VOL. VII - N.º 3 - 1985

ISSN 0100-7386

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

PUC – Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.

REVISTA
BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS

Vol. VII, nº 3 - Set. 1985

Boundary integral method evaluation of the nusselt number in laminar flow in ducts of arbitrary cross section 185

Sergio Cole
Professor of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Federal University of Santa Catarina
Caixa Postal 476
88.000 - Florianópolis - SC
Brazil

Escoamento paralelo de filme líquido laminar e corrente turbulenta de ar num canal 207

P. M. S. Araújo
A. S. Vargas
Deptº de Engenharia Mecânica
PUC/RJ

Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais. Parte 1: Camadas viscosas 225

Marcos Aurélio Ortega
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SCJ - SP

Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais Parte 2: Núcleo e solução geral 245

Marcos Aurélio Ortega
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SJC - SP

Relações constitutivas para escoamentos de fluidos não-newtonianos através de meios porosos saturados 267

Rogério Martins Saldanha da Gama, LNCC/CNPq
Rubens Sampaio, DEM-PUC/RJ

J. DI GIORGIO EDITORES
TEL.: 261-5042 (PABX)

A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO

DO CNPq E FINEP
COMPANHIA VALE DO RIO DOCE
IBM DO BRASIL

BOUNDARY INTEGRAL METHOD EVALUATION OF THE NUSSELT NUMBER IN LAMINAR FLOW IN DUCTS OF ARBITRARY CROSS SECTION

Sergio Colle
Professor of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Federal University of Santa Catarina
Caixa Postal 476
88.000 Florianópolis - SC
Brazil

ABSTRACT

The integral equation technique is applied to solve the heat transfer problem of the fully developed laminar flow and heat transfer in straight ducts with arbitrary cross section and arbitrary boundary conditions. The heat flux is assumed to be axially uniform. The cross section geometry can have simply and multiply-connected shape. Appropriate boundary Green's formulas are presented for each particular boundary condition analysed. The boundary conditions of peripheral heat flux and temperature are investigated and numerical values of the Nusselt number are obtained for geometries of circular, elliptical, isosceles triangular, rectangular, circular-flattenned and eccentric-annular cross sections. These data are compared with available data from previous published references.

NOMENCLATURE

A^*	cross section area of D
A	dimensionless cross section area of D, A^*/ℓ^{*2}
c_p	fluid specfic heat
D	two-dimensioned Lyapunov region (cross section)
D_h^*	hydraulic diameter, $4A^*/L^*$
D_h	dimensionless hydraulic diameter
∂D	boundary of D (wall)

f	friction factor
$G(z,z')$	fundamental solution of the bi-harmonic operator
$\hat{G}(z,z')$	modified fundamental solution of the bi-harmonic operator
$g(z,z')$	fundamental solution of the Laplace operator
$\hat{g}(z,z')$	modified fundamental solution of the Laplace operator
$\bar{h}^*$	mean film coefficient on D, $Q^*/L^*(T^*_{sm}-T^*_b)$
k	fluid thermal conductivity
L^*	lenght of ∂D (wetted parameter)
L	dimensionless lenght of ∂D, L^*/ℓ^*
ℓ^*	characteristic lenght of D
M	number of subintervals of the real interval [c,d]
N	number of subintervals of the real interval [a,b]
Nu_h	Nusselt number referred to D^*_h, $\bar{h}^* D^*_h/k$
p^*	fluid pressure
Q^*	overall heat flux at the wall ∂D
q^*_n	local heat flux normal to the wall
q_n	local dimensionless heat flux, $q^*_n/\ell^{*3} \frac{dp^*}{dw^*} \rho c_p \frac{dT^*_b}{dw^*}$
Re_h	Reynolds number referred to D^*_h, $u^*_m D^*_h/\nu$
s^*	arc lenght of ∂D
s	dimensionless arc lenght, s^*/ℓ^*
T^*	fluid temperature
T	dimensionless fluid temperature, $T^*/\ell^{*4} \frac{dp^*}{dw^*} \frac{dT^*_b}{dw^*}/\alpha\mu$
T_s	dimensionless wall temperature
T_{sm}	dimensionless average wall temperature
T_{sn}	dimensionless average wall temperature as defined by equation (33)
T_m	dimensionless average temperature over D
T^*_b	bulk temperature
T_b	dimensionless bulk temperature
x^*,y^*	cartesian coordenates in the plane of D
w^*	duct axial coordenate
u^*	fluid axial velocity
u	dimensionless fluid axial velocity, $-u^*/\ell^{*2} \frac{dp^*}{dw^*}/\mu$
u^*_m	fluid mean axial velocity
u_m	dimensionless fluid mean axial velocity
z	a point or a vector (x,y)
α	fluid thermal diffusivity
μ	fluid dynamic viscosity

fluid kinematic viscosity, μ/ρ

INTRODUCTION

Heat transfer in laminar flow in straight ducts with multiply-connected cross section geometry occurs in practice, particularly in heat exchangers for solar energy heat transfer processes and flat plate collectors. The fully developed laminar fluid flow and heat transfer in straight duct with axially uniform heat flux is an approximation of the actual heat transfer in counter-flow double-tube and multiple-tube heat exchangers with equal fluid flow heat capacities, while the condition of axially uniform temperature is an approximation of the actual heat transfer in condensers and evaporators. These heat transfer phenomena are governed by the Poisson equation, which is known to be easily solved by several available numerical techniques [1].

There have yet been published in the heat transfer literature several methods of solution for the heat transfer problem in fully developed laminar fluid flow and heat transfer in straight ducts of arbitrary shape as reported in [2]. The analytical solutions are still limited to simple cross section geometries like circle, rectangle,triangle, annulus and others [3]. The analytical solution proposed by Sparrow and Haji-Sheikh [4] which is based on the Gram-Schmidt orthogonalization method is limited to simply-connected cross sections. The analytical solution proposed by Shah [2] is based on a least-square matching on the boundary and is also limited to simply-connected cross sections.

The main practical difficulty in solving these problems by any numerical technique is due to the complexity of the shape of the cross section of the duct and the type of the heat transfer at the wall. The finite element and the finite difference method can solve these problems easily. However these methods are sensitive with the shape of the boundary and require the solution of a large number of linear equations.

The main purpose of this paper is to show that the integral equation technique can be used to solve this class of problems for arbitrary multiply-connected cross sections with mixed boundary conditions on the boundary or part of it. The main advantage of the present solution are its generality, its compactedness and its reduction to the boundary nodal points where the boundary conditions are assumed to apply. The integral equation technique has been applied successfully in several branches of applied science and engineering as elastostatics and potential theory [5], hydrodynamics [6] and heat transfer [7]. This technique is not limited to linear problems. Numerical solutions of non-linear problems with combined heat conduction and radiation are reported in [8] and [9]. Another advantage of the present technique is that it can solve problems with different boundary conditions for a given cross section geometry. This is so because the derived linear equations depend only on analytical integrations on the boundary of the cross section.

Concerning the purpose of this paper, integral equation schemes are proposed to solve the fully developed laminar fluid flow and heat transfer with the following boundary conditions:

H1: Peripherally prescribed wall temperature and axially uniform heat flux as defined in [1].

H2: Peripherally prescribed wall heat flux and axially uniform heat flux as defined in [1].

H11, H12, H21, H22: Combinations of boundary conditions of types H1 and H2 prescribed on ∂D_1 and ∂D_2 for doubly-connected cross sections as follows

H11: Condition H1 prescribed at the walls ∂D_1 and ∂D_2.

H12: Condition H1 prescribed at the wall ∂D_1 and condition H2 prescribed at the wall ∂D_2.

H21: Condition H2 prescribed at the wall ∂D_1 and condition H1 prescribed at the wall ∂D_2.

H22: Condition H2 prescribed at the walls ∂D_1 and ∂D_2.

These conditions are particularly applied here to the case of an eccentric annulus.

THE GOVERNING INTEGRAL EQUATIONS

The Momentum Equation

The fully developed steady state laminar fluid flow of a newtonian incompressible fluid, in a straight duct of arbitrary cross section D, in the absence of body forces with ρ and μ constant is governed by the following dimensionless Poisson equation

$$\nabla^2 u = -1 \tag{1}$$

where $u=u(x,y)$ is the dimensionless velocity field satisfying the boundary condition

$$u|_{\partial D} = 0 \tag{2}$$

where ∂D is the boundary of D. The boundary of D is assumed to be the disjoint union of simple closed smooth curves with defined curvature at each of its points, i.e., D is a Lyapunov region as in [5]. The velocity field u and the cartesian coordinates x and y are related to the physical variables u^*, x^*, y^* and w^* by

$$u = -u^*/\ell^{*2} \frac{dp^*}{dw^*} /\mu \quad , \quad x = x^*/\ell^* \quad , \quad y = y^*/\ell^* \tag{3}$$

where ℓ^* is a characteristic lenght of D, p^* is the pressure and w^* is the coordinate in the flow direction (see Fig. 1).

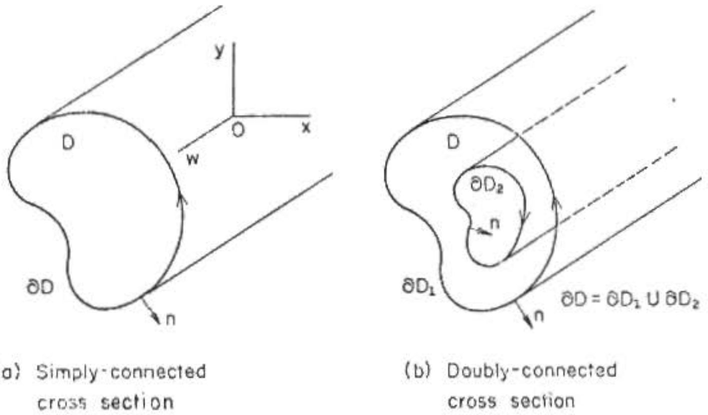


Figure 1. Cross section geometry

The solution of the problem (1)-(2) can readily be obtained by making use of the fundamental solution of the Laplace operator which is given by

$$g(z,z') = -\frac{1}{2\pi} \ln|z-z'| \tag{4}$$

where $z=(x,y)$ and $|z-z'|=((x-x')^2+(y-y')^2)^{1/2}$. The use of the second Green's identity in problem (1)-(2) and equation (4) leads to the following integral equation

$$\theta u(z) + \frac{1}{2}\int_{\partial D} \ln|z-z'|(z-z')\cdot n'ds' + \int_{\partial D}(\frac{1}{2} + \ln|z-z'|)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} ds' = 0 \quad (5)$$

where $\theta=\pi$ if z is placed on ∂D and $\theta=2\pi$ if z is placed inside D.

The dot in the above equation means the inner product in the space R^2 and n means the unitary normal vector to ∂D according to Figure 1. More details above the derivation of equation (5) is found in [10] and [11]. The unknown normal shear stress distribution $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$ is calculated by imposing condition (2) on equation (5), in which case the following Fredholm integral equation of the first kind results

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} \ln|z-z'|(z'-z)\cdot n'ds' + \int_{\partial D}(\frac{1}{2} + \ln|z-z'|)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} ds' = 0 \quad (6)$$

If ∂D is defined by cartesian coordinates $x=x(\tau)$ and $y=y(\tau)$ where τ belongs to some real interval [a,b] with $x(a)=x(b)$ and $y(a)=y(b)$, then equation (6) can be written as follows

$$\frac{1}{2}\int_a^b \ln|z(\tau') - z(\tau)|(z(\tau') - z(\tau))\, N(\tau')d\tau' + \\ + \int_a^b (\frac{1}{2} + \ln|z(\tau') - z(\tau)|)U_n(\tau')d\tau' = 0 \quad (7)$$

where $U_n(\tau)=\dot{s}(\tau)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,(z(\tau))|_{\partial D}$, $N(\tau)=\dot{s}(\tau)n(z(\tau))=(\dot{y}(\tau),-\dot{x}(\tau))$ and $\dot{s}(\tau)=(\dot{x}(\tau)^2+\dot{y}(\tau)^2)^{1/2}$. Since D is a Lyapunov region $\dot{s}(\tau)>0$ and therefore $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$ can readily be calculated since $U_n(\tau)$ can be obtained from equation (7). If the cross section D is multiply-connected, one gets as many integral equations of the form (7) as many simple contours of ∂D exist, and the integrals of equation (7) become a sum of integrals, each of which evaluated on simple closed curves of ∂D.

The friction factor f is given by

$$f\cdot Re_h = D_h^2/2u_m \quad (8)$$

where the Reynolds numbers is given by $Re_h=D_h^* u_m^*/\nu$ where $D_h^*=4A^*/L^*$, A^* is the cross section area and L^* is the wetted perimeter. Here, $L=L^*/\ell^*$ and $A=A^*/\ell^{*2}$ are given by

$$L(\partial D) = \int_{\partial D} ds = \int_a^b \dot{s}(\tau)d\tau \tag{9}$$

and
$$A(\partial D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} z\cdot n\ ds = \frac{1}{2}\int_a^b z\cdot N(\tau)d\tau \tag{10}$$

The mean velocity u_m over D is proved to be given by

$$u_m A = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\int_{\partial D}[\frac{1}{3}(\ln|z-z'|-\frac{1}{3})(z'-z)\cdot n' + + \ln|z-z'|\ \frac{\partial u}{\partial n}(z')\Big|_{\partial D}]\ (z'-z)\cdot n\ dsds' \tag{11}$$

or alternatively

$$u_m A = \frac{1}{4\pi}\int_a^b\int_a^b[\frac{1}{3}(\ln|z(\tau')-z(\tau)|-\frac{1}{3}) \times (z(\tau') - z(\tau)\cdot N(\tau') + \ln|z(\tau') - z(\tau)| \times U_n(\tau')]\ (z(\tau') - z(\tau))\cdot N(\tau)d\tau d\tau' \tag{12}$$

The product u_{mA} in the above equation is calculated by making use of any standard double integration rule. The velocity field u(z) is evaluated from equation (5) by setting $\theta=2\pi$.

The Energy Equation

If in addition to the assumption assumed to derive equation (1), k and c_p are assumed to be constant and mass diffusion, chemical reactions, energy sources and viscous dissipation are not considered, the fully developed heat transfer in a straight duct with cross section D is governed by the following dimensionless equation

$$\nabla^2 T = -u \tag{13}$$

where $T=T^*/\ell^{*4}\ \frac{dp^*}{dw^*}\frac{dT_b^*}{dw^*}/\alpha\mu$, T* is the temperature distribution over D and T_b^* is the bulk temperature. The above definition of T is derived from the assumption of axially uniform heat flux. By equation (1), equation (13) can be written as

$$\nabla^4 T = 1 \tag{14}$$

The boundary conditions H1 and H2 are respectively given by

$$T\big|_{\partial D} = T_s(s) \tag{15}$$

and $$\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial D} = -q_n(s) \tag{16}$$

(i) Integral Equation for Condition H1

A fundamental solution for the bi-harmonic partial differential operator can be written as

$$G(z,z') = -\frac{1}{8\pi}\,|z-z'|^2(\ell n|z-z'|-1) \tag{17}$$

Applying the Rayleigh-Green identity [5] to equation (14) and the boundary condition (15) and taking into account the above definition for $G(z,z')$ one gets the following integral formula

$$\int_{\partial D}(c+\ell n|z-z'|)\,\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial D} ds' = \int_{\partial D}\frac{(z'-z)\cdot n'}{|z-z'|^2}\,T_s(z')ds'$$

$$-\ \theta T(z) + \frac{1}{4}\int_{\partial D}[\tfrac{1}{4}\,(\ell n|z-z'|-\tfrac{5}{4})(z'-z)\cdot n'$$

$$+\ (\ell n|z-z'|-1)\,\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial D}]\ |z-z'|^2 ds' - cu_m A \tag{18}$$

where c is a real constant. In the derivation of the above equation, the Neumann condition given by

$$\int_{\partial D}\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\partial D} ds = -u_m A \tag{19}$$

is added to the Rayleigh-Green identity in order to prevent the illconditioning of equation (18) in the case of ∂D to be the unit circle. The constant c is set to be equal to 0.5 in order to get the same kernel as in equation (6).

In equation (18) $\theta=\pi$ and $T(z)=T_s(s)$ if z is placed on the boundary ∂D while $\theta=2\pi$ if z is placed inside D. In the former case equation (18) becomes a Fredholm integral equation of the first kind whose unknown function is the heat flux distribution $\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial D}$ while in the later case it is the explicit solution for the temperature $T(z)$ over D, since $\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial D}$ is evaluated on ∂D. Equation (18) can also be derived by the direct application of the second Green's identity to equation (13) by taking into account the fundamental solution of the Laplace operator, in which case the following identity is used

$$\int_D g(z,z')u(z')dA(z') = -\int_D G(z,z')dA(z') - \int_{\partial D} G(z,z') \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} ds' \qquad (20)$$

The above identity is also derived by application of the second Green's formula to equations (1) and (2) and by taking into account the definitions of g and G. The first integral in the right hand side of equation (20) is easily reduced to an integral on the boundary by making use of polar coordinates.

(ii) Integral Equation for Condition H2

The solution of the energy equation (13) or equation (14) with the boundary condition (16) is known to be not unique. However if the mean temperature over D is specified, then this solution is uniquely determined. In order to introduce the mean temperature in the integral equation (18) the fundamental solution G given by equation (17) is modified as follows

$$\hat{G}(z,z') = G(z,z') + |z-z'|^4/64A \qquad (21)$$

In this case equation (18) takes the form

$$\int_{\partial D}(z'-z)\cdot n'\left(\frac{1}{|z-z'|^2} - \frac{\pi}{A}\right)T_s(z')ds' - \theta T(z) = -2\pi T_m +$$

$$+ \int_{\partial D}\left(\ell n|z-z'| - \frac{\pi}{2A}|z-z'|^2\right) \times \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\partial D} ds' -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{\partial D}\Big[\frac{1}{4}\left(\ell n|z-z'| - \frac{5}{4} - \frac{\pi}{12A}|z-z'|^2\right) \times (z'-z)\cdot n' +$$

$$+ \left(\ell n|z-z'| - 1 - \frac{\pi}{8A}|z-z'|^2\right) \times \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D}\Big]|z-z'|^2 ds' \qquad (22)$$

where T_m is the mean temperature over D defined by

$$T_m = \frac{1}{A}\int_D T(z)dA(z) \tag{23}$$

In equation (22) $T(z)=T_s(s)$ and $\theta=\pi$ if z is placed on ∂D and $\theta=2\pi$ if z is placed inside D. In the former case equation (22) becomes a Fredholm integral equation of the second kind in the unknown function T_s while in the later case it becomes the explicit solution for T(z) since T_m is arbitrarily specified. As in the case of equation (18), equation (22) can also be derived alternatively by making use of the second Green's identity, in which case the following identity is used

$$\int_D \hat{g}(z,z')u(z')dA(z') = -\int_D \hat{G}(z,z')dA(z') - \int_{\partial D}\hat{G}(z,z')\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} ds' \tag{24}$$

where $\hat{g}$ is given by

$$\hat{g}(z,z') = g(z,z') + |z-z'|^2/4A \tag{25}$$

The first integral of the right hand side of equation (24) is reduced to an integral on the boundary ∂D by means of polar coordinates. If the curve ∂D is defined by its coordinates functions as in equation (7), then the unknown function of equation (22) is replaced by $T_n(\tau)=\dot{s}(\tau)\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\partial D}$. In this case $\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\partial D}$ can be obtained since $\dot{s}(\tau)$ is positive elsewhere over ∂D.

The integral equations (18) and (22) can readily be extended to doubly-connected regions. For these cross sections, the boundary ∂D is understood as the disjoint union of simple closed curves ∂D_1 and ∂D_2 as in Figure 1. The integral equations (18) and (22) are set on the closed curves ∂D_1 and ∂D_2 for each specified boundary conditions of the types H11, H12, H21 or H22. These equations are analogous to the integral equations corresponding to doubly-connected two-dimensional heat conducting solids as reported in [9].

For the purposes of the present study the Nusselt number is defined by

$$Nu_h = \bar{h}^*\, D_h^*/k \tag{26}$$

where the film coefficient $\bar{h}^*$ is given by

$$\bar{h}^* = Q^*/L^*(T^*_{sm}-T^*_b) \tag{27}$$

where Q^* is the overall heat flux through D and T^*_{sm} is the average wall temperature on ∂D. If the corresponding dimensionless variables are replaced in equation (26) one has

$$Nu_h = (D_h/L)u_m A/(T_b-T_{sm}) \tag{28}$$

where $$T_{sm} = \frac{1}{L}\int_{\partial D} T_s(s)ds \tag{29}$$

and $$T_b = \frac{1}{u_m A}\int_D T(z)u(z)dA(z) \tag{30}$$

An identity that can explain physically the behavior of the Nusselt number with respect to conditions H1 and H2, can be derived by multiplying equation (13) by T, making the integration of the result over D and then applying the divergence theorem. The final result is

$$T_b + \frac{1}{u_m A}\int_{\partial D} T_s \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\partial D} ds = \frac{1}{u_m A}\int_D |\nabla T|^2 dA \tag{31}$$

From equation (19), the above equation can be written as

$$T_b - T_{sn} = \frac{1}{u_m A}\int_D |\nabla T|^2 dA \tag{32}$$

where T_{sn} is given by

$$T_{sn} = \int_{\partial D} T_s \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\partial D} ds \Big/ \int_{\partial D} \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\partial D} ds \tag{33}$$

It is not difficult to see from equation (33) that T_{sn} reduces to T_{sm} if the conditions of uniform peripheral temperature $\overline{HT}$ or uniform peripheral heat flux $\overline{HZ}$ are assumed. Moreover equation (33) implies that T_b-T_{sn} is always positive for every arbitrary boundary conditions of types $\overline{HT}$ and $\overline{HZ}$. In the special cases of prescribed uniform temperature or heat flux distributions at the wall, equation (28) can be written as

$$Nu_h = (D_h/L)(u_m A)^2 / \int_D |\nabla T|^2 dA \tag{34}$$

where $u_m A$ is given by equation (11).

The above equation can be assumed as a definition of the Nusselt number for arbitrary boundary conditions of types H1 and H2, and equation (33) can be assumed as a definition of the mean temperature on the boundary ∂D.

DISCUSSION OF RESULTS

A computer code was specially developed in order to solve equations (1) and (13) for simply and doubly-connected regions of arbitrary shape with arbitrary boundary conditions of type H1 and H2. The computer code includes also the case of axially uniform temperature on the wall, in which case the results are not reported here. Equations (6), (18) and (22) are solved numerically by the boundary element technique [5]. This technique has proved to be a very useful and efficient one to solve integral equations of the types given here. The reduction of equations (6), (18) and (22) to linear boundary equations is carried out by well known standard procedures whose details are found in [12], [5], [7] and [9]. Accuracy problems may occur in the case of cross sections having corners. As was pointed out previously, the present solution is proposed only for Lyapunov regions, i.e., which have piecewise smooth curvature. When the integral Green's formulas are extended to regular regions with corners, both the kernel and the boundary integrals of equations (6), (18) and (22) introduce unaccuracies which are sensitive with the angle of the corner. In order to overcome this difficulty, rounded corners can be introduced in such regions, so that the original cross section is approximated by a Lyapunov region. If sharp corners are assumed, a more accurate procedure is proposed for computation of the boundary integrals of equations (18) and (22). The procedure lays in the calculation of the left hand side of identities (20) and (24) by an approximate sum obtained by a 2-D pannel approximation over the region D. The details are presented in the appendix.

The accuracy of the boundary element technique is checked in [5], where the boundary Green's formula and the simple and double layer methods are compared with exact solutions of standard problems in potential theory and elastostatics. Since this technique has proved to be sufficiently accurate, the comparison between temperature and heat flux distributions with the corresponding exact solutions will not be reported here. Full results are available with the author.

In order to make the comparison between the solutions obtained by solving equations (18) and (22) and by using the numerical integration given in equations (35) to (50), the heat flux and temperature distributions respectively obtained for conditions $\overline{H1}$ and $\overline{H2}$ applied on a squared cross section are plotted in Figure 2. This figure shows that the corresponding curves agree well, except in the vicinity of the corner.

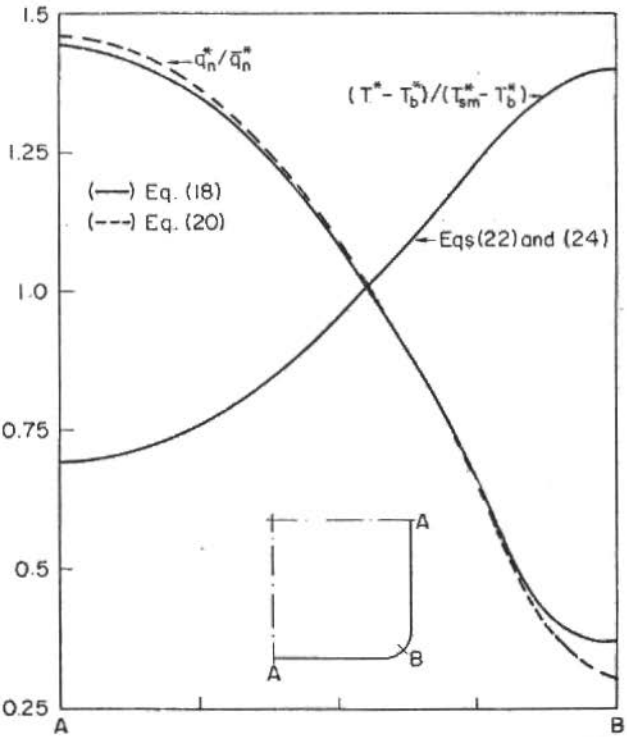


Figure 2. Peripheral temperature and heat flux distributions for a round corner rectangular cross section geometry as in Fig. 3c

The friction factor product fRe_h as well as the Nusselt number Nu_h, calculated by equations (8) and (28) respectively for the simply-connected cases, are given in Table 1 for the geometries of Figure 3. Comparisons are made with data from [1], [2], [3] and [13]. The numerical values obtained here are in good agreement with data from the above references within an error no greater that 0.1%. The Nusselt number corresponding to the case of an eccentric annulus for b/a=1./1.94 (see Figure 3g) for the condition of uniform temperature on the inner tube and the outer tube insulated was compared with data corresponding to the slug flow heat transfer from [14]. Several eccentricity ratios were tested and the results are plotted in Figure 4. The Nusselt number for the present case is lower than the Nusselt number for the slug flow condition for every eccentricity values as expected. Data from the present work for the slug flow condition are also plotted in Figure 4. For every eccentricity ratio the Nusselt number obtained by the present method was found to be slightly greater than the corresponding data from [14]. On the other hand, the values of the product fRe_h for case (g) are in full agreement with the exact values obtained in [15].

C A S E	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	REFERENCE
fRe_h	16.000		13.333	14.227			Refs. [1] and [13]
	16.012	16.828	13.348	14.236	15.156	17.891	
Nu_h ($\overline{HT}$) (prescribed uniform temperature)	4.364		3.111	3.608			Refs. [1] and [13]
	4.365	4.559	3.106	3.649	3.896	5.083	Eq. (18)
	4.368	4.565	3.111	3.612	3.894	5.098	Eq. (20)
Nu_h ($\overline{H2}$) (prescribed uniform heat flux)	4.364		1.892	3.091			Refs. [1] and [13]
	4.359	3.779	1.901	3.2039	3.504	3.941	Eq. (22)
	4.366	3.800	1.900	3.099	3.501	3.950	Eq. (24)

Table 1. Comparative data for simply-connected shapes

The computed results corresponding to the particular boundary conditions $\overline{H11}$ - uniformly prescribed temperature on both the inner and outer wall, $\overline{H12}$ - uniformly prescribed temperature on the outer

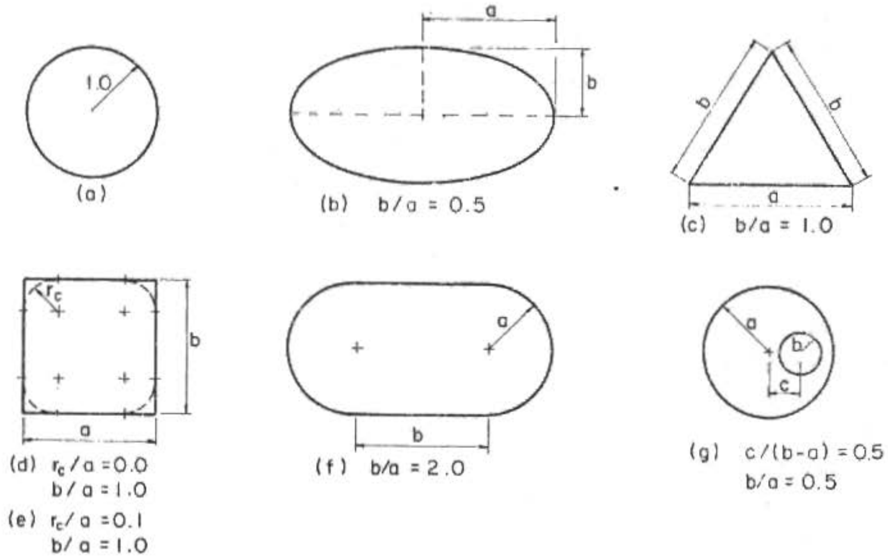


Figure 3. Cross section shapes studied

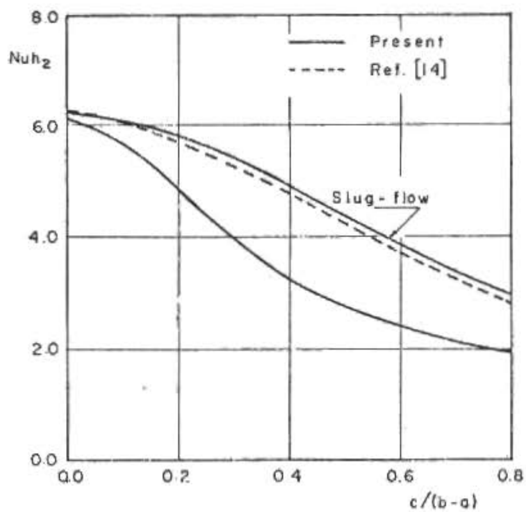


Figure 4. Nusselt number as a function of the eccentricity ratio c/(b-a)

wall and the inner wall insulated, $\overline{H21}$ - uniformly prescribed temperature on the inner wall and the outer wall insulated, and $\overline{H22}$ - uniformly prescribed heat flux on both the inner and outer wall are given in Table 2. Table 1 and Table 2 show that the Nusselt number corresponding to condition $\overline{H1}$ is in general greater that the Nusselt number for condition $\overline{H2}$. The Nusselt number defined by equation (34) has the meaning of the ratio between the total heat flux on D and the intensity of the temperature gradient over D given by the integral of the absolute value of the gradient field through D. If the cross section has stagnation regions, than the boundary condition of the type $\overline{H2}$ produces more gradient field then condition $\overline{H1}$ in these regions. This reasoning was used by Eckert in [16] to explain why the Nusselt number for condition $\overline{H1}$ is greater than the Nusselt number for condition $\overline{H2}$. This conclusion can also be drawn from equation (34), which shows that the greater the absolute value of the gradient field through D the smaller the value of the Nusselt number.

BOUNDARY CONDITION	Nu_{h1}	Nu_{h2}	Nu_h	EQUATION USED
$\overline{H11}$	3.459	4.314	3.747	(18)
	3.448	4.325	3.745	(20)
$\overline{H12}$	2.720	0.000	2.4676	(18)
	2.716	0.000	2.4671	(20)
$\overline{H21}$	0.000	2.824	2.047	(18)
	0.000	2.827	2.051	(20)
$\overline{H22}$	0.739	0.582	0.677	(22)
	0.745	0.585	0.685	(24)

Table 2. Calculated data for the eccentric annulus (case (g)) where Nu_{h1} is referred to the outer boundary and Nu_{h2} is referred to the inner boundary as in [13]

CONCLUDING REMARKS

The main advantage of the technique applied here is that it can be applied to cases of very complex cross section geometries without any further computer program improvement, since only the cartesian coordinates of the boundary are needed piecewise. It is remarkable that the present solution gives the boundary unknown as heat flux and temperature distributions before the temperature field over the cross section is known. This fact is particularly important if one is interested to know the heat flux or temperature distribution in the interface between a heat conducting wall and the flow region [1]. In the steady state case, no information on the temperature field over the cross section is needed previously in order to obtain the informations at the wall. While the methods proposed in [2] and [4] and the finite difference and finite element methods imply the full calculation for each particular boundary condition to be analysed, the integral solution as is seen here can solve several different boundary conditions for a given geometry, since the kernels of the integral equations depend only on the boundary geometry.

The extension of the present formulation to the fully developed laminar fluid flow and heat transfer in finned ducts of arbitrary cross section geometry with fins of arbitrary shape is straightforward. The integral equation of the heat conducting finn can be obtained by making use of a complete Green's function, which can be obtained by a variational method as made in [17].

Concerning the comparison of the present method with the finite element and finite difference methods, it appears that no sharp conclusions can be drawn. The present solution spends more computer time in the evaluation of the kernels of the integral equations than the time needed in order to set up the equations by finite element and finite difference methods, for the same number of nodal points at the wall. On the other hand, the number of equations needed by the present technique is considerable less. This advantage of the integral method is remarkable if a multiply-connected cross section is considered.

REFERENCES

[1] Shah, R.K. and London, A.L. - Thermal boundary conditions and some solutions for laminar flow forced convection. J. Heat Transfer 96, 159-165 (1974).
[2] Shah, R.K. - Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry. Int.J. Heat Mass Transfer 18, 849-862(1975)

[3] Rohsenow, W.M. and Hartnett, J.P. - Handbook of Heat Transfer. McGraw-Hill (1973).

[4] Sparrow, E.M. and Haji-Sheikh, A. - Flow and heat transfer in ducts of arbitrary shape with arbitrary thermal boundary conditions. J. Heat Transfer 88C, 351-358 (1966).

[5] Jaswon, M.A. and Symm, G.T. - Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. Academic Press, London (1977).

[6] Grodtkjaer, E. - A direct integral equation method for the potential flow about arbitrary bodies. Int.J.Num. Methods in Engineering 6, 252-264 (1973).

[7] Chang, Y.P. et Al. - The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotripic media. Int.J. Heat Mass Transfer 16, 1905-1918 (1973).

[8] Khader, M.S. and Hanna, M.C. - An iterative boundary integral numerical solution for general steady heat conduction problems. J. Heat Transfer 103, 26-31 (1981).

[9] Colle, S. and Halal, M.B. - Steady radiative heat transfer of heat conducting gray-bodies with temperature-dependent emissivity. 3rd AIAA/ASME Joint Conference, ASME Paper Nº 82-HT-1 (1982).

[10] Colle, S. - Pressure drop predictions in laminar flow in ducts of arbitrary multiply-connected cross section geometry. Proc. Fifth Brazilian Congress of Mech. Engineering, vol. A, Paper A-22 (in Portuguese), 350-359 (1979).

[11] Colle, S. - A modified Green's boundary formula for the integral solution of Neumann's problem (in Portuguese). Revista Brasileira de Ciências Mecânicas 2, 85-93 (1980).

[12] Jaswon, M.A. - Integral equation methods in potential theory I. Proc.Roy.Soc. A275, 23-32 (1963).

[13] Kays, W.M. - Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill (1966).

[14] Snyder, W.T. - An analysis of slug flow heat transfer in an eccentric annulus, AIChE Journal 9, 503-506 (1963).

[15] Snyder, W.T. and Goldstein, G.A. - An analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus. AIChE Journal 11, 462-467 (1965).

[16] Eckert, E.R.G. et Al. - Local laminar heat transfer in wedge shaped passages. ASME Paper Nº 57-A-133 (1953).

[17] Colle, S. - A general solution for the heat transfer in arrays of radiative fins of arbitrary shape. 21st ASME/AICHE, National Heat Transfer Conference, ASME Paper Nº 83-HT-57 (1983).

APPENDIX

The integral on the left hand side of equations (20) and (24) can be approximated over the region D in two ways as follows:

CASE 1. The point z is placed inside D

Let D be inside the rectangle defined by points (x,y) such that $a \leq x \leq b$ and $c \leq y \leq d$. Let M and N integers and $\Delta x = (b-a)/N$ and $\Delta y = (d-c)/M$.

Let D_{mk}; $k=1,2,\dots,M$; $m=1,2,\dots,N$ be the set of points (x,y) such that $x_m - \Delta x/2 \leq x \leq x_m + \Delta x/2$ and $y_k - \Delta y/2 \leq y \leq y_k + \Delta y/2$ and let ∂D_{mk} be the boundary of D_{mk}. Applying Funini's theorem, the left hand side of equation (20) can be written as

$$\int_D g(z_{ij},z')u(z')dA(z') = -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} u(x_m,y_k)$$

$$\int_{D_{mk}} \ln|z_{ij}-z'|dA(z') \tag{35}$$

where $z_{ij}=(x_j,y_i)$; $i=1,2,\dots,M$; $j=1,2,\dots,N$ and u(x,y) vanishes outside D.

By using polar coordinates one has the identity

$$\int_{D_{mk}} \ln|z_{ij}-z'|dA(z') = \frac{1}{2}\int_{\partial D_{mk}} \ln|z_{ij}-z'|(z'-z_{ij})\cdot n'ds' - \frac{1}{2}\Delta x\Delta y \tag{36}$$

where the first integral on the right hand side of the above equation is given by

$$\int_{\partial D_{mk}} \ln|z_{ij}-z'|(z'-z_{ij})\cdot n'ds' = (x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\times [\frac{1}{2}(y_k-y_i+\frac{\Delta y}{2})(\ln a_1^2-\ln a_2^2) + \frac{1}{2}\Delta y(\ln a_2^2-2) +$$

$$+ \psi_{12}(x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2})] + (y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})[\frac{1}{2}(x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2}) \times$$

$$\times (\ln a_2^2-\ln a_3^2) + \frac{1}{2}\Delta x(\ln a_3^2-2) + \psi_{23}(y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})] +$$

$$+ (x_m-x_j+\frac{\Delta x}{2})[\frac{1}{2}(y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})(\ln a_3^2-\ln a_4^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\Delta y(\ell n\; a_4^2 - 2) + \psi_{34}(x_m - x_j + \frac{\Delta x}{2})] + (y_k - y_i + \frac{\Delta y}{2}) \times$$

$$\times\, [\frac{1}{2}\,(x_m - x_j + \frac{\Delta x}{2})(\ell n\; a_4^2 - \ell n\; a_1^2) + \frac{1}{2}\,\Delta x(\ell n\; a_1^2 - 2) +$$

$$+ \psi_{41}(y_k - y_i + \frac{\Delta y}{2})] \tag{37}$$

$$a^2 = (x_j - x_m + \frac{\Delta x}{2})^2 + (y_i - y_k - \frac{\Delta y}{2})^2 \tag{38}$$

$$a_2^2 = (x_j - x_m + \frac{\Delta x}{2})^2 + (y_i - y_k + \frac{\Delta y}{2})^2 \tag{39}$$

$$a_3^2 = (x_j - x_m - \frac{\Delta x}{2})^2 + (y_i - y_k + \frac{\Delta y}{2})^2 \tag{40}$$

$$a_4^2 = (x_j - x_m - \frac{\Delta x}{2})^2 + (y_i - y_k - \frac{\Delta y}{2})^2 \tag{41}$$

$$\psi_{12} = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta y(x_j - x_m + \frac{\Delta x}{2})}{a_1^2 - \Delta y(y_k - y_i + \frac{\Delta y}{2})}\right] \tag{42}$$

$$\psi_{23} = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta x(y_i - y_k + \frac{\Delta y}{2})}{a_2^2 - \Delta x(x_j - x_m + \frac{\Delta x}{2})}\right] \tag{43}$$

$$\psi_{34} = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta y(x_m - x_j + \frac{\Delta x}{2})}{a_3^2 - \Delta y(y_i - y_k + \frac{\Delta y}{2})}\right] \tag{44}$$

$$\psi_{41} = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta x(y_k - y_i + \frac{\Delta y}{2})}{a_4^2 -\; x(x_m - x_j + \frac{\Delta x}{2})}\right] \tag{45}$$

In the same way the integral on the left hand side of equation (24) is approximated by

$$\int_D \bar{g}(z_{ij}-z')u(z')dA(z') = -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} u(x_m,y_k)$$

$$\times \int_{D_{mk}} (\ell n|z_{ij}-z'| - \frac{\pi}{2A}|z_{ij}-z'|^2)dA(z') \qquad (46)$$

where $\int_{D_{mk}} \ell n|z_{ij}-z'|dA(z')$ is given by equation (36) while

$$\int_{D_{mk}} |z_{ij}-z'|^2 dA(z') = \frac{1}{4}\int_{\partial D_{mk}} |z_{ij}-z'|(z'-z_{ij})\cdot n'ds' \qquad (47)$$

where

$$\int_{\partial D_{mk}} |z_{ij}-z'|^2(z'-z_{ij})\cdot n'ds' = (x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2}) \times$$

$$\times [(x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2})^2\cdot\Delta y+\frac{1}{3}[(y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})^3-(y_i-y_k-\frac{\Delta y}{2})^3]] +$$

$$+ (y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})[(y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})^2\cdot\Delta x +$$

$$+\frac{1}{3}[(x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2})^3-(x_j-x_m-\frac{\Delta x}{2})^3]] - (x_j-x_m-\frac{\Delta x}{2}) \times$$

$$\times [(x_j-x_m-\frac{\Delta x}{2})^2\cdot\Delta y + \frac{1}{3}[(y_i-y_k+\frac{\Delta y}{2})^3 -$$

$$- (y_i-y_k-\frac{\Delta y}{2})^3]] - (y_i-y_k-\frac{\Delta y}{2})[(y_i-y_k-\frac{\Delta y}{2})^2\cdot\Delta x +$$

$$+\frac{1}{3}[(x_j-x_m+\frac{\Delta x}{2})^3-(x_j-x_m-\frac{\Delta x}{2})^3]] \qquad (48)$$

In matrix representation one has

$$A_{ijkm} = \int_{\partial D_{mk}} \ell n|z_{ij}-z'|dA(z') \qquad (49)$$

and $$B_{ijkm} = \int_{\partial D_{mk}} (\ell n|z_{ij}-z'| - \frac{\pi}{2A}|z_{ij}-z'|^2)dA(z) \qquad (50)$$

where the following symmetries hold: $A_{ijkm}=A_{kmij}$, $B_{ijkm}=B_{kmij}$ and all entries of the above matrices can be obtained from the matrices A_{11km} and B_{11km}, $m=1,2,\ldots,N$ and $K=1,2,\ldots,M$.

CASE 2. The point z is placed on ∂D

In this case the left hand side of equations (20) and (24) can be computed by any standard double integration rule.

ESCOAMENTO PARALELO DE FILME LÍQUIDO LAMINAR E CORRENTE TURBULENTA DE AR NUM CANAL

P.M.S. Araújo
A.S. Vargas
Deptº de Engenharia Mecânica
PUC/RJ

RESUMO

Apesar dos inúmeros esforços recentemente desenvolvidos no estabelecimento de modelos de turbulência, ressente-se a bibliografia de modelos que sejam simultaneamente precisos e simples. O presente trabalho tem por objetivo a determinação dos campos de velocidade em dois escoamentos: um filme líquido laminar escoando por gravidade sobre uma placa plana e uma corrente turbulenta de ar escoando paralelamente no sentido descendente ou no sentido ascendente dentro de um canal bidimensional. O método de Pai é aplicado a esta configuração mais geral para determinação semi-analítica dos perfis desenvolvidos de velocidade e tensão turbulenta, usando-se um mínimo de informações experimentais na avaliação numérica dos perfis. As distribuições obtidas são contínuas e suaves em toda a extensão do canal, desde a sub-camada laminar até o núcleo turbulento. A ênfase do trabalho está na sua simplicidade, onerada exclusivamente por uma certa dose de manipulações algébricas.

ABSTRACT

In spite of many recently developed efforts to establish turbulence models, one cannot find models, which be simultaneously accurate and simple. In the present work the velocity fields are determined for a laminar falling liquid film and a turbulent air stream flowing downward or upward, parallel to the film and confined in a two-

dimensional channel. Pai's procedure is applied to this general case and the developed profiles of velocity and shear stress are obtained with a minimum of experimental data. These profiles are continuous and smooth and hold true all the way across the channel, including the laminar sublayer until the turbulent core. The major emphasis is in simplicity, although a certain amount of algebraic manipulations are needed.

INTRODUÇÃO

Desde o final do século XIX, quando Osborne Reynolds estabeleceu a teoria básica sobre turbulência, até os dias atuais, inúmeros investigadores vêm se dedicando à modelagem de escoamentos turbulentos. Há hoje em dia disponíveis na literatura modelos extremamente sofisticados, que prevêm com precisão as equações constitutivas relacionando os fluxos turbulentos de momentum, calor e massa aos respectivos gradientes de potencial. Vários destes modelos são baseados na distribuição logarítmica de velocidade, de von Kármán e em variações da teoria de comprimento de mistura, de Prandtl [1,2]. Há, entretanto, evidências de sérias limitações e inconsistências nesta teoria [3,4]. Pai desenvolveu um método para obter distribuições turbulentas de velocidade em canais bidimensionais [4] e em tubos [5]. Este método consiste na integração das equações de conservação de massa e momentum e é usada alguma informação de caráter experimental [6] para a completa avaliação numérica das distribuições desejadas. Recentemente o método de Pai foi estendido a problemas de transferência de calor em canais bidimensionais [7] e os parâmetros utilizados originalmente foram reavaliados, permitindo o seu uso em faixas mais amplas de números de Reynolds, Re. Os trabalhos experimentais desenvolvidos por Corcoran, Page et al. [8,9,10] proveram a informação suplementar necessária à extensão do método original. As distribuições de velocidade, temperatura, fluxos turbulentos de momentum e calor e difusividades turbulentas, obtidas através do método de Pai, são contínuas e suaves e as equações resultantes são aplicáveis à toda a extensão do escoamento, desde a sub-camada laminar, formada junto às paredes do duto, até o núcleo turbulento. Não há assim necessidade de introdução de teorias artificiais para aplicação do método.

O presente trabalho tem por objetivo estabelecer o perfil turbulento de velocidade numa corrente de ar escoando sobre um filme líquido laminar, sendo os dois escoamentos confinados num canal bidimensional. O método de Pai é aplicado a esta configuração mais geral e as equações obtidas podem ser aplicadas a uma ampla faixa de números de Reynolds do ar. A distribuição do fluxo turbulento do momentum no escoamento do ar é também obtida.

ANÁLISE TEÓRICA

Seja o canal bidimensional, esboçado na figura 1, inclinado de um ângulo β com relação à vertical. A distância entre as placas é a. O líquido (fluido 2) escoa laminarmente por gravidade sobre a placa inferior e o ar (fluido 1) escoa sobre a película de líquido num movimento forçado turbulento. Serão considerados dois casos: (i) o ar escoa no sentido descendente (x crescente) ou (ii) o ar escoa no sentido ascendente (x decrescente). A espessura do filme líquido é suposta constante e igual a δ. O comprimento do canal é ℓ, sendo $a \ll \ell$. Considera-se escoamento hidrodinamicamente desenvolvido para ambos os fluidos. A pressão em um ponto qualquer do escoamento é $P(x,y,z)$.

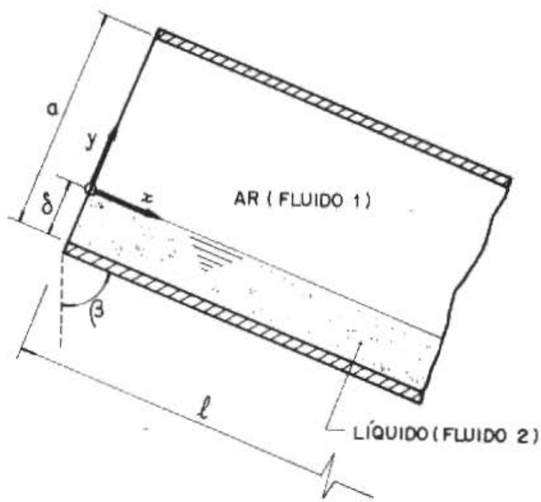


Figura 1. Escoamento paralelo de filme líquido laminar e corrente turbulenta de ar

As equações de conservação de massa e momentum aplicadas ao escoamento turbulento médio são

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\bar{v} - \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right) \tag{2b}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\bar{w} - \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right), \tag{2c}$$

onde $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ são valores médios no tempo das componentes da velocidade, $\bar{p}$ é o valor médio de

$$p = P - \rho g(x \cos \beta - y \text{ sen } \beta) \quad , \tag{2d}$$

ρ é a massa específica, ν é a viscosidade cinemática e

$$\overline{u'^2},\ \overline{v'^2},\ \overline{w'^2},\ \overline{u'v'} = \overline{v'u'},\ \overline{u'w'} = \overline{w'u'},\ \overline{v'w'} = \overline{w'v'}$$

são os valores médios no tempo das flutuações turublentas. Estas equações são aplicáveis ao fluido 1(ar), dentro das seguintes hipóteses: (i) o escoamento médio é permanente e bidimensional, i.e., $\bar{f}=\bar{f}(x,y)$, se $\bar{f}$ é uma quantidade qualquer do escoamento médio; (ii) o escoamento médio só tem componente $\bar{u}$, i.e., $\bar{v}=\bar{w}=0$; (iii) os valores médios das flutuações turbulentas são funções apenas de y. A aplicação destas hipóteses às equações (1) e (2) conduzem ao seguinte sistema de duas equações a quatro incógnitas, onde o índice inferior 1 se refere ao ar

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} - \nu_1\frac{d^2\bar{u}_1}{dy^2} + \frac{d(\overline{u'v'})_1}{dy} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} + \frac{d(\overline{v'^2})_1}{dy} = 0 \quad . \tag{4}$$

Para o filme líquido, onde não há flutuações turbulentas e com a aplicação das hipóteses (i) e (ii), as equações (1) e (2) se reduzem a apenas uma, com duas incógnitas, na qual é usado o índice inferior 2

$$\frac{1}{\rho_2}\frac{dp_2}{dx} - \nu_2 \frac{d^2u_2}{dy^2} = 0 \quad . \tag{5}$$

As incógnitas contidas nas equações (3) a (5), são $\overline{p}_1(x,y)$, $\overline{u}_1(y)$, $p_2(x)$, $u_2(y)$ e as flutuações turbulentas $\overline{u'v'}$ e $\overline{v'^2}$, que são funções apenas de y. As equações (3) e (4) são aplicáveis para $0\leq y\leq a-\delta$ e a equação (5) é aplicável para $-\delta\leq y\leq 0$. As seguintes condições de contorno completam a formulação do problema:

$$y = a - \delta \ , \quad \overline{u}_1 = 0 \quad , \quad (\overline{u'v'})_1 = 0 \quad , \quad (\overline{v'^2})_1 = 0 \ ; \tag{6-8}$$

$$y = -\delta \quad , \qquad u_2 = 0 \ ; \tag{9}$$

$$y = 0 \quad , \qquad \overline{u}_1 = u_2 \tag{10}$$

$$\mu_1 \frac{d\overline{u}_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} \tag{11}$$

$$(\overline{u'v'})_1 = 0 \quad , \qquad (\overline{v'^2})_1 = 0 \ . \tag{12-13}$$

Na equação (11), μ_1 e μ_2 são as viscosidades dinâmicas dos fluidos.

As velocidades médias dos dois escoamentos, $\overline{u}_{1m}$ e u_{2m} são definidas por

$$\overline{u}_{1m} = \pm \frac{1}{a-\delta}\int_0^{a-\delta} \overline{u}_1 dy \quad ; \quad u_{2m} = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{0} u_2 dy \tag{14a,b}$$

e o duplo sinal na definição de $\overline{u}_{1m}$ se refere aos dois sentidos de escoamento do ar: o sinal positivo para escoamento no sentido descendente e o sinal negativo para o sentido ascendente.

São definidas as seguintes variáveis adimensionais

$$\eta_1 = \frac{y}{a-\delta} \ ; \quad \eta_2 = \frac{y}{\delta} \quad ; \quad U_1 = \frac{\overline{u}_1}{\overline{u}_{1m}} \quad ; \quad U_2 = \frac{u_2}{u_{2m}} \tag{15-18}$$

tais que as equações (14a,b) se tornam

$$\int_0^1 U_1 d\eta_1 = \pm 1 \quad ; \qquad \int_{-1}^0 U_2 d\eta_2 = 1 \quad . \tag{19a,b}$$

São ainda definidos os adimensionais P_1 e P_2, constantes, e $\omega(\eta_1)$, tais que

$$\overline{p}_1 = -\frac{2P_1\mu_1\overline{u}_{1m}}{(a-\delta)^2}\,x + \rho_1\,\overline{u}_{1m}^2\,\omega \tag{20}$$

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{2P_2\mu_2 u_{2m}}{\delta^2} \quad . \tag{21}$$

Verifica-se que, pelas equações (3) e (4), $\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial y}$ não são funções de x e que, pela equação (5), $\frac{dp_2}{dx}$ é constante. Estas condições ficam prontamente atendidas pelas equações (20) e (21).

Finalmente, define-se os adimensionais

$$r(\eta_1) = \frac{\rho_1(a-\delta)(\overline{u'v'})_1}{\mu_1\overline{u}_{1m}} \quad ; \quad \Gamma(\eta_1) = \frac{(\overline{v'^2})_1}{\overline{u}_{1m}^2} \tag{22-23}$$

$$\Omega = \frac{\overline{u}_{1m}}{u_{2m}} \quad ; \quad M = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\delta}{a-\delta} \tag{24-25}$$

A aplicação dos adimensionais definidos pelas equações (15) a (18) e (20) a (25) às equações (3) a (13) conduz ao seguinte conjunto de equações e condições de contorno

$$\frac{d}{d\eta_1}\left(\frac{dU_1}{d\eta_1} - r\right) = -2P_1 \tag{26}$$

$$\frac{d}{d\eta_1}(\omega+\Gamma) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{d^2U_2}{d\eta_2^2} = -2P_2 \tag{28}$$

$$\eta_1 = 1 \;,\; U_1(1) = 0 \;,\; r(1) = 0 \;,\; \Gamma(1) = 0 \;; \tag{29-31}$$

$$\eta_2 = -1 \;,\; U_2(-1) = 0 \;; \tag{32}$$

$$\eta_1 = 0 \;,\; r(0) = 0 \;;\; \Gamma(0) = 0 \;; \tag{33-34}$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0 \;,\; \Omega U_{1,0} = U_{2,0} \;; \tag{35}$$

$$\Omega M\left(\frac{dU_1}{d\eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \left(\frac{dU_2}{d\eta_2}\right)_{\eta_2=0} \quad . \tag{36}$$

Na equação (35), $U_{1,0} = U_1(0)$ e $U_{2,0} = U_2(0)$ são as velocidades dos dois fluídos na interface.

Nota-se que há 3 equações e 5 incógnitas e há necessidade de informação suplementar para resolver o problema acima formulado.

Integrando-se a equação (28) obtem-se

$$U_2 = b_2 + a_2\eta_2 - P_2\eta_2^2 \quad , \tag{37}$$

onde a_2 e b_2 são constantes. A aplicação das condições (19b) e (32) permite eliminar b_2 e P_2 na equação (37), que se torna

$$U_2 = \frac{a_2+6}{4} + a_2\eta_2 + \frac{3(a_2-2)}{4}\eta_2^2 \ . \tag{38}$$

Integrando-se agora a equação (26), resulta

$$\frac{dU_1}{d\eta_1} = r + a_1 - 2P_1\eta_1 \quad , \tag{39}$$

onde a_1 é constante. Combinando-se (39), (38) e a condição (36), pode-se determinar que

$$a_1 = \frac{a_2}{\Omega M} \ . \tag{40}$$

Integrando-se novamente e usando a condição (29), obtem-se

$$U_1 = -\int_{\eta_1}^{1} r(\zeta)d\zeta - \frac{a_2}{\Omega M}(1-\eta_1) + P_1(1-\eta_1^2) \quad , \tag{41}$$

onde ζ é uma variável muda. As constantes a_2 e P_1 podem ser achadas através das condições (35) e (19a). Após algumas manipulações algébricas, ultam

$$.) = \int_0^{\eta_1} r(\zeta)d\zeta + \frac{3(1+\Omega MI)}{2\Omega(M+1)} - \frac{6(1-\Omega I)}{\Omega(M+1)}\eta_1 + $$

$$+ 3\left[\frac{3-\Omega I(M+4)}{2\Omega(M+1)} - \frac{I_0}{3}\right]\eta_1^2 \tag{42}$$

$$U_2(\eta_2) = \frac{3(1+\Omega MI)}{2(M+1)}\left[1 + \frac{4M(\Omega I-1)}{1+\Omega MI}\eta_2 + \frac{3\Omega MI-4M-1}{1+\Omega MI}\eta_2^2\right] \tag{43}$$

onde

$$I_o = \int_0^1 r(\eta_1)d\eta_1 \tag{44}$$

$$I = \pm 1 - \frac{2}{3} I_o + \int_0^1 \eta_1 r(\eta_1)d\eta_1 \ . \tag{45}$$

Na equação (45) o duplo sinal se refere ao sentido de escoamento do ar: (+) para sentido descendente e (-) para sentido ascendente.

A completa determinação dos perfis de $U_1(\eta_1)$ e $U_2(\eta_2)$ depende agora da distribuição da tensão turbulenta adimensional $r(\eta_1)$. Se o escoamento de ar fosse também laminar esta distribuição seria identicamente nula em todo o campo de escoamento e as equações (42) a (45) forneceriam

$$U_{1\ell}(\eta_1) = \frac{3(1\pm\Omega M)}{2\Omega(M+1)} \left[1 - \frac{4(1\mp\Omega)}{1\pm\Omega M}\eta_1 + \frac{3\mp\Omega(M+4)}{1\pm\Omega M}\eta_1^2\right] \tag{46}$$

$$U_{2\ell}(\eta_1) = \frac{3(1\pm\Omega M)}{2(M+1)} \left[1 + \frac{4M(\pm\Omega-1)}{1\pm\Omega M}\eta_2 + \frac{\pm 3\Omega M-4M-1}{1\pm\Omega M}\eta_2^2\right] \ . \tag{47}$$

É necessário agora fazer uma mudança de coordenada. Seja

$$\eta_1 = 0{,}5(\eta+1) \quad , \tag{48}$$

onde η é a coordenada contada a partir da meia distância entre a interface e a placa superior. A coordenada η_2 não precisa ser alterada. Se $U_1(\eta)$, obtida pela introdução de (48) em (42), for expressa como uma série de potências de η, esta série pode conter apenas cinco termos. De maneira a haver consistência com o resultado obtido para escoamento laminar, equação (46), deve-se escrever

$$U_1(\eta) = U_{1,0}(\gamma_0+\gamma_1\eta+\gamma_2\eta^2+\gamma_{2m}\eta^{2m}+\gamma_{2m+1}\eta^{2m+1}) \ . \tag{49}$$

Os coeficientes γ_i da equação (49) podem ser determinados a partir de condições de contorno. Existem as seguintes condições naturais:

$$\eta = -1 \quad , \quad U_1(-1) = U_{1,0} \quad , \quad r(-1) = 0 \quad , \tag{50-51}$$

$$\left(\frac{dU_1}{d\eta}\right)_{\eta=-1} = \frac{1}{2\Omega M}\left(\frac{dU_2}{d\eta_2}\right)_{\eta_2=0} \tag{52}$$

$$\eta = 1 \quad , \quad U_1(1) = 0 \quad , \quad r(1) = 0 \quad , \tag{53-54}$$

onde, pelas equações (42) e (43) ou (35),

$$U_{1,0} = \frac{3(1+\Omega MI)}{2\Omega(M+1)} = \frac{U_{2,0}}{\Omega} \quad . \tag{55}$$

Há, entretanto, sete incógnitas: os cinco coeficientes γ_i e mais as quantidades I_0 e I, definidas por (44) e (45), respectivamente. Serão estipuladas portanto duas condições adicionais, as quais dependerão de informação experimental. São elas

$$\eta = -1 \quad , \quad \left(\frac{dU_1}{d\eta}\right)_{\eta=-1} = \pm \frac{1}{8} Re_1 Cf_0 \tag{56}$$

$$\eta = 1 \quad , \quad \left(\frac{dU_1}{d\eta}\right)_{\eta=1} = \mp \frac{1}{8} Re_1 Cf_1 \tag{57}$$

onde Re_1 é o número de Reynolds do ar, definido por

$$Re_1 = \frac{2\rho_1 \bar{u}_{1m}(a-\delta)}{\mu_1} \tag{58}$$

e Cf_0, Cf_1 são os coeficientes de atrito junto à interface e junto à placa superior, respectivamente, dados por

$$Cf_0 = \frac{2\tau_0}{\rho_1 \bar{u}_{1m}^2} \quad , \tag{59}$$

$$Cf_1 = \frac{2\tau_1}{\rho_1 \bar{u}_{1m}^2} \quad . \tag{60}$$

Na equação (59) τ_0 é a tensão cizalhante sobre o ar na interface ar-líquido e, na equação (60), τ_1 é a tensão cizalhante resultante do efeito da placa superior sobre o ar. Estas tensões são de finidas, respectivamente, por

$$\tau_0 = \pm\mu_1(\frac{d\bar{u}_1}{dy})_{y=0} \quad ; \quad \tau_1 = \mp\mu_1(\frac{d\bar{u}_1}{dy})_{y=a-\delta} \quad . \tag{61-62}$$

A aplicação das condições (50-54), (56) e (57) e da relação (45) às equações (49) e (42) permite determinar os coeficientes γ_i e as quantidades I_0 e I em função de R_0=Re_1Cf_0 e R_1=Re_1Cf_1. Usando

$$r(\eta) = \frac{d}{d\eta}\int_{-1}^{\eta} r(\zeta)d\zeta \ , \tag{63}$$

o perfil da tensão turbulenta adimensional, $r(\eta)$, pode ser obtido derivando-se a equação (42) com relação a η. Resta portanto a avaliação numérica de R_0 e R_1 para que $U_1(\eta)$, $U_2(\eta_2)$ e $r(\eta)$ fiquem completamente determinados.

Considera-se então um escoamento laminar do ar escoando num canal formado por uma placa superior fixa e pela interface móvel entre o ar e um filme líquido descendente. Supõe-se ainda que o número de Reynolds deste escoamento, Re_ℓ, e a velocidade da interface, $U_{1,0\ell}$, sejam tais que as velocidades dimensionais do escoamento turbulento, ora em estudo, em η=-1 e η=0 sejam iguais às correspondentes do escoamento laminar. As tensões cizalhantes neste escoamento laminar em y=0 e y=a-δ são designadas por, respectivamente, $\tau_{0\ell}$ e $\tau_{1\ell}$. Os coeficientes de atrito correspondentes, $Cf_{0\ell}$ e $Cf_{1\ell}$, podem ser obtidos a partir das equações (46) e (47), resultando

$$\frac{R_{0\ell}}{24} = \frac{\Omega_\ell \mp 1}{\Omega_\ell(M+1)} \tag{64}$$

$$\frac{R_{1\ell}}{12} = \frac{\Omega_\ell(M+2)\mp 1}{\Omega_\ell(M+1)} \quad , \tag{65}$$

onde $R_{0\ell}$=$Re_\ell Cf_0$, $R_{1\ell}$=$Re_\ell Cf_{1\ell}$ e Ω_ℓ é a relação entre as velocidades médias do escoamento laminar do ar e do filme líquido, também laminar. Isto é, estas grandezas são análogas às definidas pelas equações (56), (57) e (24).

Seja agora s a relação entre as tensões τ_0 e τ_1 do escoamento turbulento e as suas correspondentes $\tau_{0\ell}$ e $\tau_{1\ell}$ do escoamento laminar. Então

$$s = \frac{R_o}{R_{o\ell}} \cdot \frac{Re_1}{Re_\ell} = \frac{R_1}{R_{1\ell}} \cdot \frac{Re_1}{Re_\ell} \quad . \tag{66a,b}$$

As equações (66a,b) com aquelas que podem ser obtidas igualando as velocidades dimensionais dos escoamentos laminar e turbulento de ar em $\eta=-1$ e $\eta=0$ são suficientes para determinar as quatro incógnitas Ω_ℓ, Re_ℓ, R_o e R_1, como funções apenas de s, definida por (66), e m. Note-se que m deve ser um número inteiro maior ou igual a 2, tal que $U_1(\eta)$ seja dada pela equação (49). Os parâmetros s e m são obtidos através de dados experimentais, conforme exposto mais adiante.

Os perfis de $U_1(\eta_1)$, $U_2(\eta_2)$ e $r(\eta_1)$ são, finalmente, obtidos pelas equações abaixo

$$U_1(\eta_1) = K_U(A_o + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_{2m}\eta^{2m} + A_{2m+1}\eta^{2m+1}) \tag{67}$$

$$U_2(\eta_2) = (1+\eta_2)[U_{2,0} + 3\eta_2(U_{2,0} - 2)] \tag{68}$$

$$r(\eta_1) = K_r[B_o(\eta^{2m}-1) + B_1\eta(\eta^{2(m-1)}-1)] \quad , \tag{69}$$

onde η é dada por (48) e

$$K_U = \frac{3}{2(4m+s)} \qquad ; \qquad K_r = \frac{6(2m+1)}{4m+s} \tag{70-71}$$

$$U_{2,0} = \Omega U_{1,0} = 6\,\frac{(2m+s) \pm s(2m+1)\Omega M}{4(2m+s)(M+1)+(s-1)(8m+s)M} \tag{72}$$

$$A_o = [s-4m-\frac{2(3M+2)}{M}]\,\frac{U_{1,0}}{6} + \frac{1}{\Omega M} \pm 2(2m+1) \tag{73}$$

$$mA_1 = -[(2m+s)(2m+\frac{M+2}{M}) + s(m+1)]\,\frac{U_{1,0}}{3} + \frac{2m+s}{\Omega M} \pm s(2m+1) \tag{74}$$

$$(m-1)A_2 = [\frac{4m}{M} + 2m(2m+1) - s(m+1)]\,\frac{U_{1,0}}{2} - \frac{3m}{\Omega M} \mp (2m+1)(2m-s) \tag{75}$$

$$-\frac{m-1}{2m+1}A_{2m} = [\frac{2(M+1)}{M} - (s-1)]\,\frac{U_{1,0}}{3} - \frac{1}{\Omega M} \pm (s-2) \tag{76}$$

$$mA_{2m+1} = [(2m+s)\,\frac{M+1}{M} + m(s-1)]\,\frac{U_{1,0}}{3} - \frac{2m+s}{\Omega M} \mp s(2m+1) \tag{77}$$

$$B_o = (s-1)\,\frac{U_{1,0}}{3} + (1+\frac{s}{2m})(\frac{2(M+1)}{M}\,\frac{U_{1,0}}{3} - \frac{1}{\Omega M}) \mp \frac{s}{2m}\,(2m+1) \tag{78}$$

$$\frac{m-1}{m}\,B_1 = [s-1-\frac{2(M+1)}{M}]\,\frac{U_{1,0}}{3} + \frac{1}{\Omega M} \mp (s-2) \quad . \tag{79}$$

O duplo sinal existente nestas equações se refere aos dois possíveis sentidos de escoamento do ar. O sinal superior se refere a escoamento no sentido descendente e o inferior ao sentido oposto.

Os valores de s e m, como funções do número de Reynolds do ar foram estimados [7] a partir de dados experimentais de Laufer [6] e Page et al. [9,10]. Obteve-se

$$s = 0{,}00479\ Re_1^{0{,}736} \tag{80}$$

e $$m \cong 1{,}40\ s \quad , \tag{81}$$

sendo m, obtido por (81), arredondado para o inteiro mais próximo. As equações (80) e (81) podem ser usadas para Re_1 de 9370 até 221200, com erros inferiores a 11%.

CASOS PARTICULARES

As equações de distribuição de $U_1(\eta_1)$, $U_2(\eta_2)$ e $r(\eta_1)$, dadas por (67-79), podem ser aplicadas a vários casos particulares de interesse prático, alguns dos quais têm soluções já constantes da bibliografia. A seguir são apresentados alguns destes casos.

(i) Ar em escoamento laminar

Se o escoamento do ar é laminar, basta fazer s=1 nas equações (67-79). Obtêm-se:

$$U_{2,0} = U_{1,0} = \frac{3(1\pm\Omega M)}{2(M+1)} \tag{82}$$

$$U_1(\eta) = \frac{3}{8\Omega(M+1)}\,\{[\pm\Omega(3M+4)-1]-2(1\pm\Omega M)\eta+[3\mp\Omega(M+4)]\eta^2\} \tag{83}$$

$$r(\eta_1) \equiv 0 \tag{84}$$

e $U_2(\eta_2)$ dado por (68) e (82). A figura 2 mostra os perfis de U_1 e

U_2 para escoamentos de sentidos opostos. Pode ser visto que, dada a maior viscosidade do líquido, há arrastamento de uma pequena parte do ar, embora este tenha uma velocidade média dez vezes maior.

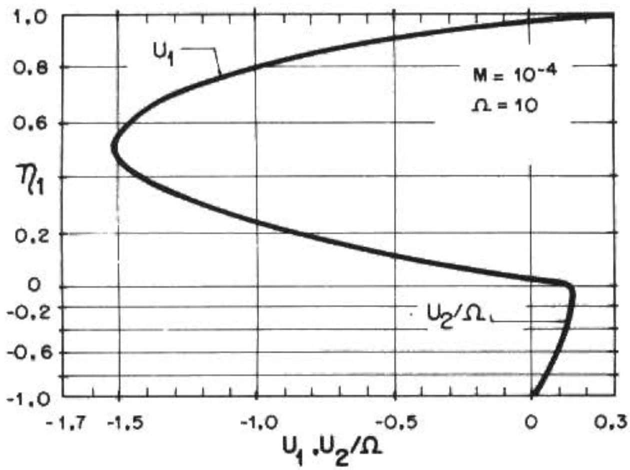


Figura 2. Perfis de velocidade para ar escoando laminarmente em sentido ascendente

(ii) Velocidade nula na interface

Este caso limite seria obtido com a introdução de uma placa muito fina e fixa, separando os dois escoamentos. A consideração de $U_{1,0}=U_{2,0}=0$ nas equações (67-79) conduz a

$$U_1(\eta) = \pm \frac{3(2m+1)}{2(2m+1)} \left(1- \frac{m-s}{m-1}\, \eta^2 - \frac{s-1}{m-1}\, \eta^{2m}\right) \tag{85}$$

$$U_2(\eta_2) = -6\eta_2(1+\eta_2) \tag{86}$$

$$r(\eta) = \pm \frac{6m(s-1)(2m+1)}{(m-1)(2m+s)}\, \eta(1-\eta^{2(m-1)}) \tag{87}$$

As equações (85) e (87) coincidem com os resultados obtidos por Pai [4], que estudou este caso particular. Se, em (85), for tomado s=1, a equação ficará reduzida à de um perfil de Couette.

(iii) Ar com gradiente axial de pressão nulo

Considera-se que o escoamento de ar é induzido unicamente pelo filme líquido descendente, isto é,

$$\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x} = 0 \tag{88}$$

com $\overline{p}_1$ obtido através de (2d). Uma vez que o escoamento é hidrodinamicamente desenvolvido, a condição (88) é equivalente a

$$\tau_0 + \tau_1 = 0 \quad ,$$

ou, por (56), (57), (59) e (60), a

$$\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=1} = \left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=-1} \quad . \tag{89}$$

Aplicando-se a condição dada por (89) à equação (67), obtem-se

$$A_2 + mA_{2m} = 0 \tag{90}$$

e, combinando esta condição com as equações (75), (76) e (72), pode-se concluir que, para atingir a condição (88) a velocidade $U_{1,0}$ na interface deve ser igual a 2 e a velocidade média do filme líquido deve ser tal que

$$\Omega = \frac{3}{sM+4} \quad . \tag{91}$$

As equações finais para este caso particular são

$$U_1(\eta) = 1 + \left(\frac{s-1}{2m} - 1\right)\eta - \frac{s-1}{2m}\,\eta^{2m+1} \tag{92}$$

$$r(\eta) = \frac{(2m+1)(s-1)}{m}\,(1-\eta^{2m}) \tag{93}$$

e a equação (68) com $U_{2,0}=2\Omega$. Estes perfis coincidem com aqueles obtidos por Pai [4] e estão indicados na figura 3 para números de Reynolds Re_1=42.800 e Re_2=5707, que atendem à equação (91). Se s=1 na equação (92) o perfil laminar obtido é a reta traçada na figura 3.

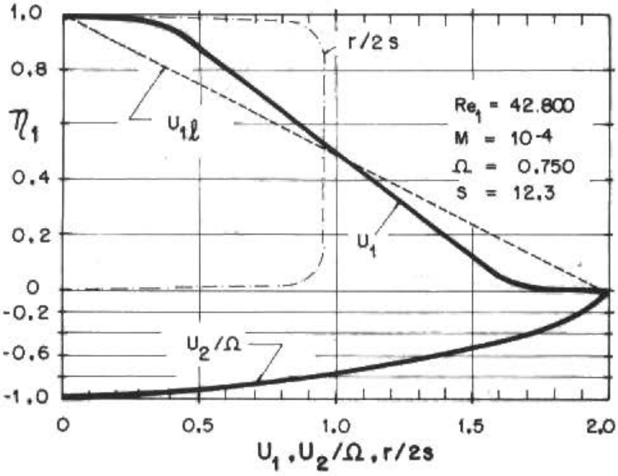


Figura 3. Perfis de velocidade e tensão turbulenta para escoamento de ar induzido pelo filme líquido

Um outro caso investigado é aquele em que $P_2=0$, ou seja, as forças de pressão atuando no filme líquido equilibram o seu peso e o escoamento do líquido se dá devido unicamente ao arrastamento pelo ar.

RESULTADOS GERAIS

As figuras 4 e 5 mostram os perfis obtidos para o caso geral. Ambas se referem a mesmos números de Reynolds, mesma espessura δ do filme e mesma relação de viscosidade. Os valores foram escolhidos de forma a que $\Omega=1$. Pode-se assim observar o efeito combinado do movimento forçado do ar e do arrastamento na interface entre os fluidos. A figura 4 é referente a escoamentos de mesmo sentido e a figura 5 a escoamentos de sentidos opostos. Valores muito grandes de Ω levariam ao caso particular (ii), que pode ser encontrado na bibliografia [4,7].

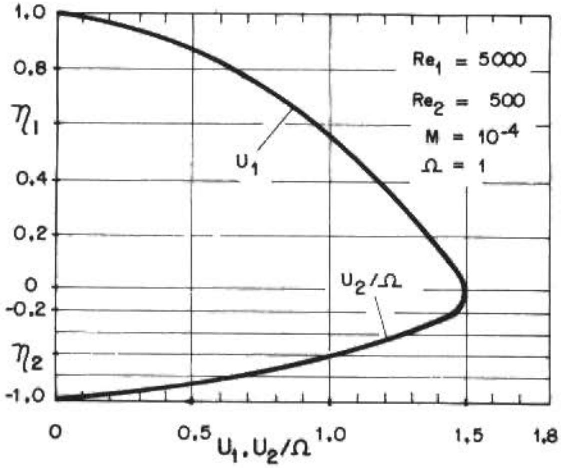


Figura 4. Perfis de velocidade para ar escoando turbulentamente em sentido descendente

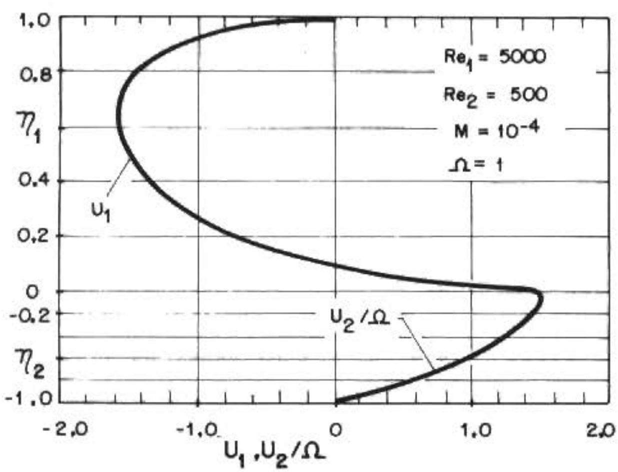


Figura 5. Perfis de velocidade para ar escoando turbulentamente em sentido ascendente

CONCLUSÕES

É possível tirar-se algumas conclusões de caráter geral a partir do presente trabalho:

1. Embora as equações de conservação não forneçam todas as informações necessárias à resolução de problemas envolvendo escoamentos turbulentos, há algumas situações para as quais obtem-se soluções semi-analíticas. Para tanto é necessária alguma informação experimental, mas é perfeitamente dispensável o uso de aproximações do tipo da distribuição logarítmica de velocidade.

2. O método originalmente proposto por Pai, aqui generalizado, pode ser aplicado a problemas de transferência de calor [7] e massa, bastando para isto que hajam dados experimentais disponíveis.

3. Se desejável, a difusividade turbulenta do momentum, ε_M, pode ser obtida diretamente a partir dos perfis de U_1 e r, por meio de

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = - \frac{r}{2} \frac{dU_1}{d\eta} \quad . \tag{94}$$

REFERÊNCIAS

[1] Kays, W.M. - Convective Heat and Mass Transfer. Mc Graw-Hill Book Company, New York (1966).

[2] Knudsen, J.G. e Katz, D.L. - Fluid Dynamics and Heat Transfer. Mc Graw-Hill Book Company, International Student Edition, Tokyo (1958).

[3] Kampe de Feriet, J. - Sur l'Écoulement d'un Fluide Visqueux Incompressible entre Deux Plaques Parallèles Indefinies. La Houille Blanche, v. 23 (1948), p. 1-9.

[4] Pai, S.I. - On Turbulent Flow between Parallel Plates. J.Appl.Mech., v. 20 (1953), p. 109-114.

[5] Pai, S.I. - On Turbulent Flow in Circular Pipe. J. Franklin Inst., v. 256 (1953), p. 337-352.

[6] Laufer, J. - Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel. J.Aeron.Sci., v. 17 (1950), p. 277-287.

[7] Araújo, P.M.S. e Vargas, A.S. - Análise do Campo de Difusividade Térmica Turbulenta no Escoamento de Ar entre Placas Paralelas. VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (1985) - a ser publicado.

[8] Corcoran, W.H.; Page Jr., F.; Schlinger, W.G. e Sage, B.H. - Temperature Gradients in Turbulent Gas Streams. Ind.Eng.Chem., v. 44 (1952), p. 410-419.

[9] Page Jr., F.; Corcoran, W.H.; Schlinger, W.G. e Sage, B.H. - Temperature and Velocity Distributions in Uniform Flow between Parallel Plates. Ind. Eng.Chem., v. 44 (1952), p. 419-424.

[10] Page Jr., F.; Schlinger, W.G.; Breaux, D.K. e Sage, B.H. - Point Values of Eddy Conductivity and Viscosity in Uniform Flow between Parallel Plates. Ind.Eng.Chem., v. 44 (1952), p. 424-430.

ROTAÇÃO DE UM GÁS ENTRE DOIS CILINDROS COAXIAIS
PARTE 1: CAMADAS VISCOSAS

Marcos Aurélio Ortega
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SJC - SP

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é estudar a contracorrente térmica em uma centrífuga bicilíndrica, a qual gira com uma grande velocidade angular. A solução é obtida subdividindo o campo de escoamento em uma parte central, o núcleo, e camadas viscosas junto às paredes sólidas. Neste primeiro artigo são equacionadas e resolvidas as camadas e num segundo artigo - a Parte 2 [16] - será abordada a parte central, obtendo-se assim uma solução global para todo o campo de escoamento.

ABSTRACT

The aim of the present work is to study the thermal countercurrent in a rapidly rotating bicylindrical gas centrifuge. The solution is obtained subdividing the flow field in a central part, the inner core, and viscous layers at the solid walls. In this first paper, the layers are solved, and in a second - the Part 2 [16] - attention is focussed on the central part and so, a global solution is found for the whole field.

INTRODUÇÃO

O interesse no estudo da rotação em alta velocidade de um fluido provém de dois aspectos principais: o primeiro, de natureza teórica, visto ser este problema muito interessante na área da Mecâ nica dos Fluidos e o segundo, de natureza prática, em função da aplicação da centrifugação na separação de componentes de uma mistura. A geometria é bicilíndrica, isto é, a máquina é formada por dois cilindros coaxiais, de altura finita, fechados nas extremidades por tampas - ver figura 1. O conjunto todo gira em alta rotação com uma velocidade angular constante Ω_0 em torno do eixo comum e o gás, que preenche o espaço entre cilindros e tampas, é submetido a um efeito centrífugo de alta intensidade. Não há entrada nem saída de massa e, inicialmente, a temperatura das tampas e cilindros, é constante e igual a $\tilde{T}_0$ (o til sobre um símbolo indica grandeza com dimensão). Nessas condições, em regime permanente, toda a massa gasosa gira com a mesma velocidade angular Ω_0 e com a mesma temperatura $\tilde{T}_0$, o que configura a rotação de corpo rígido isotérmica.

Imagine-se agora que a tampa superior seja aquecida e sua temperatura mantida uniforme e igual a $\tilde{T}_0+\Delta\tilde{T}$, onde $\Delta\tilde{T}$ é um incremento de temperatura tal que $\Delta\tilde{T}/\tilde{T}_0<<1$; a tampa inferior é resfriada e sua temperatura mantida também uniforme e igual a $\tilde{T}_0-\Delta\tilde{T}$. Os cilindros são considerados condutores de calor - a distribuição de temperatura nos cilindros varia linearmente com a altura, condição esta que normalmente ocorre na prática, visto que, a condutividade térmica do material do cilindro é geralmente bem maior do que a do fluido. Considera-se também que transcorreu um intervalo de tempo suficiente para que, com as novas condições de contorno, tenha havido uma estabilização, e se obteve um novo regime permanente. Nessa situação estabelecer-se-á uma contracorrente térmica secundária no gás, a qual representa uma perturbação da rotação de corpo rígido isotérmica, e haverá transporte de massa principalmente ao longo de camadas viscosas junto às paredes sólidas.

Para o caso da centrífuga monocilíndrica, o problema acima estabelecido foi resolvido primeiramente por Sakurai e Matsuda [1]. Esse trabalho pioneiro foi seguido por uma série de outros, os quais procuraram explorar certas variações das condições de contorno no sentido de explicar aspectos específicos, principalmente no que diz respeito às camadas verticais de Stewartson; os mais representativos são: Matsuda e Hashimoto [2], Matsuda, Hashimoto e Takeda [3], Matsuda e Hashimoto [4] e Matsuda e Takeda [5]. Ainda nessa linha ressalta-se o artigo de Bark e Hultgren [6], os quais obtiveram uma solução sem a hipótese de um gás pesado, o qual havia sido basicamente adotado por Sakurai e Matsuda e seguidores. Finalmente Brouwers

[7], através do uso adequado do fator de alongamento da máquina (relação entre a altura e o raio) conseguiu unificar os tratamentos de centrífuga longa (fator de alongamento bem maior que 1) e centrífuga curta (fator de alongamento da ordem de 1).

Em termos da geometria bicilíndrica são bastante representativos os trabalhos de: Conslik e Walker [8], que levam em conta efeitos térmicos e de troca de massa, porém, o fluido é considerado incompressível; Conslik, Foster e Walker [9], que consideram a compressibilidade do fluido mas a maior ênfase é dada à perturbação por troca de massa (entrada e saída de massa da centrífuga). O presente trabalho pretende estudar a contracorrente devida à perturbação térmica em um fluido compressível, o qual gira em alta rotação no interior de uma máquina bicilíndrica.

EQUAÇÕES BÁSICAS

Devido à geometria do problema, o sistema de coordenadas a ser usado é o cilíndrico - ver figura 1 - com coordenadas: radial $\tilde{r}$, azimutal θ e axial $\tilde{z}$; a velocidade angular é constante e igual a Ω_o; o raio do cilindro interno é $\tilde{r}_i$ e do cilindro externo é $\tilde{r}_e$ (o subscrito "i" referir-se-á sempre ao cilindro interno e o subscrito "e" ao cilindro externo), a altura da máquina é 2H e o fator de alongamento, definido por $h=H/\tilde{r}_e$, é considerado da ordem de 1.

O regime é permanente, o escoamento suposto axissimétrico, o gás é considerado perfeito com calores específicos constantes, a viscosidade e condutividade térmica do gás são pequenas e consideradas constantes, visto que a condição é de perturbação de um estado isotérmico e o efeito da gravidade é desprezado em face da aceleração centrífuga característica $\Omega_o^2\tilde{r}_e$, devido aos altos valores de Ω_o.

A solução de corpo rígido isotérmica, a qual representa um balanço entre os efeitos centrífugo e de pressão, é facilmente obtida:

$$\tilde{p}_{cr} = \beta(\tilde{p}_e)_{cr} \tag{1}$$

$$\tilde{\rho}_{cr} = \frac{\tilde{p}_{cr}}{R\tilde{T}_o} \tag{2}$$

$$\beta = e^{\Omega_o^2(\tilde{r}^2-\tilde{r}_e^2)/2R\tilde{T}_o} \tag{3}$$

onde $\tilde{p}$ é a pressão, $\tilde{\rho}$ a densidade, $\tilde{T}_0$ é a temperatura, R é a constante do gás e o subscrito "cr" refere-se à rotação de corpo rígido isotérmica.

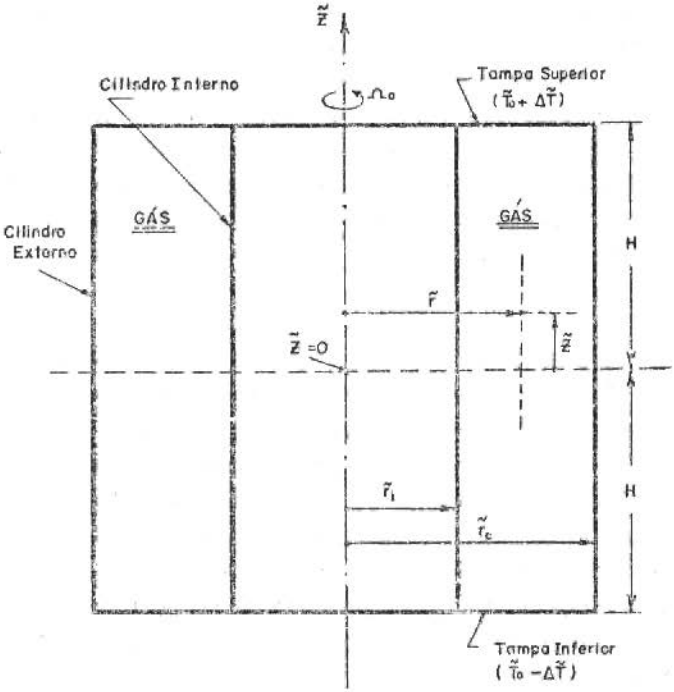


Figura 1. Esquema da centrífuga bicilíndrica

Definindo o número de Rossby por:

$$\psi = \frac{\Delta\tilde{T}}{\tilde{T}_0} \tag{4}$$

vê-se que $\psi \ll 1$, em função do exposto na introdução acima.

Introduzem-se agora as seguintes grandezás adimensionais:

$$r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_e} \qquad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{r}_e} \tag{5a,b}$$

$$u = \frac{\tilde{q}_r}{\Omega_o \bar{r}_e \delta} \qquad v = \frac{\tilde{q} - \Omega_o \tilde{r}}{\Omega_o \bar{r}_e \delta} \qquad w = \frac{\tilde{q}_z}{\Omega_o \bar{r}_e \delta} \tag{5c,d,e}$$

$$p = \frac{\tilde{p} - \bar{p}_{cr}}{\delta \bar{p}_{cr}} \qquad \rho = \frac{\tilde{\rho} - \bar{\rho}_{cr}}{\delta \bar{\rho}_{cr}} \qquad T = \frac{\tilde{T} - \bar{T}_o}{\delta \bar{T}_o} \tag{5f,g,h}$$

onde $\tilde{q}_r$, $\tilde{q}_\theta$, $\tilde{q}_z$ são os componentes da velocidade no sistema cilíndrico e $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}$ indicam, respectivamente, pressão, densidade e temperatura no estado final perturbado. Note-se que u, v, w, p, ρ e T representam grandezas de perturbação em relação à rotação de corpo rígido isotérmica. Substituindo as equações (5) nas equações de conservação, obtém-se, desprezando termos de ordem maior em ψ, o seguinte sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + (1+2Ar^2)\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6a}$$

$$-2v + rT + \frac{1}{2A}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{E}{\beta}\left[\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{q}_p)\right] \tag{6b}$$

$$2u = \frac{E}{\beta}\left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2}\right) \tag{6c}$$

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{E}{\beta}\left[\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\nabla}\cdot\vec{q}_p)\right] \tag{6d}$$

$$-4Bru = \frac{E}{\beta}\nabla^2 T \tag{6e}$$

$$p = \rho + T \tag{6f}$$

onde:

$$A = \frac{\Omega_o^2 \bar{r}_e^2}{2R\bar{T}_o} \qquad E = \frac{\mu}{(\bar{\rho}_e)_{cr}\Omega_o \bar{r}_e^2} \qquad Pr = \frac{\mu c_p}{k} \qquad B = \frac{\gamma-1}{2\gamma} Pr\, A \tag{7a,b,c,d}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q}_p = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7e,f}$$

Nas relações acima μ é o coeficiente de viscosidade do gás, c_p é o calor específico a pressão constante, k é a condutividade térmica e γ é a relação entre os calores específicos. Além do número de Rossby, quatro importantes parâmetros adimensionais aparecem nas equações, a saber, o fator de celeridade A, o número de Ekman E, o número de Prandtl Pr e o número de Brinkman B, os quais, para centrífugas atuais operando com hexafluoreto de urânio, têm, respectivamente, as seguintes ordens de grandeza: 10, 10^{-6}, 1, 10^{-1}. O aspecto mais importante do modelo compressível linear aparece no primeiro membro da equação (6e) - o termo (-4Bru) - o qual representa trabalho realizado devido a variações volumétricas; para o modelo incompressível este termo se anula, visto que, neste caso, B=0.

As condições de contorno são obtidas levando em conta que a velocidade e temperatura do gás são iguais à da superfície sólida com a qual ele faz contacto; em termos de grandezas adimensionais tem-se:

$$u = v = w = 0 \quad , \quad T = j \quad \text{para} \quad z = jh \quad , \quad r_i \leq r \leq r_e \tag{8a}$$

$$u = v = w = 0 \quad , \quad T = z/h \quad \text{para} \quad r = r_K \quad , \quad -h \leq z \leq +h \tag{8b}$$

onde:

$$j = +1 \rightarrow \text{tampa superior} \tag{9a}$$
$$j = -1 \rightarrow \text{tampa inferior} \tag{9b}$$
$$k \equiv e \rightarrow \text{cilindro externo} \tag{9c}$$
$$k \equiv i \rightarrow \text{cilindro interno} \tag{9d}$$

ANÁLISE PELO MÉTODO DA SUBDIVISÃO DO CAMPO

O número de Ekman, E, por ser um número pequeno, aparece como um parâmetro singular no sistema de equações (6). Dessa forma, a solução do problema pode ser obtida subdividindo o campo de escoamento em uma região central, o núcleo, camadas verticais junto ao cilindros e horizontais junto às tampas - ver figura 2. A solução para o campo todo é obtida fazendo-se o acoplamento assintótico das soluções para as diversas regiões - Ver Bender e Orszag [10], para maiores detalhes.

Como as condições de contorno são anti-simétricas em relação ao plano z=0, as camadas verticais são do tipo Stewartson $(E/\beta)^{1/3}$ [11]; as camadas horizontais junto às tampas são as camadas de Ekman, cuja espessura é da ordem de $(E/\beta)^{1/2}$. O fluxo radial na camada de Ekman inferior é no sentido do cilindro interno para o externo, isto devido ao abaixamento de temperatura que aí ocorre; na camada superior inverte-se o sentido do fluxo radial. O circuito das camadas horizontais é fechado via camadas verticais mais um certo fluxo axial que é induzido no núcleo (figura 2).

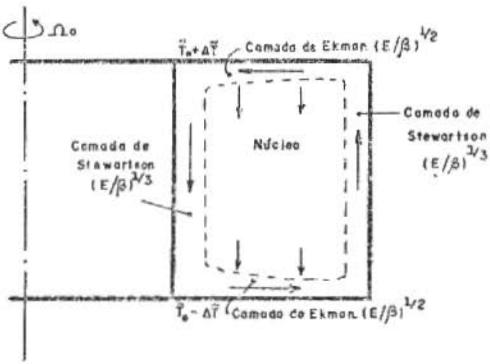


Figura 2. Regiões do escoamento (a figura é esquemática, sem proporções reais)

O método de abordagem utilizado é na realidade uma variação das expansões assintóticas acopladas ("matched asymptotic expansions") [10]. Seja, por exemplo, um parâmetro qualquer a ser determinado; escreve-se:

$$\phi = \phi_N + \phi_{CL} \tag{10}$$

onde ϕ_N é a solução para o núcleo e ϕ_{CL} para a camada limite, a qual é não nula somente junto à uma parede sólida. Admite-se que ϕ_N se estenda até a parede e assim as condições de contorno são satisfeitas pela soma $(\phi_N+\phi_{CL})$ e não somente por ϕ_{CL}. Nesse contexto, ao se afastar de uma superfície sólida, tem-se:

$$\phi_{CL} \to 0 \tag{11}$$

A partir do sistema (6) obtém-se equações mais simples para as diversas regiões por intermédio de uma análise de ordem de grandeza. Pode-se mostrar, por meio de um enfoque tradicional - ver, por exemplo, Schilichting [12] - que a espessura das camadas de Ekman (δ_E) e de Stewartson (δ_S) têm, respectivamente, as seguintes ordens de grandeza: $(E/\beta)^{1/2}$ e $(E/\beta)^{1/3}$. A partir desses resultados, levando em conta que no presente modelo linear o principal mecanismo de troca de calor é a condução, e que a magnitude do fluxo axial nas camadas de Ekman é a mesma do núcleo, obtêm-se as seguintes escalas para os parâmetros de interesse nas várias regiões:

Camadas de Ekman

$$u = u_E \quad v = v_E \quad w = E^{1/2} w_E \quad p = 2AP_E \quad T = T_E \quad \rho = \rho_E \tag{12}$$

Núcleo

$$u = Eu_N \quad v = v_N \quad w = E^{1/2} w_N \quad p = 2Ap_N \quad T = T_N \quad \rho = \rho_N \tag{13}$$

Camadas de Stewartson

$$u = E^{1/3} u_S \quad v = v_S \quad w = w_S \quad p = 2AE^{1/3} p_S \quad T = T_S \quad \rho = \rho_S \tag{14}$$

onde os subscritos "E", "N" e "S" indicam parâmetros de ordem de grandeza unitária em cada uma das regiões acima indicadas.

CAMADAS DE EKMAN - SOLUÇÃO

Define-se para as camadas horizontais a seguinte variável estendida:

$$y = E^{-1/2}(h-jz) \tag{15}$$

Substituindo em (6) as equações (12) e (15) obtêm-se para um erro da ordem de E/β ("erro" no sentido de que a ordem de grandeza do maior tempo desprezado é E/β), o seguinte sistema:

$$\frac{\partial u_E}{\partial r} + (1+2Ar^2)\,\frac{u_E}{r} - j\,\frac{\partial w_E}{\partial y} = 0 \tag{16a}$$

$$-2v_E + r\,T_E + \frac{\partial P_E}{\partial r} = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial^2 u_E}{\partial y^2} \tag{16b}$$

$$2u_E = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial^2 v_E}{\partial y^2} \tag{16c}$$

$$\frac{\partial p_E}{\partial y} = 0 \tag{16d}$$

$$-4Bru_E = \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 T_E}{\partial y^2} \tag{16e}$$

$$2Ap_E = \rho_E + T_E \tag{16f}$$

De (16b) percebe-se que as camadas de Ekman representam um balanço entre os efeitos de Coriolis, centrífugo, pressão e viscosidade. Levando em conta (8a), (10), (12) e (13), as condições de contorno para as camadas horizontais são:

$$u_E = 0 \qquad v_N + v_E = 0 \qquad w_N + w_E = 0 \qquad T_N + T_E = j \tag{17a,b,c,d}$$

válidas para y=0. Da condição (11) resulta que, para $y \to \infty$:

$$\phi_E \to 0 \tag{18}$$

onde ϕ é qualquer uma das variáveis dependentes na camada de Ekman. A partir do sistema (16) pode-se obter uma equação única para u_E:

$$\frac{\partial^4 u_E}{\partial y^4} + 4\sigma^4 u_E = 0 \tag{19}$$

com

$$\sigma = \beta^{1/2}(1+Br^2)^{1/4} \tag{20}$$

Com a solução de (19), mais as outras equações do sistema (16) juntamente com (17) e (18), obtêm-se os seguintes resultados para a camada de Ekman:

$$u_E(r,y) = -\frac{jr}{2(1+Br^2)}\, e^{-\sigma y} \operatorname{sen} \sigma y \tag{21a}$$

$$v_E(r,y) = -\frac{jr}{2(1+Br^2)}\, e^{-\sigma y} \cos \sigma y \tag{21b}$$

$$w_E(r,y) = \frac{1}{4(1+Br^2)^{3/2}} \{[4+Br^2+2Ar^2(1+Br^2)]\, \frac{e^{-\sigma y}}{2} (\operatorname{sen} \sigma y + \cos \sigma y) + $$

$$- r^2[B+2A(1+Br^2)] y e^{-\sigma y} \operatorname{sen} \sigma y\} \tag{21c}$$

$$T_E(r,y) = \frac{jBr^2}{(1+Br^2)} e^{-\sigma y} \cos \sigma y \tag{21d}$$

$$\rho_E(r,y) = -\frac{jBr^2}{(1+Br^2)} e^{-\sigma y} \cos \sigma y \tag{21e}$$

$$p_E(r,y) = 0 \tag{21f}$$

CAMADAS DE STEWARTSON - SOLUÇÃO

Define-se para as camadas verticais a seguinte variável estendida:

$$x = t\, E^{-1/3}(r_k - r) \tag{22}$$

onde:

$$t = +1 \rightarrow \text{cilindro externo} \tag{23a}$$
$$t = -1 \rightarrow \text{cilindro interno} \tag{23b}$$

e a convenção para o subscrito "k" é dada por (9c,d). Substituindo em (6) as equações (14) e (22), obtém-se, para um erro da ordem de $E^{1/3}/\beta$, o seguinte sistema de equações simplificadas para a camada de Stewartson:

$$\frac{\partial w_S}{\partial z} = t\,\frac{\partial u_S}{\partial x} \tag{24a}$$

$$-2v_S + r_k T_S = t\,\frac{\partial p_S}{\partial x} \tag{24b}$$

$$2u_S = \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 v_S}{\partial x^2} \tag{24c}$$

$$\frac{\partial p_S}{\partial z} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2} \tag{24d}$$

$$-4Br_k\, u_S = \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \tag{24e}$$

$$\rho_S = -T_S \tag{24f}$$

Considerando (8b), (10), (13) e (14), as condições de contorno para as camadas verticais são:

$$u_S = w_S = 0 \qquad v_N + v_S = 0 \qquad T_N + T_S = \frac{z}{h} \tag{25a,b,c}$$

válidas para x=0. Para $x \to \infty$ tem-se:

$$\phi_S \to 0 \tag{26}$$

de acordo com (11), onde é qualquer uma das variáveis dependentes na camada de Stewartson; além disso

$$w_S = 0 \qquad \text{para} \qquad z = \mp h \tag{27}$$

Das equações (24c) e (24e), considerando-se (26), resulta que:

$$T_S = -2Br_k\, v_S \tag{28}$$

Das equações para o núcleo - ver Parte 2 [16], obtém-se a chamada relação do vento térmico:

$$T_N = \frac{2v_N}{r} \tag{29}$$

Utilizando as relações (25b), (25c), (28) e (29) a condição de contorno para T_S em x=0 é obtida:

$$T_S(0,z) = \left(\frac{Br_k^2}{1+Br_k^2}\right)\frac{z}{h} \tag{30}$$

<u>Cálculo de T_S</u>

Trabalhando-se o sistema (24), com a ajuda da relação (28), obtém-se uma equação única para T_S:

$$\frac{\partial^6 T_S}{\partial x^6} + 4\beta^2(1+Br_k^2)\frac{\partial^2 T_S}{\partial z^2} = 0 \tag{31}$$

Desenvolve-se agora T_S numa série de funções do tipo $\cos[m\pi(z-h)/2h]$. Devido à anti-simetria das condições de contorno somente valores ímpares de m são necessários, portanto, adotar-se-á como solução a seguinte série de funções:

$$T_S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos[(2n+1)\,\frac{\pi}{2h}\,(z-h)] \tag{32}$$

A série acima pode ser diferenciada termo a termo em relação a z, admitindo-se, o que é razoável, a continuidade de T_S, e, pelo menos, a continuidade por partes ("piecewise continuity") de $\partial T_S/\partial z$ [13]. A série $\partial T_S/\partial z$ também pode ser diferenciada termo a termo, visto que, o seno resultante da diferenciação de T_S se anula para $z=jh$. Substituindo (32) em (31) resulta:

$$\frac{d^6 f_n}{dx^6} - 4[(2n+1)\,\frac{\pi}{2h}]^2\,\beta^2(1+Br_k^2)f_n = 0 \tag{33}$$

As condições de contorno para (33), obtidas respectivamente de (25a), (25b), (30) e (26) são:

$$\text{Para } x = 0 \Longrightarrow f_n''(0) = f_n'''(0) = 0 \qquad f_n(0) = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\,\frac{Br_k^2}{1+Br_k^2} \tag{34a,b,c}$$

$$\text{Para } x \to \infty \Longrightarrow f_n \to 0 \tag{34d}$$

onde a notação ( )' indica diferenciação em relação a x. A solução de (33) sujeita a (34) é:

$$f_n(x) = \frac{f_n(0)}{2}\,[e^{-\nu_n x}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\nu_n}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\nu_n x - \frac{\pi}{6})] \tag{35}$$

onde:

$$\nu_n = [\frac{\pi\beta}{h}\,(2n+1)]^{1/3}\,(1+Br_k^2)^{1/6} \tag{36}$$

Obtidas as funções $f_n(x)$, todos os parâmetros podem ser determinados:

$$u_S(x,z) = -\,\frac{1}{4Br_k\beta}\,\sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)\cos[(2n+1)\,\frac{\pi}{2h}\,(z-h)] \tag{37}$$

$$v_S(x,z) = -\,\frac{1}{2Br_k}\,\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos[(2n+1)\,\frac{\pi}{2h}\,(z-h)] \tag{38}$$

$$w_S(x,z) = -\frac{th}{2\pi Br_k\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n'''(x)}{2n+1}\operatorname{sen}[(2n+1)\frac{\pi}{2h}(z-h)] \tag{39}$$

$$T_S(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos[(2n+1)\frac{\pi}{2h}(z-h)] \tag{40}$$

$$\rho_S(x,z) = -\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos[(2n+1)\frac{\pi}{2h}(z-h)] \tag{41}$$

$$p_S(x,z) = \frac{th^2}{\pi^2 Br_k\beta^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F''''(x)}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)\frac{\pi}{2h}(z-h)] \tag{42}$$

É interessante observar que a diferenciação entre a camada externa e interna é feita pelo parâmetro t e pelo subscrito "k".

Como não existe nenhuma irregularidade nas condições de contorno nos cantos, o estudo das regiões $E^{1/2}\times E^{1/3}$ não implicará em nenhuma mudança significativa dos resultados anteriores [1], [9], conseqüentemente, a análise dessas regiões (que são muito pequenas) é omitida do presente trabalho.

APLICAÇÕES, COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Nas aplicações efetuadas utilizou-se como fluido de trabalho o hexafluoreto de Urânio; para a máquina considerou-se: $\bar{r}_e$=10 cm, r_e=1 (ver equação (5a)), r_i=0,70, h=1. O cálculo foi feito para várias velocidades de rotação, as quais são relacionadas na tabela 1, juntamente com os parâmetros A, E e B.

Tabela 1. Valores do fator de celeridade A, número de Ekman E número de Brinkman B em função da velocidade periférica $\Omega_o\bar{r}_e$. O fluido é UF com $\bar{T}_o$=300K e $(\bar{p}_e)_{cr}$=8000N/m²

$\Omega_o\bar{r}_e$(m/s)	A	E	B
100	0,71	$1{,}50\times10^{-6}$	0,0215
200	2,82	$7{,}50\times10^{-7}$	0,0852
300	6,35	$5{,}00\times10^{-7}$	0,1919
400	11,29	$3{,}70\times10^{-7}$	0,3412

Os parâmetros das camadas de Stewartson foram calculados com uma precisão de 10^{-5}, isto é, o número de termos nas séries era aumentado, até que a diferença entre dois valores sucessivos da grandeza que estava sendo calculada fosse menor que 10^{-5}. Os cálculos foram feitos num computador de mesa Hewlett-Packard HP 9825T e as figuras traças num plotador HP-7225B.

Dentre os vários resultados numéricos obtidos, alguns serão apresentados a seguir sob a forma de gráficos, para fins de ilustração. A figura 3 mostra perfis da velocidade radial para a camada de Ekman; os valores são plotados em forma dimensional para que se tenha noção da ordem de grandeza. Nota-se, claramente, que a espessura da camada aumenta conforme o raio diminui, o que vem comprovar a influência da compressiblidade, através do parâmetro β (a espessura da camada de Ekman é da ordem de $(E/\beta)^{1/2}$, onde β é dado pela equação (3)).

A figura 4 ilustra a distribuição de temperatura nas camadas de Stewartson - junto ao cilindro interno (à esquerda) e externo (à direita). Como se pode observar, há uma grande variação de T_S junto às paredes e valor nulo na parte central. Como $\bar{r}_e$=10cm, nota-se que a espessura das camadas junto ao cilindro externo é aproximadamente 5mm. Da figura 3 vê-se que a espessura da camada de Ekman é aproximadamente 0,5mm, e, portanto, a relação obtida para δ_S/δ_E é aproximadamente 10, onde, como já foi visto anteriormente, δ_S e δ_E representam, respectivamente, as espessuras das camadas de Stewartson e Ekman. Esse valor vem confirmar assim a análise de ordem de grandeza, pois, lembrando, que δ_S e δ_E resultam, respectivamente, da ordem de $(E/\beta)^{1/3}$ e $(E/\beta)^{1/2}$, que β é da ordem de 1 junto ao cilindro externo (ver equação (3)) e que E é da ordem de 10^{-6} (ver tabela 1) tem-se:

$$\frac{\delta_S}{\delta_E} \simeq \frac{(E)^{1/3}}{(E)^{1/2}} = (E)^{-1/6} \simeq 10$$

Observando a camada junto ao cilindro interno vê-se que, conforme B aumenta, o que é devido ao aumento da rotação (ver tabela 1), aumenta a espessura, mais um reflexo da influência da compressibilidade através do parâmetro β.

A figura 5 mostra a distribuição da velocidade axial w_S nas camadas de Stewartson. Pode-se notar em ambas as camadas o importan

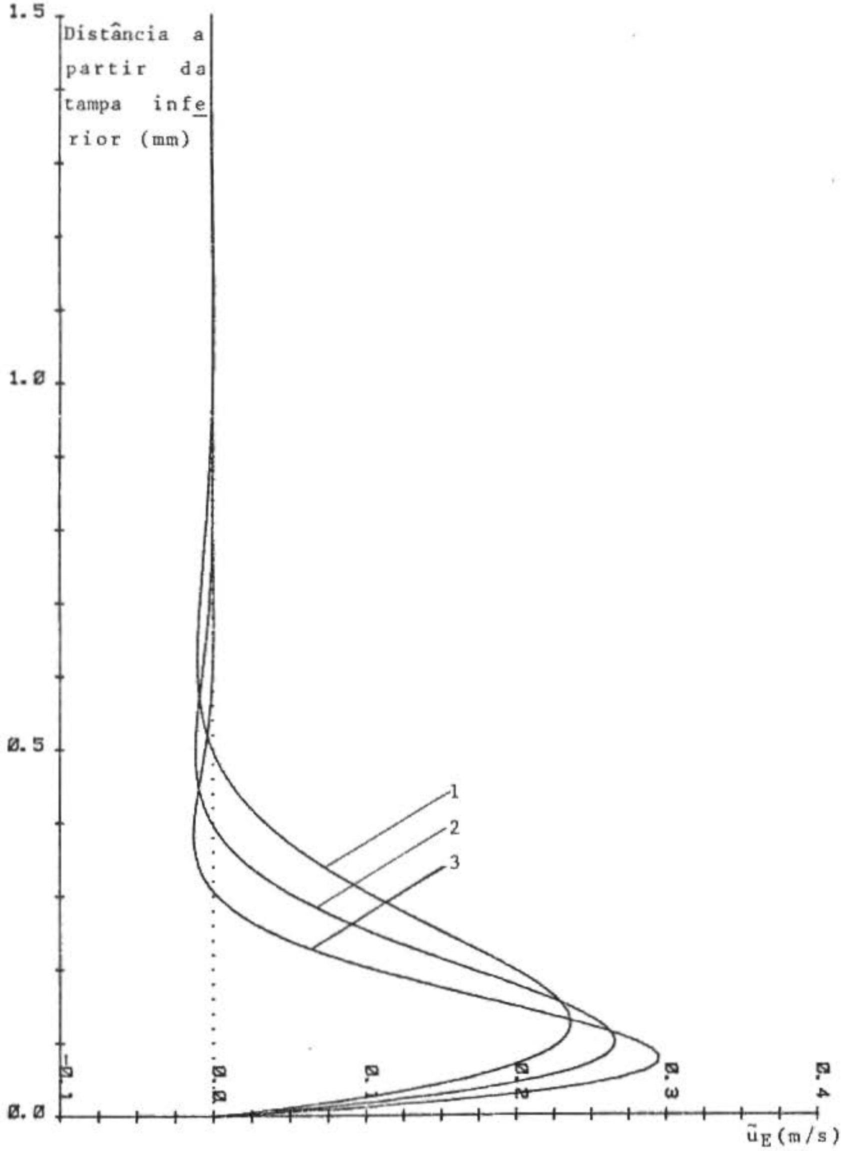


Figura 3. Camada de Ekman: curvas da velocidade radial para três posições sobre a tampa inferior. Parâmetros principais: ψ=0,01, B=0,0852; r_i=0,7; h=1. Convenção: (1) r=0,75; (2) r=0,85; (3) r=0,95

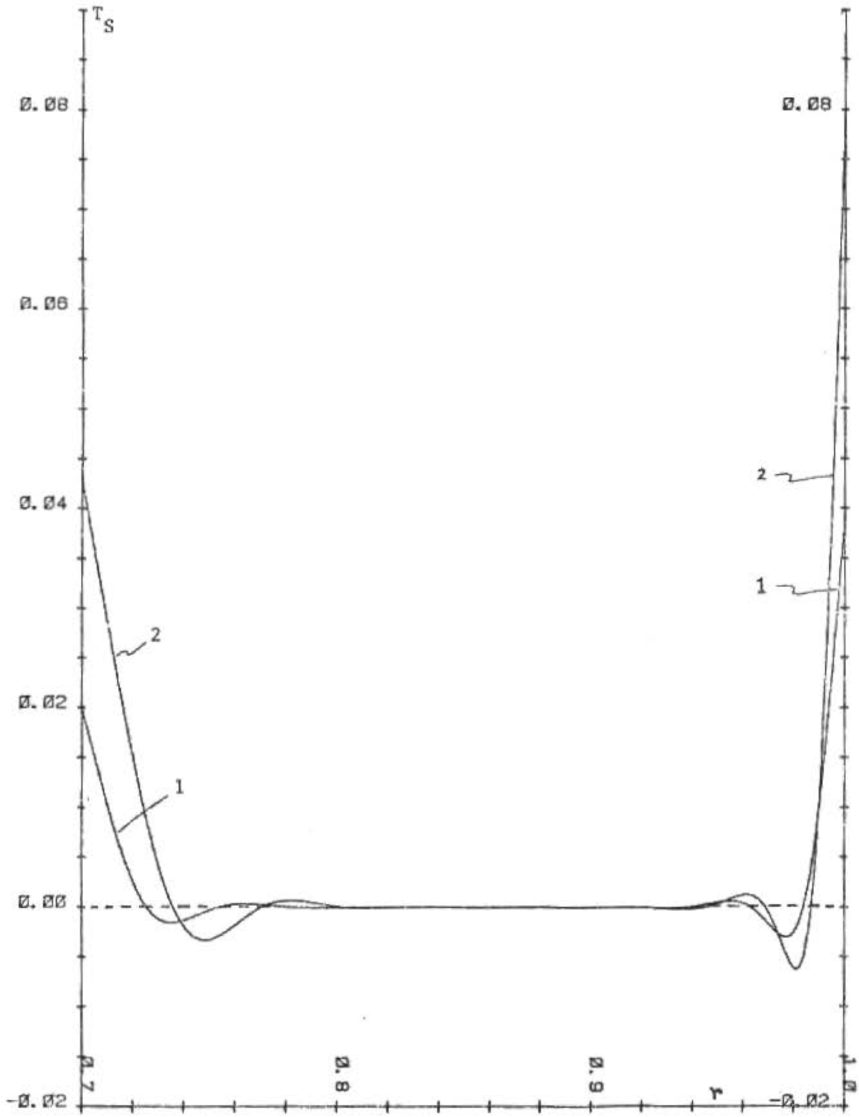


Figura 4. Distribuição de temperatura T_S nas camadas de Stewartson-caso linear; a função T_S foi plotada, para z=0,5h, entre r_i e r_e, observando-se à esquerda, a camada junto ao cilindro interno, à direita, a camada junto ao cilindro externo e o valor nulo de T_S na parte central (núcleo); z=0,5h. Convenção: 1 - B=0,0852; 2 - B=0,1919

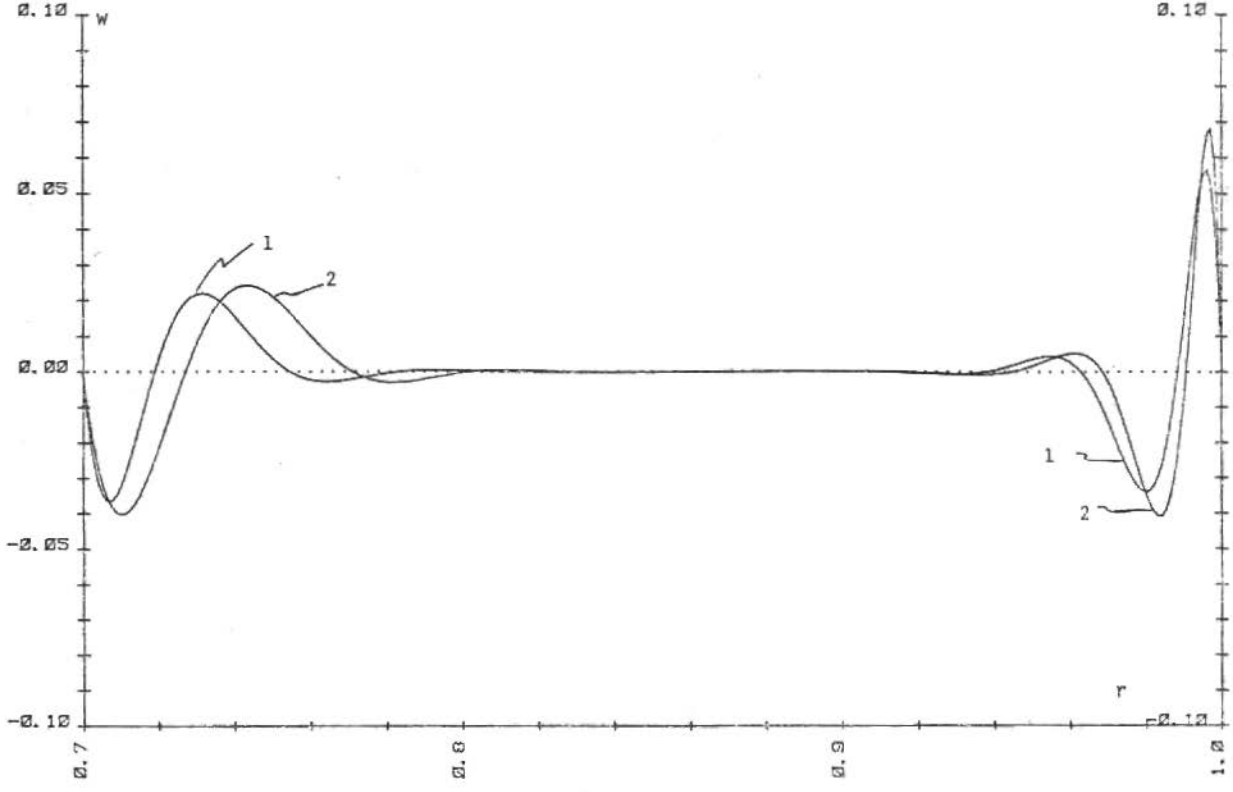


Figura 5. Velocidade axial nas camadas de Stewartson. Note-se à esquerda, a camada junto ao cilindro interno, à direita, a camada junto ao cilindro externo, sendo que no interior, i.e., no núcleo, a velocidade W_S é nula. z=0,50h. Convenção: 1 - B=0,0852; 2 - B=0,1919

te fenômeno do refluxo (um circuito interno de vazão de massa dentro da própria camada), o que vem comprovar trabalhos anteriores de outros autores - Soubbaramayer [14], Dickinson e Jones [15].

REFERÊNCIAS

[1] Sakurai, T. and Matsuda, T. - Gasdynamics of a centrifugal machine. J. Fluid Mech. 62, 727 (1974).

[2] Matsuda, T. and Hashimoto, K. - Thermally, mechanically or externally driven flows in a gas centrifuge with insulated horizontal end plates. J. Fluid Mech. 78, 337 (1976).

[3] Matsuda, T.; Hashimoto, K. and Takeda; H. - Thermally driven flow in a gas centrifuge with an insulated side wall. J. Fluid Mech. 73, 389 (1976).

[4] Matsuda, T. and Hashimoto, K. - The structure of the Stewartson layers in a gas centrifuge. Part 1. Insulated end plates. J. Fluid Mech. 85, 433 (1978).

[5] Matsuda, T. and Takeda, H. - The structure of the Stewartson layers in a gas centrifuge. Part 2. Insulated side wall. J. Fluid Mech. 85, 443 (1978).

[6] Bark, F.H. and Hultgren, L.S. - On the effects of thermally insulating boundaries on geostrpphic flows in rapidly rotating gases. J. Fluid Mech. 95, 97 (1978).

[7] Brouwers, J.J. - On the motion of a compressible fluid in a rotating cylinder. Ph.D. dissertation, Twente Univ. of Technology, Enschede, The Netherlands (1976).

[8] Conslik, A.T. and Walker, J.D.A. - Forced convection in a rapidly rotating annulus. J. Fluid Mech. 122, 91 (1982).

[9] Conslik, A.T.; Foster, M.R. and Walker, J.D.A. - Fluid dynamics and mass transfer in a gas centrifuge. J. Fluid Mech. 125, 283 (1982).

[10] Bender, C.M. and Orszag, S. - Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill, New York (1978).

[11] Stewartson, K. - On almost rigid rotations. J. Fluid Mech. 3, 17 (1957).

[12] Schlichting, H. - Bojndary-layer theory, 7th edition, McGraw-Hill Book Company, New York (1979).

[13] Churchill, R.V. and Brown, J.W. - Fourier series and boundary value problems. McGraw-Hill Book Company, 3rd edition (1978).

[14] Soubbaramayer - Centrifugation - In Uranium Enrichment (ed. S. Villani), pp. 183-244, Springer (1979).

[15] Dickinson, G.J.; Jones, I.P. - Numerical solutions for the compressible flow in a rapidly rotating cylinder. J. Fluid Mech. vol. 107, pp. 89-107(1981).

[16] Ortega, M.A. - Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais - Parte 2: Núcleo e solução geral.

ROTAÇÃO DE UM GÁS ENTRE DOIS CILINDROS COAXIAIS
PARTE 2: NÚCLEO E SOLUÇÃO GERAL

Marcos Aurélio Ortega
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SCJ - SP

RESUMO

A finalidade deste artigo é desenvolver a solução para o núcleo, e em consequência, obter a solução geral para o campo de escoamento em uma centrífuga bicilíndrica, sujeita a condições de contorno térmicas. Na Parte 1 [7] do presente trabalho foram calculadas as camadas viscosas de Ekman e Stewartson. A equação diferencial, a qual dá a distribuição de temperatura na parte central, foi resolvida numericamente por diferenças finitas e analiticamente por desenvolvimento em séries.

ABSTRACT

In this paper, a solution for the inner core of a thermal bi-cylindrical gas centrifuge is obtained, and so, a global solution for the whole flow field is found. In Part 1 [7] of the present work, the Ekman and Stewartson boundary layers were calculated. The differential equation for the central part temperature distribution was solved numerically, by finite differences, and analytically, by series expansion.

INTRODUÇÃO

A alta rotação das centrífugas modernas (da ordem de 3000 rad/s) faz com que, presentemente, seja praticamente inviável a obtenção de medidas dos parâmetros no interior da máquina. Os poucos dados existentes [1] foram obtidos para rotações muito baixas (30 rad/s). Este fato torna o estudo teórico da contracorrente muito importante, principalmente no que tange à sua aplicação na separação isotópica, como aliás, já chamava a atenção Olander [2] em 1972. Isso explica o grande esforço que tem sido feito por diversos autores no sentido de se obter, analitica ou numericamente, o campo de escoamento para um gás girando em alta rotação. Um pequeno histórico recente desse desenvolvimento é feito na Parte 1 [7]. O objetivo deste trabalho é obter a solução para a contracorrente térmica numa centrífuga formada por dois cilindros coaxiais de altura finita, fechados por tampas nas duas extremidades; o conjunto todo gira em alta velocidade em torno do eixo comum dos cilindros e um diferencial de temperatura é aplicado entre as tampas.

EQUAÇÕES SIMPLIFICADAS PARA O NÚCLEO

Detalhes sobre o estabelecimento do problema, bem como, simbologia, sistema de coordenadas, condições de contorno, etc., podem ser encontrados na Parte 1 [7]. Da equação (13) dessa referência tem-se a escala dos parâmetros no núcleo:

$$u = Eu_N \qquad v = v_N \qquad w = E^{1/2} w_N \qquad p = 2Ap_N \qquad T = T_N \qquad \rho = \rho_N \tag{1}$$

Substituindo as relações acima no sistema (6) da Parte 1, obtêm-se, para um erro da ordem de $E^{3/2}/\beta$, as seguintes equações simplificadas para o núcleo:

$$\frac{\partial w_N}{\partial z} = 0 \tag{2a}$$

$$-2v_N + r\,T_N = -\frac{\partial p_N}{\partial r} \tag{2b}$$

$$2u_N\beta = \nabla^2 v_N - \frac{v_N}{r^2} \tag{2c}$$

$$\frac{\partial p_N}{\partial z} = 0 \tag{2d}$$

$$-4Bru_N\beta = \nabla^2 T_N \tag{2e}$$

$$p_N = \rho_N + T_N \tag{2f}$$

Da equação (2b) depreende-se que a dinâmica do núcleo é resultado de um balanço entre os efeitos de Coriolis ($-2v_N$), centrífugo (rT_N) (a forma transformada é rT_N, mas, originalmente, o termo é centrífugo) e de pressão. Considerando que as condições de contorno são anti-simétricas, das equações (2b) e (2d) resulta

$$T_N = \frac{2}{r} v_N \quad , \tag{3}$$

expressão esta conhecida como relação do vento térmico. Trabalhando o sistema (2), com auxílio da relação (3), uma equação única para T_N é obtida:

$$\frac{\partial^2 T_N}{\partial r^2} + \frac{1+3Br^2}{1+Br^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial T_N}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_N}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

Condições de contorno para (4) são obtidas a partir das soluções das camadas viscosas; considerando as equações (17d), (21d), (25c) e (30) da Parte 1, obtém-se

$$T_N(r,jh) = \frac{j}{1+Br^2} \quad \text{e} \quad T_N(r_k,z) = \frac{z}{h(1+Br_k^2)} \quad , \tag{5a,b}$$

onde

$$j = +1 \rightarrow \text{tampa superior} \tag{6a}$$
$$j = -1 \rightarrow \text{tampa inferior} \tag{6b}$$
$$k \equiv e \rightarrow \text{cilindro externo} \tag{6c}$$
$$k \equiv i \rightarrow \text{cilindro interno} \tag{6d}$$

O problema representado pelas equações (4) e (5) foi resolvido de três maneiras diferentes:

(i) Por expansão em séries de B, o número de Brinkman.
(ii) Por expansão em séries de r, a coordenada radial.
(iii) Numericamente, por diferenças finitas.

As soluções em série serão desenvolvidas agora e a solução numérica será discutida adiante. Primeiramente, escreve-se a função $T_N(r,z)$ na forma de uma soma:

$$T_N(r,z) = \frac{z}{h(1+Br^2)} + \bar{T}(r,z) \tag{7}$$

onde $\bar{T}(r,z)$ é tal que:

$$\bar{T}(r,jh) = 0 \tag{8}$$

e dessa forma, as condições (5a) ficam automaticamente satisfeitas. Admite-se agora que a função $\bar{T}(r,z)$ possa ser escrita como uma série de senos:

$$\bar{T}(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r)\ \mathrm{sen}[n\pi(\frac{z}{h}+1)] \tag{9}$$

A função $\bar{T}(r,z)$ pode ser diferenciada em relação a z, termo a termo, em vista de (8); a série resultante também pode ser diferenciada termo a termo em relação a z [3]. Substituindo (9) em (7) e o resultado em (4), resulta, para a determinação das funções $T_n(r)$, a seguinte equação:

$$\frac{d^2T_n}{dr^2} + \frac{1+3Br^2}{1+Br^2}\frac{1}{r}\frac{dT_n}{dr} - (\frac{n\pi}{h})^2\ T_n + \frac{8B}{\pi n(1+Br^2)^3} = 0 \qquad n=1,2,3,... \tag{10}$$

Considerando-se a relação (5b), as seguintes condições de contorno são obtidas para (10):

$$T_n(r_k) = 0 \qquad n=1,2,3,... \tag{11}$$

SOLUÇÃO POR EXPANSÃO EM SÉRIE DE B

Seguindo uma idéia introduzida por Sakurai e Matsuda [4], desenvolve-se uma solução para o núcleo por expansão das funções $T_n(r)$ em séries de B. O número de Brinkman é definido por:

$$B = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\ Pr\ A \tag{12}$$

onde γ é a razão dos calores específicos do gás, Pr é o número de Prandtl e $A=\Omega_0^2\ \bar{r}_e^2/2R\bar{T}_0$ é o chamado fator de celeridade [7]. Para gases "pesados" o fator γ é próximo de 1 (para o hexafluoreto de Urânio, por exemplo, $\gamma=1,07$); como o fator A, para centrífugas atuais, é da ordem de 10, resulta que B<<1. Daí, a possibilidade do desenvolvimento em série de B. Considera-se, portanto, que:

$$T_n(r) = T_{no}(r) + BT_{n1}(r) + \ldots \tag{13}$$

Inicialmente, rearranja-se a equação (10):

$$\frac{d^2T_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_n}{dr} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 T_n = -\frac{2Br}{1+Br^2}\frac{dT_n}{dr} - \frac{8B}{\pi n(1+Br^2)^3} \tag{14}$$

Truncando a série (13) após o segundo termo, substituindo em (14) e, levando em conta que B é considerado pequeno, obtém-se:

$$\frac{d^2T_{no}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_{no}}{dr} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 T_{no} = 0 \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{15}$$

$$\frac{d^2T_{n1}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_{n1}}{dr} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 T_{n1} = -2r\frac{dT_n}{dr} - \frac{8}{\pi n} \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{16}$$

Condições de contorno para as equações acima são obtidas de (11), levando em conta que esta condição tem que valer para qualquer B:

$$T_{no}(r_k) = 0 \tag{17a}$$

$$T_{n1}(r_k) = 0 \tag{17b}$$

A solução de (15) sujeita a (17a) é:

$$T_{no}(r) = 0 \tag{18}$$

e a equação (16) fica portanto mais simples:

$$\frac{d^2T_{n1}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_{n1}}{dr} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 T_{n1} = -\frac{8}{n\pi} \tag{19}$$

A solução de (19) é da forma:

$$T_n = [T_{n1}]_H + [T_{n1}]_P \tag{20}$$

onde $[T_{n1}]_H$ é a solução da homogênea correspondente e $[T_{n1}]_P$ é uma solução particular de (19).

De acordo com Magnus, Oberhettinger e Soni [5] a solução da homogênea é:

$$[T_{n1}]_H = C_{1n}\, I_o(\frac{n\pi}{h}\, r) + C_{2n}\, K_o(\frac{n\pi}{h}\, r) \tag{21}$$

onde I_o é a função de Bessel modificada de primeira espécie, ordem zero, e K_o é a função de Bessel modificada de segunda espécie, ordem zero, e C_{1n}, C_{2n} são constantes. K_o é singular na origem, mas como $r_i>0$, ela tem que ser mantida em (21):

A solução particular é:

$$[T_{n1}]_P = \frac{8h^2}{(n\pi)^3} \tag{22}$$

o que pode ser verificado por substituição direta em (19).

As constantes C_{1n} e C_{2n} são calculadas de (17b):

$$C_{1n} = \frac{D_{1n}}{D_{no}} \qquad\qquad C_{2n} = \frac{D_{2n}}{D_n} \tag{23a,b}$$

onde:

$$D_{1n} = \frac{8h^2}{(n\pi)^3}\, [K_o(\frac{n\pi}{h}\, r_e)-K_o(\frac{n\pi}{h}\, r_i)] \tag{24}$$

$$D_{2n} = \frac{8h^2}{(n\pi)^3}\, [I_o(\frac{n\pi}{h}\, r_i)-I_o(\frac{n\pi}{h}\, r_e)] \tag{25}$$

$$D_{no} = \begin{vmatrix} I_o(\frac{n\pi}{h}\, r_e) & K_o(\frac{n\pi}{h}\, r_e) \\ I_o(\frac{n\pi}{h}\, r_i) & K_o(\frac{n\pi}{h}\, r_i) \end{vmatrix} \tag{26}$$

SOLUÇÃO POR EXPANSÃO EM SÉRIES DE r

A solução anterior tem o inconveniente da condição B<<1, isto é, é mais adequada para gases pesados. Para contornar esta restrição, desenvolveu-se uma solução analítica por expansão em séries de r, a qual pode ser usada independente do valor de B.

Os pontos singulares da equação (10) são:

$$r = 0 \qquad r = \pm\, i/\sqrt{B} \tag{27a,b}$$

onde $i^2=-1$. O objetivo é obter uma solução no entorno do ponto singular $r=0$, o qual é um ponto singular regular. O intervalo de trabalho para a coordenada radial é $r_i \le r \le r_e$, com $r_i > 0$ e $r_e=1$; o número de Brinkman B é, em geral, uma grandeza menor que 1 e então a solução resultante será convergente para qualquer ponto no intervalo de interesse.

A solução da equação (10) é da forma:

$$T_n(r) = C_{3n}(T_n)_1 + C_{4n}(T_n)_2 + (T_n)_p \tag{28}$$

onde $(T_n)_1$ e $(T_n)_2$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente, $(T_n)_p$ é uma solução particular e C_{3n}, C_{1n} são constantes. As raízes da equação indicial são $s_1=s_2=0$ e, então, uma das soluções linearmente independentes é do tipo logarítmico.

Para obter $(T_n)_1$ e $(T_n)_p$ substitui-se a série:

$$(T_n)_{1p} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{a}_\ell \, r^\ell \tag{29}$$

na equação (10). Por meio de um procedimento padrão determinam-se os coeficientes $\overline{a}_\ell$ e, considerando-se que $\overline{a}_1=\overline{a}_3=\overline{a}_5=\ldots=\overline{a}_{2\ell+1}=\ldots=0$, escreve-se que:

$$(T_n)_{1p} = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_{2m} \, r^{2m} \tag{30}$$

Os coeficientes $\overline{a}_{2m}$ são:

$$\overline{a}_2 = -\frac{\lambda_n \overline{a}_o + G_n}{4} \tag{31a}$$

$$\overline{a}_4 = -\frac{(16B+\lambda_n)\overline{a}_2 + 3B\lambda_n \overline{a}_o}{16} \tag{31b}$$

$$\overline{a}_6 = -\frac{(56B+\lambda_n)\overline{a} + (20B^2+3B\lambda_n)\overline{a}_2 + 3B^2\lambda_n \overline{a}_o}{36} \tag{31c}$$

$$\bar{a}_{2m} = - [12B(m-1)^2+4B(m-1)+\lambda_n]\bar{a}_{2(m-\ )}+[12B^2(m-2)^2+8B^2(m-2)+$$

$$+ 3B\lambda_n]\bar{a}_{2(m-2)}+[4B^3(m-3)^2+4B^3(m-3)+3B^2\lambda_n]\bar{a}_{2(m-3)}+$$

$$+ B^3\lambda_m\bar{a}_{2(m-4)}\}/(2m)^2 \qquad m=4,5,6,... \tag{31d}$$

onde

$$\lambda_n = -(\frac{n\pi}{h})^2 \tag{32}$$

$$G_n = \frac{8B}{\pi n} \tag{33}$$

$(T_n)_1$ e $(T_n)_p$ são dadas por:

$$(T_n)_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}r^{2m} \tag{34}$$

$$(T_n)_p = \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m}r^{2m} \tag{35}$$

tal que os coeficientes a_{2m} e c_{2m} são obtidos fazendo:

$$a_{2m} = \bar{a}_{2m}(\bar{a}_o=1 \ ; G_n=0) \tag{36a}$$

$$c_{2m} = \bar{a}_{2m}(\bar{a}_o=0 \ ; G_n) \tag{36b}$$

A equação (36a) significa que os coeficientes a_{2m} são calculados pelas expressões (31) considerando-se $\bar{a}_o=1$ e $G_n=0$; c_{2m} também são calculados usando-se (31), porém, como $\bar{a}_o=0$ e mantendo-se G_n dado por (33). À primeira vista o procedimento parece complicado, no entanto, como os coeficientes foram calculados no computador, torna-se muito fácil a obtenção das séries.

A segunda solução $(T_n)_2$ é dada por:

$$(T_n)_2 = (T_n)_1 \ \ell n\ r + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\ r^{2m} \tag{37}$$

onde os coeficientes b_{2m}, também determinados por meio de um procedimento padrão, são:

$$b_2 = -\frac{2a_2+B}{2} \tag{38a}$$

$$b_4 = -\frac{8a_4+14Ba_2+4B^2+(16B+\lambda_n)b_2}{16} \tag{38b}$$

$$b_6 = -\frac{12a_6+26Ba_4+16Ba_2+2B^3+(56B+\lambda_n)b_4+(20B^2+3B\lambda_n)b_2}{36} \tag{38c}$$

$$b_8 = -\frac{16a_8+36Ba_6+28B^2a_4+6B^3a_2+(120B+\lambda_n)b_6+(64B^2+3B\lambda_n)b_4+(8B^3+3B^2\lambda_n)b_2}{64} \tag{38d}$$

$$\begin{aligned} b_{2m} = &-\{4m\, a_{2m}+[2+12(m-1)]Ba_{2(m-1)}+[4+12(m-2)]B^2a_{2(m-2)}+ \\ &+ [2+4(m-3)]B^3\, a_{2(m-3)}+\{[4(m-1)+12(m-1)^2]B+\lambda_n\}b_{2(m-1)}+ \\ &+ \{[8(m-2)+12(m-2)^2]B^2+3B\lambda_n\}b_{2(m-2)}+ \\ &+ \{[4(m-3)+4(m-3)^2]B^3+3B^2\lambda_n\}b_{2(m-3)}+B^3\lambda_n b_{2(m-4)}\}/4m^2 \\ &\qquad m=5,6,7,\ldots \end{aligned} \tag{38e}$$

As constantes C_{3n} e C_{4n} são determinadas das condições (11):

$$C_{3n} = \frac{D_{3n}}{D_n} \qquad\qquad C_{4n} = \frac{D_{4n}}{D_n} \tag{39}$$

onde:

$$D_{3n} = \begin{vmatrix} -[T_n(r_e)]_p & [T_n(r_e)]_2 \\ -[T_n(r_i)]_p & [T_n(r_i)]_2 \end{vmatrix} \tag{40}$$

$$D_{4n} = \begin{vmatrix} [T_n(r_e)]_1 & -[T_n(r_e)]_p \\ [T_n(r_i)]_1 & -[T_n(r_i)]_p \end{vmatrix} \tag{41}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} [T_n(r_e)]_1 & [T_n(r_e)]_2 \\ [T_n(r_i)]_1 & [T_n(r_i)]_2 \end{vmatrix} \tag{42}$$

Nas expressões acima $[T_n(r_i)]_1$, $[T_n(r_i)]_2$, $[T_n(r_i)]_p$ e $[T_n(r_e)]_1$, $[T_n(r_e)]_2$, $[T_n(r_e)]_p$ são, respectivamente, os valores de $(T_n)_1$, $(T_n)_2$ e $(T_n)_p$ para $r=r_i$ e $r=r_e$.

SOLUÇÃO NUMÉRICA

O problema representado pela equação (4), sujeita às condições de contorno (5a,b), foi resolvido também numericamente, por diferenças finitas, utilizando-se o método iterativo de Gauss-Seidel. Essa solução teve como finalidade servir de comparação e verificação das soluções analíticas por desenvolvimento em série.

Como, para os primeiros casos, a convergência era lenta, utilizou-se um fator de sobre relaxação ("successive over relaxation") igual a 1,8 [6]. Com esse fator de sobre relaxação o número médio de iterações, para uma precisão da ordem de 10^{-7}, ficou em torno de 80. Foram testados vários tamanhos de malha, desde 9×9 até um máximo de 24×24, e para todos os casos a convergência se deu, e para o mesmo valor, o que vem mostrar a consistência do método usado; para a maioria dos casos apresentados adiante usou-se uma malha de 19×19.

OUTROS PARÂMETROS NO NÚCLEO

Com a solução do campo de temperatura T_N, pode-se, a partir do sistema de equações (2), obter os outros parâmetros no núcleo:

$$u_N(r,z) = \frac{z}{\beta h}\,\frac{1-Br^2}{r(1+Br^2)^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4Br\beta}\left[\frac{d^2T_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_n}{dr} - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 T_n\right]\mathrm{sen}\left[n\pi\left(\frac{z}{h}+1\right)\right] \tag{43}$$

$$v_N(r,z) = \frac{zr}{2h(1+Br^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2}\,T_n\ \mathrm{sen}\left[n\pi\left(\frac{z}{h}+1\right)\right] \tag{44}$$

$$P_N(r,z) = 0 \tag{45}$$

$$\rho_N(r,z) = -\frac{z}{h(1+Br^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r)\,\mathrm{sen}[n\pi(\frac{z}{h}+1)0 \tag{46}$$

O valor de p_N dado por (45) é resultado da anti-simetria das condições de contorno. A solução para w_N é obtida da chamada "relação de compatibilidade" entre o fluxo de massa axial no núcleo e na camada de Ekman. Essa relação é representada pela condição de contorno para w junto às tampas (isto é, para y=0) - ver Parte 1, equação (17c). Dessa condição e do valor de w_E (a velocidade axial na camada de Ekman), calculada para y=0, obtém-se:

$$w_N(r) = -\frac{1}{8B^{1/2}(1+Br^2)^{7/4}}[4+Br^2+2Ar^2(1+Br^2)] \tag{47}$$

lembrando que w_N não depende de z, conforme atesta a equação (2a).

APLICAÇÕES, COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Assim como na Parte 1 o fluido de trabalho utilizado foi o hexafluoreto de urânio; os dados da máquina também são os mesmos, a saber, $\bar{r}_e$=10cm, r_e=1, r_i=0,70 e h=1. O parâmetro de guia é o número de Brinkman B, sendo que, variou - se B, variando a velocidade de rotação - veja tabela 1.

Tabela 1. Valores do fator de celeridade A, número de Ekman E e número de Brinkman B, em função da velocidade periférica $\Omega_o\bar{r}_e$. O fluido é UF_6 com $\bar{T}_o$=300K e $(\bar{p}_e)_{cr}$=8000N/m².

$\Omega_o\bar{r}_e$(m/s)	A	E	B
100	0,71	1,50 10^{-6}	0,0215
200	2,82	7,50 10^{-7}	0,0852
300	6,35	5,00 10^{-7}	0,1919
400	11,29	3,70 10^{-7}	0,3412

Para o cálculo com as séries a precisão estabelecida foi de 10^{-5}, isto é, aumentava-se o número de termos da série, até que a diferença entre dois valores sucessivos da grandeza que estava sendo calculada ficasse menor que 10^{-5}. No caso das séries em r, notou-se que conforme r aumentava no intervalo, aumentava o número de termos para convergência. Para valores de r próximos de 1 chegou-se a necessitar até 33 termos, enquanto para r pequenos (próximos do limite esquerdo do intervalo) o número de termos para convergência era em média 7. No caso das séries em B o número máximo de termos foi 12, mantendo-se esse número o mesmo para praticamente todo o intervalo, a menos das extremidades, onde se dava uma diminuição. Os cálculos foram feitos em uma calculadora HP 9825T e os gráficos foram traçados no plotador HP 7225B.

Dentre os vários resultados numéricos obtidos, alguns são apresentados a seguir sob a forma de gráficos. O termo "linear",que aparece na legenda das figuras, significa que a distribuição de temperatura nos cilindros é linear, condição esta estabelecida na Parte 1.

Antes de passar aos comentários é importante analisar o caso "B=0". No limite, quando o número de Brinkman B se anula, as equações de quantidade de movimento azimutal e energia se desacoplam - ver equações (6) da Parte 1 - e, inclusive, a equação da energia passa a ser a equação de Laplace. Nesse caso a solução geral para o campo de temperatura é $T=z/h$, visto que, essa função satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno. Essa mesma solução é obtida para o campo de temperatura (considerando mesmas condições de contorno deste problema) quando o fluido é incompressível, pois,neste caso, o parâmetro B também é igual a zero.

As figuras de 1 a 4 mostram a comparação entre as três maneiras distintas usadas para cálculo de T_N, a temperatura do núcleo. Inicialmente, para B=0, há uma coincidência perfeita dos três métodos, como, em razão do exposto acima, não poderia deixar de acontecer. Conforme B aumenta, considerando-se a solução por diferenças finitas como referência, o desvio apresentado pela série em r mantém-se praticamente o mesmo, enquanto que para a série em B, como era de se esperar, o desvio aumenta. Concluindo, deve-se usar as séries em B para valores pequenos de B e as séries em r para valores grandes de B.

A figura 5 mostra perfis da temperatura T, resultantes da soma da solução do núcleo com a solução das camadas de Stewartson. Observando a linha pontilhada, a qual representa T_N, nota-se como as camadas de Stewartson permitem o acerto das condições de contorno junto às paredes sólidas. É notável também a modificação que o efeito de compressibilidade provoca; se o escoamento fosse incompressível com distribuição linear de temperatura nos cilindros, na figura

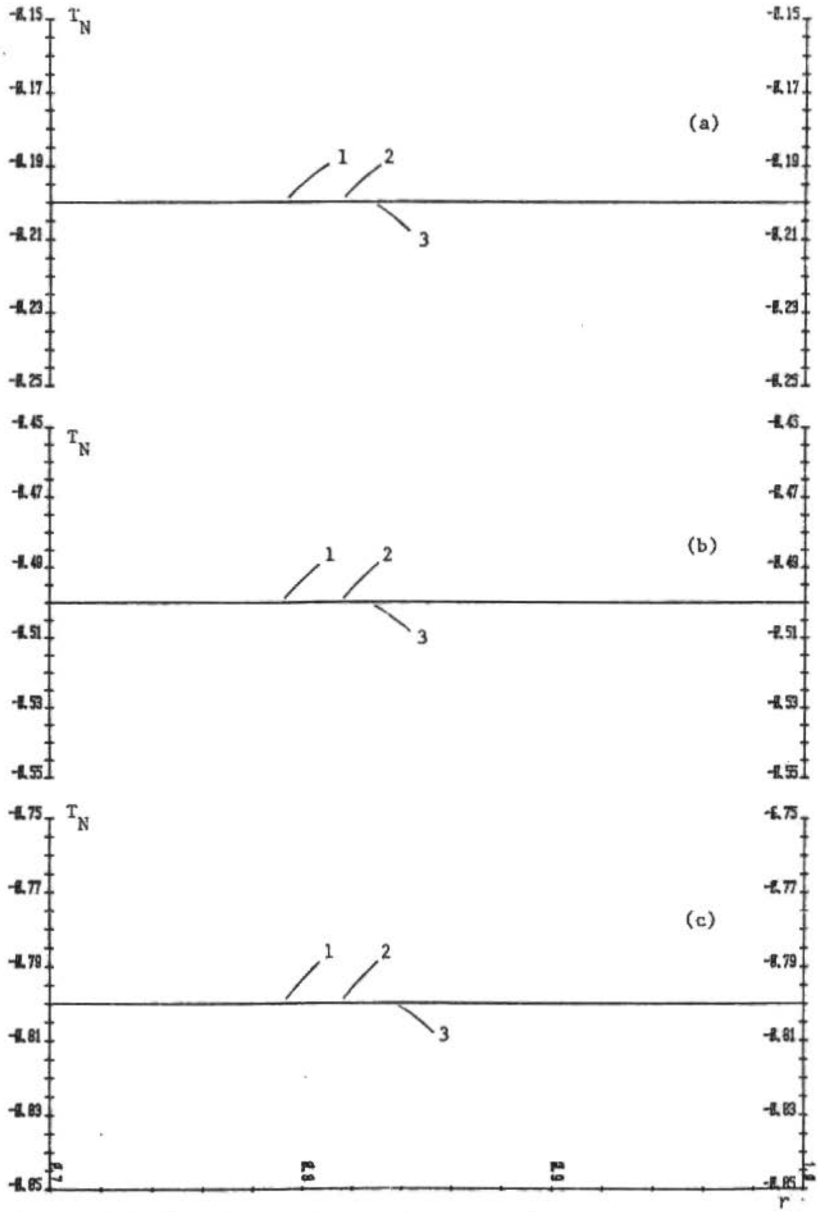


Figura 1. Distribuição de temperatura no núcleo para B=0; caso linear. Convenção: 1 - série em B; 2 - Diferenças finitas; 3 - série em r; (a) z=-0,20h; (b) z=-0,50h; (c) z=-0,80h

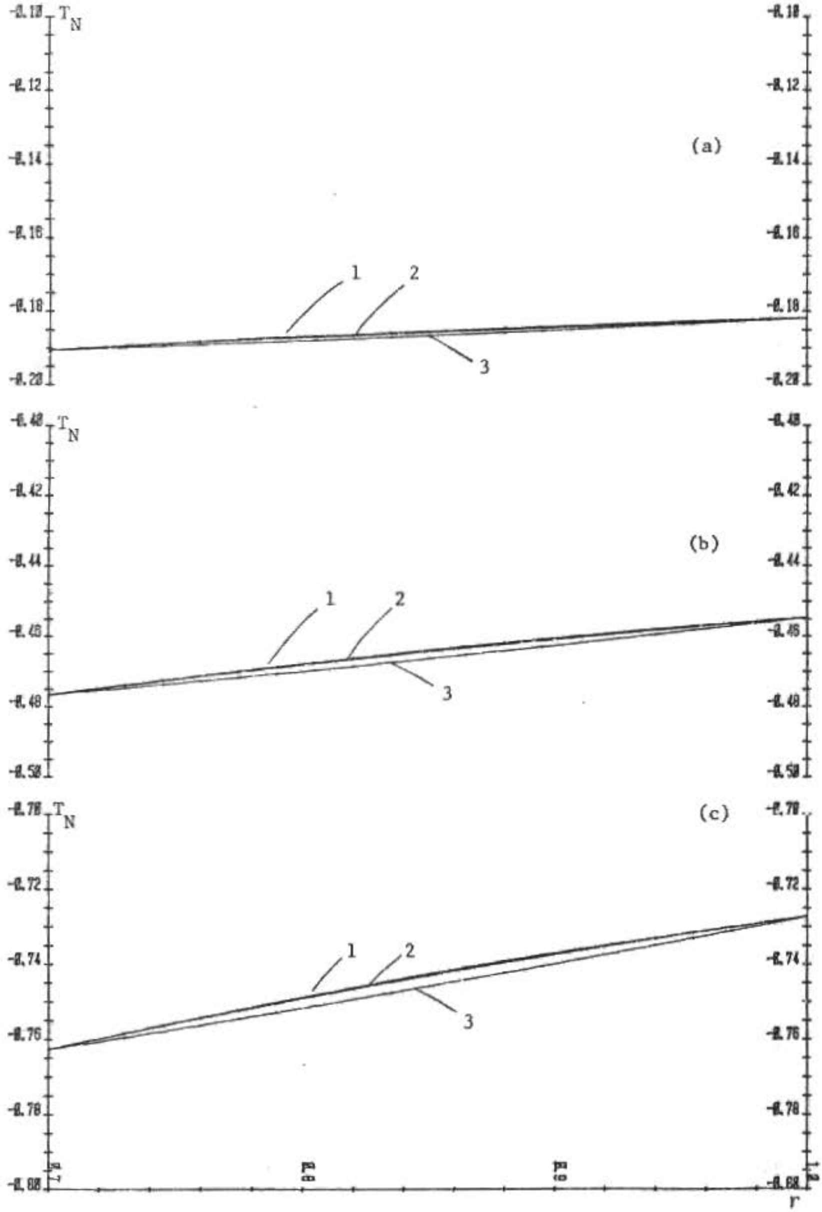


Figura 2. Distribuição de temperatura no núcleo para B=0,1; caso linear. Convenção: 1 - série em B; 2 - Diferenças finitas; 3 - série em r; (a) z=-0,20h; (b) z=-0,50h; (c) z=-0,80h

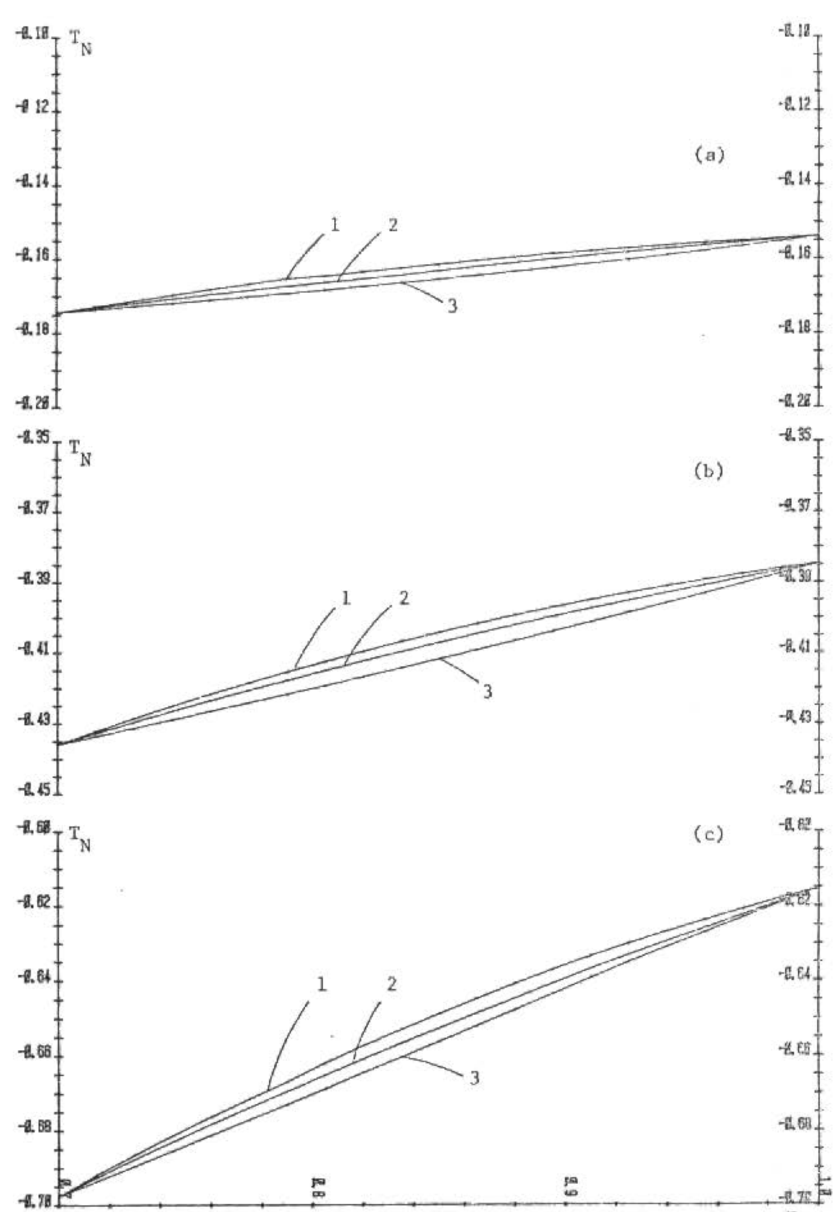


Figura 3. Distribuição de temperatura no núcleo para B=0,3; caso linear. Convenção: 1 - série em B; 2 - Diferenças finitas; 3 - série em r; (a) z=-0,20h; (b) z=-0,50h; (c) z=-0,80h

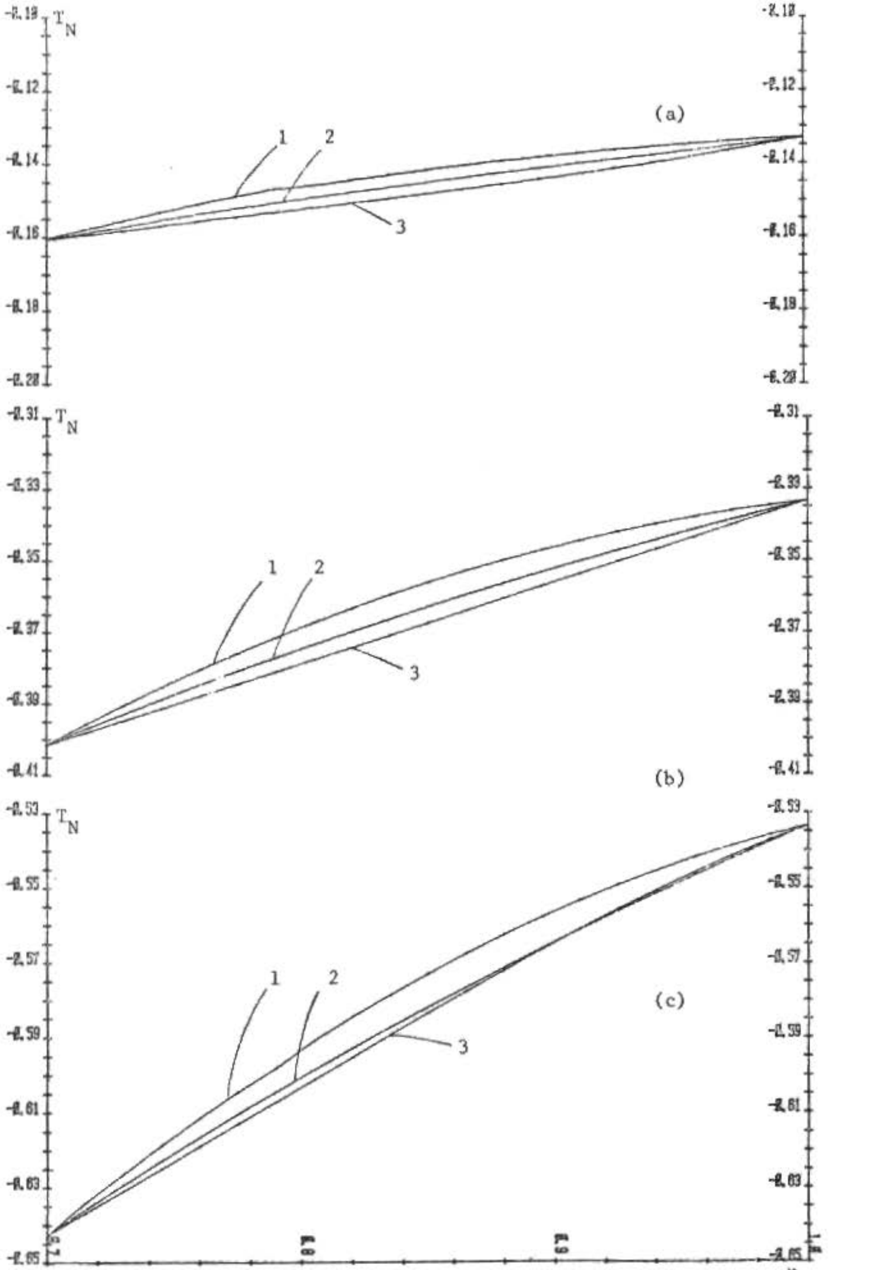


Figura 4. Distribuição de temperatura no núcleo para B=0,50; caso linear. Convenção: 1 - série em B; 2 - Diferenças finitas; 3 - série em r. (a) z=-0,20h; (b) z=-0,50h; (c) z=-0,80h

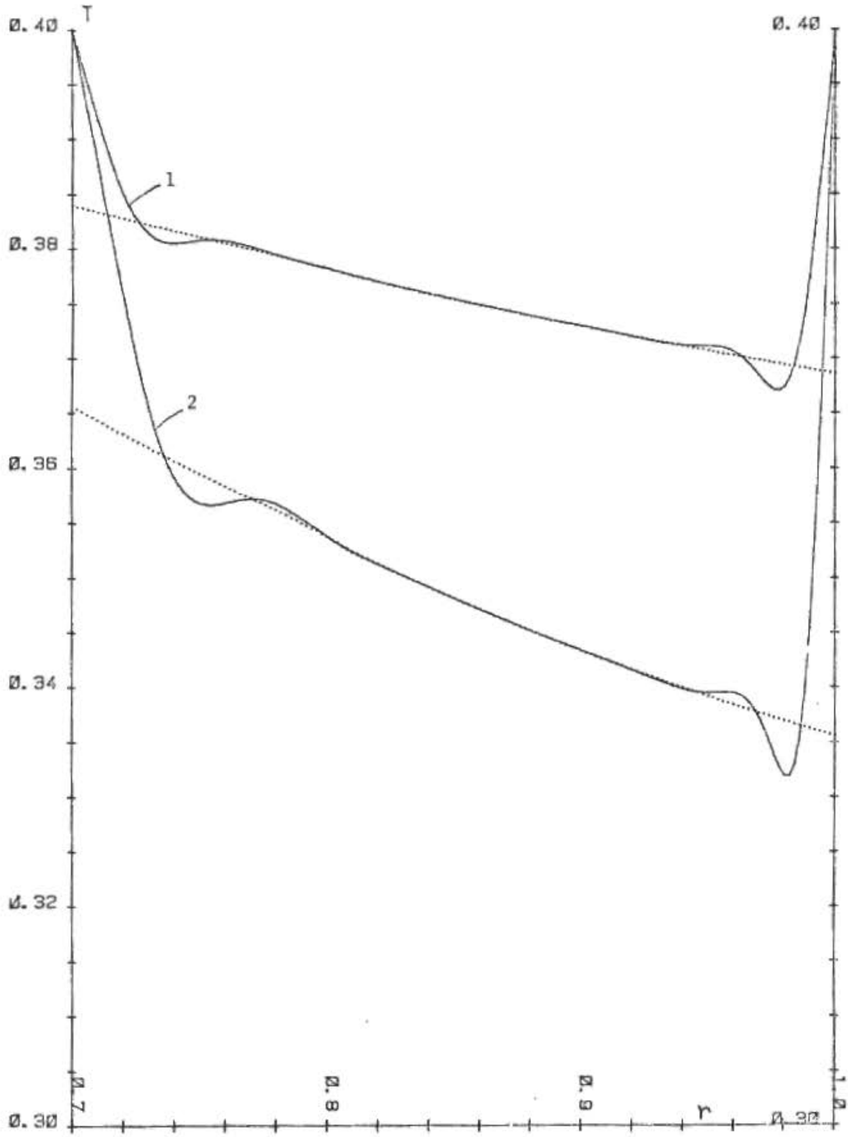


Figura 5. Distribuição da temperatura $T=T_N+T_S$. A linha cheia representa T e a linha pontilhada representa T_N; caso linear; z=0,40h. Convenção: 1 - B=0,0852; 2 - B=0,1919.

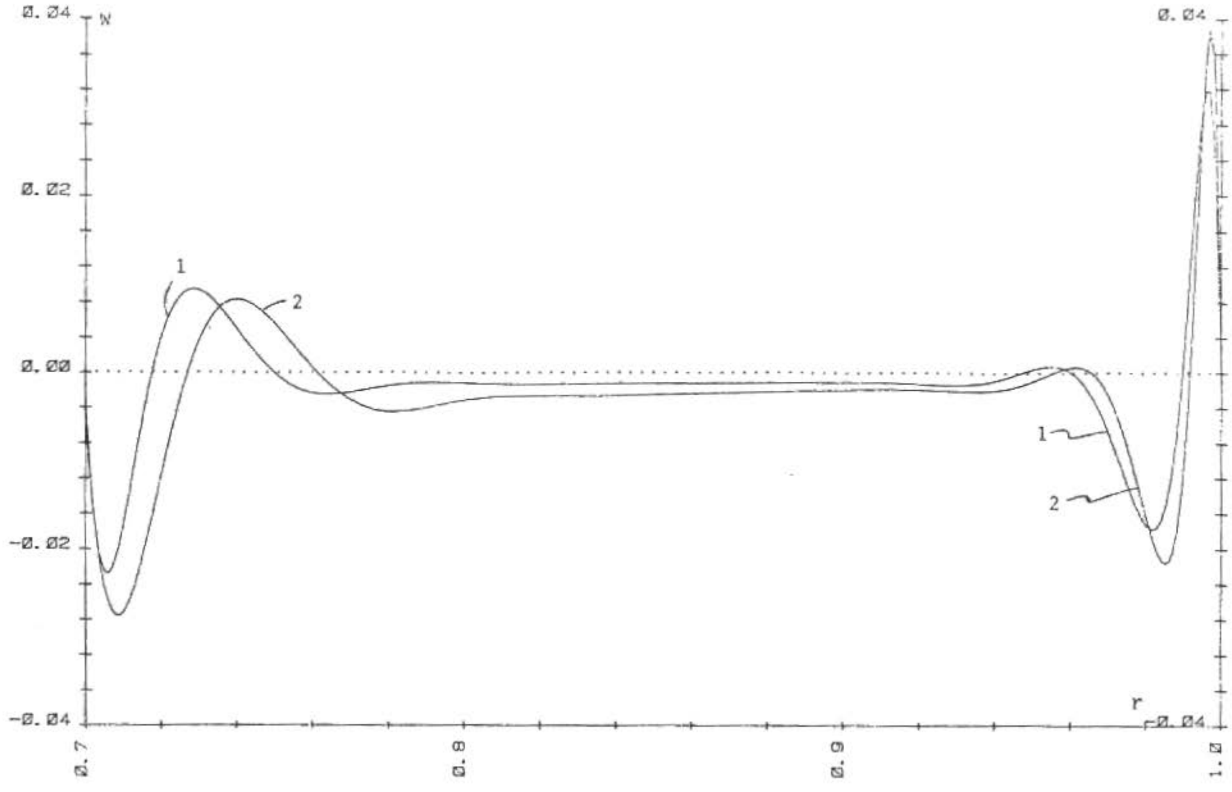


Figura 6. Curvas da velocidade axial w. Note-se, ã esquerda, a camada junto as cilindro interno e, ã direita, a camada junto ao cilindro externo; caso linear; z=0,80h.
Convenção: 1 - B=0,0852; 2 - B=0,1919.

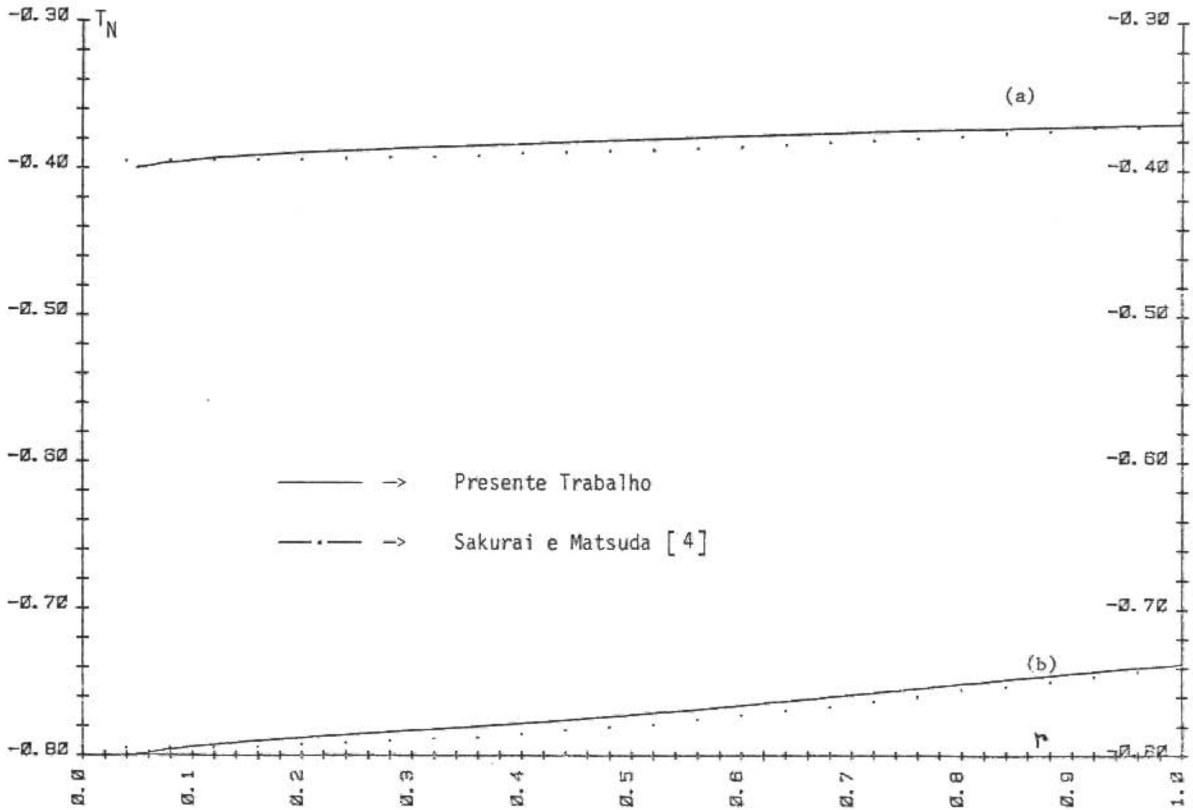


Figura 7. Distribuição de temperatura no núcleo; comparação entre o presente trabalho e o artigo de Sakurai e Matsuda [4]. Dados básicos: B=0,0852; h=1; caso linear; r_i=0,05 (para a geometria bicilíndrica); Convenção: (a) z=-0,40h; (b) z=-0,80h

5 ter-se-ia $T=0,40$, para qualquer valor de r e independente da rotação. Além desse aspecto, conforme B aumenta, o que é um reflexo do aumento da velocidade angular (ver tabela 1), a modificação do perfil de temperatura aumenta; esse é um resultado típico do efeito da compressibilidade.

A figura 6 ilustra a velocidade axial w para duas velocidades de rotação diferentes. Como já foi destacado na Parte 1, nota-se o efeito do refluxo interno nas camadas de Stewartson.

Em conclusão, pode-se afirmar que os resultados obtidos são consistentes, em função de três evidências principais:

(i) Os valores obtidos para T_N, quando calculados de três maneiras distintas são bastantes próximos, e, dessa forma, acontece uma verificação cruzada entre essas diversas soluções.

(ii) O presente problema foi resolvido fazendo $B=0$ e obteve-se para o campo de temperatura a solução $T=z/h$, como atesta a figura 1. Assim, a partir do caso compressível, conseguiu-se "recuperar" o caso incompressível.

(iii) A figura 7 mostra a comparação entre o presente trabalho e o artigo de Sakurai e Matsuda [4]; estes autores estudaram a centrifugação de um gás em uma máquina monocilíndrica, considerando condições de contorno térmicas: aquecimento da tampa superior, resfriamento da tampa inferior e cilindro condutor, com distribuição linear de temperatura. Como se percebe,a comparação é interessante, visto que, as condições de contorno são semelhantes. Como é mostrado na figura 7, as duas soluções são obtidas fixando-se os mesmos parâmetros básicos, e para a configuração bicilíndrica tomou-se $r_i=0,05$, dentro da idéia de se "recuperar" a solução monocilíndrica a partir da bicilíndrica no limite $r_i \to 0$. Os valores de T_N foram comparados para $z=-0,40h$ e $z=-0,80h$, e são realmente muitos próximos (maior diferença da ordem de 2%).

REFERÊNCIAS

[1] Ozaki, N.; Harada, I.; Tokoi, H. and Yamanouchi, A. - Flow profile measurements of a gas in a rotating cylinder. ANS Transactions 24 (1976).

[2] Olander, D.R. - Technical basis of the gas centrifugue. Adv.Nucl.Sci. Technology 6, 105 (1972).

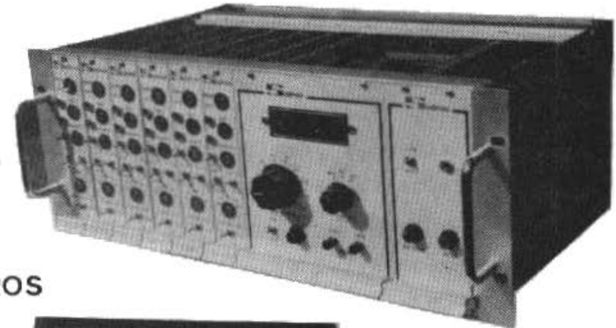
[3] Churchill, R.V. and Brown, J.W. - Fourier series and boundary value problems. McGraw-Hill Book Company, 3rd edition, International Student Edition (1978).

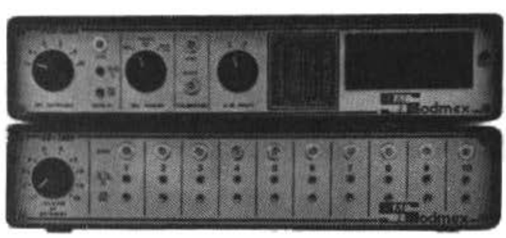
[4] Sakurai, T. and Matsuda, T. - Gasdynamics of a centrifugal machine. J.Fluid Mech. 62, 727 (1974).

[5] Magnus, W.; Oberhettinger, F. and Soni, R.P. - Formulas and theorems for the special functions of mathematical Physics. Springer Verlag, Berlin (1966).

[6] Dahlquist, G.; Björck, Å. - Numerical methods. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

[7] Ortega, M.A. - Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais - Parte 1: Camadas viscosas.





RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA ESCOAMENTOS DE FLUÍDOS NÃO-NEWTONIANOS ATRAVÉS DE MEIOS POROSOS SATURADOS

Rogério Martins Saldanha da Gama, LNCC/CNPq
Rubens Sampaio, DEM-PUC/RJ

RESUMO

O trabalho estuda o comportamento de dois tipos de fluidos não-Newtonianos incompressíveis quando estes escoam através de um meio poroso, idealizado como um conjunto de placas paralelas equidistantes. Com os resultados obtidos analiticamente propõem-se relações constitutivas para a força de interação sólido-fluido que surge nas equações da Teoria Contínua de Misturas, quando o fluido e o sólido (meio poroso) são tratados como constituintes contínuos de uma mistura binária.

ABSTRACT

In this work we analyse the behavior of two types of non-Newtonian incompressible fluids, flowing through a porous medium, that is assumed to be composed by several plane plates separated by a constant distance. With the obtained results, constitutive relations are proposed for calculating the solid-fluid interaction force, that appears in the equations of the Continuum Theory of Mixtures, when the fluid and the solid (porous medium) are assumed continuous constituents of a binary mixture.

INTRODUÇÃO

Quando se deseja um tratamento local, uma das formas de se analisar um escoamento através de um meio poroso é tratar o fluido e o sólido (que compõe o meio poroso) como constituintes contínuos de uma mistura binária.

Sob este ponto de vista [1,2] temos que analisar o movimento de uma mistura contínua onde os constituintes são dotados de cinemática independente e tem sua interação levada em conta nas equações da dinâmica.

Para uma mistura contínua, composta por dois constituintes, na ausência de reações químicas, temos a equação da continuidade, para o constituinte i, dada por

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \underline{v}_i) = 0 \qquad i=1,2 \tag{1}$$

enquanto que a equação da quantidade de movimento linear é postulada como

$$\rho_i \left[\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t} + (\mathrm{grad}\ \underline{v}_i)\underline{v}_i \right] = \mathrm{div}\ \underline{T}_i + \underline{m}_i + \rho_i \underline{b}_i \qquad i=1,2 \tag{2}$$

onde ρ_i é uma relação local entre a massa do constituinte i e o volume de mistura correspondente, $\underline{v}_i$ é o campo de velocidades do constituinte i, $\underline{T}_i$ seu tensor parcial de tensões, $\underline{b}_i$ é a força externa por unidade de massa que age sobre i e $\underline{m}_i$ é a força de interação por unidade de volume que atua sobre i por efeito dos demais constituintes da mistura. Neste trabalho, por estarmos considerando apenas dois constituintes, $\underline{m}_i$ é o efeito dinâmico do outro constituinte sobre i.

Por ser $\underline{m}_i$ uma força interna à mistura temos que, para o balanço de quantidade de movimento ser satisfeito para a mistura como um todo

$$\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = 0 \tag{3}$$

Se supusermos agora que a matriz porosa é rígida e possui movimento prescrito, não precisaremos nos preocupar com as equações (1) e (2) para o constituinte sólido. Assim sendo, para o fluido, temos que

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \underline{v}_f) = 0 \tag{4}$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{v}_f)\underline{v}_f \right] = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}_f + \underline{m}_f + \rho_f \underline{b}_f \tag{5}$$

O objetivo deste trabalho é o estabelecimento de equações constitutivas para $\underline{m}_f$ supondo que o meio poroso seja rígido, homogêneo, isotrópico e esteja saturado pelo fluido que por ele escoa. Serão propostas relações constitutivas para dois tipos de fluidos não-Newtonianos incompressíveis a partir de uma situação física simples.

Definindo agora a porosidade ϕ e supondo que o constituinte fluido seja incompressível podemos reescrever as equações de balanço, para o fluido, como

$$\operatorname{div} \underline{v}_f = 0 \tag{6}$$

$$\rho\phi \left[\frac{\partial \underline{v}_f}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{v}_f)\underline{v}_f \right] = \operatorname{div} \underset{\sim}{T}_f + \underline{m}_f + \rho\phi \underline{b}_f \tag{7}$$

onde ρ é a densidade real do fluido.

Se o fluido for Newtoniano podemos supor que [3]

$$\underset{\sim}{T}_f = -\phi p \underset{\sim}{1} + 2\eta\lambda\phi^2 \underset{\sim}{D}_f \quad , \quad \underset{\sim}{D}_f = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad} \underline{v}_f + (\operatorname{grad} \underline{v}_f)^T\right] \tag{8}$$

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2 \eta}{K}(\underline{v}_f - \underline{U}) \tag{9}$$

onde p é a pressão no fluido, $\underline{U}$ a velocidade da matriz porosa, K a permeabilidade específica, η a viscosidade do fluido, λ um parâmetro geométrico adimensional, $\underline{v}_f$ o campo de velocidades, $\underset{\sim}{T}_f$ o tensor parcial de tensões e $\underline{m}_f$ a força de interação sólido-fluido.

Para um escoamento de um fluido Newtoniano incompressível com $\underline{v}_f$ constante teremos que (na ausência de forças de corpo externas)

$$-\phi \text{ grad } p = \frac{\phi^2 \eta}{K} (\underline{v}_f - \underline{U}) \tag{10}$$

A equação (10) é conhecida como a "Lei de Darcy", sendo um resultado bastante conhecido e encontrado na literatura de meios porosos.

HIPÓTESES CONSTITUTIVAS

Suponhamos que o fluido não-Newtoniano que satura o meio poroso seja incompressível e que

$$\underset{\sim}{T}_f = -\phi p \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{S}(\lambda, \phi, \underset{\sim}{D}_f) \quad , \quad \underset{\sim}{D}_f = \underset{\sim}{0} \rightarrow \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{0} \tag{11}$$

Vamos determinar uma relação constitutiva para $\underline{m}_f$ a partir de um escoamento onde $\underline{v}_f$ seja constante. Isto forçará, por (11), que $\underset{\sim}{T}_f$ seja um múltiplo escalar da identidade e reduzirá (7) à seguinte equação (na ausência de forças de corpo)

$$\phi \text{ grad } p = \underline{m}_f \tag{12}$$

Basearemos nosso estudo num meio poroso idealizado, formado por várias placas paralelas de espessura "δ" espaçadas de "Δ", como é esquematizado na figura 1 [4,5].

Podemos determinar a permeabilidade K e a porosidade ϕ do meio poroso abaixo analiticamente.

Se pudermos supor que entre cada duas placas temos um escoamento de um fluido Newtoniano incompressível a baixas velocidades, teremos a velocidade real do fluido, num ponto que dista ξ do centro do intervalo entre duas placas, dada por

$$\underline{v} = -\frac{1}{2\eta} \text{ grad } p[(\frac{\Delta}{2})^2 - \xi^2] \tag{13}$$

Pensando agora no fluido como um constituinte da mistura sólido-fluido, temos que $\underline{v}_f$ será dada por

$$\underline{v}_f = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \underline{v}(\xi) d\xi = -\frac{1}{\eta} \text{ grad } p \, \frac{\Delta^2}{12} \tag{14}$$

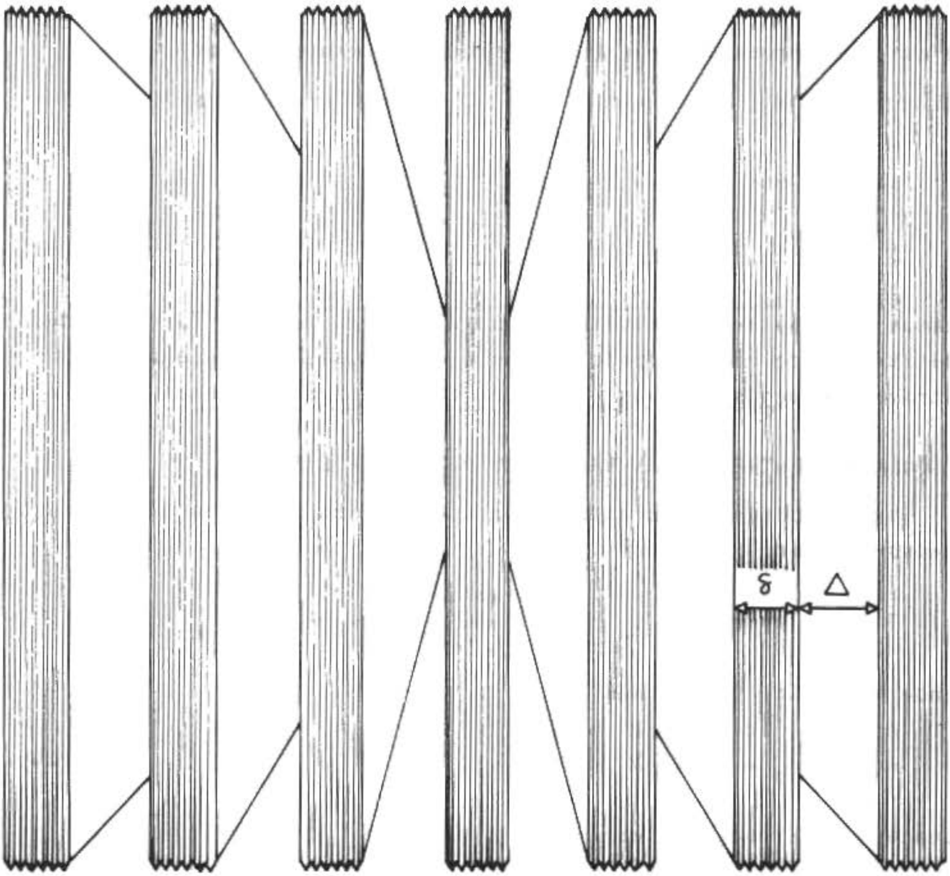


Figura 1. O meio poroso idealizado

sendo portanto constante neste caso.

Comparando (14) com (10) vem que

$$\frac{K}{\phi} = \frac{\Delta^2}{12} \tag{15}$$

A porosidade é dada, diretamente da figura 1, como

$$\phi = \frac{\Delta}{\Delta+\delta} \tag{16}$$

e assim a permeabilidade K pode ainda ser expressa por

$$K = \frac{\Delta^3}{12(\Delta+\delta)} \tag{17}$$

Sabendo que

$$\Delta = \sqrt{\frac{12K}{\phi}} \tag{18}$$

vamos extrapolar os resultados obtidos, para certos fluidos, escoando através de um meio poroso como o da figura 1, para escoamentos através de meios porosos quaisquer caracterizados apenas por ϕ e K.

ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PARALELAS DE UM CERTO FLUIDO

Vamos voltar nossa atenção para um fluido incompressível cujo tensor tensão é dado por

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + 2\eta(\underset{\sim}{D})\underset{\sim}{D} \quad , \quad \underset{\sim}{D} = \frac{\text{grad } \underline{v}+(\text{grad } \underline{v})^T}{2} \tag{19}$$

onde a função $\eta(\underset{\sim}{D})$ é dada por

$$\eta(\underset{\sim}{D}) = \eta_0 + \eta_1\sqrt{2\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{D}} \tag{20}$$

sendo η_0 e η_1 constantes.

Em (19) e (20) p é a pressão no fluido.

Suponhamos agora que este fluido escoa entre placas paralelas infinitas e impermeáveis a baixas velocidades de tal forma que, sendo v_x a componente do campo de velocidades na direção de -grad p, tenhamos (escoamento plenamente desenvolvido)

$$v_y = v_z = 0 \tag{21}$$

Assim sendo trabalharemos com apenas uma componente da equação da quantidade de movimento, ou seja

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (2\eta(\underline{D})D_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (2\eta(\underline{D})D_{xy}) + $$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (2\eta(\underline{D})D_{xz}) \tag{22}$$

no caso de regime permanente sem forças de corpo externas.

Uma vez que o escoamento seja suposto plenamente desenvolvido, (22) se reduz a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dy} \left[(\eta_o + \eta_1 \left| \frac{dv_x}{dy} \right|) \frac{dv_x}{dy} \right] \tag{23}$$

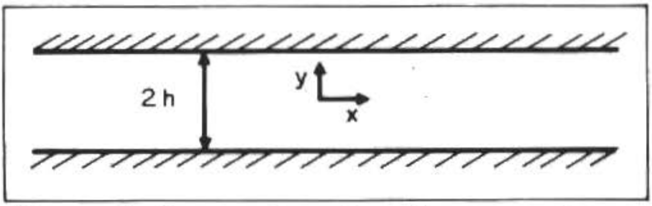


Figura 2. Escoamento entre placas paralelas

Com relação à figura 2, a equação (23) será resolvida sob as seguintes hipóteses

$$y > 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dy} < 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dy} = 0 \tag{24}$$

$$y = h \Rightarrow v_x = 0$$

Para $0<y<h$ temos que (23) pode ser reescrita como

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy} \left[\eta_o \frac{dv_x}{dy} - \eta_1 (\frac{dv_x}{dy})^2 \right] = \text{constante} = C \tag{25}$$

Sendo que

$$C < 0 . \tag{26}$$

Integrando (26) e considerando que $\frac{dv_x}{dy} \leq 0$ para $0 \leq y \leq h$ temos que

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{\eta_o}{\eta_1} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,\frac{\eta_o}{\eta_1}\right)^2 - \frac{cy}{\eta_1}} \tag{27}$$

Integrando novamente e observando a terceira condição em (24) ficamos com

$$v_x(y) = \frac{1}{2}\,\frac{\eta_o}{\eta_1}\,(y-h) - \frac{2}{3}\,\frac{\eta_1}{c}\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\,\frac{\eta_o}{\eta_1}\right)^2 - \frac{ch}{\eta_1}\right]^{3/2} - \left[\left(\frac{1}{2}\,\frac{\eta_o}{\eta_1}\right)^2 - \frac{cy}{\eta_1}\right]^{3/2}\right\} \tag{28}$$

A velocidade média $\bar{v}$ pode ser então calculada como

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h}\int_0^h v_x(y)\,dy \tag{29}$$

o que fornece

$$\bar{v}_x = \frac{-h\eta_o}{4\eta_1} - \frac{2}{3}\,\frac{\eta_1}{c}\left(\left(\frac{\eta_o}{2\eta_1}\right)^2 - \frac{ch}{\eta_1}\right)^{3/2} - \frac{4\eta_1^2}{15c^2h}\left(\left(\frac{\eta_o}{2\eta_1}\right)^2 - \frac{ch}{\eta_1}\right)^{5/2} + \frac{\eta_o^5}{120c^2h\eta_1^3} \tag{30}$$

Definindo α como

$$\alpha = \frac{4ch\eta_1}{\eta_o^2} \tag{31}$$

temos que

$$\bar{v}_x = \frac{-h\eta_o}{4\eta_1} - [(1-\alpha)^{3/2}-1]\,\frac{\eta_o^3}{30\alpha c\eta_1^2} - (1-\alpha)^{3/2}\,\frac{\eta_o^3}{20c\eta_1^2} \tag{32}$$

Expandindo $(1-\alpha)^{3/2}$ em séries de Taylor obtemos (em torno de $\alpha=0$)

$$(1-\alpha)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2}\,\alpha + \frac{3}{8}\,\alpha^2 + \frac{3}{48}\,\alpha^3 + \frac{3}{128}\,\alpha^4 + \frac{3}{256}\,\alpha^5 + \ldots \tag{33}$$

Substituindo (33) em (32) ficamos com

$$\overline{v}_x = -\frac{h\eta_o}{4\eta_1} - [-\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{3}{48}\alpha^3 + \ldots]\frac{\eta_o^3}{30\alpha c\eta_1^2} -$$

$$-[1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{3}{48}\alpha^3 \ldots]\frac{\eta_o^3}{20c\eta_1^2} \tag{34}$$

Simplificando os termos comuns vem que, para α pequeno

$$\overline{v}_x \cong \frac{1}{480}\alpha^2\frac{\eta_o^3}{c\eta_1^2} - \frac{3}{160}\alpha^2\frac{\eta_o^3}{c\eta_1^2} - \frac{1}{1280}\alpha^3\frac{\eta_o^3}{c\eta_1^2} - \frac{1}{320}\alpha^3\frac{\eta_o^3}{c\eta_1^2} \tag{35}$$

ou seja, em função de c

$$\overline{v}_x \cong -\frac{1}{3}\frac{ch^2}{\eta_o} - \frac{1}{4}\frac{c^2h^2\eta_1}{\eta_o^3} \tag{36}$$

Da equação acima podemos tirar que

$$c = -\frac{2}{3h}\frac{\eta_o^2}{\eta_1} + \sqrt{(\frac{2}{3h}\frac{\eta_o^2}{\eta_1})^2 - \frac{4\overline{v}_x}{h^3}\frac{\eta_o^3}{\eta_1}} \tag{37}$$

A outra raiz de (36) não foi considerada pois se deseja que $c \to 0$ quando $\overline{v}_x \to 0$.

Levando em conta (25) reescrevemos (37) como

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\eta_o^2}{3h\eta_1} + \sqrt{(\frac{2\eta_o^2}{3h\eta_1})^2 - \frac{4\overline{v}_x\eta_o^3}{h^3\eta_1}} \tag{38}$$

GENERALIZAÇÃO DA LEI DE DARCY

Se pensarmos agora no meio poroso idealizado, da figura, e considerarmos o fluido, que por ele escoa, e o sólido, como constituintes contínuos de uma mistura binária, teremos que sua velocidade (sob o ponto de vista da Teoria de Misturas) será dada por

$$v_{f\,x} = \overline{v}_x = \frac{2}{\Delta}\int_0^{\Delta/2} v_x(y)\,dy \tag{39}$$

Vamos então estender o resultado da seção anterior para um meio poroso com permeabilidade específica K e porosidade ϕ.

Considerando as equações (17) e (18) e lembrando que $\Delta=2h$ neste caso, ficamos com

$$- \frac{dp}{dx} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta(\frac{\phi\eta_o}{K})v_{f_x}} \quad (40)$$

onde β é definido como

$$\beta = \sqrt{\frac{4\phi}{27K}}\,\frac{\eta_o^2}{\eta_1} \quad (41)$$

Comparando (40) com (12) podemos escrever que

$$-\phi\,\frac{dp}{dx} = -m_{f_x} = \left[\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta(\frac{\phi\eta_o}{K})v_{f_x}}\,\right]\phi \quad (42)$$

Extrapolando o resultado para o caso vetorial e supondo que a força de interação tenha sempre a direção da velocidade relativa entre o fluido e o sólido, escrevemos que

$$-\phi \text{ grad } p = \phi[f(\|\underline{v}_f\|)]\underline{v}_f \quad (43)$$

onde $\underline{v}_f$ é o campo de velocidades, para o constituinte fluido, na mistura.

A função $f(\|\underline{v}_f\|)$ é dada por (42) da seguinte forma

$$f(\|\underline{v}_f\|) = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta\frac{\phi\eta_o}{K}\,\|\underline{v}_f\|}}{\|\underline{v}_f\|} \quad (44)$$

e a força de interação $\underline{m}_f$, para a mistura considerada, é dada então por

$$\underline{m}_f = -\phi\left[\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta\,\frac{\phi\eta_o}{K}\,\|\underline{v}_f\|}\right]\frac{\underline{v}_f}{\|\underline{v}_f\|} \quad (45)$$

Este resultado pode ser novamente estendido para o caso onde o meio poroso esteja em movimento. Se pudermos supor que $\underline{m}_f$ depende, localmente, da diferença de velocidades entre o constituinte sólido e o constituinte fluido, então podemos escrever que

$$\underline{m}_f = -\phi\left[\beta-\sqrt{\beta^2-2\beta\,\frac{\phi\eta_o}{K}\,\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}\right]\frac{\underline{v}_f-\underline{U}}{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|} \tag{46}$$

onde $\underline{U}$ é a velocidade do constituinte sólido (meio poroso).

Uma vez que, para chegar até aqui, supusemos α pequeno, é bastante razoável simplificar a expressão acima supondo que β seja grande, já que

$$\beta = \frac{8}{3}\,\frac{c}{\alpha} \tag{47}$$

Desta forma torna-se conveniente reexpressar (46) como

$$\underline{m}_f = -\phi\beta\left[1-\sqrt{1-\frac{2}{\beta}\,\frac{\phi\eta_o}{K}\,\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}\right]\frac{\underline{v}_f-\underline{U}}{\|\underline{v}_f-U\|} \tag{48}$$

e expandir o termo entre colchetes em função de $\frac{2}{\beta}\,\frac{\phi\eta_o}{K}\,\|\underline{v}_f-\underline{U}\|$, que é suposto ser muito menor do que a unidade.

Assim procedendo, vem que

$$\underline{m}_f = \frac{-\phi\beta(\underline{v}_f-\underline{U})}{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}\left[\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\frac{5x^4}{128}+\ldots\right] \tag{49}$$

onde x é o termo anteriormente referido.

Com algumas simplificações chegamos a

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2\eta_o}{K}\left[1+\frac{\phi\eta_o}{K}\,\frac{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}{2\beta}+\left(\frac{\phi\eta_o}{K}\right)^2\frac{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}{2\beta^2}+\frac{5}{4}\left(\frac{\phi\eta_o}{K}\right)^3\frac{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|^3}{2\beta^3}\ldots\right](\underline{v}_f-\underline{U}) \tag{50}$$

As equações (48) e (50) (esta última com a expressão truncada em algum termo) generalizam a clássica Lei de Darcy, para escoamentos de fluidos Newtonianos incompressíveis através de meios porosos, já que no limite quando $\eta_1\to 0$ teremos $\beta\to\infty$ e então

$$\lim_{\eta_1 \to 0} \underline{m}_f = \lim_{\beta \to \infty} \underline{m}_f = \frac{-\phi^2 \eta_o}{K} (\underline{v}_f - \underline{U}) \tag{51}$$

que é exatamente a expressão proveniente da Lei de Darcy no caso da viscosidade do fluido ser η_o.

UM OUTRO TIPO DE FLUIDO

Consideremos agora um outro fluido não-Newtoniano, que também segue a equação (19), diferindo do modelo anterior na função $\eta(\underset{\sim}{D})$, que aqui é suposta

$$\eta(\underline{D}) = \eta_*(\sqrt{2\underline{D}\ \underline{D}})^n \quad , \quad n > -1 \tag{52}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio da seção anterior, chegamos à seguinte equação diferencial

$$\frac{cy}{\eta_*} = -\left|\frac{dv_x}{dy}\right|^{n+1} \tag{53}$$

Considerando as condições (24) ficamos com

$$v_x(y) = -\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{-c}{\eta_*}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left[y^{\frac{n+2}{n+1}} - h^{\frac{n+2}{n+1}}\right] \tag{54}$$

Sob o ponto de vista da Teoria Contínua de Misturas temos que o constituinte fluido terá a seguinte velocidade

$$v_{f_x} = \left(\frac{-c}{\eta_*}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right) h^{\frac{n+2}{n+1}} \tag{55}$$

Procedendo como no modelo anterior chegamos a

$$-\phi \frac{dp}{dx} = \phi\eta_*\left[\left(\frac{\phi}{3K}\right)^{\frac{n+2}{2n+2}} v_{f_x}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{56}$$

ou, estendendo da mesma forma que na seção anterior

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2\eta_*}{K}\left[\left(\frac{\phi}{3K}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)^2}}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\frac{K}{\phi\|\underline{v}_f-\underline{U}\|^{\frac{n}{n+1}}}\right](\underline{v}_f-\underline{U}) \tag{57}$$

Deve ser notado que, quando $n \to 0$, este modelo também se reduz à clássica Lei de Darcy, para um fluido Newtoniano com viscosidade η_*.

RESUMO DAS EQUAÇÕES OBTIDAS

- Equação da Continuidade para o Constituinte Fluido.

$$\text{div}\ \underline{v}_f = 0 \tag{58}$$

- Equação da Quantidade de Movimento para o Constituinte Fluido.

$$\rho\phi\left[\frac{\partial\underline{v}_f}{\partial t} + (\text{grad}\ \underline{v}_f)\underline{v}_f\right] = \text{div}\ \underset{\sim}{T}_f + \underline{m}_f + \rho\phi\underline{b}_f \tag{59}$$

- Equações Constitutivas para a força de interação $\underline{m}_f$ em escoamentos através de meios porosos rígidos, homogêneos, isotrópicos e saturados.

  a) Se o tensor tensão for dado por $\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{1} + 2\eta\underset{\sim}{D}$ (Newtoniano).

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2\eta}{K}(\underline{v}_f-\underline{U}) \qquad \text{(Lei de Darcy)} \tag{60}$$

  b) Se o tensor tensão for dado por $\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{1} + 2[\eta_0 + \eta_1\sqrt{2\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{D}}]\underset{\sim}{D}$.

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2\eta_0}{K}\left[1 + \frac{\phi\eta_0}{K}\frac{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|}{2\beta} + \left(\frac{\phi\eta_0}{K}\right)^2\frac{\|\underline{v}_f-\underline{U}\|^2}{2\beta^2}\right](\underline{v}_f-\underline{U}) \tag{61}$$

  c) Se o tensor tensão for dado por $\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{1} + 2\eta_*(\sqrt{2\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{D}})^n\underset{\sim}{D}$.

$$\underline{m}_f = -\frac{\phi^2\eta_*}{K}\left[\left(\frac{\phi}{3K}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)^2}}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\frac{K}{\phi\|\underline{v}_f-\underline{U}\|^{\frac{n}{n+1}}}\right](\underline{v}_f-\underline{U}) \tag{62}$$

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho partiu-se de modelos clássicos aplicados a fenômenos simples (escoamentos entre placas paralelas) para se construir relações constitutivas, aplicáveis à Teoria Contínua de Misturas, quando esta for usada para modelar certos escoamentos através de meios porosos.

De posse de uma relação constitutiva para a força de interação (por unidade de volume) $\underline{m}_f$ podemos, com uma escolha adequada de $\underset{\sim}{T}_f$, determinar o campo de velocidades do constituinte fluido (sob o ponto de vista de Teoria de Misturas) em um escoamento através de um meio poroso. Tal informação não é alcançada, em geral, através de Teorias Clássicas de Mecânica dos Fluidos.

As equações constitutivas aqui propostas possuem suporte na situação idealizada na figura 1, porém não existe argumento teórico que garanta a possibilidade de extensão da idéia para um meio poroso qualquer. Isto, na realidade, só poderá ser comprovado através de experiência.

REFERÊNCIAS

[1] Atkin, R.J. and Craine, R.E. - Continuum Theories of Mixtures: Basic Theory and Historical Development, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XIX, part 2, (1976).

[2] Atkin, R.J. and Craine, R.E. - Continuum Theory of Mixtures: Applications, J.Inst.Maths.Appl., 17, pp. 153-207, (1976).

[3] Williams, W.O. - Constitutive Equations for Flow of an Incompressible Fluid through a Porous Media, Quart.Appl.Math., 36, pp. 255-267, (1978).

[4] Taylor, G.I. - A Model for Boundary Conditions of a Porous Material, J. Fluid Mechanics, 49, pp.319-326 (1971).

[5] Beavers, G.S. and Joseph, D.D. - Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, J. Fluid Mechanics, 30, pp.197-207 (1967).

NOVA APLICAÇÃO PARA A REDE TELEX

A partir de agosto, a Rede Nacional de Telex coloca mais um serviço à disposição de seus usuários. Trata-se de um banco de dados com informações bibliográficas - o SUPRIR. Ao usá-lo, o cliente toma conhecimento de livros, artigos de revistas, teses, relatórios, patentes e outros tipos de publicações. Além de resumo e palavras-chave, há uma série de indicações por publicação_ nome do autor, título do trabalho e outros dados de identificação. Após selecionar as publicações, a partir destas indicações, o cliente pode ainda utilizar um serviço complementar para obter os textos completos. Estes pedidos também são feitos na hora, via telex.

O banco de dados tem informações internacionais em várias áreas: Informática, Engenharia Elétrica, Eletrônica, Física e informações nacionais e internacionais em todos os campos da Energia, inclusive a Energia Nuclear. As fitas estão internalizadas no Centro de Informações Nucleares da Comissão Nacional de Energia Nuclear e são operadas em seu computador, um Honeywell--Bull DPS-7, no Rio de Janeiro. O software para operação do sistema foi inteiramente desenvolvido pela equipe do CIN.

Todos os assinantes da Rede Nacional podem ter acesso às informações armazenadas no SUPRIR. Para dar-lhes maior segurança, porém, o CIN faz um cadastramento prévio e fornece uma senha para uso do sistema. O telex que se ligará ao computador do CIN é o mesmo utilizado nas outras comunicações. Com esta nova aplicação, os usuários telex, sem qualquer investimento adicional em equipamentos, passam a ter acesso a um serviço on-line que anteriormente só era possível por meio de ligação ao exterior, via Interdata. As bases operadas agora são: INSPEC (Informática, Controles, Física, Engenharia Elétrica, Eletrônica), INIS (Engenharia Nuclear) e FONTE (Fontes renováveis de energia). Em breve serão acrescentadas outras: ISMEC (Mecânica), WELDASEARCH (Soldagem) e METADEX (Metalurgia), que já estão em fase de implantação.

Durante o mês de agosto o sistema estará em período experimental, com um conjunto-amostra de 100.000 documentos da base de dados INSPEC para demonstração. Neste período, o cliente que fizer buscas pagará apenas os custos de comunicação à Embratel.

Número do indicativo do SUPRIR 32527+

INSTRUÇÕES PARA ASSOCIAR-SE À ABCM

- Preencher a ficha anexa, destacá-la e enviá-la para
  ABCM
  LCC - Laboratório de Computação Científica
  Rua Lauro Müller, nº 455
  Caixa Postal 56018
  22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

- Remeter juntamente com a referida ficha, para o mesmo endereço, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor de 1,36 ORTN's, para sócios efetivos e US$20,00 para estrangeiros. Estudantes pagarão a metade dos valores e sócios institucionais 27,16 ORTN's.

FORMULÁRIO PARA AFILIAÇÃO

ABCM ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIENCIAS MECÂNICAS

PARA USO DA ASSOCIAÇÃO

Recebido	Aprovado
Readmitido	Eleito Membro
Membro Nº	Anuidade

Membro Nº

Afiliação para

Nome (Abrevie se necessário)

Pedido de ☐ admissão ☐ mudança ☐ readmissão para a categoria de Membro Individual ☐ Aspirante (Estudante) ☐ Efetivo

Se renovação, qual o último ano de afiliação efetiva?

Endereço Residencial

Rua, Nº, Apto.

CEP, Cidade, Estado, País

Endereço Comercial

Rua, Nº, Departamento, etc.

CEP, Cidade Estado, País

Empresa

Título Profissional

Posição Atual

Engenheiro de Produção, Professor Assistente, etc.

Data de Nascimento ☐☐-☐☐-☐☐

Endereço para onde deve ser enviada correspondência: Residência ☐ Empresa ☐

FORMAÇÃO SUPERIOR E TÍTULOS

Indique em ordem cronológica sua formação superior. Em áreas de engenharia deve-se indicar, ex. Engenharia Mecânica, Metalúrgica, etc., e em áreas de especialização; Industrial, Ciências dos Materiais, etc. Estudantes devem indicar data prevista de graduação.

Universidades	Graus	Datas	Área	Especialização

EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL

Indique em ordem cronológica sua experiência profissional. Seja explícito com relação a posições ocupadas (como Engenheiro de Produção, Consultor, etc.), funções exercidas (como Chefe de Departamento de Manutenção, Consultoria em Transientes Hidráulicos, etc.), datas e períodos das posições ocupadas.

	Período	Tempo Total
Posição ________ Empresa ________ Função	De: A:	
Posição ________ Empresa ________ Função	De: A:	
Posição ________ Empresa ________ Função	De: A:	

ÁREAS DE INTERESSE

- ☐ Mecânica Teórica
- ☐ Mecânica dos Sólidos
- ☐ Mecânica dos Fluidos
- ☐ Transferência de Calor e Massa
- ☐ Termodinâmica
- ☐ Mecânica das Estruturas
- ☐ Propriedades dos Materiais
- ☐ Processos de Fabricação
- ☐ Projetos de Máquinas e Componentes
- ☐ Análise Experimental
- ☐ Vibrações e Acústica
- ☐ Métodos Analíticos e Numéricos
- ☐ Otimização e Controle.
- ☐
- ☐
- ☐

Remeter para:

Secretaria da A B C M
LCC – Laboratório de Computação Científica
Rua Lauro Müller, 455
CEP 22290 – Rio de Janeiro, Brasil

OBJETIVOS DA A B C M

A Associação Brasileira de Ciências Mecânicas é uma Sociedade Civil, sem fins lucrativos, fundada em 19 de abril de 1975 por profissionais interessados em Ciências Mecânicas, com a finalidade de congregar pessoas físicas e jurídicas visando:

. contribuir para o desenvolvimento da Engenharia Mecânica no Brasil,
. estimular um efetivo intercâmbio entre as Universidades, Centros de Pesquisa e a Indústria;
. divulgar o conhecimento em Ciências Mecânicas através de publicação de livros textos, monografias e revistas
. realizar Congressos, Simpósios, Conferências, Cursos e Reuniões Técnico-Científicas.
. promover o intercâmbio com associações similares do país e do exterior.

São atividades tradicionais da ABCM:

. O Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, que se realiza a cada dois anos na primeira quinzena de dezembro dos anos ímpares.
. O Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão - SIBRAT, que é realizado nos anos pares.
. A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas – RBCM, publicação trimestral.–

PEDIDO DE ASSINATURA DA RBCM OU DE NÚMEROS ATRASADOS
QUER DA REVISTA OU ANAIS DE CONGRESSOS

— Preencha a ficha anexa, indicando o desejado, e remeta para
ABCM
LCC - Laboratório de Computação Científica
Rua Lauro Müller, nº 455
Caixa Postal 56018
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

— Remeta, em anexo, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor indicado na referida ficha.

	BRASIL	EXTERIOR
Anais do COBEM	( ) 3,0 ORTN'S	( ) US$ 100,00
Anais do SIBRAT	( ) 2,0 ORTN'S	( ) US$ 50,00
Volume avulso RBCM	( ) 1,0 ORTN'S	( ) US$ 25,00
Assinatura RBCM	( ) 2,0 ORTN'S	( ) US$ 50,00

ASSINALE SUA SOLICITAÇÃO

Nome: ______________________________

Endereço: ______________________________

____

Cidade: ____________ ESTADO: ____ CEP: ____

Composto e impresso por
J. DI GIORGIO & CIA. LTDA.
Rua Vaz de Toledo, 536 - Eng. Novo - RJ