_a)}{2} \times m \quad (12)$$

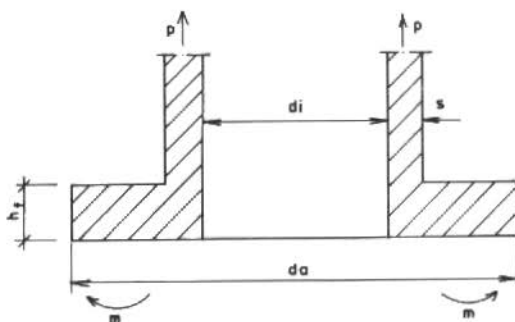


Figura 6. Modelo de cálculo - método alemão

O colapso é caracterizado pela formação de uma charneira plástica na conexão do anel com o cilindro, bem como pela formação de rótulas plásticas no anel. O momento resistente do flange é, pois, a soma algébrica da capacidade resistente da casca cilíndrica e do anel de reforço. Inicialmente analisar-se-á a ligação cilindro-anel. O diagrama de tensões ao longo da espessura do cilindro é indicado na Figura 7. Um núcleo S_1 da espessura total é responsável

pela resistência à força anular distribuída p . O restante da espessura resistirá ao momento distribuído. Novamente integrando, chega-se à expressão do momento resistente do cilindro M_{cp} , indicado na figura.

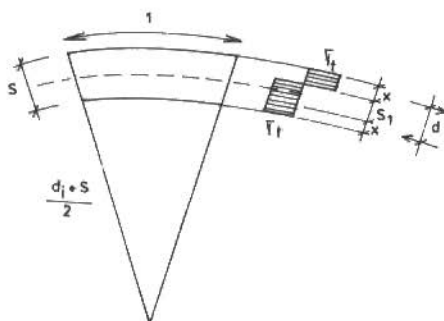


Figura 7. Ligação casca cilíndrica-anel

$$S_1 = \frac{p}{\sigma_f} = \frac{P}{\pi(di + S)\sigma_f} \quad (13)$$

$$x = \frac{S - S_1}{2} \quad (14)$$

$$d = S_1 + x = (S + S_1)/2 \quad (15)$$

$$m_{cp} = x \cdot d \cdot \sigma_f = \frac{S^2 - S_1^2}{4} \sigma_f \quad (16)$$

$$M_{cp} = \frac{\pi \sigma_f}{4} \{(S^2 - S_1^2)(di + S)\} \quad (17)$$

onde σ_f = tensão admissível do material, segundo a Ref. [1].

O momento distribuído m_{ap} do anel gera, devido a sua antimetria, nas diversas seções do mesmo, momentos fletores iguais a $m_{ap} \times R$. Igualando-se este momento fletor ao momento resistente plástico e, novamente integrando, chega-se a expressão do momento M_{ap} .

$$b = \frac{da - di - 2d1'}{2} \quad (18)$$

$$m_{ap} \cdot R = \frac{b \cdot h_f^2}{4} \sigma_f \quad (19)$$

$$M_{ap} = 2 \pi R \cdot m_{ap} = 2 \pi \frac{b \cdot h_f^2}{4} \sigma_f \quad (20)$$

$$M_{ap} = \frac{\pi \sigma_f}{4} ((da - di - 2d1') h_f^2) \quad (21)$$

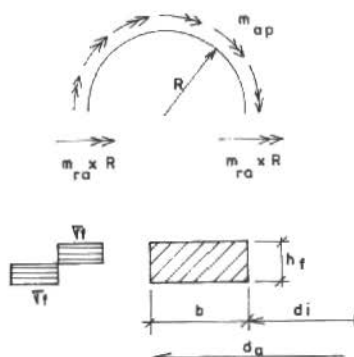


Figura 8. Momento resistente do anel

A largura do anel considerada é reduzida de um valor $d1'$, calculado a partir do diâmetro dos furos dos parafusos. O momento total resistente é dado pela soma das duas parcelas. É definido então um módulo resistente.

$$W = \frac{M}{\sigma_f} = \frac{\pi}{4} ((da - di - 2d1') h_f^2 + (S^2 - S_1^2)(di + S)) \quad (22)$$

Nos flanges sem transição é introduzido um fator 0,9 considerando o fenômeno de concentração de tensões. No caso de flanges com transição, o que se altera é a parcela devida à resistência do anel. É considerado como anel o enrijecedor e a transição (Fig.9).

Quando o enrijecedor tem uma largura muito grande seu comportamento se aproxima mais de uma placa anular que de um anel. Por isso a seção CC da Figura 10 deve ser verificada.

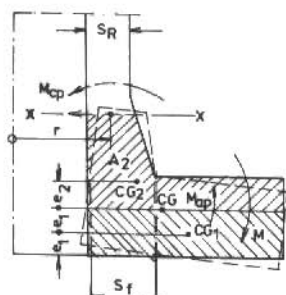


Figura 9. Momento resistente do anel incluindo a transição

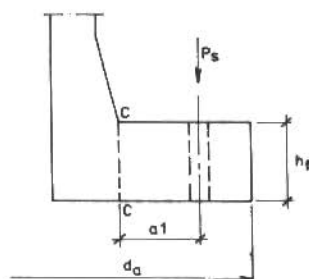


Figura 10. Comportamento como placa anular

$$W_{CC} = \frac{\pi}{4} h_f^2 (d_a - 2d_i') \quad (23)$$

$$M = P_s \cdot a_1 \quad (24)$$

$$M = \sigma_f \cdot W_{CC} \quad (25)$$

Os esforços transversais nas ligações cilindro-transição e transição-anel têm pequena influência na resistência em comparação com o momento fletor, sendo por isso desprezados. No entanto tem como efeito também uma redução no momento que age sobre o anel. Isto é desprezado até diâmetros nominais de 1000mm. Para diâmetros maiores esta redução pode ser levada em conta através das fórmulas dadas na Figura 11 (fórmulas (26) e (27)).

A DIN 2505 é formulada de tal maneira que, uma vez conhecida a geometria (W) e o momento atuante (M), as fórmulas nos fornecem qual deveria ser a tensão de escoamento que levaria à formação do mecanismo de colapso.

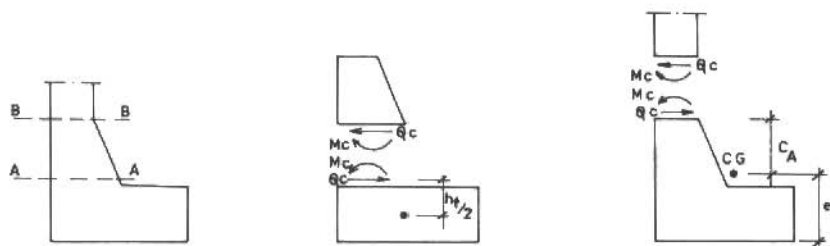


Figura 11. Influência dos esforços transversais

$$W_{AA} = 1,2 \frac{\pi}{4} [(da - di - 2dl')h_f^2 + 0,8(di + S_f)(S_f^2 - S_1^2) + 0,1S_f(d + S_f)h_f] \quad (26)$$

$$W_{BB} = 1,2 \cdot \pi \cdot [(da - di - 2dl')e^2 + 0,2(di + S)(S^2 - S_1^2) + 0,05S(d + S)C_A] \quad (27)$$

A AD-B8 é formulada de outra maneira. A partir de simplificações das fórmulas da DIN, é calculada a espessura do anel para resistir ao momento de ligação. Para isso é desprezado o efeito da força P_1 e sua espessura necessária S_1 , efeito este quase sempre muito pequeno.

Não são verificadas as tensões na seção CC. Por isso é restringida a espessura S_f a $h_f/3$. Suas fórmulas são se aplicam a diâmetros de até 3600mm.

Como o método alemão se baseia no cálculo plástico da resistência do flange, ele permite um melhor aproveitamento das características dos materiais e da sua geometria. Com isso obtêm-se flanges mais flexíveis dos que os dimensionados pelo método Taylor Forge. Na Ref. [11] menciona-se trabalho de Bühner no qual teriam sido comparados os métodos do código ASME e outros igualmente baseados na teoria da elasticidade com a DIN, tendo chegado com os primeiros a margens de segurança maiores que dois em relação aos resultados pela DIN2505.

No método Taylor Forge não é permitida a plastificação local na transição. Isto por entender que o anel, estando em contato com a gaxeta, influirá diretamente na estanqueidade da junta. Portanto, deformações exageradas do anel devem ser evitadas. Este procedimento é bem característico de métodos baseados no conceito das tensões admissíveis. Nestes, procura-se satisfazer concomitantemente a resistência e a funcionabilidade da estrutura, estabelecen

do-se tensões admissíveis que devem ser atendidas. Já o método alemão, se baseia no conceito de estado limite último de resistência do flange. Constitui no entanto uma deficiência deste método, não existir nenhuma limitação quanto à condição de serviço. Neste sentido foi sugerida na AD-B8 de fevereiro/1977 uma limitação às rotações do flange. Igual prescrição foi também adotada na proposta de revisão da norma DIN de novembro/1972, com a vantagem de apresentar uma fórmula para esta avaliação, limitada a 10°.

No entanto, de nada adianta comparar-se os métodos de cálculo sem se estudar as forças de ligação, definidas de forma diferente por cada um deles.

Forças de Ligação

Podemos resumir as forças de ligação em conexões flangeadas nas apresentadas na Figura 12. Por comodidade, adotar-se-á a nomenclatura alemã para a definição destas forças:

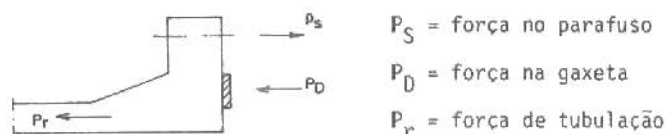


Figura 12. Forças de ligação

Por força de tubulação entende-se a força P_i devida à pressão interna mais as forças devidas ao sistema — forças externas P_{r2} . Aqui serão abordados os casos em que as forças externas podem ser desprezadas e portanto:

$$P_r = P_i \quad (28)$$

Basicamente temos a seguinte equação de equilíbrio a ser satisfeita na conexão:

$$P_S = P_D + P_r \quad (29)$$

Nas condições iniciais de montagem (que serão indicadas pelo Índice 0), a força de tubulação é nula, e portanto tem-se:

$$P_{S0} = P_{DV} \quad (30)$$

A força P_{DY} da gaxeta é definida como a prē-compressão necessária nesta para que durante as condições de serviço seja garantida a vedação. Para gaxetas não metálicas a força P_{DY} pode ser muito maior que a força P_{SB} de operação. Nestes casos, as normas alemãs permitem a redução da força de prē-compressão em função de P_{DY} , P_{SB} e do fluido sobre pressão:

$$P'_{DV} = f(P_{DY}, P_{SB}, \text{meio}) \quad (31)$$

Nas condições de serviço a introdução da força de tubulação P_r , alterará o equilíbrio de forças. A determinação de cada uma delas no entanto, sō é possível através de cálculos hiperestáticos, visto que o sistema é indeterminado (duas incōgnitas: P_{SB} e P_{DB} , e uma ũnica equação):

$$P_{SB} = P_{DB} + P_r \quad (32)$$

Para melhor compreensō do comportamento de um flange, imagine-se um exemplo mais simples em que nō exista a gaxeta. Imagine-se tambēem que a força de tubulaçō seja concêntrica com a força do parafuso que por sua vez tem sua linha de açō coincidindo com as forças de compressō entre as partes, Figura 13a.

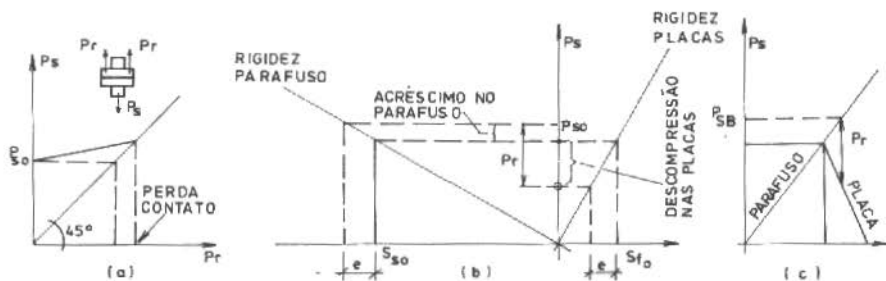


Figura 13. Diagrama de forças - conexō concêntrica

Na Figura 13b é apresentado um diagrama em que no eixo vertical é representada a força no parafuso; no eixo horizontal, em seu quadrante à direita, a deformação das placas unidas e à esquerda, a deformação no parafuso. A rigidez das placas é muito maior que a dos parafusos, justificando-se assim a diferença de inclina-

ção. Na condição de montagem a força de pré-aperto causa um alongamento no parafuso e, ao mesmo tempo, um encurtamento das placas devido à compressão. Ao aplicar-se a força externa P_r , ela causará um alongamento adicional no parafuso, bem como um alívio no contato entre as placas. Se imaginar-se que esta força não é suficiente para descolar as placas, deveremos compatibilizar as deformações do parafuso e flange. Como mostra a mesma Figura 13b, a força externa não é toda transmitida ao parafuso, sendo parte perdida da decompressão dos flanges. Apenas quando da perda do contato é que toda a força externa é transmitida ao parafuso.

Na Figura 13c é apresentado noutra forma o mesmo diagrama.

Considerando-se novamente uma conexão flangeada, o problema se complica pela introdução da gaxeta e das excentricidades nas forças. Mesmo assim um diagrama similar permite uma melhor compreensão do comportamento do flange. Representa-se agora por uma só reta, a força no parafuso x as deformações do flange e parafuso. Além disso, com inclinação inversa, é apresentada a reta força x de formação para a gaxeta. Nas condições de montagem as forças na gaxeta e no parafuso são iguais em módulo.

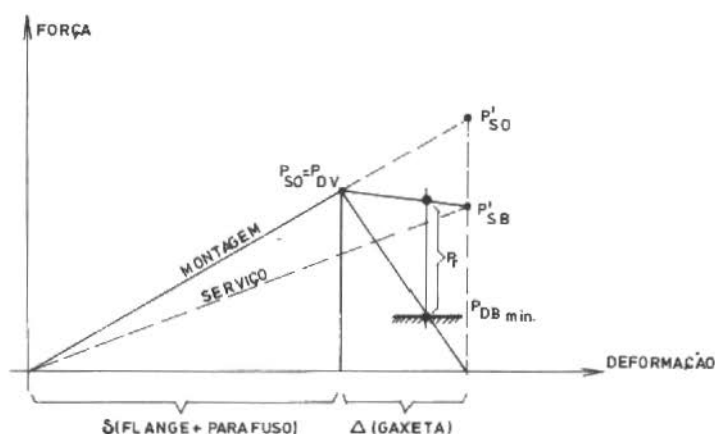


Figura 14. Diagrama de deformação - conexão flangeada

Quando da aplicação da força devida à pressão interna P_r , há uma mudança da inclinação na reta força x deformação do flange/parafuso, pois aumenta-se o momento devido ao maior braço de alavanca. Há, portanto, perda de rigidez do flange. A introdução deste esforço não significa, necessariamente, que a força no parafuso vá aumentar como no caso anteriormente apresentado. A compressão na gaxeta e a flexão no flange podem ser mais pronunciadas, havendo, às vezes, alívio dos parafusos quando em serviço.

A força na gaxeta durante o serviço deve ser tal que esta esteja suficientemente deformada para garantir a selagem. Este valor, " $P_{DB\min}$ ", bem como P_{DV} são dados experimentais e bastante polêmicos.

Viu-se até aqui como se comporta a junta quando da introdução dos esforços P_r . Há ainda a influência da temperatura e deformação lenta da gaxeta a alterar este comportamento.

Na DIN2505 são apresentadas fórmulas que permitem o cálculo da força no parafuso devida à pressão interna e à temperatura, a partir dos valores iniciais de montagem. Estas fórmulas são baseadas no comportamento elástico da junta mas, segundo [11], os resultados são satisfatórios. No entanto, este cálculo só pode ser realizado a partir do conhecimento da geometria, não se constituindo num método de dimensionamento, mas sim de verificação.

Só com o emprego de um diagrama força x deformação é possível analisar-se completamente o comportamento de uma ligação flangeada. Esta análise, no entanto, não é propícia ao projetista, para quem é mais conveniente tratar de maneira estanque a avaliação das forças e o dimensionamento do flange. Assim é feito na AD, onde a seção B7 calcula as forças no flange e dimensiona os parafusos e a seção B8 dimensiona o flange.

Tal procedimento só é possível quando se reduz a influência dos elementos da ligação sobre o comportamento da junta. Na medida que se refina o cálculo estrutural do flange torna-se necessário o melhor conhecimento das forças de ligação. Esta é a diferença básica entre o método Taylor Forge e o método germânico. Estudos de Happek e Griesser, ref.[11], relatam problemas com flanges de diâmetros maiores de 1000mm. Estes flanges teriam sido calculados corretamente pelas forças da DIN2505 e, no entanto, não era possível aplicar-se a pressão de teste e, em alguns, nem mesmo a deserviço. Ao se verificar o valor das forças calculado a partir do dia

grama força x deformação, a magnitude das forças obtidas torna clara a razão da falência da conexão. O mesmo tema é abordado a partir dos resultados obtidos no método Taylor-Forge na ref.[12].

No código ASME o dimensionamento do flange para a condição de montagem é feito utilizando-se uma força determinada a partir não somente da selagem da junta, mas também da força máxima admissível para os parafusos.

Uma importante diferença entre as duas filosofias de cálculo está no tratamento dado ao controle das forças a serem aplicadas no parafuso. Enquanto a DIN2505 explicita que é necessário se garantir que as forças aplicadas à junta correspondam àquelas determinadas no cálculo, as normas ASME e B.S. contornam o problema com altos fatores de segurança e através da utilização na análise, de uma força de pretensão igual à média entre a necessária e a máxima que os parafusos podem transmitir. Assim sendo, o controle detalhado da força de pretensão determinada pelas normas alemãs deve ser observado (controle de alongamento, utilização de torqueímetro, etc.), e para tal uma metodologia é descrita na ref.[6].

Já para as normas baseadas no método de Taylor-Forge, a aplicação da força deve normalmente ser limitada apenas à resistência do parafuso.

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO CÁLCULO

Uma amostra de 16 flanges é utilizada para comparação dos critérios de cálculo. São calculadas as forças agindo no flange e verificados os requisitos impostos por cada norma.

Descrição da Amostra

Os flanges selecionados são do tipo "welding neck", podendo, devido aos requisitos das normas técnicas (DIN), ser divididos em dois grupos:

- a) Nove flanges dimensionados de acordo com a norma DIN 2632, material St-37.2 (DIN17100), pressão nominal de 10 bar e diâmetros nominais variando de 25 a 2400mm. A superfície de contato é do tipo C (DIN2506). A gaxeta é do tipo plano de amianto (It 400), com dimensões dadas pela norma DIN2690. Os parafusos são dimensionados de acordo com a DIN13 e seu material 24 Cr Mo5 (DIN17240). A pressão de projeto adotada é de 6 bar e a temperatura de 120°C.
- b) Sete flanges de acordo com a norma DIN2635, material C22(VdTUV

364), pressão nominal de 40 bar e diâmetros nominais variando de 200 a 500mm. A superfície de contato é do tipo E (DIN 2526). A gaxeta é do tipo metálica em espiral com camadas de amianto (spiral wound gasket), com dimensões tomadas do Catálogo Kempchen (Ref.[13]). Os parafusos são dimensionados pela DIN13 e material 24 Cr Mo5. A pressão de projeto adotada é de 25 bar e a temperatura é de 120°C.

Descrição dos Resultados

Para a ilustração dos resultados adota-se, numa primeira etapa, um critério comparativo entre os esforços calculados segundo as normas DIN2505 Vornorm e o ASME. Compara-se as forças mínimas exigidas na gaxeta durante a montagem (P'_{DV} e W_{m2}), as forças de operação no parafuso (P_{SB} e W_{m1}), as forças mínimas exigidas na gaxeta durante a operação (P_{DB} e Hg), as forças no parafuso durante a montagem (P_{S0} e W), os momentos no flange na fase de montagem ($M0$) e durante a operação ($M1$). Os fatores provenientes desta comparação servem de parâmetro para ilustrar a relação entre as duas metodologias no tocante à derivação dos esforços na ligação, e são dados nas Tabelas 1 e 2.

Numa segunda etapa, procura-se comparar os resultados finais de cada método. Devido ao fato dos resultados das várias normas serem apresentados em grandezas diferentes (Tabela 3 e 4), faz-se necessário a adoção de parâmetros adimensionais para se estabelecer um paralelo entre eles (Figura 15). Neste sentido é definida a "margem de segurança" que nada mais é que a relação entre as grandezas determinadas por cada norma (tensão, rotação, rigidezes e espessuras necessárias) e aquelas fixadas como limite por cada especificação. Assim, quando a margem de segurança for menor que 1, significa que o flange não atende à respectiva norma.

Tabela 1. Comparação dos esforços - Normas DIN2505 Vornorm e ASME - PN10

PRESSAO NOMINAL		10								
DIAMETRO NIMINAL		25	100	200	300	350	400	500	1000	2400
P'_{DV}	DIN	33523	106912	227477	339972	462664	535843	717079	1806188	6546233
W_{m2}	ASME	26762	80747	149011	206162	281097	316735	399178	896805	2706706
P'_{DV}/W_{m2}		1,25	1,32	1,53	1,65	1,65	1,69	1,80	2,01	2,42
P_{SB}	DIN	3749	16607	44767	79896	111393	136922	199588	675415	3483718
W_{m1}	ASME	5072	20658	50099	87398	118334	144656	205626	680329	3413118
P_{SB}/W_{m1}		0,74	0,80	0,89	0,91	0,94	0,95	0,97	0,99	1,02
P_{DB}	DIN	2499	7827	16826	22991	36371	41111	55999	140925	550246
Hg	ASME	3722	11231	20726	28675	39098	44055	55522	124737	376478
P_{DB}/Hg		0,67	0,70	0,81	0,80	0,93	0,93	1,01	1,13	1,46
P_{s0}	DIN	33523	106912	227477	339972	462664	535843	717079	1806188	6546233
W	ASME	31926	109077	149011	264745	356101	373920	469030	1515300	4803854
P_{s0}/W		1,05	0,98	1,53	1,28	1,30	1,43	1,53	1,19	1,36
MO	DIN	561507	2325332	5857520	8924268	14111254	17146977	24380697	85793943	507333015
MO	ASME	502451	1759024	3373294	6208829	8874378	9879320	13009000	46879505	266283862
MO/MO		1,12	1,32	1,74	1,44	1,59	1,74	1,87	1,83	1,91
M1	DIN	72689	473685	1529149	2901699	4702382	6107602	10139157	47028770	404374496
M1	ASME	90342	513502	1520162	2789471	4436214	5692052	9004199	41636587	350781940
M1/M1		0,80	0,92	1,01	1,04	1,06	1,07	1,13	1,13	1,15

Tabela 2. Comparação dos esforços - Normas DIN2505 e ASME - PN40

PRESSÃO NOMINAL		40						
DIÂMETRO NOMINAL		25	100	200	300	350	400	500
P_{DV}	DIN	51679	204203	486004	756495	918915	1110866	1549432
W_{m2}	ASME	11364	142870	336297	505082	593392	695174	915363
P_{DV}/W_{m2}		4,55	1,43	1,45	1,50	1,55	1,60	1,63
P_{SB}	DIN	8368	49111	149128	291359	370323	470244	710501
W_{m1}	ASME	12083	63781	183369	341366	427488	535401	791708
P_{SB}/W_{m1}		0,69	0,77	0,81	0,85	0,87	0,88	0,90
P_{DB}	DIN	4031	15928	37908	59007	71675	86648	120856
Hg	ASME	7748	30615	72064	108232	127155	148966	196149
P_{DB}/Hg		0,52	0,52	0,53	0,55	0,56	0,58	0,62
P_{s0}	DIN	51697	204203	486004	756495	918915	1110866	1549432
W	ASME	23469	142870	457206	723916	878641	1038013	1482382
P_{s0}/W		2,20	1,43	1,06	1,05	1,05	1,07	1,05
M0	DIN	981904	6126101	19926163	40094228	55134905	79426935	94515364
M0	ASME	445915	4000360	18710938	38126552	48712728	73312179	88290324
M0/M0		2,20	1,53	1,06	1,05	1,13	1,07	1,03
M1	DIN	188203	1825290	7385739	18474356	26501905	39717284	57939828
M1	ASME	255148	2165521	8262630	19315347	27444338	40918409	56511985
M1/M1		0,74	0,89	0,89	0,96	0,97	0,97	1,03

Tabela 3. Margem de segurança pelas diversas metodologia de cálculos - PN10

PRESSÃO NOMINAL		10									
DIÂMETRO NOMINAL		25	100	200	300	350	400	500	1000	2400	
AD	HF	14	17	21	22	22	22	24	29	56	
	HFR	6,9	11,6	16,8	19,8	24,3	26,3	29	48,4	108,3	
	HF/HFR	2,03	1,47	1,25	1,11	0,91	0,84	0,83	0,60	0,52	
DIN VORNORM	σ_1	49,8	73,4	88,4	94,6	139,6	143,6	152,6	262,1	131,1	
	σ_2	7,7	17,8	27,7	36,8	55,5	61,2	75,8	195,9	124,8	
	σ_{all}	215	215	215	215	215	215	215	215	215	
	$\sigma_{all}/\sigma_{max}$	4,32	2,93	2,42	2,27	1,54	1,50	1,41	1,22	1,64	
DIN ENTWURF	TENSÃO	WRO	2896	11900	29803	45501	71331	86745	123122	432632	2551440
		WRA	188,4	1854	6697	14044	21958	29285	50236	246491	2210574
		WRB	624,6	3950	12547	23969	38014	49507	82070	380178	3262630
		W	15729	42753	85352	129027	134697	162444	210693	469079	3404577
		W/Wmax	5,43	3,59	2,86	2,84	1,89	1,87	1,71	1,08	1,33
	ROTA CAO	θ	0,04	0,12	0,22	0,25	0,45	0,44	0,36	0,76	0,75
		1/ θ	25,0	8,3	4,5	4,0	2,2	2,3	2,8	1,3	1,3
ASME	SH/1,5	49,6	51,5	58,5	78,1	106,8	101,2	127,4	172,1	152,9	
	SR	65,2	69,3	51,4	67,4	83,2	84,4	78,2	101,6	88,0	
	ST	61,0	53,2	39,1	34,9	47,3	39,5	34,1	33,1	20,5	
	(SH+SR)/2	69,8	72,7	69,5	92,3	121,8	118,1	134,7	179,9	158,7	
	(SH+ST)/2	67,7	64,7	63,4	76,0	103,7	93,7	112,6	145,6	124,9	
	Sf	85	85	85	85	85	85	85	85	85	
	Sf/Smax	1,21	1,17	1,22	0,92	0,70	0,72	0,63	0,47	0,54	

Tabela 4. Margem de segurança pelas diversas metodologias de cálculo - PN40

PRESSÃO NOMINAL		40							
DIÂMETRO NOMINAL		25	100	200	300	350	400	500	
AD	HF	16	21	31	38	42	46	48	
	HFR	8,8	17,9	27,7	33,6	36,9	41,1	42,7	
	HF/HFR	1,82	1,17	1,12	1,13	1,14	1,12	1,12	
DIN VORNORM	σ_1	69,0	127,8	133,2	110,2	124,5	113,9	87,6	
	σ_2	14,1	40,8	52,9	54,4	81,6	61,0	57,5	
	σ_{a11}	240	240	240	240	240	240	240	
	$\sigma_{a11}/\sigma_{max}$	3,48	1,88	1,80	2,18	1,93	2,11	2,74	
DIN ENTWURF	TENSÃO	WRO	4500	28078	91328	183765	252702	364040	1099033
		WRA	2687	21763	82130	191926	271930	463489	1249228
		WRB	1260	12223	49458	123712	177468	265964	387990
		W	20544	65440	192622	452892	599457	849174	1270191
	ROTAÇÃO	W/W_{max}	4,57	2,33	2,11	2,36	2,20	1,83	2,33
		θ	0,06	0,16	0,24	0,20	0,21	0,23	0,51
		$1/\theta$	16,7	6,3	4,2	5,0	4,8	4,4	2,0
ASME	SH/1,5	35,4	82,7	119,3	96,7	94,5	102,4	82,5	
	SR	38,5	96,7	116,4	122,7	111,6	125,9	126,6	
	ST	47,6	79,0	105,7	79,4	77,4	79,9	57,9	
	(SH+SR)/2	45,8	110,3	147,7	133,8	126,7	139,8	125,2	
	(SH+ST)/2	50,4	101,5	142,1	112,2	109,6	116,7	90,9	
	Sf	105	105	105	105	105	105	105	
	Sf/S _{max}	2,08	0,93	0,71	0,78	0,83	0,75	0,83	

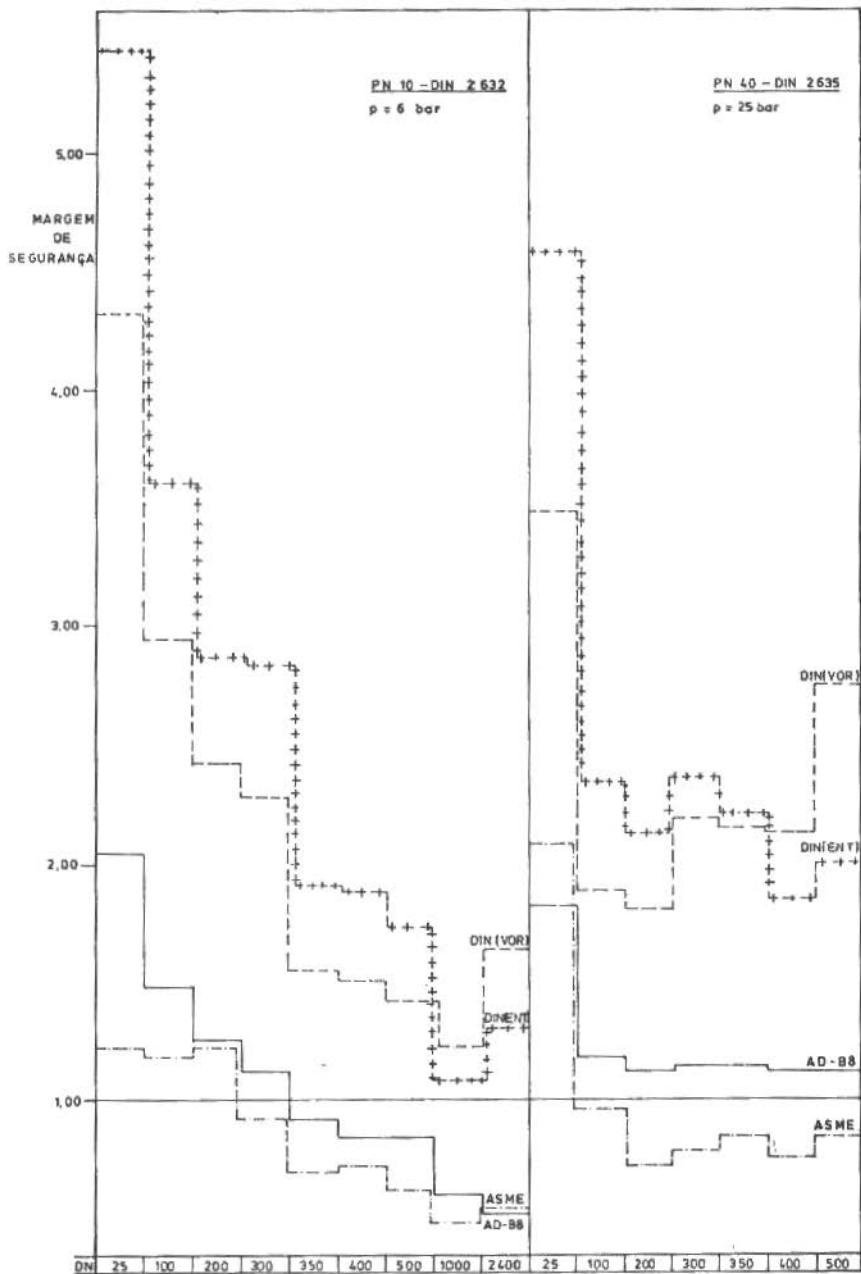


Figura 15. Histograma dos critérios de cálculo

CONCLUSÕES

Dentro da amostra estudada, pode-se inferir as seguintes conclusões:

- a) As fórmulas para as forças, tanto na montagem quando em serviço, são semelhantes em ambas as normas, embora diferindo nos valores empíricos característicos da gaxeta. Assim, as forças de montagem segundo a DIN são sensivelmente maiores que as do ASME. Já em serviço, as forças do ASME são ligeiramente superiores as da DIN (não mais que 25%). As forças de prê-compressão da DIN são muito superiores às do ASME, mesmo em se considerando a força de prê-compressão reduzida (P'_{DV}) (Tabelas 1 e 2).
- b) Tomando-se por exemplo o flange PN 40, DN 400, onde os momentos solicitantes para as duas normas são semelhantes, tem-se que, para a norma DIN2505, as tensões admissíveis excedem as calculadas por um fator de 2,11, enquanto que para o código ASME esta relação é de 0,75. Portanto, abstraindo-se dos valores obtidos para as forças, a margem de segurança implícita no método americano neste caso é de 2,8 vezes a da formulação alemã. Comparação semelhante para outros exemplos mostra resultados equivalentes.
- c) Os resultados globais (Tabelas 3 e 4) demonstram ser a norma ASME a mais conservativa, seguida da AD-B7, DIN2505-Vornorm e DIN2505-Entwurf.
- d) A preocupação maior com as cargas atuantes no caso das normas alemãs se justifica pelo modelo mais preciso, mais sensível a desvios nas hipóteses de cálculo, e com menores coeficientes de segurança. Daí serem recomendáveis procedimentos mais cuidadosos na instalação, e a consideração de eventuais acrêscimos de carga nos parafusos quando da montagem.

REFERÊNCIAS

- [1] DIN2505 - Vornorm - "Berechnung von flanschverbindungen", Oktober 1964.
- [2] DIN2505 - Entwurf - "Berechnung von flanschverbindungen", November 1972.
- [3] AD-Merkblätter - "B7 - Schrauben / "B8 - Flansche", Ausgabe 2.77.
- [4] ASME - Boiler and pressure vessel code. Section VIII - Division 1 - Appendix 2 - "Rules for Bolted Flange Connections with Ring Type Gaskets", 1980 Edition.

- [5] British Standard 5500 - "Specification for unfired fusion welded pressure vessels", January, 1982 Edition.
- [6] VDI2230 - "Systematische berechnung hochbeanspruchter schraubenverbindungen", Oktober 1977.
- [7] Tueckmantel, H.J. - "Die optimierung statischen dichtungen", Kempchen, 1978.
- [8] Gill, S.S. - "The stress analysis of pressure vessels and pressure vessel components". Pergamon Press, 1970.
- [9] Brownell, L. and Young, E. - "Process equipment design". John Wiley & Sons, 1959.
- [10] Waters, E. et alii - "Development of general formulas for bolted flanges", Taylor Forge and Pipe Works, Chicago.
- [11] Happek, G. und Griesser, H. - "Dichtigkeitsverhalten von apparateflanschverbindungen", Veba-Chemie AG, Juni 1974.
- [12] Westrom, D.B. and Bergh, S.E. - "Effect of internal pressure on stresses and strains in bolted-flanged connections", Transactions of the ASME, July 1951.
- [13] Kempchen Katalog - "Dichtungen nach DIN, ANSI, API und werknormen".
- [14] Waters, E.O. et alii - "Formulas for stresses in bolted flange connections", Transactions of the ASME.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS CORDAS CRUZADAS NA SOLUÇÃO LOCAL DE PROBLEMAS SIMÉTRICOS DE RADIAÇÃO PURA

Rogério Martins Saldanha da Gama

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

Problemas envolvendo troca de energia radiante térmica difusa entre superfícies alongadas dispostas simetricamente e o meio ambiente recaem na solução de equações integrais de Fredholm de segunda espécie. Tais equações em geral exigem métodos aproximados para a obtenção de soluções. Neste trabalho é apresentado um método de se obter, de forma muito simples, a solução de equações integrais provenientes de problemas de radiação. O método consiste em se propor funções resposta formadas por degraus, os quais são determinados através da utilização de um princípio variacional.

SUMMARY

Problems involving diffuse radiant energy interchange between elongated surfaces, disposed symmetrically, and an environment need the solution of a Fredholm integral equation of second kind. These equations generally need numerical methods that solve them approximately. In this work we show a method to obtain, in a simple way, the solution of integral equations coming from radiation problems. The method consists in proposing functions formed by steps which are determined by the use of a variational principle.

INTRODUÇÃO

Quando dois pontos materiais, a temperaturas diferentes do zero absoluto, estão separados por um meio não opaco existe uma troca de energia por radiação térmica entre eles. Se agora pensarmos em superfícies trocando energia por radiação teremos que cada ponto, sobre cada superfície, receberá energia proveniente de outros pontos, que poderão pertencer a qualquer das superfícies que participam do processo de troca de energia.

Sendo assim a transferência de energia por radiação térmica é governada por sistemas de equações integrais que levam em conta o efeito de todos os pontos envolvidos no processo de transferência de energia sobre cada ponto considerado.

Neste trabalho trataremos de uma classe particular de problemas de radiação. Mais especificamente falando vamos fixar nossa atenção nos problemas de troca de energia radiante térmica entre superfícies alongadas cinzentas que emitem e refletem difusamente, possuindo mesmas propriedades físicas e estando dispostas de maneira simétrica, de tal forma que o efeito externo sobre cada uma das superfícies consideradas seja o mesmo. Suporemos também que a troca de energia se dá no vácuo.

O fato de cada superfície estar sujeita ao mesmo tipo de efeito faz com que o sistema de equações integrais anteriormente citado seja reduzido a uma simples equação integral, já que a troca de energia em pontos correspondentes de superfícies diferentes é a mesma. Uma vez que toda a radiação envolvida é difusa, não havendo assim distinção entre energia emitida e energia refletida, é conveniente escrever a equação integral que representa o balanço de energia tendo como função incôgnita a radiosidade local, que é uma medida de toda a energia radiante que deixa uma certa superfície, num certo ponto, por unidade de tempo e área, por reflexão e por emissão.

O balanço de energia para o tipo de problema que será tratado aqui é então dado por uma equação integral de Fredholm de segunda espécie [4,5]. Tais equações em geral não possuem solução analítica em forma fechada exigindo assim a utilização de técnicas numéricas para a obtenção de uma solução aproximada. Na literatura podem ser encontrados vários métodos destinados à resolução aproximada de equações integrais lineares como as que regem os problemas de troca de energia por radiação difusa, que são no entanto desti-

pados a abranger a maior faixa possível de aplicação.

A idéia aqui é apresentar um método simples e eficiente, destinado a resolver especificamente problemas simétricos de troca de energia radiante térmica difusa entre superfícies alongadas. Este método é baseado fundamentalmente, ao contrário do que se costuma encontrar na literatura, no modelo físico empregado.

O método de solução se baseia em buscar o extremo de um funcional supondo que a função radiosidade é formada por degraus.

Para a obtenção deste extremo é necessária a dupla integração do núcleo da equação integral, a qual num problema genérico deveria ser feita numericamente com o auxílio de um computador. Para o problema aqui tratado, esta dupla integração pode ser feita analiticamente com a aplicação do método de Hottel, ou método das cordas cruzadas, o que faz com que o único uso do computador seja para a solução de um sistema algébrico linear, cuja matriz de coeficientes é simétrica.

A título de exemplo é estudada a troca de calor por radiação entre duas placas planas, alongadas, cinzentas, isotérmicas e com emissividade constante, e o ambiente. São apresentadas soluções obtidas com diferentes números de degraus.

ANÁLISE TEÓRICA

Vamos basear nossa discussão em arranjos simétricos formados por duas superfícies, convexas ou planas, alongadas que são representadas na Figura 1 por linhas cheias.

A análise de fenômenos de troca de calor por radiação pura é em geral desenvolvida sob a hipótese de que a transferência de energia se dá num espaço fechado por várias superfícies, já que assim temos que toda a energia radiante térmica que deixa uma certa superfície vai necessariamente atingir algumas das superfícies que compõem o arranjo.

Devido à hipótese de estarmos sempre lidando com um espaço fechado suporemos que o ambiente atua como se fosse uma superfície negra que está a uma temperatura T_e , denominada de temperatura efetiva de corpo negro. Estas superfícies fictícias são representadas na Figura 1 por linhas pontilhadas.

Representando por $B_w(x)$ a função radiosidade sobre alguma das superfícies reais que compõem o arranjo e sabendo que a radiosidade sobre as superfícies negras fictícias é σT_e^4 podemos escrever o balanço de energia como [1,2,6]

$$B_W^*(x) = \epsilon_W(x) \sigma T_W^*(x)^4 + \rho_W(x) \int_a^b B_W^*(y) dF_{dA_x-dA_y} \quad (1)$$

onde

$$B_W^*(x) = B_W(x) - \sigma T_e^4 \quad (2)$$

$$T_W^*(x)^4 = T_W(x)^4 - T_e^4 \quad (3)$$

O domínio das funções envolvidas é o intervalo fechado $[a, b]$, uma vez que as superfícies são alongadas.

Na equação (1) $\epsilon_W(x)$ é a emissividade, $\rho_W(x)$ a reflectância e $T_W(x)$ a temperatura, definidos em cada ponto da superfície considerada, sendo funções limitadas porém não necessariamente contínuas. σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

O fator de forma entre as áreas diferenciais dA_x e dA_y é representado por $dF_{dA_x-dA_y}$ e é a razão entre a energia que, deixando dA_x , atinge dA_y e toda a energia que deixa dA_x .

No caso de superfícies alongadas temos que [1,2]

$$dF_{dA_x-dA_y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\text{sen } \theta(x,y) \right] dy \quad (4)$$

se assumirmos que a energia que deixa o ponto x pode atingir y diretamente.

Deve ser observado que a integração de $dF_{dA_x-dA_y}$ entre dois pontos é sempre uma grandeza positiva.

Em (1),(2),(3) e (4) x e y são variáveis escalares como as que são mostradas na Figura 1.

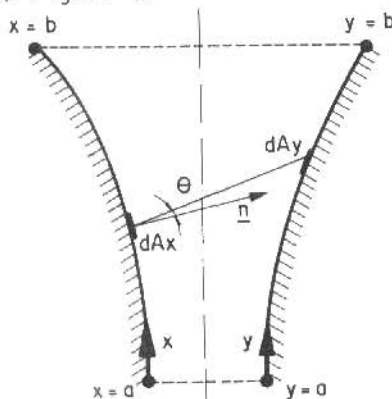


Figura 1. Duas superfícies dispostas simetricamente

A equação (1) é uma equação integral de Fredholm de segunda espécie e pode ser reescrita como [4,5]

$$B_W^*(x) = \varepsilon_W(x) \sigma T_W^*(x)^4 + \rho_W(x) \int_a^b B_W^*(y) K(x,y) dy \quad (5)$$

UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA (5)

A equação (5), uma vez que possui núcleo simétrico, tem como solução a função $B_W^*(x)$ que torna extremo o funcional $I[B_W^*]$ dado por

$$I[B_W^*] = \int_a^b \int_a^b K(x,y) B_W^*(x) B_W^*(y) dx dy - \int_a^b \frac{1}{\rho_W(x)} (B_W^*(x))^2 dx + 2 \int_a^b \frac{\varepsilon_W(x) \sigma T_W^*(x)^4}{\rho_W(x)} B_W^*(x) dx \quad (6)$$

onde as funções $\varepsilon_W(x)$, $\rho_W(x)$ e $T_W^*(x)$ são prescritas e assumem sempre valores estritamente positivos.

Em todos os problemas envolvendo troca de energia radiante térmica difusa, que podem ser reduzidos a apenas uma equação integral, o núcleo $K(x,y)$ é simétrico, pela própria definição do fator de forma.

SOLUÇÃO DEGRAU

Vamos agora apresentar um método rápido para a obtenção da solução de (5) [6,7]. A idéia é extremar $I[B_W^*]$ supondo que $B_W^*(x)$ é formada por N degraus de mesma largura no intervalo $[a,b]$.

Assim procedendo temos o seguinte sistema algébrico de N equações

$$\sum_{j=1}^N \int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} \int_{a+(j-1)\Delta}^{a+j\Delta} K(x,y) dx dy B_{Wj}^* - \int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} \frac{1}{\rho_W(x)} dx B_{Wi}^* + \int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} \frac{\varepsilon_W(x)}{\rho_W(x)} \sigma T_W^*(x)^4 dx = 0 \quad i = 1, N \quad (7)$$

onde

$$\Delta = \frac{b-a}{N} \quad (8)$$

$$B_W^*(x) = B_{Wi}^* \quad a+(i-1)\Delta \leq x < a+i\Delta \quad (9)$$

Resolvendo o sistema (7) obteremos os $B_{w_i}^*$'s que representam a função incôgnita formada por degraus.

Vejamos agora uma forma simples de efetuar a integração dupla que aparece em (7) analiticamente. Definindo \underline{x} e \underline{y} como os vetores posição sobre cada uma das superfícies podemos escrever, utilizando (4), que

$$K(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\underline{y} - \underline{x}}{\|\underline{y} - \underline{x}\|} \cdot \frac{d \underline{x}}{d x} \right] \quad (10)$$

onde " $\|\ \|\$ " representa a norma do vetor.

Assim sendo podemos integrar duplamente o núcleo para obter

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} K(x,y) dx dy = \frac{1}{2} \left[\|\underline{y}(y_2) - \underline{x}(x_1)\| + \|\underline{y}(y_1) - \underline{x}(x_2)\| - \|\underline{y}(y_2) - \underline{x}(x_2)\| - \|\underline{y}(y_1) - \underline{x}(x_1)\| \right] \quad (11)$$

A equação (11) é conhecida como o método das "cordas cruzadas" ou método de Hottel e pode ser ilustrada com o auxílio da Figura 2 [1,3].

Em geral $\epsilon_w(x)$, $\rho_w(x)$ e $T_w^*(x)$ são assumidos constantes o que torna desnecessária qualquer integração numérica para a utilização de (7) na solução de (5).

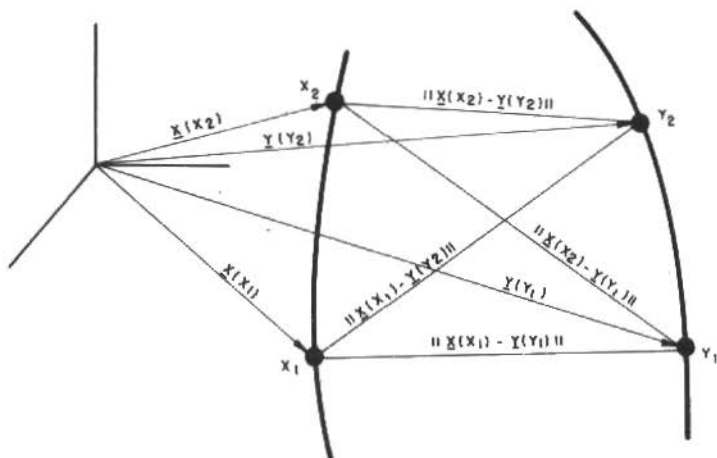


Figura 2. O método das cordas cruzadas

A seguir é apresentado um exemplo para ilustrar o que foi desenvolvido até aqui.

TROCA DE ENERGIA RADIANTE TÉRMICA ENTRE DUAS PLACAS PLANAS E O MEIO AMBIENTE

Vamos analisar a título de ilustração a troca de calor por radiação difusa entre um arranjo formado por duas placas planas cinzentas, alongadas e isotérmicas, e o meio ambiente.

As placas possuem emissividade hemisférica total ϵ_w e estão a uma temperatura T_w .

A Figura 3 apresenta um esquema do tipo de arranjo estudado. Utilizando o sistema de coordenadas da figura temos que a radiossidade no ponto $y = a$, sobre a placa superior, é a mesma que no ponto $x = a$, sobre a placa inferior. Assim representaremos a função radiossidade local por B_w sobre ambas as placas.

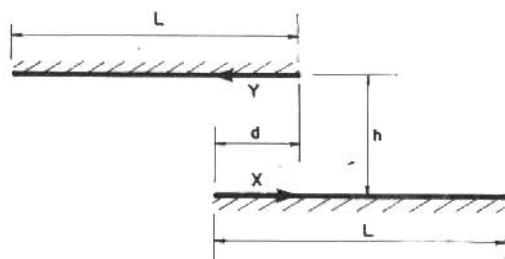


Figura 3. Arranjo típico

Podemos escrever a equação de balanço de energia, para este caso, como

$$B_w^+(x) = 1 + (1 - \epsilon_w) \int_0^L B_w^+(y) K(x,y) dy \quad (12)$$

onde a função $B_w^+(x)$ é uma medida adimensional da radiossidade, definida como

$$B_w^+(x) = \frac{B_w(x) - \sigma T_e^4}{\epsilon_w \sigma (T_w^4 - T_e^4)} \quad (13)$$

O núcleo da equação é obtido através de (9)

$$K(x,y) = \frac{h^2}{2((x+y-d)^2 + h^2)^{3/2}} \quad (14)$$

Nas equações (12) e (14) h é a distância entre os planos que contêm as placas, L é a largura das placas e d a distância, medida na horizontal, entre as origens de x e y , sendo positivo se a origem de x estiver à esquerda da de y .

Pode ser notado de (12) e (14) que o problema fica totalmente determinado se forem conhecidos ϵ_w , h/L e d/L . Desta forma apresentaremos todos os resultados baseados numa largura unitária ($L = 1$) já que arranjos geometricamente semelhantes (com mesma emissividade) possuem a curva $B_w^+(x)$ com a mesma forma.

Para este problema a equação (7) fica reduzida a

$$(1-\epsilon_w)N \sum_{j=1}^N \left[\int_{(i-1)/N}^{i/N} \int_{(j-1)/N}^{j/N} K(x,y) dx dy \right] B_{W_j}^+ + 1 - B_{W_i}^+ = 0 \quad i=1,N \quad (15)$$

onde N é o número de degraus que compõem a solução em $[0,1]$.

Uma vez determinada a função radiossidade adimensional podemos calcular o calor trocado localmente por [6]

$$q_w^+(x) = \sigma(T_w^h - T_e^h) q_w^+(x) \quad (16)$$

onde $q_w^+(x)$ é definido aqui como o calor trocado adimensional e é da da por

$$q_w^+(x) = \frac{\epsilon_w}{1-\epsilon_w} (1-\epsilon_w B_w^+(x)) \quad (17)$$

O calor total trocado, por unidade de profundidade, para cada placa pode ser calculado por

$$Q = \int_0^L q_w^+(x) dx = \sigma(T_w^h - T_e^h) \int_0^L q_w^+(x) dx \quad (18)$$

o que, com o tipo de solução proposta, equivale a

$$Q = \left[\frac{L}{N} \sum_{i=1}^N q_i^+ \right] \sigma(T_w^h - T_e^h) \quad (19)$$

onde q_i^+ é o calor trocado pelo intervalo $[i-1, i]$ dado por

$$q_i^+ = \frac{\epsilon_W}{1 - \epsilon_W} (1 - \epsilon_W B_{W_i}^+) \quad (20)$$

A seguir apresentamos alguns resultados. As Figuras 4, 5 e 6 mostram uma comparação entre soluções obtidas com diferentes números de degraus para a função $B_W^+(x)$. A Figura 7 apresenta diversas curvas para a função $q_W^+(x)$ obtidas utilizando-se 100 degraus. Devido ao pequeno tamanho dos degraus as curvas foram traçadas contínuas.

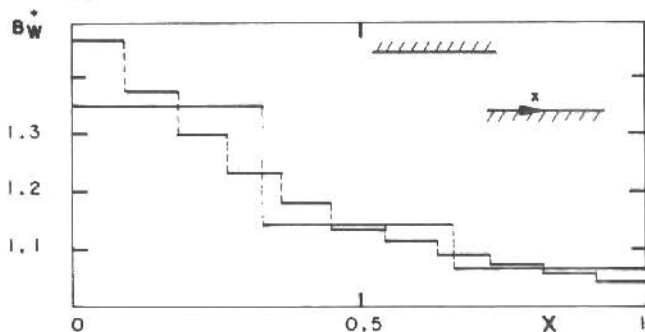


Figura 4. Função $B_W^+(x)$ com 3 e 11 degraus para : $\epsilon_W = 0.1$, $h = 0.5$, $d = 0.0$

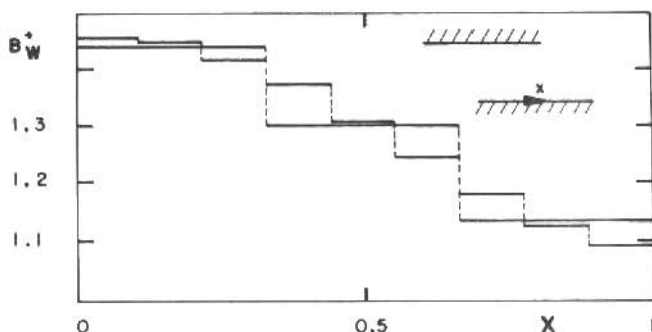


Figura 5. Função $B_W^+(x)$ com 3 e 9 degraus para : $\epsilon_W = 0.5$, $h = 0.5$, $d = 0.5$

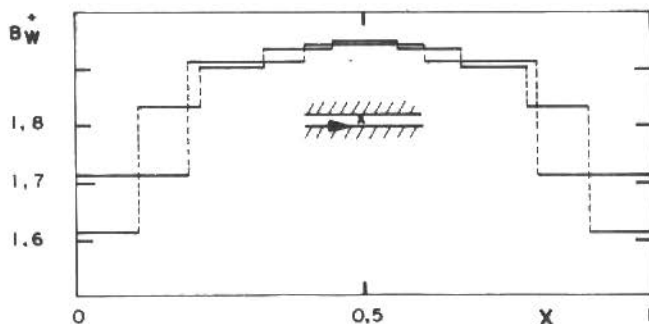


Figura 6. Função $B_W^+(x)$ com 5 e 9 degraus para : $\epsilon_W = 0.5$, $h = 0.1$, $d = 1.0$

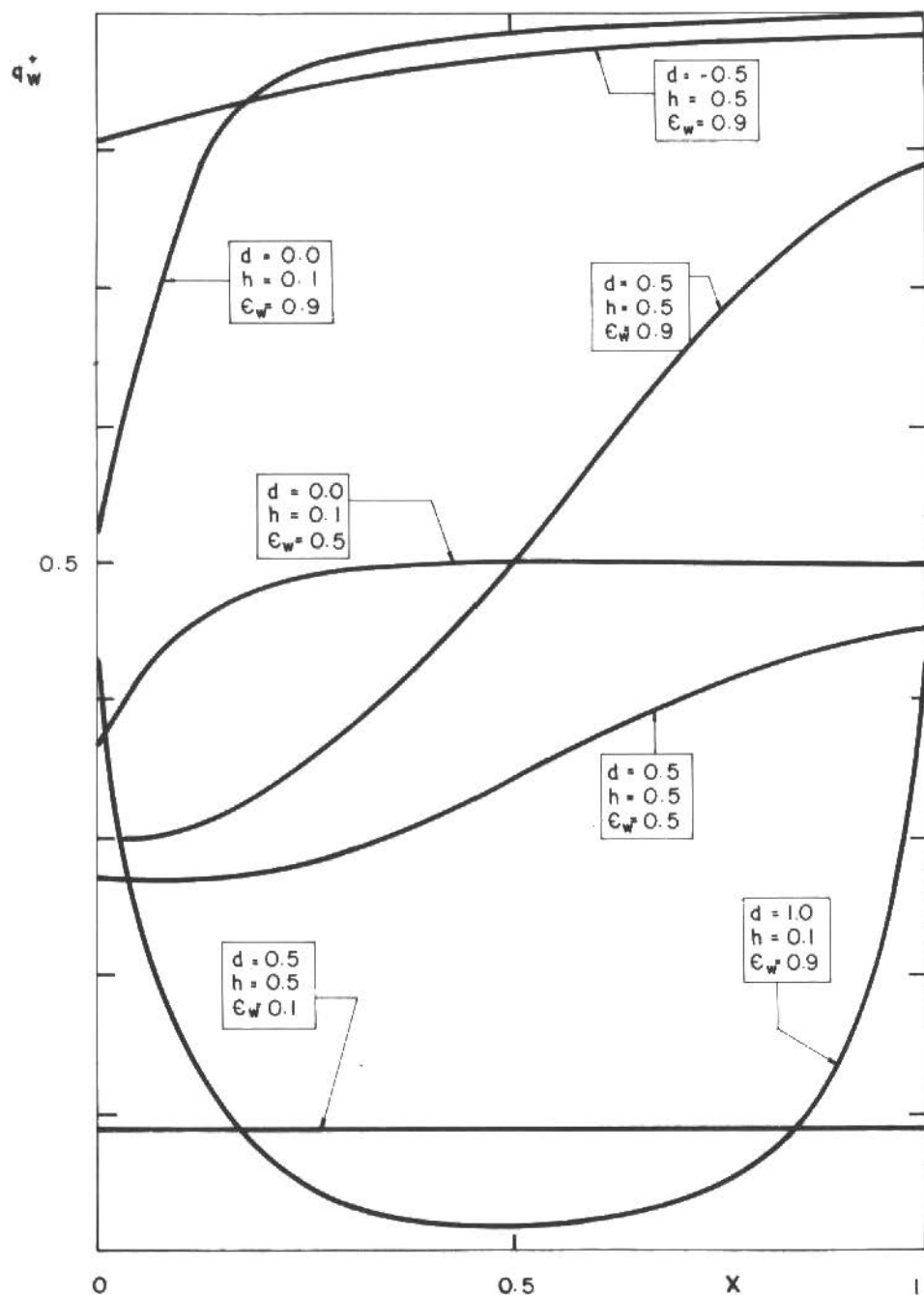


Figura 7. Curvas $q_w^+(x)$ versus x , para vários ϵ_w , h e d

COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Foi apresentado um método extremamente simples e eficiente que se presta à solução de todos os problemas envolvendo troca de calor por radiação difusa que possam ser reduzidos a uma equação integral de Fredholm de segunda espécie.

O método pode ser aplicado a situações onde o núcleo da equação tenda para o infinito em alguns pontos, onde não podem ser aplicados métodos de diferenças finitas clássicos.

Pela falta de resultados na literatura foram feitas estimativas de precisão através da comparação entre soluções obtidas com diferentes números de degraus. Em todos os casos estudados observou-se uma rápida convergência das soluções degrau para a solução exata, com o aumento do número de degraus, como pode ser visto nas Figuras 4, 5 e 6.

Em todos os casos, devido à simetria do núcleo, a matriz de coeficientes do sistema linear (7) é simétrica.

Para valores de d menores do que zero a radiosidade é uma função estritamente decrescente enquanto que se d for maior que L a radiosidade é estritamente crescente. Quando d está entre zero e L temos que o máximo da função ocorre sempre entre $x = 0$ e $x = d$, sendo que quando $d = L$, placas paralelas, o máximo ocorre em $x = L/2$. A função calor trocado local se comporta de forma inversa à função radiosidade, como pode ser visto pela equação (17).

Deve-se notar que o problema poderia ter sido formulado em termos do calor trocado local adimensional $q_w^+(x)$ utilizando no lugar de (12) a equação abaixo

$$q_w^+(x) = \epsilon_w \left[1 - \int_0^L K(x,y) dy \right] + (1 - \epsilon_w) \int_0^L q_w^+(y) K(x,y) dy \quad (21)$$

onde para todo x, d, h e L

$$\int_0^L K(x,y) dy < 1$$

A equação (21) pode ser aproximada por um sistema similar a (6).

REFERÊNCIAS

- [1] Sparrow, E.M. and Cess, R.D. — Radiation heat transfer. McGraw-Hill, Washington, 1978.

- [2] Wiebelt, J.A. - Engineering radiation heat transfer. Holt, Rinehart & Winston, New York, 1966.
- [3] Hottel, H.C. - Radiant heat transmission. W.H. McAdams, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1954.
- [4] Krasnov, M.; Kiseliov, A. e Makarenko, G. - Ecuaciones Integrales. Editorial Mir, Moscú, 1977.
- [5] Hildebrand, F.B. - Methods of applied mathematics. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1952.
- [6] Gama, R.M.S. - Métodos numéricos na solução de problemas de radiação pura. Tese de Mestrado, PUC/RJ, Departamento de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1981.
- [7] Gama, R.M.S. e Saboya, F.E.M. - A variational method for radiant emission from diffuse V-Groove cavities. VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ, 1981. vol.D, p.307-317.

ON THE COMPLEXITY OF POLYNOMIAL EVALUATION SCHEMES AND THE ACCELERATION OF THE CONVERGENCE OF NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

H. Helman
(UFMG)

E. L. Ortiz
(ICCT)

SUMARIO

En el presente trabajo se analiza una extensión del concepto de economización al caso de polinomios de dos variables $P(x,y)$, estando (x,y) restringidos a un dominio finito Q donde se desea realizar la economización.

En el caso de polinomios $p(x)$ de sólo una variable, cuyos valores sean calculados por medio de la regla de recurrencia inversa, la disminución de la complejidad de su evaluación depende directamente del grado de p . Esencialmente, esta es la idea de condensación de Lanczos. Tratándose de polinomios de dos o más variables se tiene una situación diferente: la disminución en la complejidad de evaluación no depende solamente de una reducción en su grado sino también de la estructura de los coeficientes de p , problema que es aquí considerado.

Como ejemplo de aplicación de la técnica de economización será analizada la aceleración en la convergencia de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales. Para el ejemplo presentado aquí fue elegida la torsión elástica de barras prismáticas, en razón de existir diversas soluciones numéricas de este problema, obtenidas por diferentes métodos. Los resultados producidos mediante la técnica de economización presentan errores menores, aún comparando con los resultados obtenidos a través del método de colocación de Chebyshev.

SUMMARY

In this paper we discuss the extension of the idea of economization to polynomials of two variables $P(x,y)$, where (x,y) are restricted to a finite domain Q in which the process of economization is required.

In the case of polynomials $p(x)$ of only one variable, the values of which are computed by backward recurrence, a reduction in the complexity of the evaluation is directly controlled by a reduction in the degree of p . This, in essence, is the idea of Lanczos' condensation process. In the case of polynomials of two or more variables, the situation is different: a reduction in the complexity is not only controlled by degree reduction, it also depends on the structure of the coefficients of P , problem which is discussed here. As an example of the application of the economization technique, we discuss the acceleration of convergence of numerical solutions of partial differential equations. In the example presented, the elastic torsion of a prismatic bar is considered since there are several numerical solutions for it, obtained by different methods. Our results compare favourably also with the very accurate Chebyshev collocation method.

INTRODUCTION

Let us assume that a polynomial $P = P(x,y)$ takes values in a domain Q and let $\epsilon > 0$ be a tolerance parameter or admissible error bound for the values of P in Q .

If P is expanded in a polynomial basis β , defined in Q , such that it reduces the magnitude of the coefficients of higher powers of the variables at the expense of the remaining coefficients, then it may be possible to find a condensed representation $P(x,y)$ of P in the sense that $\|P - P_\epsilon\| < \epsilon$, while the computational effort required for the generation of values of P_ϵ is smaller than that required for values of P .

In the case of polynomials $p(x)$ of only one variable, the values of which are computed by backward recurrence, a reduction in the complexity of the evaluation is directly controlled by a reduction of the degree of p . This is, in essence, the idea of Lanczos' condensation (telescoping, economization) process [9].

In the case of polynomials of two (or more) variables, the situation is different: a reduction in the complexity is not

controlled by degree reduction alone: it also depends on the structure of the coefficients of P .

In the second section (Condensation of Polynomials of two Variables) we consider the problem of the numerical condensation of P when β is a product Chebyshev basis for Q . We introduce a coefficient matrix \underline{A} associated with P and discuss different condensation strategies (vectorial, triangular and maximal) for the extreme cases when \underline{A} is either a rectangular or an upper triangular matrix. In third section (Numerical Example) we illustrate those cases with a simple numerical example.

Condition for these condensation strategies to be feasible are given in fourth section (Vectorial and Triangular Condensation Processes) directly in terms of the given polynomial P , without explicitly going into the representation of P in the basis β . These conditions are applied in sixth section (Numerical Example) to the example of third section. An algorithm for the automatic implementation of the numerical condensation process in a computer is sketchly described in fifth section (An Algorithm for Polynomial Condensation).

In seventh section (Applications of Polynomial Condensation to the Acceleration of the Convergence of Approximate Solutions of Partial Differential Equations) we discuss the application of the condensation technique to the acceleration of the convergence of the numerical solution or partial differential equations. Our discussion is modelled on the equation which describes the torsion of a prismatic bar. A more interesting problem: the condensation of numerical solutions of the tensor equations which describe the plastic behaviour of the hydrostatic extrusion problem for bimetallic composites, is considered in detail in [7].

In our example, an economy of 30.55% in the number of coefficients is achieved by condensation with an $\epsilon = 8 \times 10^{-4}$ on an approximate solution with a maximum error of 5×10^{-3} .

The quality of our condensed approximate solution, which belongs to \mathcal{P}_{44} , is compared with that of least squares and Chebyshev collocation approximate solutions in the same subspace: the accuracy of the condensed approximate solution is four times higher than the accuracy of the other two approximate solutions.

CONDENSATION OF POLYNOMIALS OF TWO VARIABLES

Let us consider a plane domain Q which, for simplicity, we shall assume to be the square $Q_1 = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, and a polynomial

$$P = P(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j,$$

which takes values in Q_1 . We say that $P \in \mathcal{P}_{n,m}$.

Consider the vectors

$$X = (x^0, x^1, \dots, x^n)^T, \quad Y = (y^0, y^1, \dots, y^m)^T,$$

and the matrix

$$\underline{A} = ((a_{ij})), \quad i = 0(1)n, \quad j = 0(1)m,$$

which we call the coefficients matrix associated with P . We can write

$$P = X^T \underline{A} Y.$$

Moreover,

$$T_t = (T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_s^*(t)),$$

and

$$X = \underline{B}_x T_x^*,$$

$$Y = \underline{B}_y T_y^*,$$

where the elements of the matrices \underline{B}_x and \underline{B}_y are generated with the help of the identities

$$t^n = 2^{1-2n} \left[T_n^*(t) + \binom{2n}{1} T_{n-1}^*(t) + \dots + \binom{2n}{n} T_0^*(t) \right] \quad (1)$$

for $t = 1, 2, \dots$, and $t^0 = 1$.

We call

$$P^{Ch} = T_x^{*C} T_y^*$$

the representation of P in the product Chebyshev basis $B = \{T_i^*(x)T_j^*(y)\}$ $i, j = 0, 1, \dots$. The matrix $\underline{C} = ((c_{ij}))$, $i = 0(1)n$, $j = 0(1)m$, is defined by the product

$$\underline{C} = \underline{B}_x^T \underline{A} \underline{B}_y$$

Given an error bound $\epsilon > 0$, we say that $P_\epsilon = P_\epsilon(x, y)$ is a condensed representation of P in Q_1 if, for all $(x, y) \in Q_1$,

$$\|P - P_\epsilon\| < \epsilon \quad (2)$$

where P_ϵ is a suitable truncation of P^{Ch} .

We shall try to construct a polynomial P_ϵ which, in a given polynomial evaluation scheme, would provide approximate values of P with an error bounded by ϵ in Q_1 and with less computational effort than that required to compute values of P in the same domain.

Since the truncation of a polynomial of two variables is possible in more than one way, so is its condensation. We may require, for instance, that the truncation of P^{Ch} be made:

- (i) along the vectorial arrays c_{im} ($i = 0(1)n$) or c_{nj} ($j = 0(1)m$) of \underline{C} ;
- (ii) along the secondary diagonals c_{ij} , $i+j = \text{constant}$, of \underline{C} ;
- (iii) in such a way that the maximum number of coefficients of \underline{C} , starting with c_{nm} , are deleted without violating condition (2).

We call these cases vectorial, triangular, and maximal condensation of P respectively.

The interest of these cases, particularly of the first two, lies in that they are particularly well suited for the condensation of polynomials with certain standard coefficient matrix forms. If \underline{A} is rectangular, its form will be preserved by a vectorial condensation process and the same will happen with triangular condensation if \underline{A} is upper triangular. The latter is a frequent case when the polynomial P is itself the truncation of a rapidly convergent power series expansion.

In the case when \underline{A} is a rectangular matrix and P is evaluated by means of an iterated backward recurrence scheme of the form

$$P(x, y) = ((\dots(p_m y + p_{m-1})y + \dots p_1)y + p_0 \quad (3.a)$$

where, for $j = 0(1)m$:

$$P_j = q_{0j} \begin{cases} q_{n+1 j} = 0 \\ q_r j = x q_{r+1 j} + a_{rj}, \quad r = n(1)0 \end{cases} \quad (3.b)$$

(or the equivalent scheme with the variables considered in reversed order), the elimination of an array, say, a_{nj} ($j = 0(1)m$) from \underline{A} induces a reduction of one in the number of multiplications required in each of the nests of (3.b) ⁽¹⁾. The adjustment of the polynomial evaluation scheme (3.a,b) for P to the new polynomial P_ϵ is then particularly simple.

If \underline{A} is upper triangular and a triangular condensation process is used, the deletion of, say, the a_{ij} 's with the largest constant sum $i+j$, will suggest a similarly simple change in the polynomial evaluation scheme for P to get the corresponding scheme for P_ϵ .

However, the particular structure of the coefficients of P , or the frequency of use that is expected for P_ϵ may suggest a combination of the previous cases or the use of maximal condensation. In such cases, a more flexible evaluation scheme has to be devised for P_ϵ , which must take into account factors such as the necessity of using a variable index $n(j)$, instead of n , in the definition of the multiplication nests (3.b).

It should be remarked that in machines where the time taken to test a number for zero is considerably smaller than the multiplication time, more sophisticated evaluations schemes, where full advantage can be taken of inducing as many zeros as possible in \underline{C} , may become economically attractive.

NUMERICAL EXAMPLE

Let P be the truncation to degree 7 in $x^1 y^j$ of the power series expansion of $\exp(x+y)$:

(1) The same arguments apply, except for the fact that (3.a,b) must be replaced by Clenshaw's algorithm [3], if P is evaluated directly in terms of the c_{ij} , and not reconverted in powers of x and y .

$$\begin{aligned}
 P(x,y) = & 1 + x + y + (x^2 + 2xy + y^2)/2 + (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)/6 + \\
 & (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)/24 + (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + \\
 & 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5)/120 + (x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + \\
 & 6xy^5 + y^6)/720 + (x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + \\
 & 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7)/5040
 \end{aligned}$$

and $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-2}$.

In this case A is upper triangular and so is C.

(i) We first truncate P^{Ch} along the arrays $\{a_{7j}\}$, $\{a_{i7}\}$ until the sum of the deleted terms surpasses ε . The condensed polynomial has now a square matrix:

$$\begin{aligned}
 P_{\varepsilon}^{\square} = & 0.9990 + 1.0156(x+y) + 0.4229(x^2+y^2) + 1.0318 xy + \\
 & 0.2789(x^3+y^3) + 0.4313(x^2y+xy^2) + 0.2799(x^3y+xy^3) + \\
 & 0.1784 x^2y^2 + 0.1280(x^3y^2+x^2y^3) + 0.0556 x^3y^3
 \end{aligned}$$

and 10 different coefficients.

(ii) We now conduct our search along the lines of elements c_{ij} such that $i+j=7,6,\dots$ until the bound ε is attained. We get, again, a polynomial with an upper triangular matrix.

$$\begin{aligned}
 P_{\varepsilon}^{\nabla} = & 1.0024 + 0.9657(x+y) + 0.6132(x^2+y^2) + 1.2520 xy + 0.0195(x^3+y^3) + \\
 & 0.0422(x^2y+xy^2) + 0.4601(x^3y+xy^3) + 0.6875 x^2y^2 + 0.1174(x^4+y^4)
 \end{aligned}$$

and 9 different coefficients.

(iii) Finally, we proceed in such a way that the maximum number of elements of C are deleted while the condition (2) is satisfied. We arrive to the condensed polynomial form

$$\begin{aligned}
 P_{\varepsilon}^M = & 1.0000 + 0.9950(x+y) + 0.4666(x^2+y^2) + 0.1250 xy + 0.2540(x^3+y^3) + \\
 & 0.0422(x^2y+xy^2) + 0.4600(x^3y+xy^3) + 0.6866 x^2y^2
 \end{aligned}$$

with only 8 different coefficients.

<pre> o </pre>	<pre> o o o o o o o o o o o o o o o o </pre>	<pre> o o o o o o o o o o o o o o o </pre>	<pre> o o o o o o o o o o o o o </pre>
Coefficient Matrix <u>A</u>	Condensed forms of the Matrix <u>A</u>		
	(i)	(ii)	(iii)
Number of different coefficients:			
20	10	9	8

Figure 1. The coefficient matrix A and its condensed forms with a tolerance $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$

Had we started with a rectangular matrix $\underline{A} = ((a_{ij}))$, $i = 0(1)7$, $j = 0(1)7$, for P , the contribution of the lower diagonal elements of A would have lead to slightly different coefficients in cases (i)-(iii). For instance, in case (i) the expression of P_{ϵ}^{\square} , with its coefficients rounded again to 4D, is

$$\begin{aligned}
 P_{\epsilon}^{\square} = & 0.9990 + 1.0156(x+y) + 0.4229(x^2+y^2) + 1.0324 xy + \\
 & 0.2788(x^3+y^3) + 0.4299(x^2y+xy^2) + 0.2835(x^3y+xy^3) + \\
 & 0.1790 x^2y^2 + 0.1180(x^3y^2+x^2y^3) + 0.0778 x^3y^3
 \end{aligned}$$

The contribution of the coefficients in the lower diagonal of A should have been more significative had we not considered the truncation of a rapidly convergent power series expansion.

In the three cases considered above, the error surface shows a remarkable oscillatory behaviour (between the prescribed bounds $+\epsilon$ and $-\epsilon$) in the condensation domain Q_1 .

VECTORIAL AND TRIANGULAR CONDENSATION PROCESSES

We shall deduce now conditions to be satisfied by the coefficients of P for the numerical condensation process to be feasible, when a domain Q_1 and an error bound $\epsilon > 0$ are prescribed.

Two cases will be discussed in some detail: a) rectangular condensation, and b) triangular condensation. They will assist us to analyze the condensation of polynomials P with rectangular or upper triangular coefficient matrices, cases where economical evaluation schemes are well known. Special intermediate cases will not be discussed since they can be treated along the lines of the former.

a) Rectangular condensation

From (1) and the fact that $|T_r(t)| \leq 1$ for $r = 0, 1, \dots$ and $0 \leq t \leq 1$, it follows that the leading coefficient c_{nm} of $\underline{C} = ((c_{ij}))$, $i = 0(1)n$, $j = 0(1)m$, can be deleted from the expression of pCh without violating (2) whenever

$$\epsilon > |c_{nm}| = \frac{2}{4^n} \frac{2}{4^m} |a_{nm}|$$

That is,

$$|a_{nm}| < 4^{n+m-1} \epsilon \quad (4)$$

in terms of the coefficients of P .

In turn, c_{nm} and c_{n-1m} can be deleted from \underline{C} if the coefficients a_{nm} and a_{n-1m} of P satisfy the condition:

$$\frac{2n+1}{4} |a_{nm}| + |a_{n-1m}| < 4^{n+m-1} \epsilon \quad (5)$$

A similar condition (with $2m$ instead of $2n$) secures the possibility of deleting c_{nm} and c_{n-1m} from \underline{C} , in terms of a_{nm} and a_{n-1m} .

From (4) and (5) we easily deduce that the entire array c_{im} , $i = 0(1)n$, can be eliminated from \underline{C} if the corresponding coefficients in \underline{A} satisfy the condition.

$$\sum_{s=0}^n \sum_{k=0}^{n-s} 4^s |a_{n-sm}| \binom{2(n-s)}{k} < 4^{n+m-1} \epsilon \quad (6)$$

where the "," in the summation sign indicates that a weight equal to $1/2$ must be applied when $k = 0$.

After some elementary manipulation on (6) we get the simpler conditions

$$\sum_{s=0}^n |a_{n-sm}| < 2^{2m-1} \epsilon \quad (7)$$

and

$$\sum_{s=0}^m |a_{nm-s}| < 2^{2n-1} \epsilon \quad (8)$$

for the possibility of deleting, respectively, c_{im} , $i = 0(1)n$, or c_{nj} , $j = 0(1)m$, from the matrix \underline{C} without violating condition (2).

The same conditions obviously apply if \underline{A} is an upper triangular matrix which we try to make as "rectangular" as possible (for instance, to fit it into an iterated backward recurrence scheme).

b) Triangular condensation

We shall consider here two subcases: $b_1)$ $\underline{A} = ((a_{ij}))$, $i = 0(1)m$, is rectangular and we want to trim from \underline{C} a triangle of elements with a vertex on c_{nm} ; $b_2)$ $\underline{A} = ((a_{ij}))$, $i+j = 0(1)n$, is an upper triangular matrix.

$b_1)$ From (1) again, we find that the coefficients c_{nm} , c_{n-1m} and c_{nm-1} can be deleted from \underline{C} without surpassing the error bound ϵ in the domain Q_1 , provided that the coefficients a_{nm} , a_{n-1m} and a_{nm-1} satisfy the condition:

$$\frac{1+2(n+m)}{4} |a_{nm}| + |a_{n-1m}| + |a_{nm-1}| < 4^{n+m-2} \epsilon .$$

In the case of a triangular section of elements of \underline{C} , with a vertex in C_{nm} and involving $k+1$ arrays of elements, the last condition generalizes to

$$\sum_{r+s=0}^k 4^{r+s} |a_{n-rm-s}| \sum_{i+j=0}^{k-(r+s)} \binom{2(n-r)}{i} \binom{2(m-s)}{j} < 4^{n+m-1} \epsilon$$

which in turn, after some manipulation, takes the form

$$\sum_{r+s=0}^k 4^{r+s} |a_{n-rm-s}| \sum_{p=0}^{k-(r+s)} \binom{2(n+m-(r+s))}{p} < 4^{n+m-1} \epsilon \quad (9)$$

b₂) By similar considerations we find that the array c_{ij} , $i+j = n$, can be deleted from the coefficient matrix \underline{C} without violating condition (2) provided that the coefficients of P satisfy the following condition:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} |a_{n-ij}| < 4^{n-1} \epsilon . \quad (10)$$

where the " , " in the summation sign indicates that weights equal to 1/2 must be applied to the elements a_{n0} and a_{0n} .

AN ALGORITHM FOR POLYNOMIAL CONDENSATION

SWITCH is a variable which takes the values 0,1,2 and 3. Each of its values is associated with one specific condensation strategy: along rows of the coefficients matrix (SWITCH = 0), along columns (SWITCH = 1), alternatively along rows and columns (SWITCH = 2) or along secondary diagonals (SWITCH = 3). The sets of indices $\{i,j\}$ corresponding to each of those condensation paths are indicated by the array \mathcal{C} , which takes, respectively, the values $\mathcal{C}_{x,w} = 0(1)2$.

$\underline{C} = \underline{C}^*$ is an operation which redefines \underline{C} and \underline{C}^* . The latter being a matrix which results from deleting in the current definition of \underline{C} all the elements with indices in the condensation path \mathcal{C} .

ALGORITHM

1) Set SWITCH = 0,1,2 or 3

$$\underline{C} = ((c_{ij})), i = 0(1)I, j = 0(1)J$$

$$W = \text{SWITCH}$$

$$r = \text{FLAG} = 1$$

$$S_0 = 0$$

If SWITCH = 3, Set $W = r = \text{FLAG} = 0$

2) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_W$
 If $S = S_0 + \sum_{i,j \in \mathcal{C}} |c_{ij}| < \epsilon$, Set $c_{ij} = 0$, for $i, j \in \mathcal{C}$
 $C = C^*$
 $S_0 = S$
 If FLAG = 1, Go to 2)
 Set $r = r + 1$
 $W = 1 + (-1)^r$
 Go to 2)

If FLAG = 1, Stop

Set $r = r + 1$

$W = 1 + (-1)^r$

FLAG = 1

Go to 2)

END

An algorithm for optimal condensation executes the same functions as the Algorithm above, but on a larger choice of condensation paths \mathcal{C} . It then selects the tree from c_{nm} which induces the largest number of zeros in \underline{C} .

NUMERICAL EXAMPLE

Conditions (7)-(10) can be applied to predict, directly in terms of the given polynomial P , whether the numerical condensation of that polynomial with a tolerance of ϵ is or not possible in the domain given Q .

In the case of the polynomial $P(x,y)$, given in the numerical example, which has a triangular matrix \underline{A} , we get-rounded to 4D - the following results:

i) for vectorial condensation

$$TV = \sum_{s=0}^7 |a_{7-s7}| = \sum_{s=0}^7 |a_{77-s}| = 0.0002 ;$$

ii) for triangular condensation

$$TT = \sum_{s=0}^7 |a_{7-ij}| = 0.0254 .$$

If $P(x,y)$ is taken to be the truncation of the power series expansion of $\exp(x+y)$ to degree 7 in each of the variables, we get a rectangular coefficient matrix A. In this case we get, rounding again to 4D:

i) for vectorial condensation

$$RV = \sum_{s=0}^7 |a_{7-s7}| = \sum_{s=0}^7 |a_{77-s}| = 0.0005 ;$$

ii) for triangular condensation

$$RT = a_{77} = 0.0000$$

With $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ both types of numerical condensation are possible for the two kinds of polynomials P considered above, since $2^{-13} TV$, $2^{-12} TT$, $2^{-13} RV$ and $2^{-12} RT$ are all numbers below the bound ϵ .

APPLICATIONS OF POLYNOMIAL CONDENSATION TO THE ACCELERATION OF THE CONVERGENCE OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Let us consider the elliptic problem

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad (11.a)$$

in the square domain $Q_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, with the boundary condition

$$f|_{\partial Q_2} = 0 . \quad (11.b)$$

This problem describes the elastic torsion of a prismatic

bar, with a section equal to Q_2 , in terms of the torsion function $f(x,y)$.

A theoretical discussion of this problem is given in Knudsen and Katz [8]. Numerical approximations have been discussed by several authors: Southwell used his relaxation method in [12] and, more recently, Mason [10] (see also Fox and Parker [6]) applied a two dimensional extension of Lanczos' selected points method [9, pp.193-196]⁽²⁾ and obtained accurate results.

We shall assume that the solution of our problem is required at a sufficiently large number of points (for instance, for graphical display) for the overhead of doing numerical condensation to be negligible: We generate a primary approximate solution, within a prescribed accuracy, using a computationally simple technique, for instance the method of least square (see [1],[2],[4],[11] and [13] for details on error estimations in this method), or some other weighted residuals alternative (see [5]). We then condensate such approximate solution within an error bounded by a tolerance parameter ϵ .

A comparison of the maximum error of a condensed approximate solution and a solution of the same degree obtained by the accurate method of Chebyshev collocation, is favourable to our condensation method.

We start with a primary solution in Q_2 of the form

$$P_{nm}(x,y) = (x-2)(y-2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} x^i y^j$$

which satisfies exactly the boundary conditions of our problem. Then, we evaluate the coefficients a_{ij} with a least squares condition at a set of equidistant points.

Let us take $n=m=6$, ie, $P_{66} \in \mathcal{P}_{6,6}$, the maximum error is:

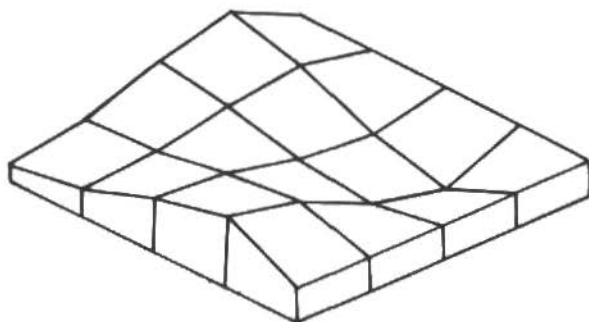
$$e = \|f - P_{66}\| < 0.005 .$$

If we choose $\epsilon = 0.0008$, well below e , and take into account the symmetry of our problem, we can condense P_{66} within an error

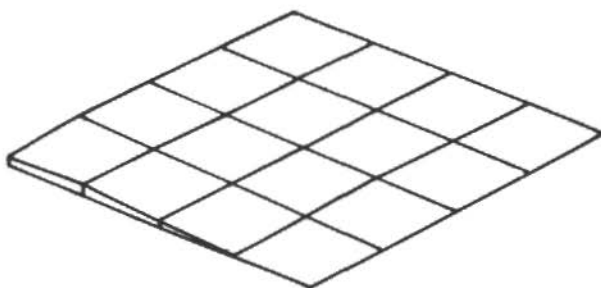
(2) This method is also referred to as Chebyshev collocation and orthogonal collocation. The last name is used, particularly, in the chemical literature (see for instance Finlayson [5]).

of ϵ in Q_1 . We get a polynomial P_ϵ in $\mathcal{P}_{4,4}$. The economy in the number of coefficients is 30.55%.

A comparison between the numerical values of the exact solution, the Chebyshev collocation approximate solution and our condensed representation of a least squares solution, the last two of degree 4 in each of the variables, is shown in Figure 2.



(a)



(b)

Figure 2. Error surfaces of approximate solutions of problem (11) in $\mathcal{P}_{4,4}$ (a) Chebyshev collocation approximate solution; (b) condensed approximate solution (from a least squares solution in $\mathcal{P}_{6,6}$)

Since

$$\|f - P\|^2 \leq \iint_{Q_2} G^2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = \iint_{Q_2} (-2 - \nabla^2 p)^2 dx dy$$

(see Michlin [11]), where G is the Green's function of problem (11), we can compare the error of our condensed approximate solution $P_{\mathcal{E}}$ ($x, y \in \mathcal{P}_{4,4}$) with that of a least squares approximation P_{44} , in the same subspace.

Such comparison gives

$$\|f - P\| < 0.235 \|f - P_{44}\|$$

that is, a maximum error for the condensed approximation P four times smaller than that of the least squares solution P_{44} .

The maximum error of the Chebyshev collocation solution in $\mathcal{P}_{4,4}$ is slightly better than that of least squares but still larger than the one obtained by the condensation method. A comparison of these maximum errors is given in Table I.

Table I

Method	Max. Error from $\mathcal{P}_{4,4}$
Condensation	0.005
Chebyshev collocation	0.017
Least squares	0.020

If we consider relative errors, the maximum relative error of the Chebyshev collocation solution is 11.64%. The approximate solution obtained by condensation has an error of only 0.89%.

Since the approximate solution obtained with the method of collocation is the exact solution of the perturbed problem

$$\nabla^2 f^*(x, y) = -2 + H(x, y)$$

where $H(x, y)$ is the collocation residual, the choice of the zeros of Chebyshev polynomials as collocation points on ∂Q_2 aims at a reduction of the error in the equation.

This, however, is not necessarily the case as H is a

combination of Chebyshev polynomials with variable coefficients and is not clear that the cancellation of the error of the approximation at the zeros of Chebyshev polynomials will make $H(x,y)$ closer to the best approximation of zero in the subspace in which this polynomial is defined.

The relatively large error of Chebyshev collocation, compared with the error of the condensed approximate solution highlights the fact that the choice of Chebyshev zeros as collocation points for problem (11) is far from optimal in $\mathcal{P}_{4,4}$.

Finally, we would like to remark that the efficiency of the condensation technique is, ultimately, conditioned by the speed of convergence of the best approximation of f from subspaces $\mathcal{P}_{n,m}$. From Jackson's theorem in several variables (see Timan [14]), we can expect that for sufficiently smooth functions (in $C^{(r)}[Q]$), $E_{n,m}(f)$ will tend to zero at least as fast as $1/(s^2)r$ (with $s = \min(n,m)$) in the absence of singularities.

REFERENCES

- [1] Baker, G.A. - Simplified proofs of error estimates for the least squares method for Dirichlet's problem. Math. Comp., 27 (122): 229-235, 1973.
- [2] Bramble, J.H. and Schatz, A.H. - Rayleigh-Ritz-Galerkin methods for Dirichlet's problem using subspaces without boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math., 23: 653-675, 1970.
- [3] Clenshaw, C.W. - A note on the summation of Chebyshev series. MTAC, 9 118-120, 1955.
- [4] Fichera, G. - Methods of functional analysis in mathematical physics. Proc. International Math. Congress, Amsterdam, 1954.
- [5] Finlayson, B.A. - The method of weighted residuals and variational principles. Academic Press, New York, 1972.
- [6] Fox, L. and Parker, I.B. - Chebyshev polynomials in numerical analysis. Oxford Univ. Press, London, 1968.
- [7] Helman, H. - Hydrostatic extrusion of bimetallic composites. Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London, London, 1976.
- [8] Knudsen, J.G. and Katz, D.L. - Fluid mechanics and heat transfer. McGraw-Hill, 1958.
- [9] Lanczos, C. - Trigonometric interpolation of empirical and analytic functions. J. Math. Phys., 17: 123-199, 1938.
- [10] Mason, J.C. - Some new approximations for the solution of differential equations. D. Phil Thesis, Oxford University, Oxford, 1965.

- [11] Michlin, S.G. — Variational methods in mathematical physics. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [12] Southwell, R.V. — Relaxation methods in theoretical physics. Oxford University Press, London, 1946.
- [13] Picone, M. — Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione. Atti dei 19 Congresso dell'Unione Mathematica Italiana, 1937.
- [14] Timan, A.F. — Theory of approximation of functions of a real variable. Pergamon Press, Oxford, 1963.

ANALYSIS OF FORCED CONVECTION ALONG FLAT PLATES WITH VARIABLE PROPERTIES

Paulo Roberto de Souza Mendes
Francisco Eduardo Mourão Saboya
Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

SUMÁRIO

O efeito da variação das propriedades do ar nos perfis de temperatura e entalpia do escoamento laminar ao longo de placas planas isotérmicas é analisado. Coeficientes de atrito e de transferência de calor são calculados e comparados com dados disponíveis na literatura. Os resultados são obtidos por intermédio de soluções similares das equações da camada limite, utilizando a transformação de Crocco.

SUMMARY

The effect of air property variations on velocity and enthalpy profiles of the laminar flow along isothermal flat plates is analyzed. Skin friction and heat transfer coefficients are calculated and compared with the ones found in literature. The results are obtained via similarity solutions of the boundary layer equations, using the Crocco's transformation.

NOMENCLATURE

- c_p - specific heat at constant pressure
- \bar{c}_p - average c_p , defined as $(i_w - i_\infty)/(T_w - T_\infty)$
- E - Eckert number, $U^2/(i_w - i_\infty)$
- f - local friction coefficient, $2\tau_w/\rho U^2$
- g - a function of x

- g_* - a function of u_*
 h - local heat transfer coefficient
 i - local specific enthalpy
 Nu - Nusselt number, hx/κ_∞
 Pr - Prandtl number, $\mu c_p/\kappa$
 Re - Reynolds number, $\rho_\infty Ux/\mu_\infty$
 T - local temperature
 T_{aw} - adiabatic wall temperature
 u - x-component of local velocity
 u_* - Crocco's similarity variable, u/U
 U - velocity outside boundary layer
 v - y-component of local velocity
 x - coordinate along the plate
 y - coordinate perpendicular to plate

Greek symbols

- η - Blasius similarity variable
 θ - dimensionless enthalpy, $(i - i_\infty)/(i_w - i_\infty)$
 κ_∞ - thermal conductivity outside boundary layer
 μ - dynamic viscosity
 μ_* - dimensionless viscosity, μ/μ_∞
 ρ - mass density
 ρ_* - dimensionless density, ρ/ρ_∞
 τ - shear stress
 ϕ - parameter of Sutherland's equation

Subscripts

- w - at the wall
 ∞ - outside boundary layer

INTRODUCTION

When the fluid properties depend on temperature, the solution of the boundary layer equations becomes more involved. The mass, momentum and energy conservation equations must be solved simultaneously, and no similar solutions can be obtained by means of the conventional similarity variable η , not even for flows along flat plates, which represent the simplest case.

L. Crocco [2,3,4] suggested a few decades ago another change of variables in the boundary layer equations that was more

promising for compressible flows. Some years later, van Driest [5] employed Crocco's transformation and obtained similarity solutions for flows along flat plates allowing the variation with temperature of the mass density ρ and of the dynamic viscosity μ , but assuming constants both the Prandtl number Pr and the specific heat at constant pressure c_p .

The present work is concerned with similar solutions (via Crocco's transformation) of the boundary layer equations for laminar variable-property flows along flat plates, considering the effect of frictional heat. The flowing fluid is air, and the Prandtl number, the specific heat at constant pressure, the mass density and the dynamic viscosity are all considered as functions of the local temperature T .

THE CROCCO'S CHANGE OF VARIABLES

For variable-property flow along a flat plate the boundary layer equations are

$$\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y = 0 \quad (1)$$

$$\rho(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y) = \partial(\mu\partial u/\partial y)/\partial y \quad (2)$$

$$\rho(u\partial i/\partial x + v\partial i/\partial y) = \mu(\partial u/\partial y)^2 + \partial((\mu/Pr)\partial i/\partial y)/\partial y \quad (3)$$

where x and y are the coordinates along and perpendicular to the plate, u and v are the corresponding velocity components and i is the local specific enthalpy of the flowing fluid. For isothermal plates, the boundary conditions are

$$\begin{aligned} u(x,0) = v(x,0) = 0 & \quad ; & \quad i(x,0) = i_w \\ u(x,\infty) = U_\infty & \quad ; & \quad i(x,\infty) = i_\infty \end{aligned} \quad (4)$$

U_∞ , i_w and i_∞ are constants. U_∞ is the undisturbed flow velocity, and the subscripts w and ∞ denote respectively the value to the subscripted property at the wall and far away from the plate.

Now equation (2) is solved for v and substituted into equation (1), and the resulting equation is written in terms of the shear stress τ , which is assumed to be equal to $\mu\partial u/\partial y$ for boundary layer flows. The result is

$$\begin{aligned} & \{ (1/\tau) (\partial \mu / \partial y) - (\mu / \tau^2) (\partial \tau / \partial y) \} \{ (\partial \tau / \partial y) - \rho u (\partial u / \partial x) \} + \\ & + (\mu / \tau) \{ (\partial^2 \tau / \partial y^2) - (\rho u / \mu^2) [\mu (\partial \tau / \partial x) - \tau (\partial \mu / \partial x)] - \\ & - u (\partial u / \partial x) (\partial \rho / \partial y) + (u \tau / \mu) (\partial \rho / \partial x) \} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

with the boundary conditions

$$(\partial \tau / \partial y)_{y=0} = 0 \quad \text{and} \quad \tau(x, \infty) = 0 \quad (6)$$

The boundary condition at $y = 0$ is obtained by evaluating equation (2) at the wall.

The next step is to submit equation (5) to a change of variables of the form $(x, y) \rightarrow (x, u_*)$. The new variable u_* is defined as $u_* \equiv u(x, y) / U$. Equation (5) reduces to

$$\begin{aligned} & (\partial^2 \tau / \partial u_*^2) + \mu \rho u_* U^3 [\partial (1/\tau) / \partial x] + (\mu^2 / \tau) \rho u_* U^3 [\partial (1/\mu) / \partial x] + \\ & + (\mu / \tau) u_* U^3 \partial \rho / \partial x = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

The boundary conditions (6) become

$$(\partial \tau / \partial u_*)_{u_*=0} = 0 \quad \text{and} \quad \tau(x, 1) = 0 \quad (8)$$

It is desired that the x -dependence in equation (7) vanishes. A separation of variables of the form below is tried.

$$\tau(x, u_*) \equiv C g(x) g_*(u_*)$$

C is an arbitrary constant, chosen here to be equal to $(u_\infty \rho_\infty / 2)^{1/2}$. Substitution into equations (7) and (8) yields

$$\begin{aligned} & (2 x g^2 / U^3) g_*^2 g_*'' - 4 \mu_* [x (g' / g) \rho_* u_* g_*] + \mu_*^2 g_* (\rho_* u_* x [\partial (1/\mu_*) / \partial x]) + \\ & + 4 \mu_* u_* g_* x (\partial \rho_* / \partial x) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$g_*'(0) = 0 \quad \text{and} \quad g_*(1) = 0 \quad (10)$$

where $\rho_* \equiv \rho/\rho_\infty$ and $\mu_* \equiv \mu/\mu_\infty$. It is interesting to note that ρ_* and μ_* are sole functions of u_* , since the fluid properties depend only on the temperature T , which, for the case of isothermal flat plates, is a function of u_* alone. This fact implies in major simplifications in equation (9), and if the function g is chosen to be of the form $(U^3/2x)^{1/2}$, its x -dependence is completely eliminated. The resulting equation is simply

$$g_*'' g_* + 2 \mu_* \rho_* u_* = 0 \quad (11)$$

with the boundary conditions given in equation (10).

An analogous coordinate transformation (see reference [1] for details) can be applied to equation (3), giving

$$\theta'' + ((1 - Pr)g_*'/g_* - Pr'/Pr)\theta' = -Pr E \quad (12)$$

with the boundary conditions

$$\theta(0) = 1 \quad \text{and} \quad \theta(1) = 0 \quad (13)$$

The function $\theta(u_*)$ is defined as $\theta \equiv (i - i_\infty)/(i_w - i_\infty)$ and $E \equiv U^2/(i_w - i_\infty)$ is the Eckert number.

The local friction coefficient $f \equiv 2\tau_w/\rho U^2$ and the local Nusselt number $Nu \equiv hx/\kappa_\infty$ (h is the convective heat transfer coefficient and κ_∞ is the fluid thermal conductivity) can be related to the functions g_* and θ as follows

$$f = g_*(0)/(Re)^{1/2} \quad (14)$$

and

$$Nu/(Re)^{1/2} = -(\bar{c}_p Pr_\infty/2 Pr_w c_{p\infty}) g_*(0) \theta'(0) \quad (15)$$

where $Re \equiv \rho_\infty Ux/\mu_\infty$ is the local Reynolds number and $\bar{c}_p \equiv (i_w - i_\infty)/(T_w - T_\infty)$.

THE AUXILIARY RELATIONS

Before equations (11) and (12) can be solved to determine $g_*(u_*)$ and $\theta(u_*)$, additional information on the functions $\rho_*(u_*)$,

$\mu_*(u_*)$ and $Pr(u_*)$ is needed. Therefore, it becomes mandatory to know the nature of the flowing fluid, which will influence directly the functions g_* and θ . Air is chosen in this work due to its large applicability in practical situations, although any other fluid with temperature dependent properties could be chosen as well.

The ideal gas law is employed to determine ρ_* , which as a function of temperature can be written on the form $\rho_* = T_\infty/T$. The dimensionless viscosity μ_* is given by the Sutherland's equation for air, which is written as $\mu_* = (T/T_\infty)^{3/2}(1+\phi)/[(T/T_\infty) + \phi]$. The parameter ϕ is defined as $\phi \equiv 110/T_\infty$, where T_∞ is in degrees Kelvin.

The Prandtl number variation with temperature (or enthalpy) is obtained from tables found in the literature [6], which also give the relationship between the air temperature and enthalpy. For convenience, two curve fittings relating respectively $Pr \times i$ and $T \times i$ were determined from the data given in [6] by the least square method.

It is important to emphasize that, since the energy equation is written in terms of the enthalpy (rather than temperature), the variation of c_p with temperature is implicitly taken into account.

The next task is to transform the expressions above into functions of the independent variable u_* . This is not difficult, since the temperature is a sole function of the enthalpy i , which depends on u_* alone (recall, $i = i_\infty + (i_w - i_\infty)\theta(u_*)$). Therefore, the expressions for $\rho_*(u_*)$, $\mu_*(u_*)$ and $Pr(u_*)$, involve the dimensionless enthalpy $\theta(u_*)$ and the parameters i_w and i_∞ . This fact implies in the presence of θ in equation (11), requiring the simultaneous solution of equations (11) and (12).

THE SOLUTION SCHEME AND RESULTS

A numerical solution of equations (11) and (12) is required, due to their nonlinear nature and variable coefficients. The fourth-order Runge-Kutta method of integration is selected. Due to the nature of this method, it is necessary to transform the boundary conditions of these equations (given in (10) and (13)) into initial conditions, i.e., all conditions should be specified at $u_* = 0$. This is handled by the two-variable Newton-Raphson shooting method, which is combined with the Runge-Kutta method.

The resulting integration scheme starts with guessing values for $g_*(0)$ and $\theta'(0)$; with these guesses and the conditions at $u_* = 0$ ($g_*'(0) = 0$ and $\theta(0) = 1$), equations (11) and (12) are simultaneously integrated by the Runge-Kutta method; the resulting values of $g_*(1)$ and $\theta(1)$ (which should be both equal to zero) are compared with the right boundary conditions; if the deviation is small (less than 10^{-6}) the integration is concluded, if not, new guesses for $g_*(0)$ and $\theta'(0)$ are calculated with the aid of the two-variable Newton-Raphson method and utilized in a new integration. This iterative procedure continues until convergence is attained.

Besides the Eckert number, which appears in equation (13), other parameters arise when the auxiliary relations are substituted into the differential equations. One of them is the parameter ϕ that appear in the Sutherland's equation, which is directly related to T_∞ . The enthalpies i_w and i_∞ also appear, but since i and T have a known relationship, both will be determined if ϕ and the T_w/T_∞ are specified. Therefore, the parameters for the problem are E , ϕ and T_w/T_∞ .

The equations for the special case of $Pr = 0.7$ and $c_p =$ constant can be obtained directly from equations (11) and (12) by dropping the term Pr'/Pr in equation (12) and substituting the enthalpy by the temperature in the definition of $\theta(u_*)$. Although these simplified equations were solved in [5], the integration scheme employed there was poorer (although very ingenious), due to the lack of powerful computers at that time. Therefore, in order to provide good basis for comparison with the case of variable properties, these equations for constant Pr and c_p were also integrated here, and to obtain the equations for the case of constant properties, equations (11) and (12) are further simplified by setting $\rho_* = \mu_* = 1$. The solution of these constant-property equations was also obtained in this work, to supply the analysis of the results with additional data.

The solutions of the equations are graphically represented in Figure 1 through 8. All the results shown are for $\phi = 0.505$. Figures 1 and 2 illustrate the effect of fluid property variation on the function $g_*(u_*)$ for $T_w/T_\infty = 0.5$ and 4.0 respectively.

In Figure 1 ($T_w/T_\infty = 0.5$), it can be seen that, for the case of no frictional heat ($E = 0$), the curve falls higher than the constant-property distribution, whereas the other curves are below it.

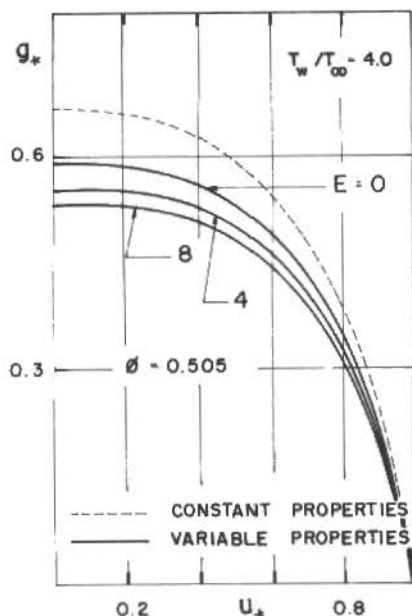


Figure 2. The function $g_*(u_*)$ for some representative cases

It is worthy of note that the hypotheses of constant Pr and c_p do not affect the function $g_*(u_*)$ for the situations investigated.

An interesting result about the dimensionless enthalpy $\theta(u_*)$ is that it shows essentially no variation with T_w/T_∞ in the range explored, namely, from 0.5 to 6. Figure 3 shows the function $\theta(u_*)$ for a wide range of Eckert numbers. The curves denominated " $Pr = Pr(u_*)$ " represent the solution of equations (11) and (12), whereas the curves denominated " $Pr = 0.7$ " pertain to the special case of constant c_p and Pr . It is observed that, for $E \geq 0$, the variations of Pr and c_p with temperature is unimportant as far as θ is concerned, and for negative values of E , only a mild effect is detected. Moreover, a comparison between the results in Figure 3 and the function $\theta(u_*)$ for constant properties (not shown) leads to an interesting conclusion-- (u_*) depends very little on fluid property variations with temperature.

On the other hand, in Figure 2 ($T_w/T_\infty > 1$) it is observed that all curves fall below the constant-property distribution. This is a consequence of the temperature dependence of the product $\rho_* \mu_*$, which is greater than unity when $T/T_\infty < 1$ and less than unity when $T/T_\infty > 1$. Inside the boundary layer, a necessary condition for $T/T_\infty < 1$ is $T_w/T_\infty < 1$ (Note that this condition is not sufficient, since, if there is frictional heat, the temperature in the boundary layer may rise over T_∞). Therefore, in the situation of $E = 0$ and $T_w/T_\infty = 0.5$ (shown in Figure 1), the product $\rho_* \mu_*$ is greater than unity, and hence by inspection of equation (11) and recalling that $\rho_* \mu_* = 1$ in the constant-property situation, it becomes clear that indeed the g_* distribution for this case should fall higher than the curve for constant properties. Furthermore, since, for all other cases shown in Figures 1 and 2, it happens that $\rho_* \mu_* < 1$ somewhere inside the boundary layer (and decreasing as the frictional heat becomes larger), the behavior of the other curves are also explained.

It is worthy of note that the hypotheses of constant Pr and c_p do not affect the function $g_*(u_*)$ for the situations investigated.

An interesting result about the dimensionless enthalpy $\theta(u_*)$ is that it shows essentially no variation with T_w/T_∞ in the range explored, namely, from 0.5 to 6. Figure 3 shows the function $\theta(u_*)$ for a wide range of Eckert numbers. The curves denominated " $Pr = Pr(u_*)$ " represent the solution of equations (11) and (12), whereas the curves denominated " $Pr = 0.7$ " pertain to the special case of constant c_p and Pr . It is observed that, for $E \geq 0$, the variations of Pr and c_p with temperature is unimportant as far as θ is concerned, and for negative values of E , only a mild effect is detected. Moreover, a comparison between the results in Figure 3 and the function $\theta(u_*)$ for constant properties (not shown) leads to an interesting conclusion-- (u_*) depends very little on fluid property variations with temperature.

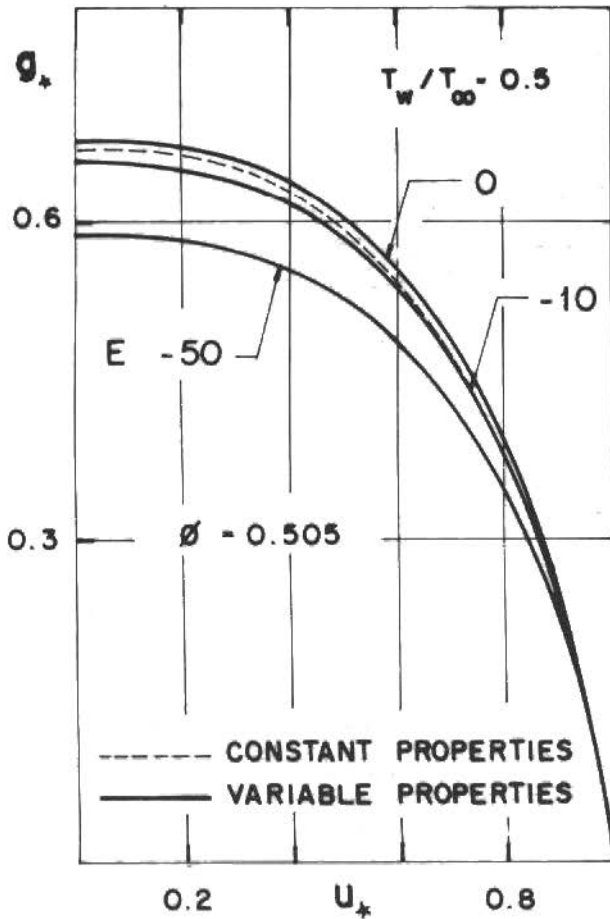


Figure 1. The function $g_*(u_*)$ for some representative cases

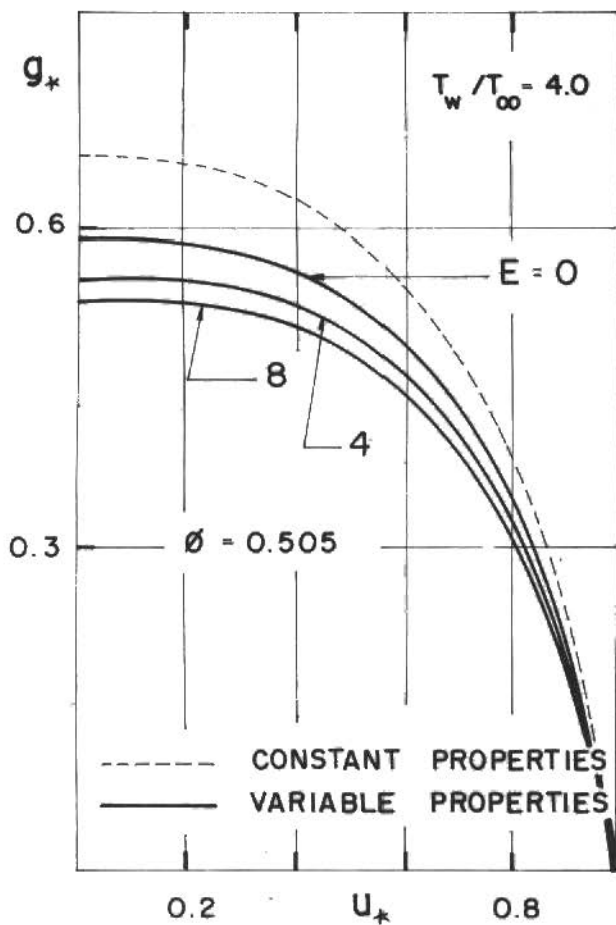


Figure 2. The function $g_*(u_*)$ for some representative cases

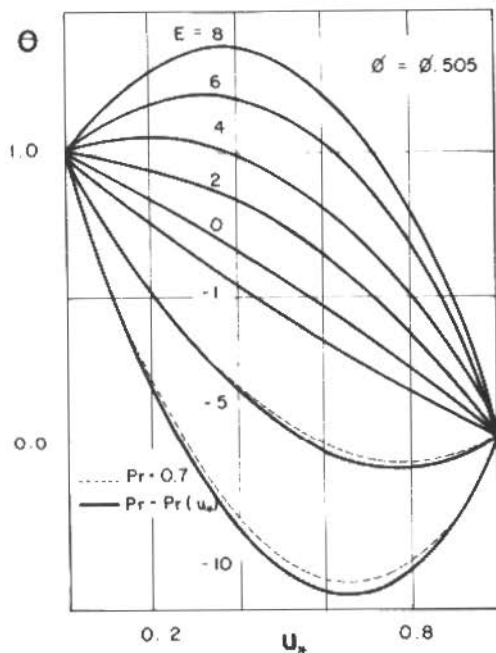


Figure 3. The (u_*) distribution for different values of E

Figure 4 gives the ratio $f/f_{\text{constant properties}}$ for the cases of $T_w/T_\infty = 0.5, 2, 4$ and 6 (recall that $f_{\text{constant properties}} = 0.6641/(Re)^{1/2}$). Except for $T_w/T_\infty = 0.5$ and small Eckert numbers, it can be seen that the friction coefficient obtained when the property variations are neglected is higher than the actual ones, and the discrepancy gets larger as the frictional heat becomes more important. Differences of up to 26% were detected ($E = 8$, $T_w/T_\infty = 6$). Another fact observed is that the curves for variable properties essentially coincide with the corresponding curves for constant Pr and c_p . Therefore, the combined variations with temperature of the mass density and dynamic viscosity are by far more important than the variations of Pr and c_p , as far as the local friction coefficient is concerned.

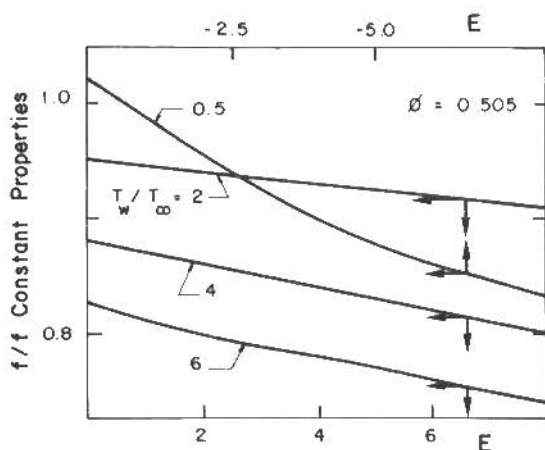


Figure 4. The local friction coefficient as a function of E .

The Nusselt number is given as a function of the Eckert number in Figures 5 through 8, pertaining respectively to the cases of $T_w/T_\infty = 0.5, 2, 4$ and 6 . It is seen that the Nusselt number is negative for large values of E , meaning that, although $T_w > T_\infty$, the heat flux direction is from the fluid to the plate, due to frictional heat. When $T_w < T_\infty$ ($T_w/T_\infty < 1$ and $E < 0$), the heat flux always goes from the fluid to the plate, and the Nusselt number is always positive, increasing monotonically with the frictional heat.

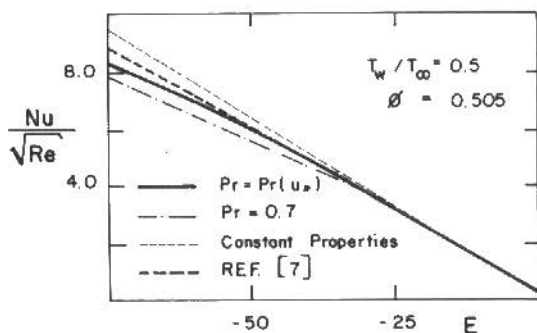


Figure 5. The Nusselt number as a function of E .

In Figures 6, 7 and 8 it can be seen that the Nusselt number is null when $E = 2.39$. Furthermore, this adiabatic value of the Eckert number is essentially constant, showing no dependence on the hypothesis of constant or variable properties. In other words, the curves " $Pr = Pr(u_*)$ ", " $Pr = 0.7$ " and the one for constant properties cross each other at the point $(2.39, 0)$. The correction suggested at page 303 in Reference [7], namely, $Nu/Nu_{\text{constant properties}} = (T_w/T_\infty)^{-0.08} (T_{aw}/T_\infty)^{-0.04}$, is also shown in Figures 5 and 8. In the cases of Figures 6 and 7, this correction coincides with the solution for constant Pr and c_p (curve " $Pr = 0.7$ "). It is interesting that the curve for variable properties ($Pr = Pr(u_*)$) is always closer to the curve for constant properties than the curve for constant Pr e c_p , being the two curves (constant and variable properties) nearly coincident for small values of E . Another interesting fact is that the correction of Reference [7] gives better results than the solution for constant c_p and Pr .

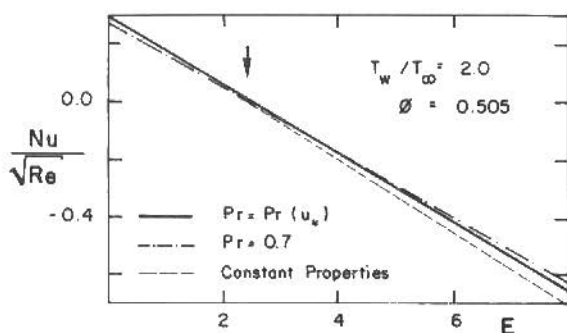


Figure 6. The Nusselt number as a function of E

FINAL REMARKS

The variation of air properties with temperature was shown to have considerable influence on high-velocity boundary layer flows along a flat plate. Neglecting the property variations superestimates the dimensionless shear stress distribution $g_*(u_*)$, except in cases of small frictional heat and $T_w < T_\infty$. The dimensionless enthalpy distribution $\theta(u_*)$ is essentially unaffected by property variations.

The hypothesis of constant Pr and c_p has nearly no influence on the distributions of g_* and θ (as assumed in Reference [5]) and hence on the local friction coefficient. The Nusselt number, however, is fairly affected by this assumption, mainly due to the omission of the term $\bar{c}_p Pr_\infty / Pr_w c_{p\infty}$, which is equal to unity when Pr and c_p are considered constant.

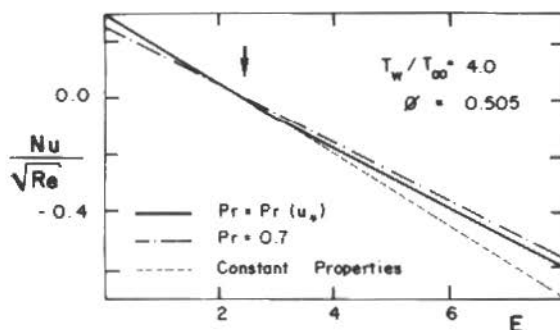


Figure 7. The Nusselt number as a function of E

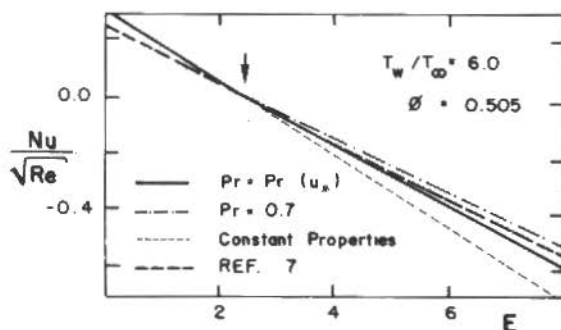


Figure 8. The Nusselt number as a function of E

REFERENCES

- [1] P.R. Souza Mendes - Análise da camada limite através da transformação de Crocco. M.Sc. Thesis, PUC/RJ (1979).
- [2] L. Crocco - Sulla trasmissione del calore de una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità. L'Aerotecnica, vol.12, pp.181-197 (1932).
- [3] L. Crocco - Sullo strato limite laminaire nei gas lungo una lamina piana. Rend. Mat. Univ. Roma, vol.2, p.138 (1941).
- [4] L. Crocco - Lo strato laminaire nei gas. Monografie Scientifiche di Aerinautica n°3, Ministero della Difesa Aeronautica, Roma (1946), Trab. North American Aviation Aerophysics Lab., Rep. ÁL-684 (1948).
- [5] E.R. Van Driest - Investigation of laminar boundary layers in compressible fluids using the Crocco's method. NACA T.N. 2597, Washington (1952).
- [6] J.H. Keenan and J. Kaye - Gas tables. John Wiley, New York (1980).
- [7] W.M. Kays and M.E. Crawford - Convective heat and mass transfer. McGraw-Hill (1980).

INSTRUÇÕES PARA ASSOCIAR-SE À ABCM

Preencher a ficha anexa, destacá-la e enviá-la para
ABCM

LCC - Laboratório de Computação Científica

Rua Lauro Müller, nº 455

Caixa Postal 56018

22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil



Remeter juntamente com a referida ficha, para o mesmo endereço, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor de 1,36 ORTN's, para sócios efetivos e US\$20,00 para estrangeiros. Estudantes pagarão a metade dos valores e sócios institucionais 27,16 ORTN's.



FORMULÁRIO PARA AFILIAÇÃO



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PARA USO DA ASSOCIAÇÃO

Recebido	Aprovado
Readmitido	Eleito Membro
Membro Nº	Anuidade

Membro Nº

Afiliação para
Nome (Abrevie se necessário)

admissão
 mudança
 readmissão

para a categoria de Membro Individual

Aspirante (Estudante)
 Efetivo

Renovação, qual o último ano de afiliação efetiva?

Endereço Residencial
Rua, Nº, Apto

EP, Cidade, Estado, País

Endereço Comercial
Rua, Nº, Departamento, etc.

EP, Cidade Estado, País

Empresa

Título Profissional

Ocupação Atual
Engenheiro de Produção, Professor Assistente, etc.

Data de Nascimento

Endereço para onde deve ser enviada correspondência: Residência Empresa

FORMAÇÃO SUPERIOR E TÍTULOS

Indique em ordem cronológica sua formação superior. Em áreas de engenharia deve-se indicar, ex. Engenharia Mecânica, Metalúrgica, etc., e em áreas de especialização: Industrial, Ciências dos Materiais, etc. Estudantes devem indicar data prevista de graduação.

Universidades	Graus	Datas	Área	Especialização

