

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

PUC – Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.



Luiz Bevilacqua (Presidente)
Tito Luiz da Silveira (Vice-Presidente)
Raúl A. Feijóo (1º Secretário)
Antonio MacDowell (2º Secretário)
Augusto Galeão (1º Tesoureiro)
Arno Blass (2º Tesoureiro)

Vol. VII, nº 4 - Nov. 1985

**EDITOR
RESPONSÁVEL**

Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**

J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijer
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zampieri
Duraíd Mahrus
E. O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guillermo Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jersy T. Sielawa
J. J. Espíndola
Liu Hsu
Maurício N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Nestor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

**COMPOSIÇÃO
GRÁFICA**

Rosângela L. Almeida
Tamara P. Souza

Editorial	289
Some critical remarks on the use of potential drop and compliance systems to measure crack growth in fatigue experiments	291
Jaime Tupiassú Pinho de Castro - Membro da ABCM Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	
Análise não-linear da estabilidade elástica de torres estaiadas	315
Antônio Manuel Dias Henriques - Membro da ABCM Instituto de Pesquisas Espaciais Victor Prodonoff - Membro da ABCM Centro de Pesquisas da Petrobrás	
Análise tridimensional de vigas utilizando modelo com número reduzido de graus-de-liberdade	335
Carlos Alberto de Almeida - Membro da ABCM Alejandro Andueza Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	
A numerical study of natural convection in horizontal elliptic cylinders	353
F.L. Bello-Ochende Department of Mechanical Engineering Faculty of Engineering and Technology University of Ilorin Ilorin - Nigéria	
Flambagem de barras extensíveis	373
Murilo Pereira de Almeida Rubens Sampaio - Membro da ABCM Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	



**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO**

**DO CNPq E FINEP
COMPANHIA VALE DO RIO DOCE
IBM DO BRASIL**

EDITORIAL

Em abril de 1975, na UNICAMP, com a presença de 15 pessoas, praticamente todos professores universitários, foi fundada a ABCM. Calcada fortemente em padrões de atividades acadêmicas por força do perfil dos seus fundadores a ABCM nos últimos dez anos esteve presente na comunidade técnico-científica principalmente como veículo de divulgação de conhecimento.

Este ano realiza-se o VIII COBEM. Em 1986 teremos o IV SIBRAT e o primeiro Simpósio sobre Sistemas Dinâmicos de Mecânica. A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas firma-se mais a cada dia e pode-se dizer que hoje é um periódico que não sofrerá solução de continuidade.

Além destas atividades a ABCM tem colaborado na organização e dentro dos limites do possível no co-patrocinio de eventos de âmbito nacional e regional como o Encontro Nacional de Atualização Tecnológica em Engenharia Mecânica (ENATEM) realizado na UFSC, os cursos de Mecânica Teórica e Aplicada realizados no LNCC promovido na região do Rio de Janeiro em 1985.

Todas estas atividades têm sido bem sucedidas e têm conquistado um espaço crescente para a ABCM a nível nacional e também internacional. Em 1983 a ABCM foi aceita como membro brasileiro na International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), e na mesma época afiliou-se ao IFTOM. Em agosto de 1985, foi realizado no Rio de Janeiro o Simpósio da IUTAM sobre Comportamento Inelástico de Placas e Cascas, organizado pela ABCM que alcançou grande sucesso, colocando a comunidade brasileira ativa na área de ciências mecânicas na órbita internacional.

Não obstante os progressos conquistados na área de organização de congressos e encontros, de cursos especializados e de divulgação do conhecimento científico ainda há muito o que fazer em particular no que se refere a aproximação com o setor industrial, cooperação na preparação de recomendações técnicas e edição de livros, sejam textos didáticos, sejam de consulta especializada. Os primeiros passos neste sentido já foram tomados e já surgem alguns efeitos promissores. Empresas como IBM, Vale do Rio Doce, Promon Engenharia, Xerox do Brasil e a Fundação Yehan Numata criada pelo fundador de empresa japonesa Mitutoyo que há 10 anos instalou uma filial no Estado de São Paulo, vem cooperando concretamente com a ABCM. A Fundação Yehan Numata, honrou-nos com o convite para juntamente com o CNPq conferir anualmente o prêmio Yehan Numata de Tecnologia, no valor de 400 ORTN's para o melhor trabalho produzido na área de instrumentos de precisão ou de medição geométrica.

O reconhecimento da importância de prestigiar a produção científica e tecnológica através da ABCM deve-se sobretudo ao valor e ao trabalho dos pesquisadores atuando na área de mecânica. Acreditamos que o prestígio que a comunidade vem alcançando e a elevação do nível de produção científica e tecnológica envolvem um processo de realimentação positiva que esperamos ser irreversível.

Um outro serviço que a ABCM deverá ativar é a atuação junto a órgãos federais e estaduais de fomento à pesquisa e desenvolvimento e de definição de política científica e tecnológica no sentido de levar as reivindicações e sugestões da comunidade de ciências mecânicas. Hoje em particular esta atividade é muito importante, em virtude da indefinição e fraqueza que começa a se instalar em setores públicos. A desconexão entre promessas e realizações denuncia uma desvalorização do compromisso que no caso do desenvolvimento científico e tecnológico é uma pedra fundamental. A retomada de rumos corretos para o nosso desenvolvimento é de importância crucial para a sobrevivência da produção científica e tecnológica que continua ameaçada. A ABCM através de seus associados deve participar na correção daqueles rumos e não pode ficar alheia a definição dos planos nacionais de desenvolvimento.

MÁQUINAS E EQUIPAMENTOS PARA A INDÚSTRIA QUÍMICA, PETROQUÍMICA, FARMACÊUTICA E ALIMENTÍCIA.



A TREU tem longa tradição como fabricante de máquinas e equipamentos de alta qualidade para a indústria química, petroquímica, farmacêutica e alimentícia. Qualquer que seja o seu problema, consulte a TREU.

TREU

TREU S.A. — MÁQUINAS E EQUIPAMENTOS
Av. Brasil, 21.000 - CEP 21510 - Rio de Janeiro - RJ
Tel.: (021) 372-6633 - TELEX (021) 21089
Rua Conselheiro Brotero, 589 - Conj. 92 - CEP 01154
São Paulo - SP - Tel.: (011) 826-3500 e 826-3052

SOME CRITICAL REMARKS ON THE USE OF POTENTIAL DROP AND COMPLIANCE SYSTEMS TO MEASURE CRACK GROWTH IN FATIGUE EXPERIMENTS

Jaime Tupiassú Pinho de Castro - Membro da ABCM
Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

ABSTRACT

The precise and automatic measurement of the length of a fatigue crack is a very important requirement in Fracture Mechanics-based, fatigue crack propagation studies. Here, a critical study of the two most commonly used analog electronic systems to measure crack length is made, in order to quantify the maximum possible resolution that can actually be expected from them. The two systems studied are those based on the "Potential Drop" and on the "Compliance" methods. The intrinsic sensitivity of both methods is assessed, and the effects of some unavoidable error sources, as well as the importance of the present technological limitations, are quantified. Moreover, some comments are made on the practical implementation of experimental systems that have been successfully used in the past.

RESUMO

Medições precisas e automáticas do comprimento de trincas de fadiga são um requisito muito importante, em estudos de propagação de trincas de fadiga baseados nos conceitos da Mecânica da Fratura. Neste trabalho é feito um estudo crítico dos dois sistemas analógicos (elétricos) mais freqüentemente usados nessas medidas de comprimentos de trincas, de modo a quantificar a máxima resolução possível que pode, na prática, ser esperada desses sistemas. Os dois métodos experimentais analisados aqui são aqueles baseados nos conceitos de "Variação da Flexibilidade da Peça" e de "Queda de Potencial" (induzida pelo fluxo de uma corrente elétrica constante na peça trincada). A sensibilidade intrínseca de ambos os métodos é estudada, bem como são quantificados os efeitos das presentes limitações tecnológicas. Além disto, alguns comentários são feitos sobre a implementação prática de sistemas experimentais usados com sucesso no passado recente.

INTRODUCTION

Despite more than 120 years of intense technical and scientific research, and of all the vast accumulated experience in uncountable engineering designs, fatigue is still in our days the

most important cause of mechanical failure in machines and structures that are subjected to vibratory service loads [1-2]. Much has been learned in the past, but the economic and social impact of the fatigue-related failures that continue to occur in practice, with no doubts justifies the need of more research in this field.

It's clear that when the effects of the costs of equipment failure are unacceptable, designing for maximum reliability is mandatory. The Damage Tolerant Design Approach is the only method that can be used for achieving maximum reliability when designing any structure against fatigue loads, because this method assumes that a crack might already be present in the structure, even after the routine non-destructive inspections are made, and then studies the crack propagation behavior until it can cause the final failure of the structure.

The best analytical tool presently available for studying fatigue crack propagation is based on Fracture Mechanics concepts [3-15]. However, much is still unknown about the basic phenomenology of fatigue crack growth behavior under complex loads.

Since most machines work under complex loading, the present state of the art of the analytical tool is simply not sufficient to solve many design problems. Therefore, it is still necessary to experimentally simulate service conditions in laboratory specimens, in order to really improve the reliability of actual engineering structures. The purpose of this work is to discuss the proper interpretation of such experimental results, by studying the maximum resolution that can be achieved, under careful but real operational conditions, by the two most used methods of analogic (electrical) measurements of the length of fatigue cracks in testing specimens: the so-called "Potential Drop Method" and the "Compliance Method".

For illustration purposes, Figura 1 [16] presents a drawing of a typical testing specimen (the CTS) used in fatigue crack propagation studies [17]. Note the details of the devices used to ensure pure axial (Mode I) loading. Note also the presence of the potential drop system current supply and voltage sensing leads, as well of the COD (Crack Opening Displacement) clip gage, and of similar transducers used to measure the mechanical compliance of the specimen.

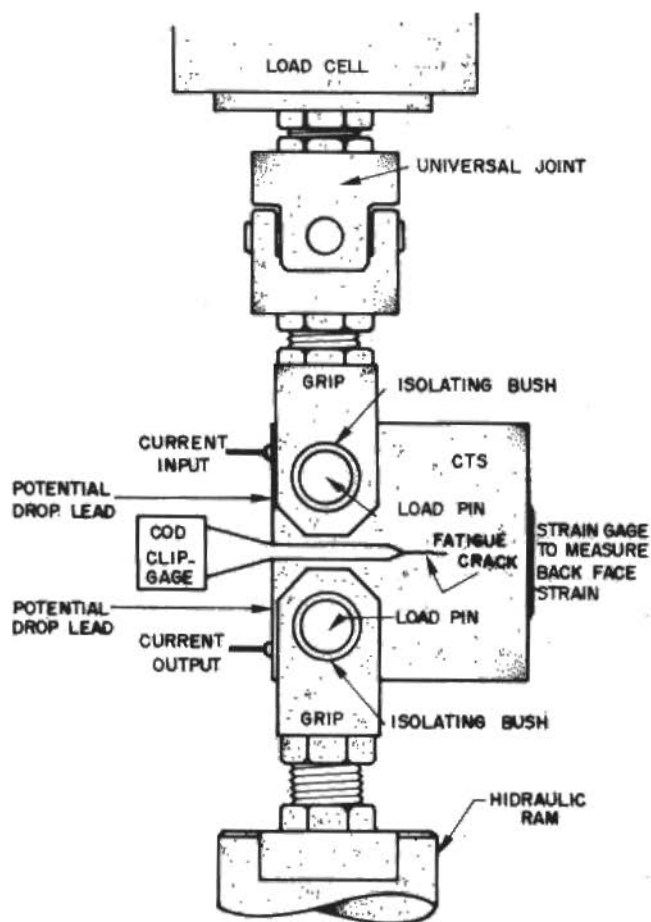


Figure 1. A typical fatigue crack propagation experimental system.

POTENTIAL DROP SYSTEMS

Basically, all Potential Drop Systems consist of a very good servocontrolled, constant current source (that can be AC or DC, the latter being more common), and of a very stable, high quality amplifier, for the low level signals generated in the metallic specimens by the flux of the electrical current around the fatigue crack.

The function of the power source is to supply an adjustable current to the specimen, current that is maintained constant during

the whole duration of the test by a feedback circuit. The amplifier is designed to filter and to multiply the (typical) microvolt-level signals that are generated by the changes in the specimen resistance, due to the growth of the fatigue crack. (For more details on the theory of, and on the design requirements for using potential drop systems to measure crack length, see [18-25]).

The Measurement of Crack Growth by Potential Drop Systems

Of the similar results available in the literature, the calibration curve for the CTS used in [16] to translate the potential drop readings into crack length measurements (a/W vs. V/V_0) was based on experimental and numerical works done by Ritchie et al. [18-20]. Their numerical results were obtained from a solution of the Laplace's equation for the electrostatic field in the cracked specimen, by means of a finite element model of the CTS. Also investigated was the influence of changes in the positioning of the current input, and of the voltage reading points. Their experimental calibration involved methods such as electrical analogs, optical observation of the surface of thin fatigue specimens, and marking of the fracture surface by changes in the mean fatigue load (which leaves clearly detectable bands on the crack surface, without causing significant load interaction effects). The following polynomial is a least square best fit of their data points:

$$a/W = 0.6254(V/V_0)^3 - 2.5825(V/V_0)^2 + 4.2365(V/V_0) - 1.9296 \quad (1)$$

where V is the potential drop system output, V_0 is the initial voltage caused by the current flow in the uncracked specimen, a is crack length, W is specimen width and a/W should be less than 0.75. In Figure 2, a plot of this CTS experimental calibration curve and also a plot of its derivative, $d(a/W)/d(V/V_0)$ vs. a/W are shown (the latter gives, of course, the intrinsic sensitivity of the potential drop system). From these curves it can be seen that the sensitivity of this system is not strongly dependent on the absolute value of crack length, at least for the range of a/W normally used in fatigue tests, $0.35 < a/W < 0.75$. It is also important to note that the minimum showed by the derivative curve should be due only to the empirical nature of this polynomial calibration, since it can be argued that the rate of change of the

specimen resistance should increase monotonically with respect to the (increasing) crack length. This argument will be explored in detail later in this work.

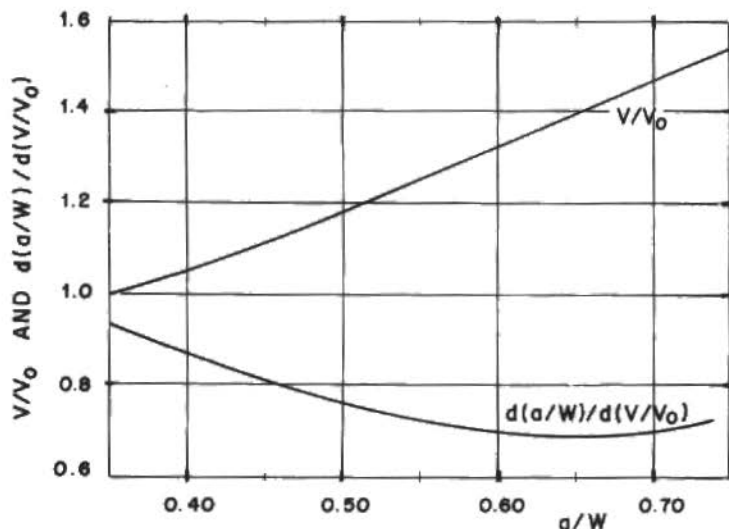


Figure 2. The CTS potential drop calibration curve

Typically, $1\mu\text{V}$ is the best figure that can be expected for the short term resolution of high quality potential drop systems. This number reflects the best job that can be done (within reasonable cost) to minimize the effects of the unavoidable electrical noise sources that are always present in a laboratory environment.

Having found the minimal measurable ΔV , it is clear that the value for V_0 should be chosen as high as possible, in order to maximize the system resolution in terms of crack length. However, the maximum practical current that can be used in such systems is limited by the heat it generates within the specimen (or by the size of the available power supply). An experimentally found value of $10\text{A}/\text{cm}^2$ for the current density within the specimens, has been recommended in the literature [18] (This number was used in [16] as a guide in choosing the value of V_0 for the uncracked specimens, that was set as 2mV at the start of the tests, which typically

required a current of about 30A from the power supply. Due to this V_0 value, and to the 1 μ V resolution, a 4 1/2 digit voltmeter was required to read the output of the system, since it carried a potential information of 1 part in 3000).

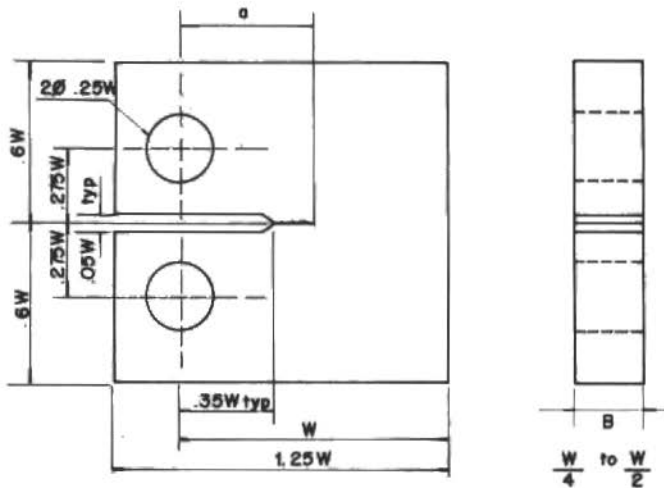


Figure 3. The CTS standard dimensions

Figure 4 shows the crack growth increments that could ideally be detected during the tests using the curve given by (1). By the way, it is important to emphasize that the only method that can be realistically used to significantly improve the resolution of any potential drop system is to decrease its intrinsic noise level, which can be a very difficult and expensive task.

Another critical piece of information is needed to permit the proper interpretation of the tests results: the quantification of the effects of all the unavoidable error sources in the measurements. By far the most important problem in most cases is the thermally-induced changes in the specimen resistance, that e.g. for steels are in the order of $\alpha = 0.3\%$ per degree Celsius (at room temperature) [26]. The potential drop system output dependence on (small) variations of the specimen temperature is given by:

$$V = IR \left[1 + \alpha(T - T_0) \right] \quad (2)$$

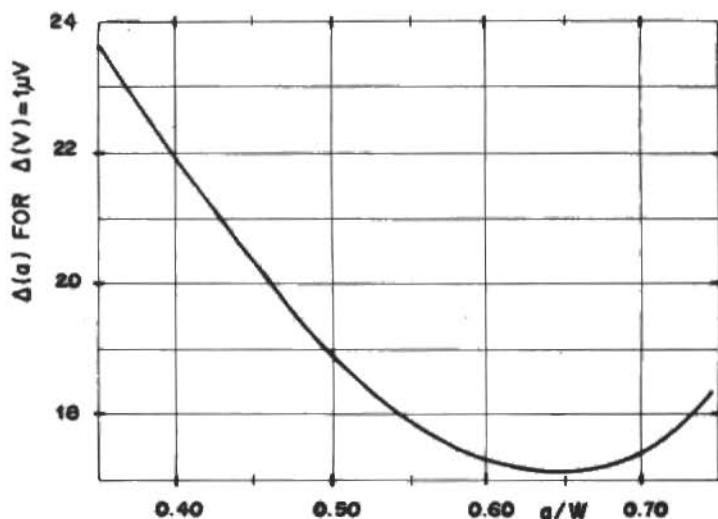


Figure 4. Ideal resolution of (1) for $V_0 = 2\text{mV}$ and $\Delta V = 1\mu\text{V}$

$$dV/dT = \alpha V = 0.003(2 \text{ to } 3 \text{ mV}) = 6 \text{ to } 9\mu\text{V/C} \quad (3)$$

where R is electrical resistance, V is voltage, I is current, $(T - T_0)$ is the change in temperature, and 2 to 3mV is a typical operational range for potential drop systems (it is the V equivalent to $0.35 < a/W < 0.75$ and $V_0 = 2\text{mV}$). Therefore, each degree Celsius change in the specimen temperature causes a change in the read potential drop of 6 to 9μV, or an apparent change in crack length of about 120 to 180μm! Since one degree Celsius is the typical limit for the range of specimen temperature control that can be maintained by the air conditioner system used in a properly installed laboratory, a mean figure of 150μm can be used for the nominal long-term resolution of carefully made fatigue experiments. It is important to note that this resolution value, based on a very simple but sound argument, is widely different from many supposedly better values frequently claimed in the literature.

To completely solve this thermal noise problem, either a very stable servocontrolled constant temperature chamber (constant within, say, 0.1C or better) should be built, or an intrinsically self-compensated rationometric type of measurement system should be used. However, it is important to note that those are neither

simple nor inexpensive projects. The first would require some form of heat pump, because the current density in the specimens (and the consequent heat dissipation) increases with crack length. The second (rationometric method) would require the use of two identical specimens in series, subjected to the same current and to the same temperature. Only one of the specimens should be fatigue cracked, and it is the ratio of the specimens' voltage drop that should be measured, which poses some obvious experimental difficulties. A third (and possibly more elegant) solution would be to continuously measure the temperature of the specimen, and to use its value to correct the crack length readings in real time. This last solution, of course, in practice can only be implemented in computer-controlled experimental systems.

A second potentially important thermal-induced error source can be found at the connections between different metals in the cable that is used to read the potential drop signal. Seebeck voltages (thermocouple effect) can be significant in comparison to the potential drop signal, if the specimen and cable are made of different materials (they generally are, since copper wires are almost universally used in electronic instrumentation), and if the two junctions (between the copper wires and the specimen material) are maintained at different temperatures [27-31].

For example, a standard Fe-Cu thermocouple has a gain of $11\mu\text{V}/\text{C}$ at room temperature (which was the equivalent, in the system described above to about $220\mu\text{m}/\text{C}$). However, the effects of this error source can be minimized with relative ease in practice, if two simple precautions are taken: First, by using just two different materials in the potential drop lead, say, the specimen material and copper. Second, by maintaining the (two) connections between the copper wire and the specimen material as close to the same temperature as possible (e.g., by mounting the connections over an isothermal block).

Note, however, that the requirement of just two materials in the cable that connects the potential drop probes to the amplifier may present some practical problems: for example, the 18-8 stainless steel-Cu and the "spring steel-Cu" thermocouple voltages (obtained from [32]) are respectively $3\mu\text{V}/\text{C}$ and $6\mu\text{V}/\text{C}$, values that are widely different from the Fe-Cu pair. Therefore, some common procedures, such as spot-welding a Fe wire to any steel specimen and then

(carefully) connecting the wire to the copper cable, must be done with caution, because the Fe wires may not always behave as the (implicitly assumed) continuation of the specimen material for sake of avoiding the thermocouple problem. Moreover, despite the existence of even a standard method for measuring thermocouple voltages [33], actual values for most engineering alloys are extremely difficult to find in practice, which can prevent simple numerical estimations of this error source.

To complete the study of the effects of error sources on the potential drop measurements, a critical analysis of the amplifier and of the current supply circuits is needed. A simple but clear review of the practical effects of those sources is made in [18], and here we are not going to pursue this point any further than by saying that their combined effects should be small compared with the temperature problem, if those circuits are built with very high quality components.

As a closing note on this study of the potential drop system, we recall that the empirical calibration polynomial used to find crack lengths from the voltage drop measurements was defined only for $a/W < 0.75$ (We also recall that the shape of its derivative was not physically appealing. Moreover, it is very important to emphasize that this polynomial has clearly incorrect limits and, therefore, cannot be extrapolated: e.g., by taking the value $a/W = 1$, which obviously describes a broken specimen and an open circuit, and by (blindly) using the empirical calibration polynomial, we would predict $V/V_0 = 1.82!$). Since it had been realized that experimentally it was not easily feasible to increase the intrinsic gain of the potential drop system, a natural question was proposed: Was it possible to significantly increase that intrinsic gain by working with deep cracks? This question motivated the start of a study of the potential drop problem from an analytical point of view.

It was decided that a good way to start the analytical work would be, for example, by finding the (asymptotically) correct upper-limit for the potential drop calibration curve. This limit would not be difficult to find, by using the analogy that exists between the Mode III linear-elastic and the classical electrostatic field problems, in any two-dimensional space [12,34]. The equations that describe these problems can be summarized by:

Mode III Elasticity (Linear-elastic solution of the anti-plane

shear problem in a body of, constant thickness, when the point loads T_j are specified at the boundaries). The Mode III displacements and stresses are related by:

$$u = v = 0, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \text{and } w = w(x,y) \text{ only.}$$

$$\nabla^2 w = 0, \quad \tau_{xz} = G(\partial w / \partial x) \quad \text{and} \quad \tau_{yz} = G(\partial w / \partial y), \quad (4)$$

where x, y, z are cartesian coordinates; u, v, w , are the corresponding displacements; and ρ, τ are normal and shear stresses, respectively.

Electrostatics (Solution of the electric field caused by point inputs of current I_j , specified at the boundaries of a body of constant thickness, where the voltage at any point is given by $V = V(x,y)$ only). The current flux and the conservation of electrical charge are described by:

$$\rho J = - \nabla V \quad \text{and} \quad \nabla^2 V = 0, \quad (5)$$

respectively, where J is the current density and ρ is the electric resistivity of the used material (the negative sign implies that the current flows down the potential gradient).

From the summary above we can see that both the Mode III displacements in linear elasticity, and the voltage in electrostatics, obey Laplace's equation. Therefore, these two problems are mathematically analogous: the voltage V is analogous to the displacement w , the current density J is analogous to the shear stress τ and the resistivity ρ is analogous to the inverse of the shear modulus G . And, to be as clear as possible, we can make the following statement:

Let the Mode III displacement between two specified "output" points of a body with planar geometry be denoted by δ (say that the output points are q_1 and q_2 , such that $\delta = w(q_1) - w(q_2)$), and let δ be induced by m forces T_j applied at (x_j, y_j) , where $1 < j < m$. Now denote by V the voltage between the equivalent two output points of a geometrically identical body, and let V be caused by m current inputs I_j , also localized at (x_j, y_j) . If the T_j and the I_j are known, δ and V can be found by solving Laplace's equation, which can be done by using very well-established analytical techniques.

Therefore, the solution of the δ -problem by means of a conventional linear-elastic stress analysis, and the solution of the equivalent V -problem by the classical electrostatic theory, are identical from a mathematical point of view.

Having clearly stated the analogy that is going to be used, it is very easy to find a first estimation for the limit of V/V_0 as $a/W \rightarrow 1$, by solving the problem presented in Figure 5. The problem is to find the displacements between the two points $(0,0^+)$ and $(0,0^-)$, localized at the mouth of the crack of length c , in an infinite strip of width L and thickness B , due to the pair of loads T and $-T$ applied there. The value of K_{III} for this problem is known [12, pg.2.28], and it is given by:

$$K_{III} = (2T/B\sqrt{L})[\sin(2bc)]^{-1/2}, \quad (6)$$

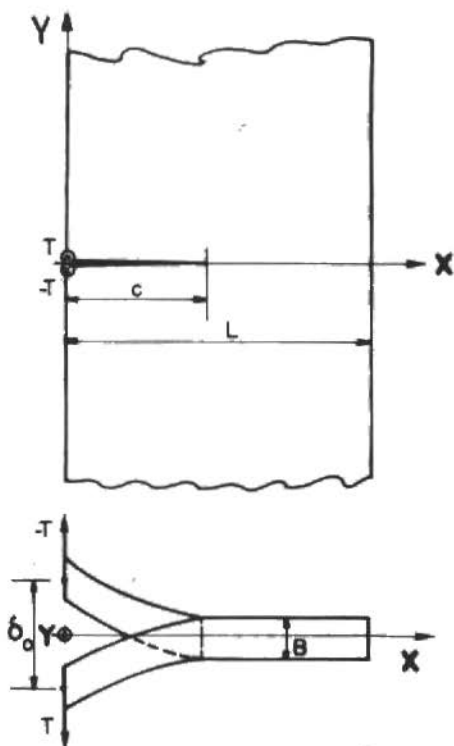


Figure 5. Crack mouth displacements in the infinite strip due to the pair of forces $T(0,0^+)$ and $-T(0,0^-)$

where $b = \pi/2L$. For simplicity, we can rewrite equation (6) using the notation $K = T \cdot k$, where K is given by the product of an applied force T , with a function k of the specimen geometry only. (in the equation below the subscript "0" denotes "at the crack mouth"):

$$K_0 = T k_0, \quad \text{where} \quad k_0 = (2/B\sqrt{L})[\sin(2bc)]^{-1/2} \quad (7)$$

(Note that we are using "c and L" to denote the crack length and the width of the infinite strip. This is done to avoid confusion with the notation "a and W" used for similar parameters in the CTS, since in the latter those values are measured from the load line and not from the specimen boundary).

We also know that the strain energy release rate per unit of crack area advance, G , can be related to the applied stress intensity factor by: (see, e.g., [3-16, 35]).

$$G = \partial U / \partial A = (1/B)(\partial U / \partial c) = K_{III}^2 / 2G, \quad (8)$$

where G is the shear modulus and U is the strain energy stored in the strip. Moreover, by using Castigliano's theorem ($\delta(Q) = \partial U / \partial Q$, where $\delta(Q)$ is the generalized displacement in the direction of the generalized force Q), we can easily find the increment in the crack mouth displacement of the strip, caused by the pair of forces T applied at $(0, 0^+)$ and $-T$ applied at $(0, 0^-)$, when the crack grows from c_i to c_f (in other words, we can find the value of $\delta_0(c_f - c_i) = w(0, 0^+) - w(0, 0^-)$). From basic Fracture Mechanics concepts, we recall that the change in the strain energy stored in the strip is given by:

$$\Delta U = B \int G dc = (B/2G) K^2 dc \quad (9)$$

Therefore, using this last equation δ_0 can be found by:

$$\delta_0(c_f - c_i) = (B/2G) \int_{c_i}^{c_f} (\partial K^2 / \partial T) dc \quad \therefore \quad (10)$$

$$\delta_0(c_f - c_i) = (B/G) \int K_0 k_0 dc \quad (11)$$

And, by substituting the values of K_0 and k_0 :

$$\delta_0(c_f - c_i) = (B/G)(4T/B\sqrt{T}) \int_{c_i}^{c_f} [\sin(2bc)]^{-1} \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

$$\delta_0(c_f - c_i) = (4T/\pi BG) \ln[\tan(bc_f) / \tan(bc_i)] \quad (13)$$

Equation (13) must be, by Saint Venant's principle, the correct form of the required upper-limit (i.e., the deep crack behavior) of the potential drop problem in the CTS (and also, by the way, in the single edge notch specimen, the SEN, another very commonly used Fracture Mechanics specimen). (Note that if we do not use the analytical trick of finding the difference in the displacements at the crack mouth, as the crack grows from a finite initial value c_i to the final length c_f (i.e., if we do not avoid the particular case $c_i = 0$ in (12)), the integral would diverge. This divergent behavior is, of course, expected, and is a common feature of all problems where displacements are calculated under point loads).

Motivated by the simplicity of this result, it was decided to undertake the task of finding a complete analytical solution for the CTS electrostatic problem. This analytical study is presented elsewhere [16].

Note that this asymptotic behavior of deep cracks indicate that there is no advantage in working with deep cracks in CTS (or, for the same reason in SEN or similar specimens), since the $\ln(\tan)$ behavior is very smooth, and there is no big increase in the intrinsic sensitivity of the potential drop measured as compared with shallow cracks.

THE MEASUREMENT OF CRACK GROWTH BY COMPLIANCE-BASED SYSTEMS

In Mechanics the concept of compliance is used as a measure of the "softness" of a structure, i.e., it gives a measure of how easily a structure deforms under load. Formally, the mechanical compliance C is defined by:

$$C = x/P \quad (14)$$

where P is the load applied on the structure and x is the load point displacement (or, in other words, the load-induced displacement of the point of the structure where the load was applied). The compliance concept also finds many uses in crack problems, because

the compliance of cracked bodies under Mode I linear elastic fracture mechanics conditions can be related to G , the strain energy release rate per unit of crack area advance, by: (see, e.g., [3-16]).

$$G = (P^2/2G)(dC/da) = K_I^2/E' \quad (15)$$

$$dC/da = (2B/E')(K_I/P)^2 \quad (16)$$

where dC/da is the rate of compliance change with respect to crack length, G is the shear modulus, $E' = E$ for plane stress (E is the modulus of elasticity), or $E' = E(1 - \nu^2)$ when plane strain conditions are dominant at the crack tip (where ν is the coefficient of Poisson), and B is the specimen thickness.

Also from basic Fracture Mechanics concepts, it is known that K_I , the Mode I stress intensity factor, can be written as:

$$K_I = (P/B\sqrt{W}) f(a/W) \quad (17)$$

In this last equation, $f(a/W)$ is a numerical function of the specimen geometry and crack length, and W is the specimen width. Therefore, the rate of compliance change with respect to crack length is given by:

$$dC/da = 2f^2(a/W) / BWE' \quad (18)$$

In order to non-dimensionalize these equations, define $C_0 = 1/BE'$ and $C/C_0 = E'Bx/P$ to obtain:

$$d(C/C_0) / d(a/W) = BWE'dC/da = 2f^2(a/W) \quad (19)$$

And C/C_0 can then be found by:

$$\frac{C}{C_0} \Big|_{a_f}^{\frac{a_f}{W}} = 2 \int_{a_1/W}^{a_f/W} f^2(a/W) d(a/W) + \frac{C}{C_0} \Big|_{a_1}^{\frac{a_1}{W}} \quad (20)$$

Therefore, if the value $C/C_0(a_1/W)$ can somehow be found or measured, it is possible to use equation (20) as the calibration curve for all analog compliance measurements of crack length.

(The initial value of the specimen compliance can always be obtained by just one simultaneous measurement of load and load point displacement. However, this many times is not an easy task, due to the inaccessibility of the actual load point is most practical specimens, see the appendix).

In particular, for the CTS the function $f(a/W)$ is given by the following polynomial [36]:

$$f(a/W) = [2 + (a/W)] / \sqrt{[1 - (a/W)]^3} \cdot [0.886 + 4.64(a/W) - 13.22(a/W)^2 + 14.72(a/W)^3 - 5.6(a/W)^4] \quad (21)$$

In a recent experimental work, Fisher and Buzzard [37] carefully measured C versus a for CTS (using a specially designed load fixture that allowed access to the center of the load pins, in order to measure their actual load-induced displacements). They fitted their data points by the function:

$$C/C_0 = \exp[2.376 + 0.060(a/W) + 7.298(a/W)^2 + 0.107(a/W)^3 - 15.21(a/W)^4 + 14.75(a/W)^5] \quad (22)$$

In order to check the consistency of their work we numerically integrated equation (20), using the CTS' $f(a/W)$ function given by (21) and the value of C/C_0 at $a/W = 0.35$ given by (22), and compared the result with the compliance values predicted by (22). And, as a cross checking measure, we also differentiated this last expression and compared the numerical results with (19). In the first case the maximum difference that was found was 1.5%, and in the second it was 5.3%, see Figures 6 and 7.

After having checked the consistency of the theoretical and of the experimental results given by (21) and (22), the next step was to find what was the maximum resolution that could, realistically, be expected from the analog systems that are used to measure crack length by detecting the compliance changes that are caused by the growing crack. In other words, we wanted to quantify the minimum increment of crack length Δa , that we could expect to resolve by using compliance-based systems, built with available technology and operating under optimal conditions.

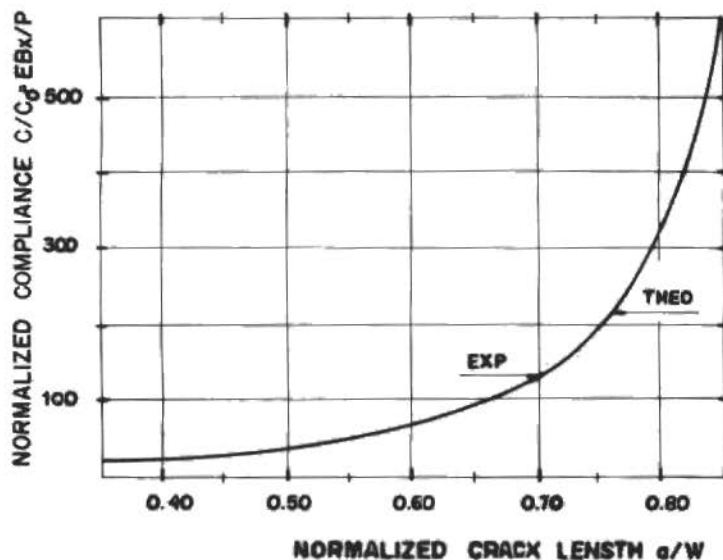


Figura 6. Theoretical and experimental normalized CTS compliance

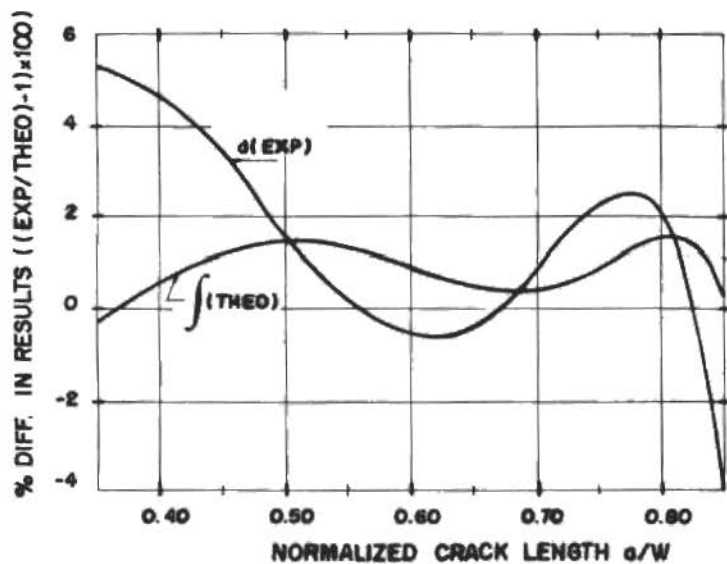


Figure 7. Consistency check of equations (20) and (22)

Typically, compliance measurements are obtained by plotting the load versus load point displacement signals on an x/y recorder, and it is from the slope of this graphic that the compliance of the piece is calculated. Also typically, the resolution of these graphical measurements is at best on the order of 1%. If more accurate techniques are used (as, for example, a numerical best fit of the digitalized output of the load and of the displacement signals, in order to find the slope mentioned above), it is reasonable to expect intrinsically better experimental results. However, it is not realistic to assume that anything much better than (say) a 0.1% resolution can be obtained in practice, because compliance measurements are essentially of a derivative (slope) type and are, therefore, intrinsically noisy.

In Figure 8 we plotted the minimum resolution that would be required from the reading of the load versus load-point displacement graphics (or from a numerical calculation based on A/D outputs, as suggested above), in order to measure crack length increments of $\Delta a = 1\mu\text{m}$ and of $\Delta a = 100\mu\text{m}$, respectively. Note that the plots give the percentage change on the value of C/C_0 versus a/W , when the crack grows by 1 or $100\mu\text{m}$. By carefully studying those figures, it can be seen that the intrinsic optimal resolution that can be expected from compliance-based experimental systems is, at best, comparable to the $20\mu\text{m}$ figure obtained for the short-term resolution of the potential drop system, for the range of a/W normally used in practice.

From Figure 8a, it can be seen that a $1\mu\text{m}$ resolution in crack length would require a resolution of about 1 part in 10000 from the (calculated) slope of the C/C_0 vs. a/W curve, which, in view of the arguments exposed above, seems very hard to obtain from experimental systems built with available technology. It seems more reasonable to expect crack length resolutions in the order of $100\mu\text{m}$, which can be experimentally implemented even with the careful use of graphical methods, as shown in Figure 8b. Once again, it is important to note that this last resolution figure is in conflict with many supposedly better figures frequently claimed in the literature.

Another interesting point to note is that the intrinsic sensitivity of compliance-based systems does increase (exponentially) with crack length, as opposed to the very smooth behavior of the (asymptotically) $\ln(\tan)$ behavior of potential drop systems deduced

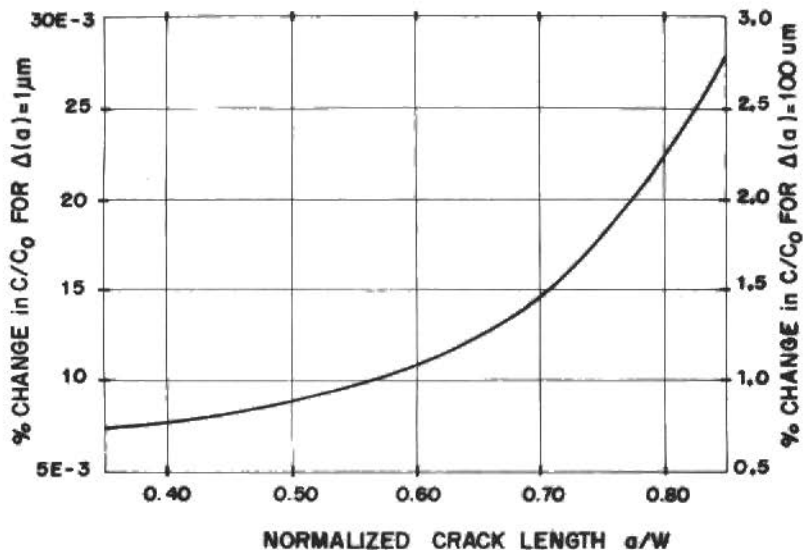


Figure 8a. CTS compliance change for a crack length resolution of $1 \mu m$ and of $100 \mu m$ ($W = 50 mm$)

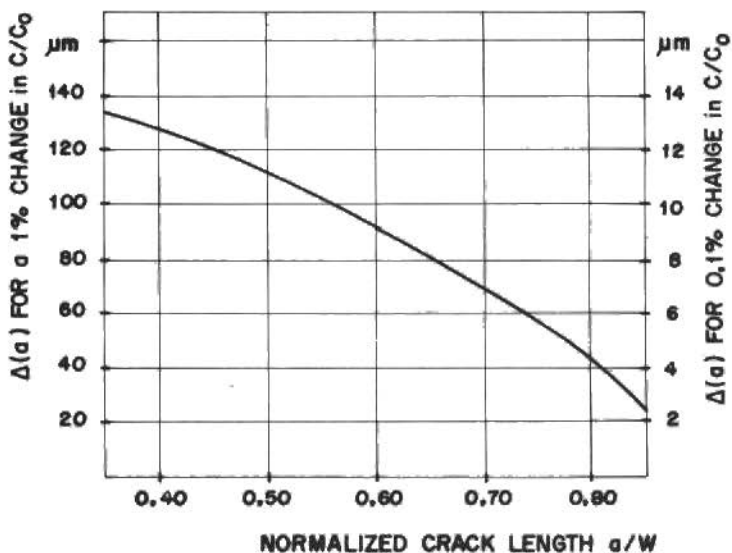


Figure 8b. CTS compliance change for a crack length resolution of $100 \mu m$

in the last section. This indicates that compliance systems can profit from the use of deep cracks to do measurements where high sensitivity is a must. However, when working with deep cracks it is important to be aware that specimen displacements and rotations are bigger for a given load, as compared to more conventional shallow cracks, which indicates that friction-related problems at supports and loading points should also increase.

To complete this study of compliance-based systems of fatigue crack length measurement, a very brief discussion of the influence or error sources follows.

Besides the obvious problems with the correct measurement of loads and load point displacement (it is, e.g., very difficult to buy load cells in a class better than 0.25%), among the more subtle error sources that can perturb the experimental results, specimen temperature and the transducer fixing to the specimen seem to be the more important. A (common) temperature change of 10C can induce a change in the elastic modulus of most metallic specimens in the order of 0.2 to 0.6% [38], a figure that is important if crack length resolutions in the order of 10 μ m are expected from very high quality compliance-based systems. Temperature, of course, also perturb the electronic circuitry, but this discussion is considered beyond the scope of this work (see e.g., [39-40]).

The use of clip-gages or similar devices to measure crack opening displacements, besides the very big problem of accessing the actual load points, as discussed in [37], have the added complicating problem of intrinsic friction at knife edges, with the consequent hysteresis-related disturbances of difficult quantification. A simple and elegant solution to this problem is to avoid the use of clip-gages by bonding strain-gages directly on the surface of the specimen, e.g., in the back face of the CTS as discussed in [16]. However, again, this solution is not without any shortcomings, because the measured strain output, despite being almost hysteresis-free, must somehow be calibrated in terms of absolute crack length. Regretfully, this is not an easy task from an analytical point of view for most practical specimen geometries, and the author is not aware of any available theoretical calibrations in the literature.

CONCLUSIONS

The resolution and the effects of error sources in two analogic systems of crack length measurement has been studied. Arguments are presented to show that resolution figures in the order at 0.1mm should be expected from both compliance-based and potential drop systems, if decent operational procedures are carefully followed. This number is significantly higher than many figures quoted in the literature, but it seems to be closer to the reality of present technological limitations. There is still an urgent need for development of better experimental systems, to allow a closer study of low crack-growth rates and fatigue-cycle interactions, with crack length resolution in the order of $1\mu\text{m}$ as a goal for the near future.

REFERENCES

- [1] Manson, S.S. - "Fatigue: A complex subject - Some Simple Approximations," Exp. Mech., pp.193-226, July 1965.
- [2] McEvily, A.J. - "Current aspects of fatigue," Metal Sci., pp.274-284, Aug. Sept. 1977.
- [3] Rolfe, S.T. and Barsom, J.M. - Fracture and fatigue control in structures. Prentice-Hall, 1977.
- [4] Knott, J.F. - Fundamentals of fracture mechanics. Butterworth, 1975.
- [5] Hertzberg, R.W. - Deformation and fracture mechanics of engineering materials. Wiley, 1976.
- [6] Broek, D. - Elementary engineering fracture mechanics. Sitjhoff and Noordhoff, 1978.
- [7] Parker, A.P. - The mechanics of fracture and fatigue. E.F.N. Spon, 1981.
- [8] Duggan, T.V. and Byrne, J. - Fatigue as a design criterion, McMillan, 1977.
- [9] Schijve, J. - "Four lectures on fatigue crack propagation," Delft Univ. of Tech., Dept. of Aerospace Eng. Report LR-254, 1977.
- [10] Fuchs, H.O. and Stephens, R.I. - Metal fatigue in engineering. Wiley, 1980.
- [11] Hutchinson, J.W. - Non-linear fracture mechanics. Tech. Univ. of Denmark, 1979.
- [12] Tada, H.; Paris, P.C. and Irwin, C.R. - The stress analysis of cracks hand book. Del Research, 1973.
- [13] Rice, J.R. - "Mathematical analysis in the mechanics of fracture," Fracture, vol.II, Academic Press, 1968 (Liebowitz, H., ed.).
- [14] Paris, P.C. and Erdogan, F. - "A critical analysis of crack propagation laws," J. Basic Eng., pp.528, 1963.

- [15] Rice, J.R. - "Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue," ASTM STP 415, pp.247-309, 1967.
- [16] Castro, J.T.P. - "Load history effects on plane strain fatigue crack growth," Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, M.I.T., 1982.
- [17] ASTM E 647-81: "Standard test method for constant load amplitude fatigue crack growth rates above 10^{-8} m/cycle," 1982 Annual Book of ASTM Standards, Part 10.
- [18] Ritchie, R.O. - "Crack growth monitoring: Some considerations on the electrical potential method," Report Dept. of Metallurgy and Material Science, Univ. of Cambridge, England, 1972.
- [19] Ritchie, R.O. and Bathe, K.J. - "On the calibration of the electrical potential technique for monitoring crack growth by using finite element methods," Int. J. Fract., 15 (1): 47-55, 1979.
- [20] Aronson, G.H. and Ritchie, R.O. - "Optimization of the electrical potential technique for crack growth monitoring in compact test specimens using finite element analysis," J. of Test and Evaluation, 7 (4): 208-215, 1979.
- [21] Bachmann, V. and Munz, D. - "Fatigue crack closure evaluation with the potential drop method," Eng. Fract. Mech., 11: 61-71, 1979.
- [22] Various authors in a series of 10 papers in The Measurement of Crack Length and Shape During Fracture and Fatigue. Beevers, C.J., Ed., EMAS 1980.
- [23] Clark, G. and Knott, J.F. - "Measurement of fatigue cracks in notched specimens by means of theoretical electrical potential calibrations," J. of Mech. Phys. Solids, 23: 265-276, 1975.
- [24] Ritchie, R.O.; Garret, G.G. and Knott, J.F. - "Crack growth monitoring: optimization of the electrical potential technique using an analog method," Int. J. Fract. Mech., 7 (4): 462-467, 1971.
- [25] Johnson, H.H. - "Calibrating the electrical potential drop method for studying slow crack growth," Materials Research and Standards, 5 (9): 442-445, 1965.
- [26] Handbook of Chemistry and Physics, 60th Ed., CRC 1979.
- [27] ASTM STP 470A Manual on the Use of Thermocouples in Temperature measurements, ASTM 1974.
- [28] Beckwith, T.G.; Buck, N.L. and Marangoni, R.D. - Mechanical measurements. Addison-Wesley, 1982.
- [29] Benedict, R.P. - Fundamentals of temperature pressure and flow measurements. Wiley, 1977.
- [30] Holman, J.P. - Experimental methods for engineers. MacGraw-Hill, 1978.
- [31] Pollock, D.O. - "The theory and properties of thermocouple elements," ASTM STP 492, 1975.

- [32] Various authors in Temperature, its measurement and control in science and industry. Reinhold, 1941.
- [33] ASTM B 77-81: Standard test method for thermoelectric power of resistance alloys. 1982 Annual Book of ASTM Standards.
- [34] Zai-liang, L. - "Electrical potential modelling of the anti-plane problem," Int. J. Fract., (17), 1981.
- [35] Kobayashi, A.S. - Experimental techniques in fracture mechanics. SESA 1973.
- [36] ASTM E 399-81: Standard test method for plane strain fracture toughness of metallic materials. 1982 Annual Book of ASTM Standards, Part 10.
- [37] Fischer, D.M. and Buzzard, R.J. - "Experimental compliance calibration of the compact fracture toughness specimen," NASA TN 81665, 1980.
- [38] Perry, C.C. - "Modern strain gages transducers," Epsilonics I, vol. III, April 1983.
- [39] Sheingold, D.H. - Transducer interfacing handbook. Analog Devices, 1981.
- [40] Horowitz, and Hill - The art of electronics. Cambridge 1981.

APPENDIX

AN ANALYSIS OF THE USE OF THE CTS LOADING PIN TO MEASURE THE LOAD POINT DISPLACEMENT

In order to make absolute compliance measurements, it is necessary to measure the load point displacement. However, this can be a very difficult task to be achieved when working with compact tension specimens, because the actual load points are virtually inaccessible. One proposed simplistic solution was to use, as an approximation, the displacement of the loading pins's face. The purpose of this Appendix is to show that a simple calculation proves that this choice would not be wise, unless the deflection of the pins are accounted for.

The Deflections of the CTS Loading Pin

We are going to study the deflections that the CTS loading pins have during actual service (Figure 9 illustrates the problem we have in mind). We want to estimate the difference in displacement between the points c and f, localized at the center and at the face of the loading pin, respectively. The objective is to estimate the error made when using f to measure the compliance of the CTS. We idealize the situation by assuming as uniformly distributed the forces applied by the grip and by the specimen on the pin.

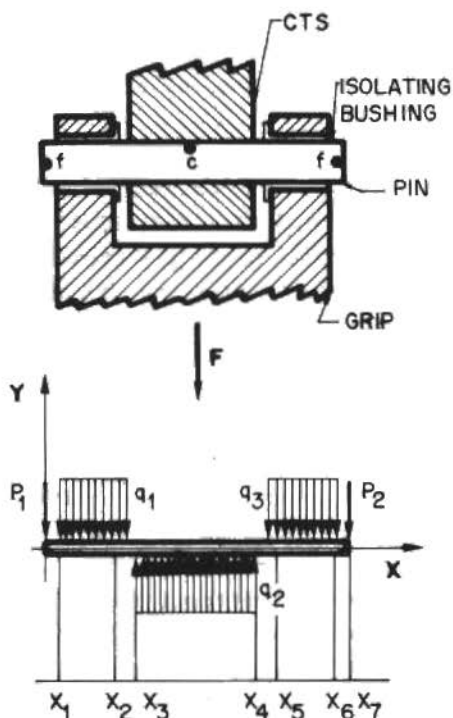


Figure 9. The CTS loading pin problem

By equilibrium, we have:

$$P_1 + P_2 + q_1(x_2 - x_1) + q_3(x_6 - x_5) = q_2(x_4 - x_3)$$

And from elementary beam theory:

$$d^2 \left[EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] / dx^2 = q(x)$$

where EI is the beam's bending stiffness. Writing the load $q(x)$ as a summation of singularity functions, we get:

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum \langle x - a_i \rangle^{\beta_i}, \text{ where } \beta_i = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

For a pin of constant cross section, after integrating the beam equation four times, we get:

$$EIy = \sum_i \langle x - a_i \rangle^{3i} + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0$$

were the C_i are the integration constants, that must be found from the boundary conditions. In practice, we can assume $P_1, P_2 = 0$ and $q_1(x_2 - x_1) = q_3(x_6 - x_5) = F/2$.

In a typical example, let the pin be made of steel and have a diameter of 12.7mm. Therefore, $E = 205\text{GPa}$ and $I = \pi d^4/64 = 1277\text{mm}^4$. Moreover, $x_i = 4.0; 19.0; 22.5; 35.3; 38.8; 53.8; 57.8\text{mm}$, for $i = 1, 7$, respectively. The point c had $x = 28.9\text{mm}$. From the free end conditions $C_3 = C_2 = 0$ and, by symmetry, $dy/dx|_c = 0$. (Note that when using singularity functions $q_i(x) = A_i \langle x - a_i \rangle^{\alpha_i}$ to describe the loading of beams we have:

$$EIy = \left[A_i \langle x - a_i \rangle^{\alpha_i} \right] dx + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0$$

where C_i must be determined by the boundary conditions. When both ends are free, $y'''(0) = y'''(L) = 0$, $y''(0) = y''(L) = 0$, and $C_3 = C_2 = 0$. These four b.c. are not enough to uniquely solve the problem. This is due to the two remaining degrees of freedom of the beam, namely, translation and rotation). Making $y(0) = 0$, we get the difference in displacement between the center and the face of the pin as:

$$y(c) = 6.35 \cdot 10^{-6} F \quad (y \text{ in mm and } F \text{ in Newtons})$$

For a typical load $F = 10\text{kN}$, $y(c) = 65.3\mu\text{m}$. For comparison, the load point displacement caused by the same load is $98.1\mu\text{m}$ for $a/W = 0.4$, $242\mu\text{m}$ for $a/W = 0.6$ and 1.101mm for $a/W = 0.8$, where a/W is the crack length divided by the specimen length. Therefore, if any precision is required from the compliance measurements, the use of the pin's face must be avoided (or the difference between $y(c)$ and $y(f)$ must be accounted for), principally for small a/W cracks.

ANÁLISE NÃO-LINEAR DA ESTABILIDADE ELÁSTICA DE TORRES ESTAIADAS

Antônio Manuel Dias Henriques - Membro da ABCM

Instituto de Pesquisas Espaciais

Victor Prodonoff - Membro da ABCM

Centro de Pesquisas da Petrobrás

RESUMO

Apresenta-se uma análise não-linear da estabilidade de torres suportadas por cabos. A estrutura é dividida em dois subconjuntos, coluna e cabos, inicialmente estudados separadamente. Na obtenção da matriz de rigidez da estrutura utiliza-se a formulação de vigas-colunas e a forma catenária dos cabos, com uma relação força-deslocamento não-linear. A solução é obtida supondo a linearidade do sistema entre dois estados consecutivos no processo incremental.

ABSTRACT

A nonlinear stability analysis of towers supported by cables is presented. The structure is divided in two groups, column and cables, which are first analysed separately. Beam-column formulation and catenary cables are used in obtaining the stiffness matrix of the structure, with a nonlinear force-displacement relationship. Solution is achieved through stepwise linearization.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a rápida e difundida expansão dos vários meios de comunicação na área eletrônica, fez com que a engenharia estrutural enfrentasse o problema de como suportar equipamentos de transmissão, tal como antenas de grandes alturas, necessários para emissão de sinais a longas distâncias. Embora tenham provado, ao

longo dos anos, que torres auto suportadas sejam satisfatórias para alturas moderadas, mastros suportados lateralmente por cabos proporcionam, usualmente, uma solução mais econômica para o projeto de torres altas.

A inclusão desses cabos torna as torres bem mais rígidas e o projeto bem mais barato em relação às auto-suportadas, pois minimiza o custo de construção, pela considerável redução de material. Por outro lado, as torres estaiadas, além de ocuparem grandes espaços para a sua construção e montagem, requerem uma análise bem mais complexa que as auto-suportadas.

A análise do comportamento de torres estaiadas não pode ser considerada como completa, sem que se tenha feito um estudo geral da instabilidade do sistema.

Métodos para determinação da carga crítica de uma coluna com suportes elásticos lineares são bem conhecidos [1]; contudo, somente uns poucos casos simples têm sido estudados para uma coluna com suportes elásticos não-lineares.

Hull [2] sugere uma aproximação, linearizando-se o sistema no sentido da determinação do momento de inércia crítica do mastro de torre. O mastro é considerado como sendo uma viga-coluna com suportes elásticos não-lineares, sendo os cabos estudados com a sua forma real, ou seja, em catenária.

Goldberg e Gaunt [3] apresentam um método para determinação da resposta de torres sustentadas por cabos, através de incrementos da carga lateral até que a condição de instabilidade seja atingida. O método consiste em, montado o sistema de equações algébricas não-lineares, referente ao sistema cabos-torre, transformá-lo, a seguir, em um sistema de equações não-lineares diferenciadas. Esta diferenciação é efetivada com respeito a um parâmetro de carga. Este sistema pode então ser resolvido numericamente, usando-se subrotinas padrões para inversão de matrizes, conjuntamente com um método de integração numérica, como por exemplo, o processo Runge-Kutta de quarta ordem.

Williamson [4] apresenta um estudo do efeito da carga devido ao gelo na estabilidade de um tipo especial de torres estaiadas, utilizadas em telecomunicações, denominadas de "*top-loaded towers*". Neste tipo de torre, o último nível de cabos (nível superior) consiste de uma rede de cabos condutores que serve como elemento irradiante de sinais, ou seja, funciona como antena. A técnica utilizada na análise da torre sob a ação das cargas, devido à ação do gelo e do

vento, é uma solução aproximada por tentativas, envolvendo um aumento, por incrementos, da espessura da camada de gelo sobre a torre e cabos, verificando-se a cada passo o comportamento do sistema. O limite de estabilidade para o primeiro modo de flambagem é encontrado quando os deslocamentos laterais tornam-se bastante grandes.

O presente trabalho mostra uma análise completa, não-linear, da estabilidade estrutural de uma torre-estaiada. Ao contrário dos outros trabalhos, a carga crítica é atingida não somente com a variação da carga horizontal do vento, mas também com a variação das cargas verticais.

Na análise, o mastro é considerado uma viga-coluna com suportes elásticos não-lineares, representando a reação dos cabos sobre o mastro. A solução para os deslocamentos é obtida através de um processo iterativo de convergência, ampliando-se as cargas em incrementos de pequena ordem. O parâmetro crítico de flambagem, um fator multiplicativo das cargas reais atuantes na torre, é obtido quando o determinante da matriz de rigidez se anula, ou seja, quando os deslocamentos tendem para valores muito grandes.

O estudo leva em conta:

- a) a análise do comportamento do cabo sob a forma catenária;
- b) o efeito do vento sobre os cabos, além de sua ação sobre o mastro;
- c) a influência do peso próprio do mastro e da reação dos cabos na compressão axial da torre;
- d) a obtenção do parâmetro crítico, variando-se seletivamente a carga transversal do vento, as cargas verticais, ou ambas.

RELAÇÕES FORÇA-DESLOCAMENTO PARA O CABO

O cabo, devido ao seu peso próprio, toma a forma de uma catenária, cujo comprimento é dado pela relação:

$$L_0 = \left[\frac{4H_0^2}{q_0^2} \operatorname{senh}^2 \left(\frac{q_0 c_0 \cos \alpha_0}{2H_0} \right) + c_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right]^{1/2} \quad (1)$$

Os significados dos parâmetros H_0 , V_0 , α_0 , c_0 e q_0 são mostrados na Figura 1.

A componente V_0 é obtida tomando-se o somatório dos momentos em relação à base do cabo na Figura 1.

$$V_0 = H_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{q_0 c_0}{2} \quad (2)$$

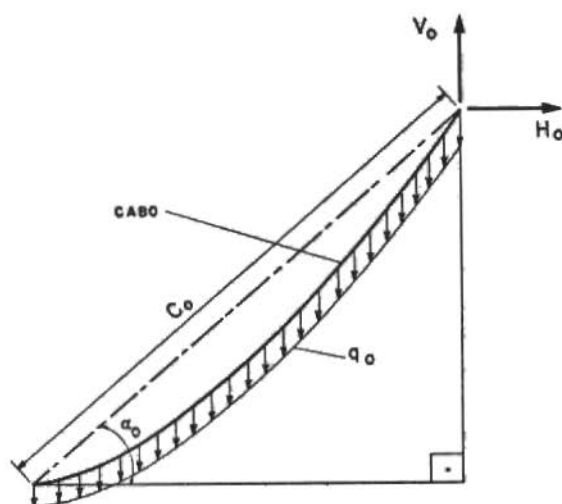


Figura 1. Geometria do cabo sujeito ao peso próprio

Sob a ação da carga de vento, considerada constante ao longo do cabo, considera-se que o mesmo permaneça com a sua forma catenária tendo o seu plano e a sua curvatura sido alterados em consequência desta carga.

O novo comprimento experimentado pelo cabo, será dado por:

$$L = \left[\frac{4H_q^2}{q^2} \operatorname{senh}^2 \left(\frac{q c \cos \alpha}{2H_q} \right) + c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \right]^{1/2} \quad (3)$$

onde

q = resultante da soma vetorial de q_0 e W (carga de vento), por unidade de comprimento;

c = novo comprimento da corda;

H_q = componente da reação na extremidade superior do cabo. Figura 2.

A reação V_q na extremidade superior do cabo será dada por:

$$V_q = H_q \operatorname{tg} \alpha + \frac{q c}{2} \quad (4)$$

Nas relações (3) e (4), α é o ângulo agudo entre o plano normal ao cabo e a direção de q , medido no novo plano da catenária. Figura 3.

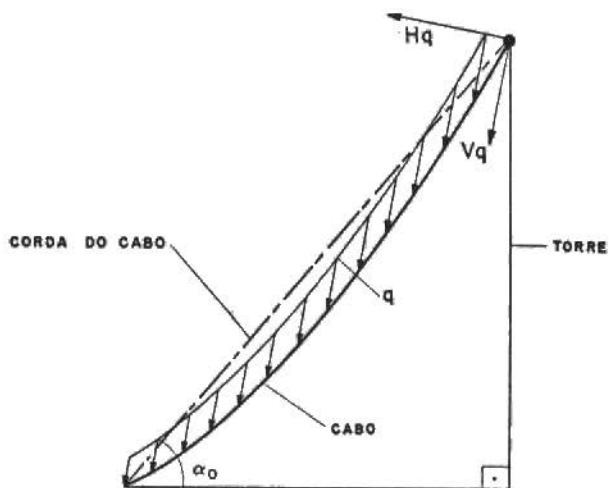


Figura 2. Geometria do cabo sujeito ao peso próprio e \vec{a} carga de vento

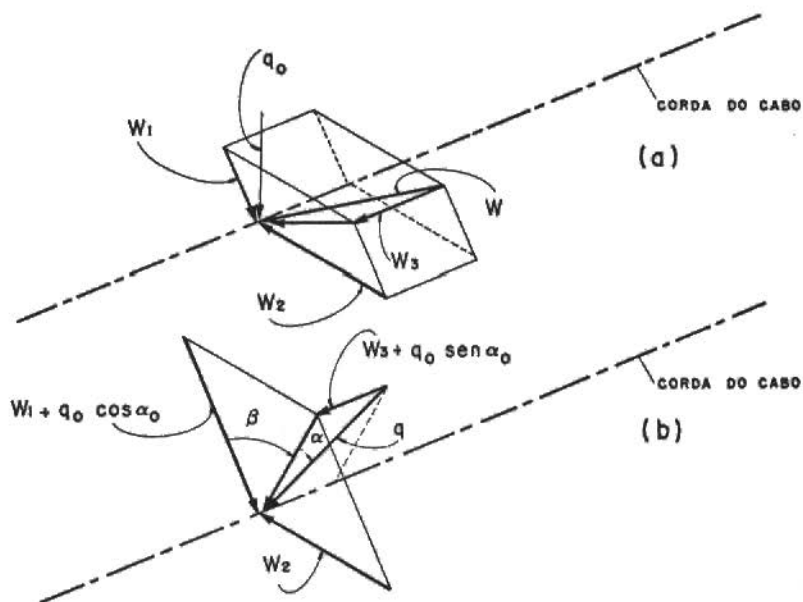


Figura 3. Componentes de carga de vento e do peso próprio para um elemento do cabo

Por considerações aerodinâmicas, a magnitude e a direção da carga de vento, W , podem ser determinadas. Esta carga pode ser decomposta nas componentes $W1$, $W2$ e $W3$ mostradas na Figura 3a. Na Figura 3b mostra-se como estas componentes da carga de vento são combinadas com o peso próprio do cabo na obtenção da resultante, q , que será dada por:

$$q = \left[W1^2 + W2^2 + W3^2 + q_0^2 + 2q_0(W1 \cos\alpha_0 - W3 \sin\alpha_0) \right]^{1/2} \quad (5)$$

Os ângulos α e β , mostrados na Figura 3b, fornecem a posição de q relativa a q_0 e serão dados por:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{W2}{W1 - q_0 \cos\alpha_0} \quad (6)$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(q_0 \sin\alpha_0 - W3) \cos\beta}{W1 + q_0 \cos\alpha_0} \quad (7)$$

As expressões (3) e (4) são denominadas de relações força-deslocamento para o cabo, visto que c é uma função do deslocamento na extremidade superior do cabo e V_q e H_q componentes de força neste ponto.

A variação do comprimento do cabo pode ser escrita como:

$$\Delta L = L - L_0 \quad (8)$$

Considerando T_{m0} e T_m como tensões médias no cabo, respectivamente, sem e com carga de vento atuando, uma expressão aproximada para ΔL , será dada por, [5],

$$\Delta L = \left(\frac{H_q}{\cos\alpha} - \frac{H_0}{\cos\alpha_0} \right) \frac{L_0}{A_g E_g} \quad (9)$$

onde

A_g = área da seção transversal do cabo

E_g = módulo de elasticidade do cabo

Levando-se a expressão (9) na expressão (8) e o resultado na expressão (3), tem-se:

$$L_0 \left[1 + \frac{H_q}{A_g E_g \cos\alpha} - \frac{H_0}{A_g E_g \cos\alpha_0} \right] = \left[\frac{4H_q^2}{q^2} \operatorname{senh}^2 \left(\frac{q c \cos\alpha}{2H_q} \right) + c^2 \operatorname{sen}^2\alpha \right]^{1/2} \quad (10)$$

Por considerações de geometria, [5], chega-se à expressão de c , em função do deslocamento Δ na extremidade superior do cabo, ou seja,

$$c = (a^2 + h^2 + \Delta^2 + 2a \Delta \cos\phi)^{1/2} \quad (11)$$

onde

a = projeção horizontal da corda do cabo

h = projeção vertical da corda do cabo

Δ = deslocamento na direção do vento do ponto de fixação do cabo na torre

ϕ = ângulo entre a direção do vento e a projeção horizontal do cabo

Para serem utilizadas nas equações de equilíbrio, todas as forças nos pontos de fixação dos cabos na torre (nós), devem ser referenciadas a um sistema comum de coordenadas. Assim sendo, através de três rotações de eixos e por considerações de equilíbrio, obteve-se as seguintes componentes de força [5].

$$H1 = \frac{q c_0}{2} (\text{sen}\alpha \cos\alpha_0 - \cos\alpha \cos\beta \text{sen}\alpha_0) + H_q \left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha} \right) \quad (12)$$

onde

$H1$ = componente horizontal da força total, na extremidade superior do cabo, atuando no plano original da catenária.

$$H2 = \frac{W2 c_0}{2} \quad (13)$$

onde

$H2$ = componente horizontal da força total no cabo, atuando perpendicularmente ao plano original da catenária, e

$$V1 = \frac{c_0 (W1 + q_0 \cos\alpha_0)}{2 \cos\alpha_0} + H1 \text{tg} \alpha_0 \quad (14)$$

onde

$V1$ = componente vertical da força total no cabo, atuando no plano original da catenária.

Devido ao fato da componente V_1 ser excêntrica em relação ao centroide da seção transversal da torre, um momento externo, \bar{M} , surge em cada nível de cabos. Denominando-se e , como sendo a distância do ponto de aplicação da carga V_1 ao centróide da seção transversal da torre medido na direção do vento, tem-se:

$$\bar{M} = V_1 \times e \quad (15)$$

Portanto, tendo-se obtido H_q que é função de Δ por (10) e (11), as forças que são transmitidas à torre pelo cabo podem ser determinadas através das expressões (12), (13), (14) e (15).

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DA TORRE

As equações de equilíbrio da torre são obtidas a partir da formulação de vigas-colunas dada por Timoshenko [1]. O mastro da torre é analisado como uma viga coluna engastada ou rotulada em sua base, sustentada lateralmente por apoios não-lineares.

Para a torre, as forças externas são devidas aos movimentos dos cabos e, por exemplo, à ação do vento.

Análise da Torre

A Figura 4 mostra as forças atuando em dois elementos de uma torre estaiada. W_n e W_{n+1} são cargas de vento uniformemente distribuídas; M_{n-1} , M'_n , M_n e M'_{n+1} são momentos resistentes internos; \bar{M}_n é o momento externo produzido pelos cabos; P_{n+1} é a resultante das forças axiais atuando imediatamente abaixo do nível de cabo $n+1$, incluindo a componente axial proveniente do cabo; e P_n , similarmente, é a carga total atuando imediatamente abaixo do nível de cabo n .

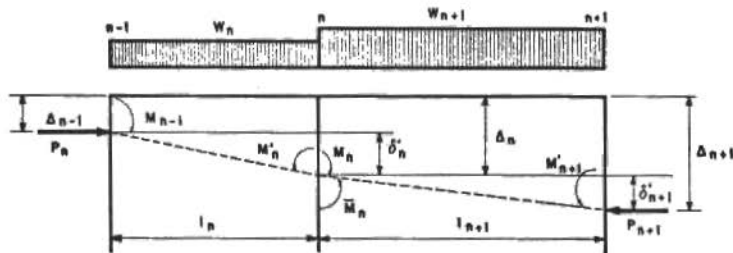


Figura 4. Forças atuando em dois segmentos contínuos do mastro da torre

Para manter-se a continuidade do n^o n, da teoria de viga-coluna, [5] e [1], tem-se:

$$\begin{aligned}
 & 4 M_{n-1} \frac{\ell_n}{I_n} \phi(u_n) + 8 M_n \left[\frac{\ell_n}{I_n} \psi(u_n) + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} \psi(u_{n+1}) \right] \\
 & + 4(M_{n+1} + \bar{M}_{n+1}) \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} \phi(u_{n+1}) + 8 \bar{M}_n \frac{\ell_n}{I_n} \psi(u_n) + W_n \frac{\ell_n^2}{I_n} \chi(u_n) + \\
 & + W_{n+1} \frac{\ell_{n+1}^2}{I_{n+1}} \chi(u_{n+1}) = 24 E_t \left[\frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\ell_n} - \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\ell_{n+1}} \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

onde

I_n, I_{n+1} = momento de inércia dos segmentos n e n+1 do mastro
 E_t = módulo de elasticidade do mastro da torre.

$$u = \frac{\ell}{2} \frac{P}{E_t I} \quad (17)$$

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2u} - \frac{1}{2u} \right) \quad (18)$$

$$\psi(u) = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \right) \quad (19)$$

$$\chi(u) = \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3} \quad (20)$$

A equação (16) é uma típica equação de continuidade. Na Figura 5 aparecem os diagramas de corpo livre para os segmentos de torre mostrados na Figura 4, com as forças aplicadas sendo indicadas.

Por considerações de equilíbrio chega-se à seguinte equação [5],

$$\begin{aligned}
 R_n = & \frac{1}{2} (W_n + W_{n+1}) + \frac{M_{n-1}}{\ell_n} - M_n \left(\frac{1}{\ell_n} + \frac{1}{\ell_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1}}{\ell_{n+1}} - \frac{\bar{M}_n}{\ell_n} + \\
 & + \frac{\bar{M}_{n+1}}{\ell_{n+1}} + \frac{P_n}{\ell_n} (\Delta_n - \Delta_{n-1}) - \frac{P_{n+1}}{\ell_{n+1}} (\Delta_{n+1} - \Delta_n) \quad (21)
 \end{aligned}$$

onde

$$R_n = V_n' + V_n$$

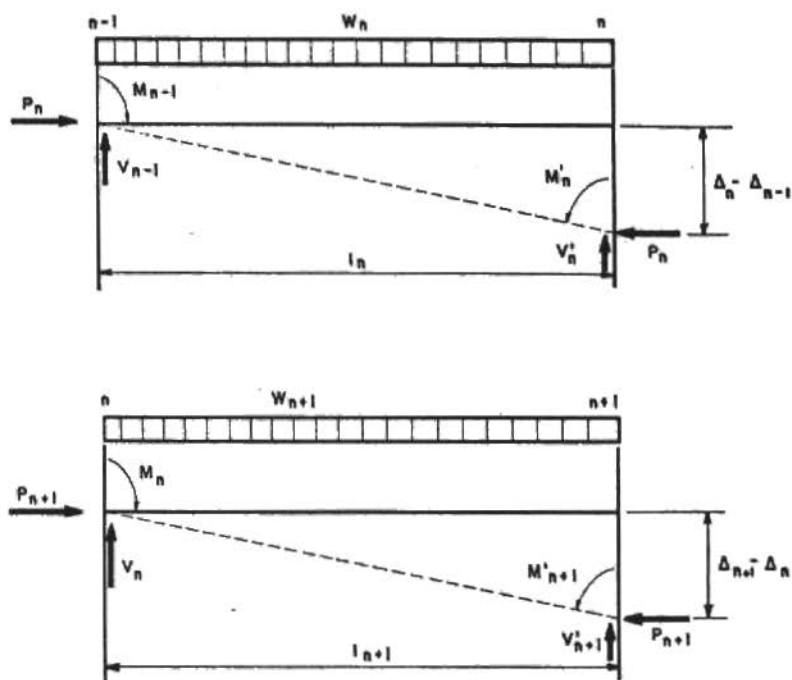


Figura 5. Diagramas de corpo livre para dois segmentos contínuos do mastro da torre

Para uma torre com m segmentos, as equações de continuidade e de equilíbrio, devem ser modificadas para os segmentos extremos [5].

As incógnitas nestas equações são $M_0, M_1, \dots, M_{m-1}; R_1, R_2, \dots, R_m$ e $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$. Portanto para uma torre com m níveis de cabos, tem-se $3m$ parâmetros desconhecidos se a base da mesma for fixa e $3m-1$ se a base for rotulada.

Por outro lado, sã podem ser escritas $2m$ equações para uma torre com base fixa e $2m-1$ equações para uma torre com base rotulada, ou seja, tem-se um número de incógnitas maior que o número de equações disponíveis.

Resolve-se este problema, utilizando-se as equações anteriormente obtidas para os cabos, e assim reduz-se o número de incógnitas ao mesmo número de equações disponíveis.

Escrevendo-se as equações de equilíbrio e de continuidade para cada nível de cabo, monta-se a matriz de rigidez a qual será utilizada na determinação das cargas críticas de flambagem.

CONSIDERAÇÕES DE ESTABILIDADE

A estabilidade de torres sustentadas por cabos é um problema não-linear, não só devido à compressão do mastro da torre, mas também por causa do comportamento não-linear dos cabos.

No presente trabalho utiliza-se uma técnica de solução por tentativas sucessivas, ou seja, incrementa-se, por exemplo, a carga lateral devida ao vento e observa-se a resposta do sistema. A observação da resposta é feita através do valor do determinante da matriz de rigidez. Quando este valor tende a zero, os deslocamentos laterais tornam-se extremamente grandes, caracterizando neste ponto a carga crítica referente ao primeiro modo de flambagem.

ANÁLISE NUMÉRICA

Para avaliação da análise teórica exposta anteriormente, desenvolveu-se um programa em linguagem FORTRAN, para cálculo de deslocamentos, momentos internos e cargas críticas de torres estaiadas [5]. Os dois exemplos que se seguem foram selecionados de forma a permitir que o leitor tenha uma idéia da versatilidade do referido programa, que permite analisar torres com diferentes características geométricas, físicas e de variação da carga.

Dentre as geométricas, estão os tipos de torres cilíndricas e treliçadas; dentre as físicas, as torres de base rotulada ou engastada; quanto aos tipos de variação da carga, podem ser:

i) variando-se a carga horizontal devido ao vento, o que implica em variar indiretamente a componente vertical do esforço que os cabos transmitem à torre; é o que ocorre em uma estrutura real já instalada;

ii) variando-se as cargas verticais devido ao peso próprio (por exemplo alterando-se a seção transversal da torre) e as componentes axiais provenientes dos cabos (por exemplo alterando-se a pretensão dada aos cabos por ocasião da construção da torre). Estudo válido quando se projeta a torre; e

iii) variando-se, ao mesmo tempo, cargas verticais e horizontais.

Pode-se também utilizar o programa desenvolvido para se determinar o momento de inércia crítico da seção transversal da torre, ou seja, quais são as dimensões mínimas que a seção transversal da torre deverá ter de forma a fazer com que a mesma fique estável.

Exemplo Ilustrativo = 1

Como primeiro exemplo numérico, selecionou-se uma torre de seção transversal cilíndrica, Figura 6, com três níveis de cabos, tendo sua base engastada, Figura 7. Tem-se três cabos por nível espaçados igualmente de um ângulo de 120° .

A Tabela 1 apresenta as características dos cabos usados no sistema e a Tabela 2 as características da torre, dividida em 4 segmentos.

Na Tabela 2, o carregamento axial inicial por nível é resultante da soma das seguintes cargas:

- peso próprio do segmento;
- componente axial da pré-tensão de montagem dada aos cabos inicialmente (Tabela 1);
- peso próprio dos cabos;
- componente axial da resultante das cargas de vento atuando nos cabos.



Figura 6. Seção transversal da torre

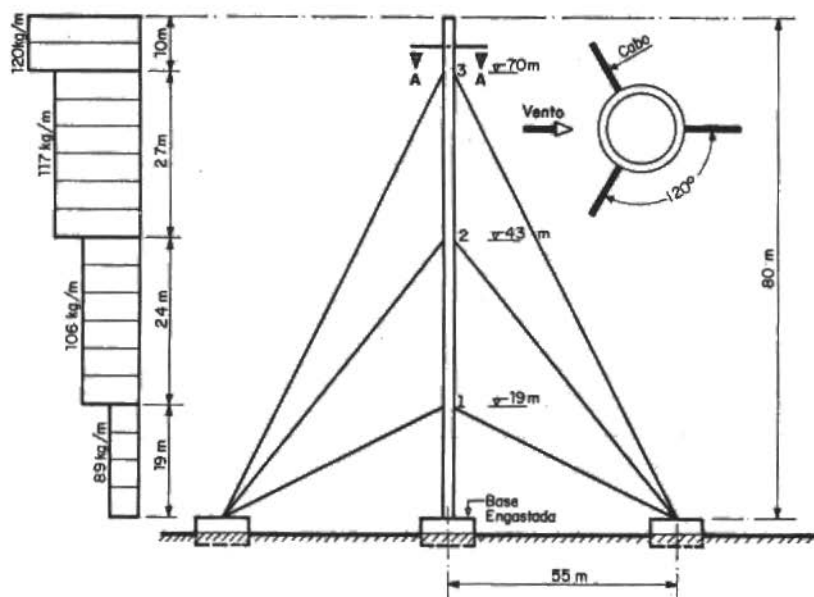


Figura 7. Esquema de montagem do sistema torre-cabos

Tabela 1. Propriedades dos cabos

Nível	Módulo de elasticidade ($\times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$)	Área de seção transversal A (cm^2)	Projeção horizontal do cabo a (m)	Projeção vertical do cabo h (m)	Peso por unidade de comprimento q (Kg/m)	Pré-tensão no cabo (Kg)
1*	1,0	2,55	55,0	19,0	2,50	2000
2	1,0	2,55	55,0	43,0	2,50	3000
3	1,0	4,82	55,0	70,0	4,73	4000

* Nível inferior

Tabela 2. Propriedades da torre

Número de segmento	Peso de segmento (Kg/m)	Comprimento do segmento (m)	Carregamento axial inicial (Kg)	Carga de vento (Kg/m)	EI ($\times 10^{10}$) (Kg x cm ²)
1*	461,0	19,0	49643	89,0	55,91
2	434,0	24,0	37857	106,0	55,91
3	431,0	27,0	20948	117,0	55,91
4	482,0	10,0	0	120,0	55,91

* 1º segmento a partir da base

As Figuras 8 e 9 mostram como se comportam respectivamente, o deslocamento lateral para o segundo nível e o determinante da matriz de rigidez, [K], quando se varia o vetor de cargas verticais (determinado inicialmente conforme descrito anteriormente) por meio de uma variação do fator multiplicativo das cargas verticais, denominado λ_v .

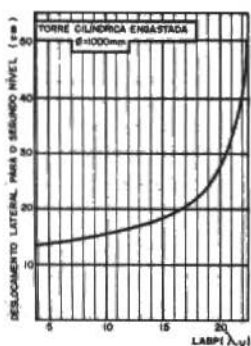


Figura 8. Deslocamento lateral para o nível 2, versus variação da carga vertical

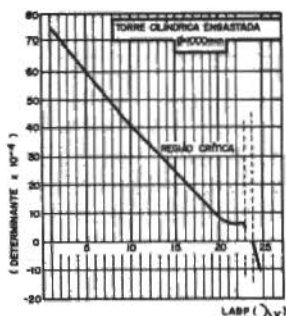


Figura 9. Determinante de [K] versus variação da carga vertical (λ_v)

Note-se que para cada valor do parâmetro $\bar{\lambda}$ é necessário montar a matriz de rigidez da estrutura, e, após esta ser montada por completo, avaliar-se o seu determinante. A quantidade de operações envolvidas neste processo é relativamente grande, lembrando que cada termo da matriz de rigidez relacionado com os deslocamentos transversais é uma função transcendental da carga axial.

O valor crítico do carregamento fornece um valor nulo para o determinante, e o parâmetro relacionado a este valor crítico do carregamento, ou seja, em quantas vezes foi aumentada a carga de projeto, é denominado parâmetro crítico ou coeficiente de flambagem. Como este valor nulo para o determinante mui dificilmente será atingido com exatidão no processo incremental, deve-se aplicar um processo iterativo, após detectada a passagem pelo zero pela mudança no sinal do determinante. O incremento de carga a ser dado em cada passo deve ser cuidadosamente estudado. Quanto menor o valor do incremento, maior será o número de passos necessários para se alcançar o valor crítico, supondo-se o mesmo valor inicial. Entretanto, um valor muito alto no acréscimo pode resultar na "perda" do primeiro e menor valor de carga crítica, havendo, assim, o perigo de a resposta se referir a um modo de flambagem que fornece uma carga superior. Como cada caso é um, não existe uma regra geral para o valor do passo a ser utilizado e este vai depender da experiência e do bom senso do projetista.

A Figura 10 dá uma idéia qualitativa do comportamento do mastro da torre, à medida que se incrementa a carga vertical.

Conclui-se que, pelo alto coeficiente crítico encontrado $\lambda_v = 22,5$, esta estrutura não irá falhar por instabilidade, ou seja, ela encontra-se superdimensionada no que diz respeito à estabilidade.

Exemplo Ilustrativo - 2

Este exemplo refere-se a uma torre cilíndrica com base engastada, variando-se a carga horizontal (carga de vento).

É importante observar que à medida que se varia a carga de vento, o mastro da torre desloca-se e, portanto, as componentes axiais das forças que os cabos transmitem também variam. Ou seja, para cada incremento no vetor de cargas horizontais ter-se-á que calcular a matriz de rigidez correspondente.

Básicamente, as características geométricas e físicas para a torre deste exemplo são as mesmas do exemplo 1; a única diferença

está no diâmetro da seção transversal da torre, que neste exemplo é de 500mm, Figura 11, o que implica numa diminuição do peso de cada segmento.

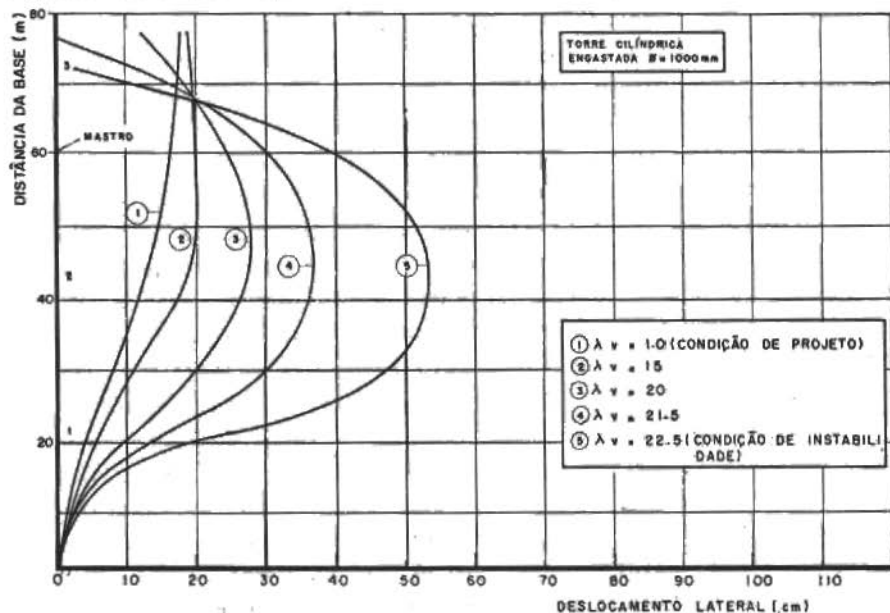


Figura 10. Deslocamento lateral da torre por variação da carga vertical (λ_v)



Figura 11. Seção típica da torre para o exemplo 2

As Figuras 12 e 13 mostram como se comportam, respectivamente, o deslocamento lateral para nível 2 e o determinante da matriz de rigidez, $[K]$, quando se varia a carga horizontal através da variação do parâmetro λ_H .

A Figura 14 dá uma idéia do comportamento do mastro da torre, à medida que se incrementa a carga horizontal.

Pelo valor do parâmetro crítico encontrado $\lambda_H = 14$, tem-se novamente uma estrutura superdimensionada do ponto de vista de estabilidade.

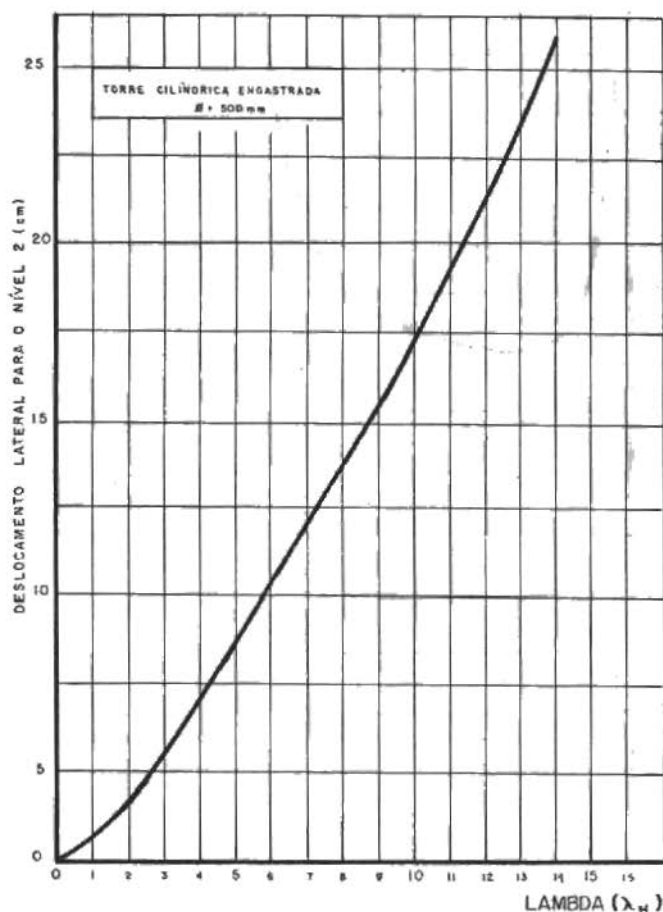


Figura 12. Deslocamento lateral para o nível 2 versus variação da carga horizontal (λ_H)

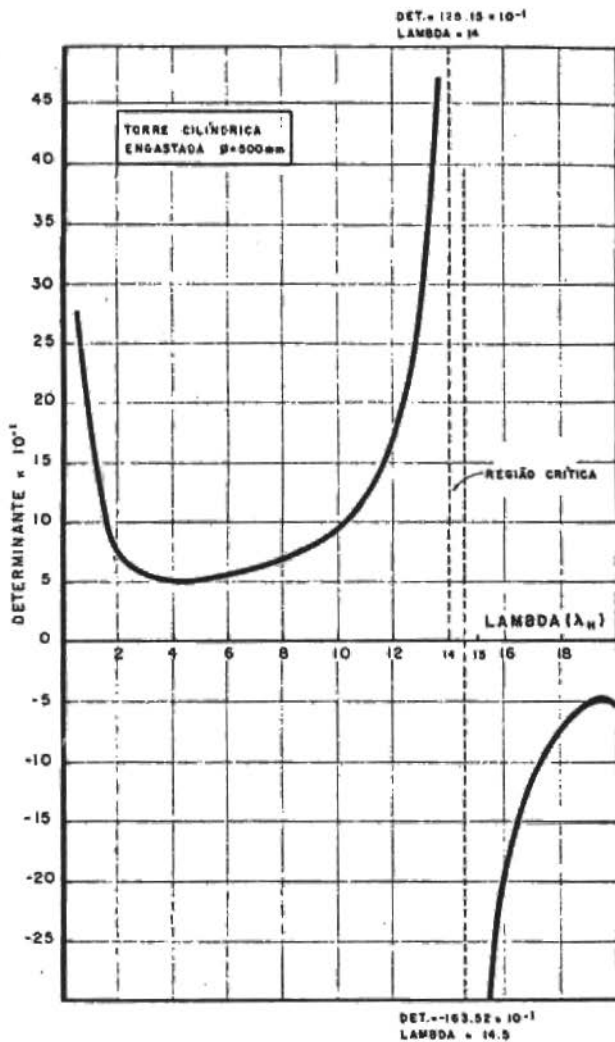


Figura 13. Determinante de $[K]$ versus variação da carga horizontal (λ_H)

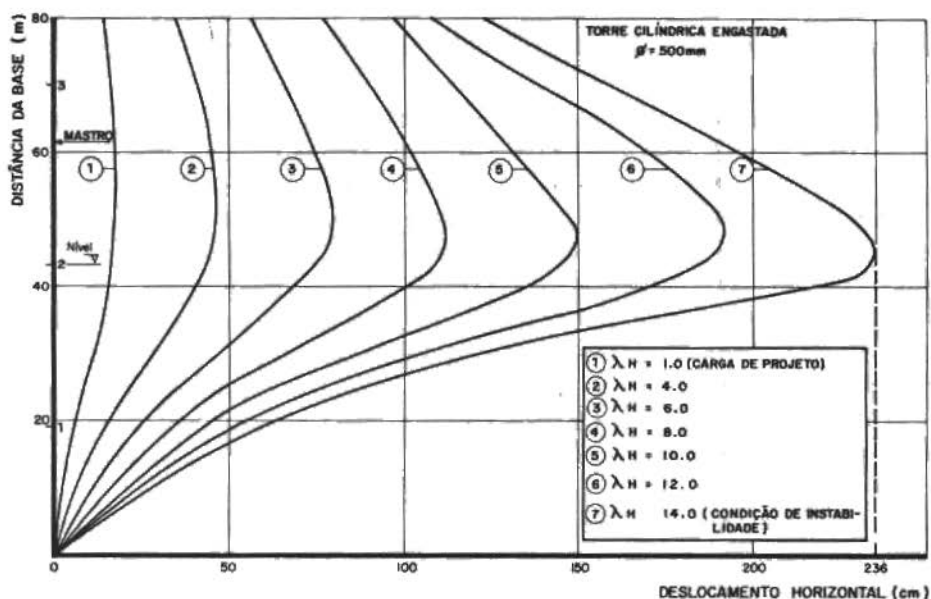


Figura 14. Deslocamento lateral da torre por variação da carga horizontal (λ_H)

CONCLUSÕES

Os dois exemplos de torres analisados mostraram que a carga de instabilidade para uma torre estaiada existe e pode ser determinada pelo método apresentado neste trabalho.

Ainda que a proposição básica deste estudo esteja na determinação da carga crítica para a qual o sistema torna-se instável, o método de solução também propicia uma completa descrição da resposta estática, claramente indicando os aspectos não-lineares do comportamento elástico.

Em torres com alturas até 100m, considerar os cabos como tirantes não induz a erros apreciáveis nos resultados do ponto de vista prático. Mas, à medida que se tem torres com mais de 100m, torna-se necessário considerar os cabos na sua forma real, ou seja, em catenária.

Através dos exemplos numéricos, ficou demonstrado que os deslocamentos crescem rapidamente, à medida que o valor do parâmetro de carga aproxima-se da faixa crítica. Nos problemas clássicos de estabilidade, os elementos da matriz de rigidez são funções somente

das forças axiais, mas para problemas não-lineares os elementos desta matriz dependem também dos deslocamentos, através das constantes de mola provenientes dos cabos.

Um procedimento para tornar a torre mais estável e portanto elevar o seu parâmetro crítico seria aumentar-se a rigidez dos suportes (cabos). Isto pode ser feito por dois caminhos. Uma vez que para grandes deslocamentos tem-se aproximadamente a rigidez do cabo como sendo proporcional a $A_g E_g / L$, através de um acréscimo em A_g , área do cabo, ou um decréscimo em L , comprimento do cabo, consegue-se efeito desejado (aumento na rigidez). Mas, uma diminuição em L , faz com que a componente vertical das reações no cabo aumente, o que é prejudicial. Consequentemente, o melhor caminho para se elevar a rigidez é aumentando-se o número de cabos e, por conseguinte, a sua área. Um ligeiro aumento na carga vertical também se verifica, mas este é inevitável e não compromete o benefício do aumento do número de cabos.

As forças de vento sobre os cabos tem um efeito significativo nos deslocamentos e na estabilidade da torre e, portanto, devem ser levados em consideração.

Conclui-se, finalmente, que o método exposto inicialmente bem como o programa elaborado permitem ao projetista obter, rapidamente, deslocamentos, momentos e cargas críticas para estruturas estaiadas. À medida que crescem o número de níveis de cabos, a necessidade do uso de um computador para se fazer os cálculos fica evidente.

REFERÊNCIAS

- [1] Timoshenko, P.S. and Gere, M.J. - Theory of elastic stability. 2ª ed., Tokyo, 1963.
- [2] Hull, F.H. - Stability analysis of multi-level guyed towers. Journal of the Structural Division, 88 : 80-81 (1962).
- [3] Goldberg, J.E. e Gaunt, J.T. - Stability of guyed towers. Journal of the Structural Division, 99 : 741-756 (1973).
- [4] Williamson, R.A. - Stability study of guyed tower under ice loads. Journal of Structural Division, Proceeding, ASCE, 99 : 2391-2408 (1973).
- [5] Henriques, A.M.D. - Flambagem não-linear de estruturas estaiadas. Tese de Mestrado, PUC/RJ, Maio 1983.

ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE VIGAS UTILIZANDO MODELO COM NÚMERO REDUZIDO DE GRAUS-DE-LIBERDADE

Carlos Alberto de Almeida - Membro da ABCM

Alejandro Andueza

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

RESUMO

Neste trabalho é apresentada a formulação de um elemento tridimensional para a análise linear de vigas com número reduzido de graus-de-liberdade. O elemento possui quatro variáveis de estado por ponto nodal onde três correspondem aos deslocamentos espaciais do nó e a quarta está associada à rotação da seção-reta da viga em torno do seu eixo longitudinal. Rotações da seção reta devidas à flexão da viga são consideradas na formulação do modelo através da hipótese de Kirchhoff-Love para vigas. As condições de contorno do modelo no engastamento e na compatibilidade entre elementos contíguos são garantidas através de um procedimento de penalidade, modificando-se o Potencial Total do elemento. Para demonstrar a eficiência da formulação são apresentadas análises de algumas estruturas simples e os resultados comparados com outras soluções analíticas ou numéricas.

ABSTRACT

The formulation of a general tri-dimensional linear beam element with reduced degrees-of-freedom is presented. The element displays four d.o.f. per node associated to three spatial displacements and to the torsional rotation along the beam axis. Cross section bending rotations are taken into account in the formulation through the Kirchhoff-Love condition for the beam. The conditions of nodal rotation restraint and coupling between elements are guaranteed by a penalty procedure imposed at the common nodal point and by modifying the element Total Potential. The analysis results of some sample problems are compared to other numerical or analytical solutions to demonstrate the effectiveness of the formulation.

INTRODUÇÃO

Componentes estruturais cujo comportamento físico corresponde ao do modelo de vigas são de grande interesse em várias áreas da mecânica estrutural. Assim, é natural que com o desenvolvimento do método de elementos finitos, um grande número de formulações tenham sido propostas para a análise de vigas tridimensionais [1-3]. De forma particular, os elementos de viga que utilizam a formulação isoparamétrica podem ser especialmente atrativos devido à consistência da formulação utilizada, à sua generalidade e, em muitos casos, à sua eficiência computacional [2].

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli para vigas retas é proposto que em pequenas deformações as rotações da seção reta sejam relacionadas às derivadas dos deslocamentos transversais em relação à coordenada longitudinal da viga. Esta condição resulta de que os efeitos das deformações por cisalhamento transversal da seção reta devido à flexão devam ser pequenos em comparação com os efeitos das deformações longitudinais [4,5]. Além disso, dois modos básicos de deformações, axial e de flexão, são considerados através dos graus de liberdade de translação da viga enquanto que o terceiro modo, a deformação por torção, é considerado através da rotação da seção reta da viga em relação ao seu eixo axial. Portanto, em uma análise tridimensional de vigas utilizando o modelo clássico de Euler-Bernoulli, apenas quatro graus-de-liberdade em cada ponto nodal são suficientes para definir a cinemática de deformação do elemento. Esta redução no número de variáveis de estado do modelo representa um ganho substancial no esforço computacional para a resolução das equações de equilíbrio de problemas de grande porte, especialmente quando comparado com o modelo tradicional de vigas com seis graus-de-liberdade associados a cada nó.

Recentemente, uma atenção maior tem sido dedicada ao desenvolvimento de modelos que efetivamente preveem os principais modos de deformação da viga e incluem alguns efeitos correspondentes às deformações locais de empenamento e ovalização da seção reta [3,6 e 7]. Para acomodar tais efeitos é necessário adicionar-se graus-de-liberdade generalizados à formulação do modelo matemático [1-3], representando assim um ônus à eficiência do elemento.

Neste trabalho é proposta a formulação de um elemento isoparamétrico com número variável de nós para a análise tridimensional de vigas planas retas ou curvas circulares. Os mecanismos de defor

mação são definidos pelos quatro graus-de-liberdade espaciais acima descritos e foram desenvolvidos para dois tipos de seção reta: retangular e tubular. A formulação está proposta de forma a ser extendida para incluir efeitos de deformações locais da seção reta bem como análises não lineares do material e dinâmica.

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Na análise estrutural utilizando o método dos elementos finitos baseado nos deslocamentos, consideram-se as equações de equilíbrio individual de cada elemento e posterior solução do sistema de equações independentemente dos tipos de elementos envolvidos. Este processo geral de discretização da estrutura, como na análise de Ritz, propõe que funções de interpolação aproximem os campos de deslocamentos em todo o domínio do elemento. Nesta seção são apresentadas as equações de compatibilidade geométrica e constitutivas que definem o equilíbrio, e as condições de contorno essenciais do elemento.

Cinemática do Modelo

Considerando-se a viga curva de raio R , mostrada na Figura 1, cuja seção reta não se deforma em seu plano ou fora do seu plano tem-se o seguinte campo de deslocamentos admissíveis referido ao sistema global de coordenadas X_i ,

$$u_i(\rho, \theta, z) = \bar{u}_i(\theta) + r(\bar{e}_{r_i} - e_{r_i}) + z(\bar{e}_{z_i} - e_{z_i}), \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

onde,

ρ, θ, z = coordenadas cilíndricas do ponto considerado,

\bar{u}_i = componente i do vetor deslocamento \bar{u} dos pontos sobre a linha média da viga,

$r = \rho - R$ = coordenada radial local na direção e_r ,

$e_{r_i}(\bar{e}_{r_i})$ = componente i do vetor local $e_r(\bar{e}_r)$, na configuração inicial (final),

$e_{z_i}(\bar{e}_{z_i})$ = componente i do vetor local $e_z(\bar{e}_z)$, na configuração inicial (final).

O campo de validade das coordenadas r e z depende do tipo de seção reta do elemento considerado. No caso da seção retangular de dimensões b e c paralelas aos eixos e_r e e_z , respectivamente, o do-

mínio de validade \tilde{e} é definido por

$$-b/2 \leq r \leq b/2 \quad \text{e} \quad -c/2 \leq z \leq c/2 \quad (2)$$

enquanto que no elemento de seção tubular de raio externo a , a equação (1) se aplica a condição

$$\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \leq \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{a} \leq 1 \quad (3)$$

onde δ é a espessura da parede da seção reta.

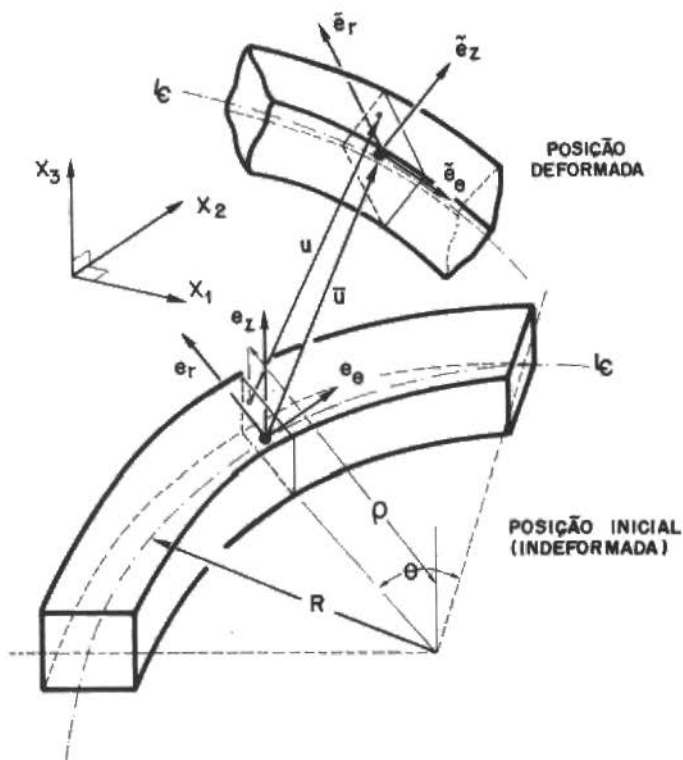


Figura 1. Parâmetros geométricos e cinemática de deformação da viga curva

As diferenças vetoriais na equação (1) representam, em pequenas deformações, o resultado da combinação de rotações segundo dois planos distintos referentes às cinemáticas de flexão e de torção da viga. Portanto, tem-se

$$\bar{\mathbf{e}}_r - \mathbf{e}_r = -\phi_z \mathbf{e}_\theta + \phi_\theta \mathbf{e}_z \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_z - \mathbf{e}_z = \phi_r \mathbf{e}_\theta - \phi_\theta \mathbf{e}_r \quad (5)$$

onde ϕ_z é a primeira rotação de flexão no plano $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, ϕ_θ é a rotação devido a torção da viga e ϕ_r é a segunda rotação de flexão em relação ao plano $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Substituindo-se em (1) os resultados das equações (4) e (5) obtêm-se o vetor deslocamento referido aos graus-de-liberdade do elemento definidos na posição indeformada da viga.

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z \quad (6)$$

com

$$u_r = w_r - z \phi_\theta$$

$$u_\theta = w_\theta - r \phi_z + z \phi_r \quad (7)$$

$$u_z = w_z + r \phi_\theta$$

onde w_r , w_θ e w_z são as componentes do vetor deslocamento global $\bar{\mathbf{u}}$ segundo o sistema coordenado cilíndrico $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.

Deformações Associadas

No cálculo das deformações do elemento considera-se que a seção reta não se deforma, mantendo-se normal ao eixo longitudinal do elemento. Em pequenas deformações, o tensor de Green-St. Venant reduz-se à parte simétrica do gradiente de deslocamentos, na forma

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (8)$$

As componentes do tensor deformação para uma viga com raio de curvatura R e definidas em coordenadas cilíndricas fornecem

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{dw_{\theta}}{\rho d\theta} - \frac{d\phi_z}{\rho d\theta} r + \frac{d\phi_r}{\rho d\theta} z + \left(\frac{1}{\rho}\right) [w_r - \phi_{\theta} z] \quad (9)$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{dw_r}{\rho d\theta} - \frac{d\phi_{\theta}}{\rho d\theta} z - \left(1 - \frac{r}{\rho}\right) \phi_z - \left(\frac{1}{\rho}\right) [w_{\theta} + \phi_r z] \quad (10)$$

$$\gamma_{\theta z} = \phi_r + \frac{dw_z}{\rho d\theta} + \frac{d\phi_{\theta}}{\rho d\theta} r \quad (11)$$

onde $\epsilon_{\theta\theta}$ é a deformação longitudinal e $\gamma_{\theta r}$ e $\gamma_{\theta z}$ são as distorções angulares. Utilizando a hipótese de Kirchhoff-Love [8] obtêm-se as seguintes expressões para as rotações da seção reta da viga devido a flexão

$$\phi_r = - \frac{dw_z}{R d\theta} \quad (12)$$

$$\phi_z = \frac{dw_r}{R d\theta} - \frac{w_{\theta}}{R} \quad (13)$$

Substituindo-se este resultado nas expressões acima, as componentes do campo de deformação relacionam-se com o campo de deslocamentos na linha média da viga e com a rotação longitudinal ϕ_{θ} [9], na forma

$$\epsilon_{\theta\theta} = \left(\frac{R}{\rho}\right) \left[\frac{dw_{\theta}}{R d\theta} - \frac{d^2 w_r}{R^2 d\theta^2} r - \frac{d^2 w_z}{R^2 d\theta^2} z \right] + \left(\frac{1}{\rho}\right) \left[\frac{dw_{\theta}}{R d\theta} r + w_r - \phi_{\theta} z \right] \quad (14)$$

$$\gamma_{\theta r} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{dw_z}{R d\theta} z - \left(\frac{R}{\rho}\right) \frac{d\phi_{\theta}}{R d\theta} z \quad (15)$$

$$\gamma_{\theta z} = - \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{dw_z}{R d\theta} r + \left(\frac{R}{\rho}\right) \frac{d\phi_{\theta}}{R d\theta} r \quad (16)$$

O campo de deformações associado à viga reta de coordenada longitudinal local - x , é obtido por redução geométrica considerando-se

$$\frac{1}{\rho} \rightarrow 0, \quad \frac{R}{\rho} \rightarrow 1, \quad R d\theta \rightarrow dx \quad \text{e} \quad R^2 d\theta^2 \rightarrow dx^2 \quad (17)$$

nas equações (14-16).

Para a implementação destes resultados no modelo de elementos finitos, descrevem-se os deslocamentos da viga em função dos graus-de-liberdade associados a q pontos nodais,

$$\tau^T = [\sigma_{\theta\theta} \quad \tau_{\theta r} \quad \tau_{\theta z}] \quad , \quad \epsilon^T = [\epsilon_{\theta\theta} \quad \gamma_{\theta r} \quad \gamma_{\theta z}] \quad , \quad e$$

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ & G & 0 \\ \text{Sim.} & & G \end{bmatrix}$$
(23)

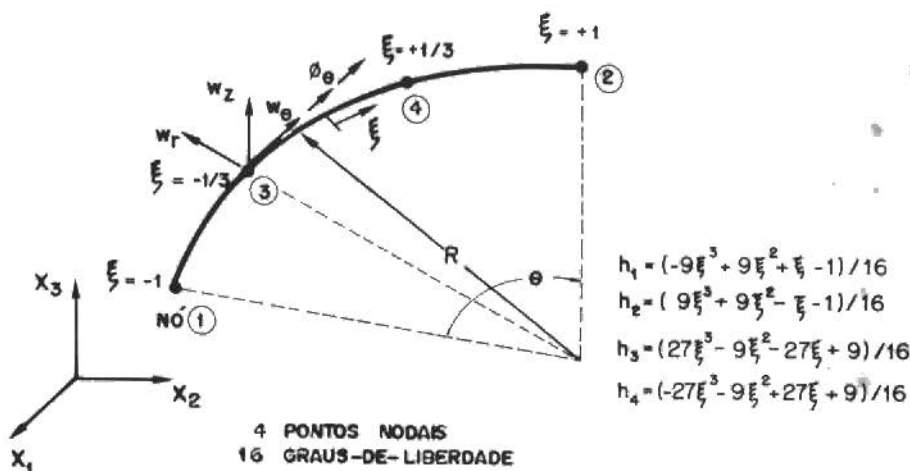


Figura 2. Graus-de-liberdade sistemas coordenados associado ao elemento de viga curva

IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

No método de elementos finitos, o sistema de equações que governa o equilíbrio é obtido impondo-se a estacionaridade do funcional de energia potencial total da estrutura, com as condições de contorno naturais automaticamente incluídas na formulação enquanto que as condições essenciais de compatibilidade geométrica são impostas aos graus-de-liberdade [4,10]. Em um elemento típico de viga são condições de contorno essenciais básicas, aplicáveis aos nós extremos (1) e (4) as de continuidade entre elementos e as de engastamento do elemento. Em ambos os casos é necessário impor-se a igualdade de deslocamentos, automaticamente garantida pelos graus-de-liberdade dos nós comuns aos elementos, e uma condição de igualdade ou nulidade de rotação da seção reta. Devido ao acoplamento dos graus-de-liberdade de rotação com os de translação do elemento, utiliza-

-se um procedimento de penalidade para a imposição destas restrições.

Aplicação do Método de Penalidade

O método de penalidade de funções, extensivamente utilizado em programação matemática, é uma técnica numérica largamente empregada na solução de problemas de vinculação envolvendo equações entre as variáveis de estado do problema [6,11 e 12]. No caso particular do modelo de vigas o método consiste em adicionar-se ao Indicador Variacional do problema estrutural

$$\pi = U - W \quad , \quad (24)$$

onde U é a energia de deformação do elemento e W é o trabalho das forças externas, um funcional representativo de uma restrição do tipo

$$\text{VINCULAÇÃO} = 0. \quad (25)$$

e formar um novo Indicador Variacional do problema

$$\pi^* = \pi + \frac{\alpha}{2} \int_A (\text{VINCULAÇÃO})^2 dA \quad (26)$$

onde α é um parâmetro de penalidade. A solução obtida utilizando-se a equação (26), com $\delta\pi^* = 0$ satisfaz a condição da equação (25) com uma maior precisão na medida em que o valor de α é majorado.

Fisicamente, o parâmetro α representa na análise do elemento de viga a constante elástica de uma mola rotacional aplicada à seção comum entre dois elementos contíguos ou a um suporte de engastamento [12]. A seguir consideram-se estas duas possíveis condições de vinculação entre elementos.

Condição de Engastamento

Quando um elemento está fixo a um suporte rígido as condições de contorno são de que na seção do engastamento (n^o 1) não deve haver deslocamentos transversais e que as rotações da seção reta em relação aos eixos locais e_r e e_z devam anular-se, Figura 3a. Portanto, considerando-se o n^o 1 de vinculação,

$$u_i^1 = 0. \quad (i = 1,2,3) \quad (27)$$

$$\phi_r^{\xi} \Big|_{\xi=\pm 1} = 0. \quad \text{e} \quad \phi_z^{\xi} \Big|_{\xi=\pm 1} = 0. \quad (28)$$

A restrição na equação (27) indica que os deslocamentos nodais em k devam ser nulos e esta condição é imposta diretamente nas equações de equilíbrio. As condições de nulidade das rotações às equações (28) não podem ser impostas diretamente aos graus-de-liberdade do elemento. A incorporação destas condições ao funcional do elemento é feita utilizando-se o método de penalidade através das equações

$$\text{VINCULAÇÃO}_r = \left[\phi_r^{\xi} \Big|_{\xi=\pm 1} - 0. \right] \quad (29)$$

$$\text{VINCULAÇÃO}_z = \left[\phi_z^{\xi} \Big|_{\xi=\pm 1} - 0. \right]$$

onde ϕ_r^{ξ} e ϕ_z^{ξ} são definidos às equações (12) e (13), respectivamente. Portanto, as restrições as rotações podem ser escritas na forma matricial seguinte,

$$\phi_r^{\xi} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}} \Big|_{\xi=\pm 1} = 0 \quad (30)$$

$$\phi_z^{\xi} = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{u}} \Big|_{\xi=\pm 1} = 0$$

com as matrizes

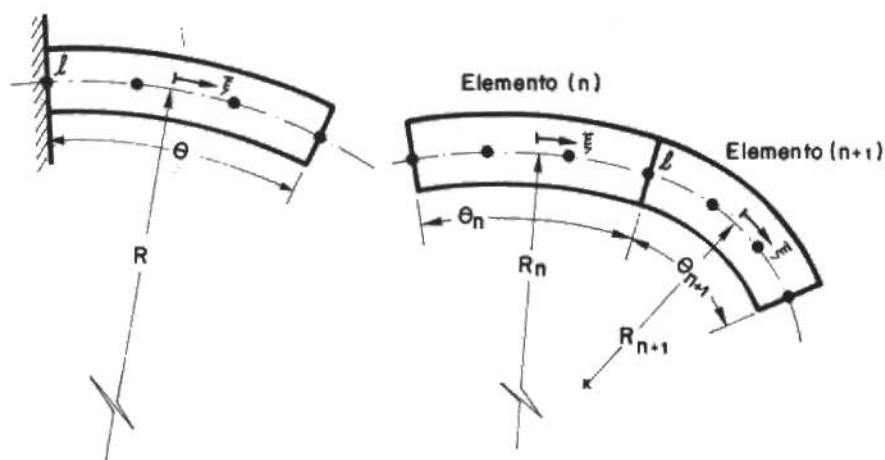
$$\mathbf{P} = \left[\dots 0 \quad 0 \quad -\left(\frac{d\xi}{Rd\theta}\right)h_{k,r} \quad 0 \dots \right], \quad k=1, \dots, q \quad (31)$$

$$\mathbf{Q} = \left[\dots \left(\frac{d\xi}{Rd\theta}\right)h_{k,r} - \frac{h_k}{R} \quad 0 \quad 0 \dots \right], \quad k=1, \dots, q \quad (32)$$

associadas aos graus-de-liberdade do elemento listados no vetor $\hat{\mathbf{u}}$, definido à equação (21).

Substituindo-se os resultados acima na equação (29) e impondo-se a condição de estacionaridade de π^* , definido em (26), resulta na matriz de penalidade a ser adicionada diretamente à matriz de rigidez do elemento [6,12]. Para a condição de engastamento à equação (28) obtêm-se,

$$\mathbf{K}_p^E(\alpha) = \alpha(\mathbf{P}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \quad (33)$$



(a) Condição de engastamento no \bar{n} (l) (b) Condição de continuidade no \bar{n} (l)

Figura 3. Condições de vinculação utilizadas no modelo de vigas

Condição de Continuidade

No ponto nodal comum l a dois elementos contíguos, Figura 3b, os campos de deslocamentos são contínuos porque os mesmos graus-de-liberdade de translação estão associados a ambos os elementos. Entretanto, é necessário impor-se as condições de continuidade das rotações transversais entre dois elementos consecutivos (n) e ($n+1$). Estas condições a serem impostas são expressas na forma,

$$\text{VINCULAÇÃO}_r = \phi_r^l \Big|_{\xi=+1}^{(n)} - \phi_r^l \Big|_{\xi=-1}^{(n+1)} \quad \text{e} \quad (34)$$

$$\text{VINCULAÇÃO}_z = \phi_z^l \Big|_{\xi=+1}^{(n)} - \phi_z^l \Big|_{\xi=-1}^{(n+1)} \quad . \quad (35)$$

Utilizando-se a definição e discretização apresentadas às equações (30) os resultados acima reduzem-se à seguinte forma matricial relacionada aos graus-de-liberdade dos elementos,

$$\text{VINCULAÇÃO}_r = \mathbf{P}^{(n)} \bar{\mathbf{u}}^{(n)} \Big|_{\xi=+1} - \mathbf{P}^{(n+1)} \bar{\mathbf{u}}^{(n+1)} \Big|_{\xi=-1} \quad (36)$$

$$\text{VINCULAÇÃO}_z = \mathbf{Q}^{(n)} \bar{\mathbf{u}}^{(n)} \Big|_{\xi=+1} - \mathbf{Q}^{(n+1)} \bar{\mathbf{u}}^{(n+1)} \Big|_{\xi=-1} \quad (37)$$

onde P e Q são as matrizes definidas as equações (31,32), associadas a cada elemento. Procedendo-se com as equações (36), (37) e (26), de forma similar à condição de engastamento obtém-se a matriz de penalidade associada para impor-se a formulação variacional do problema as condições de contorno às equações (34) e (35),

$$K_P^C(\alpha) = \alpha \left[\left(P^{(n)} - P^{(n+1)} \right)^T \left(P^{(n)} - P^{(n+1)} \right) \left(Q^{(n)} - Q^{(n+1)} \right)^T \left(Q^{(n)} - Q^{(n+1)} \right) \right] \quad (38)$$

A convergência da solução para as condições de vinculação estabelecidas através do método de penalidade depende da magnitude do parâmetro α . Testes numéricos com problemas distintos de compatibilização em estruturas [6, 12 e 13] mostram que o uso do parâmetro de penalidade da mesma ordem de magnitude dos maiores elementos da matriz de rigidez da estrutura fornece soluções que satisfazem as condições de vinculação a uma precisão da ordem de dois dígitos significativos. As análises apresentadas a seguir ilustram o uso de valores apropriados do parâmetro de penalidade.

ANÁLISES E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

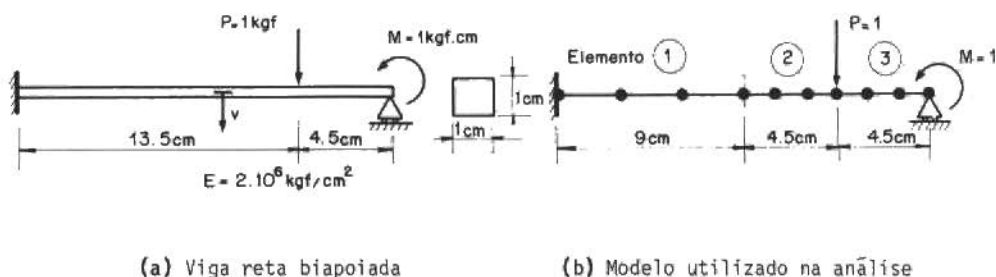
A formulação do elemento foi implementada em um programa de computador. As análises apresentadas a seguir indicam a eficiência e a aplicabilidade do elemento na solução de problemas envolvendo modelos de vigas.

Viga Reta Hiperestática Sujeita a Cargas Concentradas

A viga reta mostrada na Figura 4a é analisada utilizando-se o modelo da Figura 4b. O objetivo é verificar a resposta do elemento quando incorporadas na formulação as condições de contorno do engastamento e da continuidade das rotações devido à flexão. Neste caso é necessário que o ponto B de aplicação da carga seja comum a dois elementos contíguos porque só é possível impor-se o carregamento no contorno do elemento. Também, para uma melhor convergência do método de penalidade os elementos contíguos nestes pontos foram considerados com o mesmo comprimento [6,14].

Os deslocamentos transversais nos pontos nodais do modelo são comparados com a solução analítica do modelo de Bernouille e com a obtida utilizando-se um programa geral de elementos finitos [15]. Para valores crescentes do parâmetro α observa-se uma rápida convergência para a solução analítica. A igualdade entre os resultados

analíticos e numéricos se verifica porque os dois modelos utilizam as mesmas hipóteses. Por outro lado, as diferenças com as soluções do programa ADINA devem-se à presença das deformações por cisalhamento no elemento 3 que não satisfaz a condição de esbelteza necessária a poder-se desprezar tais efeitos.



(a) Viga reta biapoada

(b) Modelo utilizado na análise

Figura 4. Viga hiperestática sujeita a cargas concentradas

Tabela 1. Soluções fornecidas por diferentes modelos na análise de viga reta hiperestática sujeita a cargas concentradas

Nº	$(\times 10^{-3} \text{cm})$ V _{ANAL.} (ANALÍTICO) [14]	$(\times 10^{-3} \text{cm})$ V _{ADN} (ADINA)	v _{PGM} ($\times 10^{-3} \text{cm}$)				
			$\beta=100$	(%)	$\beta=1000$	(%)	$\beta=10000$
2	0.05829	0.05986	0.06183	(6.07)	0.05864	(0.60)	0.05829
3	0.1845	0.1873	0.1910	(3.52)	0.1851	(0.33)	0.1845
4	0.3057	0.3095	0.3145	(2.88)	0.3065	(0.26)	0.3057
5	0.3415	0.3457	0.3504	(2.61)	0.3424	(0.26)	0.3415
6	0.3488	0.3533	0.3575	(2.49)	0.3496	(0.23)	0.3488
7	0.3182	0.3232	0.3268	(2.70)	0.3191	(0.28)	0.3182
8	0.2442	0.2475	0.2499	(2.33)	0.2448	(0.25)	0.2442
9	0.1344	0.1361	0.1373	(2.16)	0.1347	(0.22)	0.1344

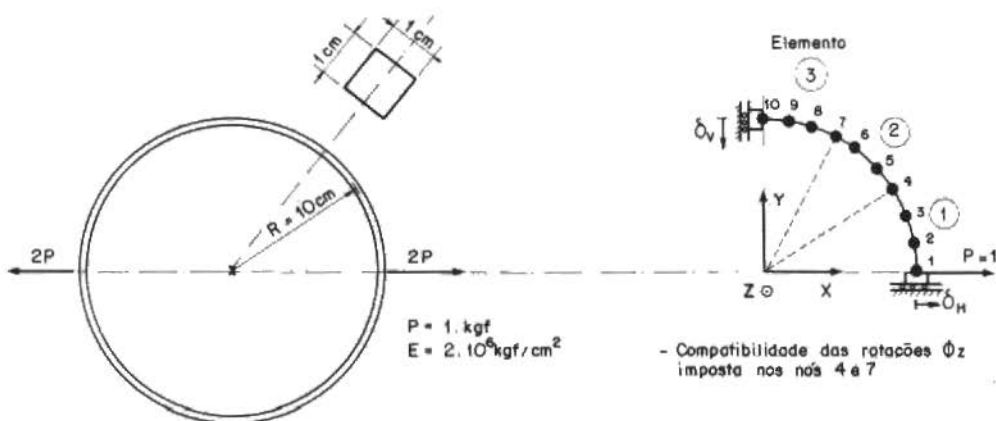
$$B = \frac{\alpha}{D} ; D = \text{Maior elemento da matriz de rigidez da estrutura.}$$

B = Fator de amplificação do parâmetro α .

Anel Circular Tracionado Biaxialmente

Para verificar-se o comportamento do modelo em análises de vigas curvas foi considerado o problema do anel circular tracionado diametralmente na Figura 5a. A solução analítica é apresentada na literatura como solução clássica de vigas curvas em que as deformações por cisalhamento não são consideradas e os campos de tensões e deformações tomados uniaxiais ao longo da viga e linearmente distribuídos na seção reta [16].

Devido a simetria do problema foi considerado na análise numérica o modelo com três elementos mostrados na Figura 5b. As condições de contorno nos nós 1 e 10 são de nulidade da rotação deixando-se livres apenas os deslocamentos nas direções X e Y, respectivamente.



(a) Anel considerado na análise

(b) Modelo utilizado

Figura 5. Anel circular tracionado diametralmente

As diferenças apresentadas à Tabela 2 na comparação entre as soluções do problema devem-se às características de cada modelo. No caso do presente modelo a distribuição das tensões e deformações é obtida considerando-se a mudança de curvatura nos pontos da seção reta enquanto que no modelo analítico a distribuição é linear. Por outro lado, o modelo de viga utilizado com o Programa ADINA apresenta uma solução mais geral incluindo na formulação os efeitos das defor

mações transversais por cisalhamento. No entanto, devido a pequena razão de aspecto geométrico t/R do problema, é pequena a diferença entre as soluções apresentadas pelos modelos. A distribuição das tensões longitudinais ao longo da viga curva apresenta boa concordância para os modelos numéricos, em análise à Ref. [14].

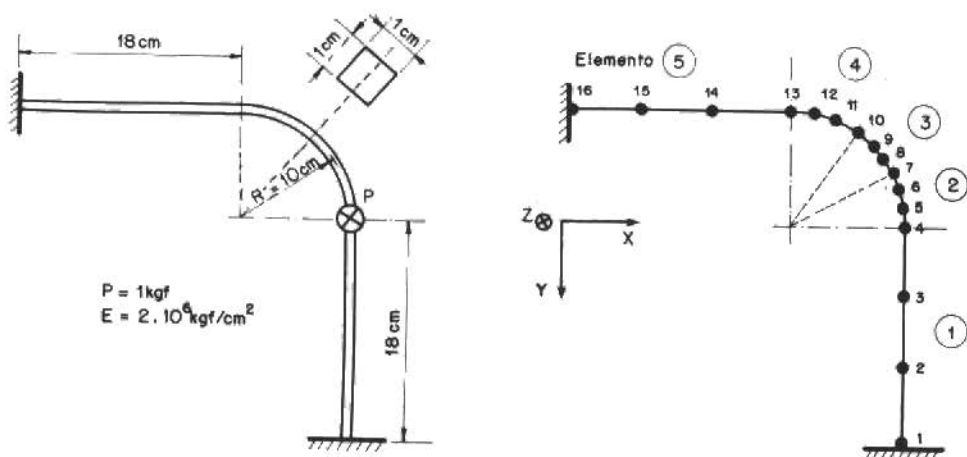
Tabela 2. Soluções na análise de um anel diametralmente carregada ($\beta = 1000$.)

DESLOCAMENTO ($\times 10^{-3}$ cm)	ANALÍTICO	ADINA	PROGRAMA	
	vANL	vADN	vPGM	(%)
$\delta_H^{(1)}$.894	.896	.895	(.06)
$\delta_V^{(10)}$	-.822	-.817	-.817	(.67)

Estrutura Sujeita a Força Concentrada Fora do seu Plano

O problema físico considerado e sua caracterização geométrica está apresentado à Figura 6a. O objetivo desta análise é verificar o comportamento do modelo de vigas na compatibilização de elementos curvos e retos contíguos quando sujeitos a cargas externas normais ao plano da estrutura. Um modelo com dois elementos retos e três curvos é utilizado na análise à Figura 6b. Condições de rotação e deslocamento nulos são impostas nos nós 1 e 16 enquanto que a condição de compatibilidade de rotação da seção reta é imposta nos nós 4, 7, 10 e 13.

Rotações devido à torção e deslocamentos da estrutura fora do seu plano são comparados à Tabela 3. Uma boa concordância com os resultados numéricos fornecidos pelo programa ADINA, utilizando modelo semelhante, é observada. As diferenças apresentadas nas soluções de rotação à torção são devidas principalmente aos efeitos do empenamento da seção reta incorporados no programa ADINA. Neste exemplo ressalta-se ainda a incompatibilidade de deformações longitudinais utilizadas pela formulação nos modelos de vigas retas e curvas na região próxima aos nós 4 e 13 do modelo considerado na análise.



(a) Definição do problema físico

(b) Modelo utilizado

Figura 6. Estrutura plana carregada fora do plano

Tabela 3. Comparação dos resultados da análise de um elo carregado axialmente ($\beta = 1000$.)

NÓ	U_z ($\times 10^{-3}$ cm)			ϕ_T ($\times 10^{-3}$ cm)		
	ADN U_z ADINA	PGM U_z PROGRAMA	ERRO (%)	ADN ϕ_T ADINA	PGM ϕ_T PROGRAMA	ERRO (%)
2	17.62	17.51	(-0.62)	1.740	1.739	(-0.06)
3	57.59	57.37	(-0.38)	3.481	3.478	(-0.09)
4	100.11	100.60	(-0.33)	5.221	5.217	(-0.08)
7	120.11	119.82	(-0.24)	7.934	7.931	(-0.04)
10	109.75	109.51	(-0.22)	6.556	6.557	(0.22)
13	78.47	78.30	(-0.22)	2.629	2.632	(0.11)
14	39.53	39.42	(-0.28)	1.752	1.755	(0.17)
15	11.06	11.01	(-0.45)	0.8762	0.8773	(0.13)

CONCLUSÕES

A formulação de um elemento de viga com número variável de pontos nodais e quatro graus-de-liberdade ativos por nó é apresentada. O elemento foi implementado em computador e os resultados de algumas análises representativas do comportamento do modelo são discutidos. Como o elemento foi formulado considerando-se basicamente o modelo de Bernouille estendido a vigas curvas eliminando-se o efeito das deformações transversais por cisalhamento, este não é capaz de modelar o comportamento de vigas com razão de aspecto geométrico t/R elevado. Entretanto, o elemento prediz os deslocamentos e tensões apropriadas em uma grande faixa de aplicações práticas de engenharia, e para uma mesma precisão, o uso do elemento fornece soluções com menor esforço computacional que os modelos correntes com seis graus-de-liberdade por ponto nodal.

Dos resultados apresentados nas análises propostas a formulação do elemento demonstrou grande potencial para sua generalidade à análise de problemas envolvendo não linearidades do material e efeitos dinâmicos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC/RJ e ao CNPq o apoio recebido durante o programa de mestrado de Alejandro Andueza.

REFERÊNCIAS

- [1] Bathe, K.J. and Bolourchi, S. — Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14 : 961-986, 1979.
- [2] Irons, B. M. and Zienkiewicz, O.C. — The isoparametric finite element system - A new concept in finite element analysis. Proceedings, Conference on Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, 1968.
- [3] Bathe, K.J. and Almeida, C.A. — A simple and effective pipe elbow element - Linear analysis. Journal of Applied Mechanics, 47 (1) : 93-100, 1980.
- [4] Bathe, K.J. — Finite elements procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, Inc., 1981.
- [5] Timoshenko, S. and Goodier, J.N. — Theory of elasticity. McGraw-Hill Book Co., 3ª ed., p.46, 49 e 121, 1970.

- [6] Bathe, K.J. and Almeida, C.A. - A simple and effective pipe elbow element - Interaction effects. Journal of Applied Mechanics, 104, 165-171, 1982.
- [7] Meek, J.L. and Ho, P.T.S. - A simple finite element model for the warping torsion problem. Comp. Meth. in Appl. Mech. for Eng., 37, 25-36, 1983.
- [8] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. - Theory of elasticity. Pergamon Press, 1970.
- [9] Washizu, K. - Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 2ª ed., 1975.
- [10] Zienkiewicz, O.C. - The finite element method. McGraw-Hill Book Co., 3ª ed., 1977.
- [11] Zienkiewicz, O.C. and Heinrich, J.C. - An unified treatment of steady-state shallow water and two-dimensional navier-stokes equations - Finite element penalty approach. FENOMECH - Proceedings Int. Conf. on Finite Element in Appl. Mech., Stuttgart, German, pp.678-698, Aug.30 - Sept.1, 1978.
- [12] Almeida, C.A. - Enforcement of bending continuity and bending constraint through the penalty function method. VIII COBEM, São José dos Campos, SP, Dezembro 1985. Aceito para publicação.
- [13] Almeida, C.A. e Salles, A.C.S.L. - Analysis of pipe mitred bends through a modified beam model - F.E. approach. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, VII (1): 53-70, 1985.
- [14] Andueza, A. - Desenvolvimento de um elemento de viga tridimensional com número reduzido de grau-de-liberdade. Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1984.
- [15] ADINA - A finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis - Report AE-81-1, ADINA Eng., Setembro 1981.
- [16] Timoshenko, S. - Strength of materials. Part 1, R.E. Krieger Publ. Co., 1955.

A NUMERICAL STUDY OF NATURAL CONVECTION IN HORIZONTAL ELLIPTIC CYLINDERS

F.L. Bello-Ochende

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering and Technology

University of Ilorin

Ilorin - Nigéria

ABSTRACT

This paper presents a steady-state numerical study for laminar free convection in horizontal elliptic cylinders. A numerical method of discretization is proposed which allows mesh points to fall on the cylinder boundary so that the problem of irregular boundary is avoided. To achieve this, a recurrence relation is constructed to generate successively decreasing grid sizes between any two neighbouring nodal points in a preferred coordinate direction. This ensures better accuracy in computational regions where solution gradients are especially high. For non-uniform heat flux applications at the cylinder periphery, graphical results for heat transfer and flow regimes are presented for some values of eccentricity and a range of Rayleigh numbers.

NOMENCLATURE

- a - semi-major axis of the ellipse
- b - semi-minor axis of the ellipse
- A, B - dimensional constants expressed in terms of temperature
- C - characteristic reference velocity, $[\rho g(T_1 - T_0)b]^{1/2}$; $\Delta T = (T_1 - T_0)$
- e - eccentricity of the ellipse
- g - local acceleration due to gravity

- Gr_b - Grashof number, $g \beta \Delta T b^3 / \nu^2$
 $h(\phi)$ - local circumferential heat transfer coefficient
 k - thermal conductivity of the fluid
 N - number of divisions in the X- and Y-directions
 $Nu(\phi)$ - local peripheral Nusselt numbers
 \overline{Nu} - average Nusselt number
 Pr - Prandtl number, ν/α
 Ra - Rayleigh number, $Gr_b Pr$
 T - dimensional fluid temperature
 T - dimensional temperature at the top end of the semi-minor axis
 T - dimensional temperature at the bottom end of the semi-minor axis
 U, u - respective dimensional and non-dimensional velocities in X-direction
 V, v - respective dimensional and non-dimensional velocities in Y-direction
 X, Y - dimensional Cartesian coordinates

Greek symbols

- α - thermal diffusivity of fluid
 β - bulk modulus of fluid expansion
 Γ - dummy space variable
 θ - non-dimensional temperature
 Ω - dimensionless vorticity
 Ψ - dimensionless stream function
 ϕ - angular location of any point on the ellipse
 η, ξ - dimensionless Cartesian coordinates
 ν - kinematic viscosity of fluid
 λ - angle between inward normal and the horizontal
 ∇ - non-dimensional Laplacian operator, $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$
 ϵ - eccentricity parameter, $(1-e^2)^{1/2}$, and parameter for iteration convergence

Subscripts

- i, j - a typical nodal point in the discretized domain
- m - mean value
- w - wall value

INTRODUCTION

Studies in natural convection within enclosures have received considerable attention particularly for domains with regular geometries [1,2,3]. This work investigates natural convection phenomenon in horizontal elliptic enclosures subject to non-uniform heat flux applied at the cylinder periphery.

Numerical techniques are frequently employed to solve the non-linear coupled system of governing equations. However, for domains with curved boundaries, numerical algorithms based on uniform grid spacing introduce some complications into the finite-difference approximations for the derivatives of dependent space variables near these boundaries. For example, Carnahan et al [4] subdivided regions near the curved boundary into four subregions in order to tackle effectively the torsion problem for shafts with elliptic cross-sections. A widely used technique to handle curved geometries is to solve the conservation equations in a coordinate system that matches the domain boundary. These coordinates, defined as natural coordinates, may be either orthogonal or nonorthogonal. The disadvantage of the nonorthogonal system of coordinates is that the resulting finite-difference analogues of the governing equations involve nine discrete points (for a 2-D flow problem) as opposed to five points in orthogonal system of coordinates [5]. Also, the governing equations must be transformed from the orthogonal to nonorthogonal coordinates using appropriate and possibly complex transformation relations. This makes the choice of natural coordinates which match the domain boundary geometry sometimes unattractive. This is the case of the present work, which utilizes rectangular Cartesian coordinate system.

Grid refinement is an important feature of numerical techniques, especially in portions of the computational region where solution gradients are very high. This is to achieve better accuracy and convergence for the numerical solution.

Refinement is achieved in some cases by first transforming the appropriate coordinate before subdividing it uniformly. In the present work, the approach is different as a combination of regular mesh sizes in one coordinate direction and irregular discretization in the other coordinate direction is employed. The benefit derivable from this technique is automatic grid size refinement near the high curvature portions of the rigid boundary. Also, the method allows grid points to fall on the curved boundary, thus side-tracking awkward approximations associated with regular discretization near the curved periphery. To this end, a recursive relation is constructed to generate successively decreasing mesh sizes along a preferred coordinate. For this work, for a few number of divisions, say $N=10$, the horizontal grid sizes are found to vary from 0.400 at the central core of the ellipse to 0.002 in the vicinity of the curved boundary. This technique has been employed successfully by Roache [6]. A 20×20 grid network is used in the present analysis and predicted results are reported for bottom-heated elliptic cylinders.

MATHEMATICAL MODEL

Consider a steady laminar two-dimensional free convection due to density gradients resulting from variations in temperature within a long horizontal elliptic cylinder whose curved boundary is arbitrarily-heated such that the maximum and minimum temperatures occur at the points 1 and 0 as shown in Figure 1. Because of the geometric, flow and thermal symmetry about the vertical axis, only the right-hand half of the domain will be considered henceforth.

The physical model and coordinate system are shown in Figure 1. For the problem, the following additional simplifying assumptions are made. The flow is presumed incompressible and for low-velocity flows, viscous dissipation and pressure stress work are neglected. The fluid is Newtonian and fluid properties are considered temperature-independent except density for which the Boussinesq approximation is invoked. Referred to the rectangular Cartesian coordinate system, the governing conservation equations of continuity, momentum and energy, are respectively:

$$U_x + V_y = 0 \quad (1)$$

$$UU_X + VU_Y = -\frac{1}{\rho_m} P_X + \nu(U_{XX} + U_{YY}) \quad (2)$$

$$UV_X + VV_Y = -\frac{1}{\rho_m} P_Y + \nu(V_{XX} + V_{YY}) + \beta g(T - T_0) \quad (3)$$

$$UT_X + VT_Y = \alpha(T_{XX} + T_{YY}) \quad (4)$$

where the subscripts, except 0 and m, indicate the space coordinate with respect to which the partial derivatives are obtained. The prescribed constraints on the domain boundary are:

$$U = V = T_X = 0 \quad \text{on } \delta C_2 \quad (5)$$

$$U = V = T - T_w(\phi) = 0 \quad \text{on } \delta C_1 \quad (6)$$

where,

$$T_w(\phi) = A + B \sin(\phi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2} \quad (7a)$$

and

$$A = (T_0 + T_1) / 2 \quad ; \quad B = (T_0 - T_1) / 2 \quad (7b)$$

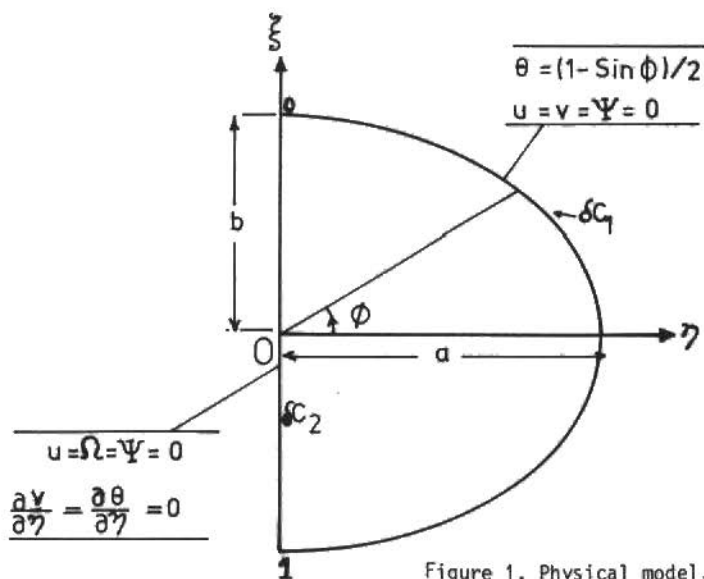


Figure 1. Physical model, normalized coordinates and boundary constraints

Reduction of the Governing Equations

It should be noted that the system of governing equations are non-linear, non-homogeneous and coupled through the temperature term. Understandably then, the equations are not amenable to closed-form solution. Consequently, we resort to an approximate method of solution; namely, the finite-difference approximation.

However, a question of primary importance is the definition of the appropriate or characteristic reference velocity which must be known a priori. It is clear that for this problem, a unique characteristic velocity must be determined from the differential equations. Since the velocity components U and V are due to the buoyancy force in the fluid, a parameter related to the temperature distribution in the fluid must be introduced into the normalizing scheme as suggested by Ostrach [7] in his analysis of a pure free convection problem. Hence the appropriate scaling quantity for velocity may be obtained with heuristic reasoning. From considerations of force balance in the momentum equation, it is obvious that since the convection process is initiated by the impressed thermal gradient, the inertia and buoyancy forces are of the same order of magnitude. These forces may therefore be equated following Tritton [8] and Faris and Viskanta [9] to obtain the characteristic reference velocity, C as $[8g(T_1 - T_0)b]^{1/2}$. Comparing the orders of magnitude of the inertia and viscous forces yields $Gr_b^{1/2}$. This is the case of high Grashof numbers. Following Rego and Fernandez [10], $Gr_b^{1/2}$ is introduced as a scaling factor into some of the normalizing coordinates. After eliminating the pressure terms between the momentum equations (2) and (3) by cross partial differentiation, the resulting dimensionless vorticity and energy transport equations cast in their divergence forms are respectively:

$$(\Omega_\eta - u\Omega + Gr_b\theta)_\eta + (\Omega_\xi - v\Omega)_\xi = 0 \quad (8a)$$

$$(\theta_\eta - u\theta Pr)_\eta + (\theta_\xi - v\theta Pr)_\xi = 0 \quad (8b)$$

The vorticity function, Ω is linked with the stream function, Ψ through the Poisson equation,

$$\Omega + \Psi_{\eta\eta} + \Psi_{\xi\xi} = 0 \quad (9)$$

where the stream function, Ψ is defined by the relations:

$$u = \Psi_{\xi} \quad ; \quad v = -\Psi_{\eta} \quad (10)$$

and the normalizing coordinates are:

$$\eta = \frac{X}{b} \quad ; \quad \xi = \frac{Y}{b} \quad ; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (11a)$$

$$u = \frac{UGr_b^{1/2}}{C} \quad ; \quad v = \frac{VGr_b^{1/2}}{C} \quad ; \quad p = \frac{PGr_b}{\rho_m C^2} \quad (11b)$$

The normalized boundary constraints are shown in Figure 1.

NUMERICAL ALGORITHM

The unique method of discretization employed allows mesh points to fall on the cylinder periphery so that the problem associated with near-boundary grid points does not arise. Also, in order to achieve grid refinement, a recurrence relation is constructed to generate successively decreasing grid sizes between any two neighbouring nodes in η -direction, as illustrated in Figure 2b. If the equation of the ellipse is given by:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad (12)$$

and the eccentricity, e is defined as:

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2 \quad , \quad (13)$$

then the normalized equation of the ellipse is:

$$(1 - e^2)\eta^2 + \xi^2 = 1 \quad (14)$$

If $\eta_{i,j}$ and $\eta_{i+1,j}$ are the non-dimensional distances of any two adjacent nodes from the origin, 0, and $\Delta\xi$ is the uniform grid size in the ξ -direction, then the equation of the ellipse may be written as:

$$(1 - e^2)\eta_{i,j}^2 + (j\Delta\xi)^2 = 1 \quad (15)$$

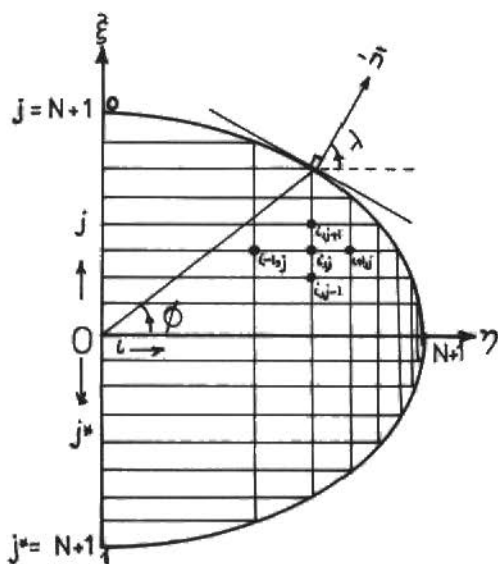


Figure 2a. Discretized domain

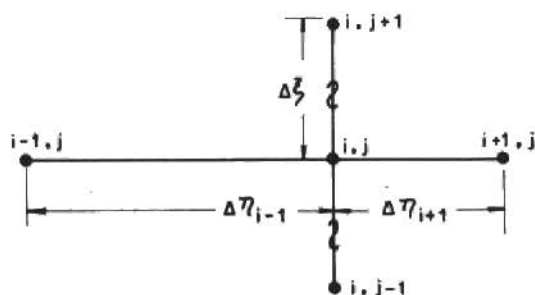


Figure 2b. Typical five point computational molecule

Hence,

$$\eta_{i,j} = \left\{ \frac{1 - (j\Delta\xi)^2}{1 - e^2} \right\}^{1/2} \quad (16a)$$

Similarly,

$$\eta_{i+1,j} = \left\{ \frac{1 - (j-1)^2(\Delta\xi)^2}{1 - e^2} \right\}^{1/2} \quad (16b)$$

Also if $\Delta\eta_{i+1}$ is defined as $(\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j})$, then,

$$\Delta\xi_{i+1} = \frac{[1 - (j-1)^2(\Delta\xi)^2]^{1/2} - [1 - (j\Delta\xi)^2]^{1/2}}{[1 - e^2]^{1/2}} \quad (16c)$$

Substituting for $\Delta\xi = 1/N$ and for $j = N+1-i$ for any point on the ellipse, the final recursive relation for grid refinement is:

$$\Delta\eta_{i+1} = \frac{\left[1 - \frac{(N-i)^2}{N^2}\right]^{1/2} - \left[1 - \frac{(N+1-i)^2}{N^2}\right]^{1/2}}{[1 - e^2]^{1/2}} \quad (17)$$

where $i = 1, 2, 3, \dots, N$ and $\Delta\eta_1$ is zero.

Finite-difference Analogues of Normalized Equations

If $\Gamma = \Gamma(\eta, \xi)$ is a dummy space variable, then the second-order accurate Taylor series approximations for the partial derivatives, Γ_η , $\Gamma_{\eta\eta}$, $\Gamma_{\xi\xi}$ and Γ_ξ at the point (i, j) are given by:

$$\Gamma_\eta \Big|_{i,j} \cong \frac{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i}{(\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i)} \cdot \left\{ \frac{(\Gamma_{i+1,j} - \Gamma_{i,j})}{(\Delta\eta_{i+1})^2} - \frac{(\Gamma_{i-1,j} - \Gamma_{i,j})}{(\Delta\eta_i)^2} \right\} \quad (18)$$

$$\Gamma_{\eta\eta} \Big|_{i,j} \cong \frac{2}{(\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i)} \cdot \left\{ \frac{(\Gamma_{i+1,j} - \Gamma_{i,j})}{\Delta\eta_{i+1}} + \frac{(\Gamma_{i-1,j} - \Gamma_{i,j})}{\Delta\eta_i} \right\} \quad (19)$$

$$\Gamma_\xi \Big|_{i,j} \cong \frac{(\Gamma_{i,j+1} - \Gamma_{i,j-1})}{2\Delta\xi} \quad (20)$$

$$\Gamma_{\xi\xi} \Big|_{i,j} \cong \frac{(\Gamma_{i,j+1} - 2\Gamma_{i,j} + \Gamma_{i,j-1})}{(\Delta\xi)^2} \quad (21)$$

Particularizing Γ appropriately in the governing equations, the following finite-difference approximations for θ , Ω , Ψ , u and v are obtained.

Temperature Equation

$$\theta_{i,j} = A_{\theta} \theta_{i+1,j} + B_{\theta} \theta_{i-1,j} + C_{\theta} \theta_{i,j+1} + D_{\theta} \theta_{i,j-1} \quad (22)$$

where,

$$J_{\theta} = \frac{2(\Delta\eta_{i+1} - \Delta\eta_i)u_{i,j}}{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i} + \frac{2}{Pr} \left(\frac{1}{(\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i)} + \frac{1}{(\Delta\xi)^2} \right) \quad (23a)$$

$$A_{\theta} = \frac{(2 - |u_{i,j}| \Delta\eta_i Pr)}{\Delta\eta_{i+1} (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) Pr J_{\theta}} \quad (23b)$$

$$B_{\theta} = \frac{(2 + |u_{i,j}| \Delta\eta_{i+1} Pr)}{\Delta\eta_i (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) Pr J_{\theta}} \quad (23c)$$

$$C_{\theta} = \frac{(2 - |v_{i,j}| \Delta\xi Pr)}{2(\Delta\xi)^2 Pr J_{\theta}} \quad (23d)$$

$$D_{\theta} = \frac{(2 + |v_{i,j}| Pr)}{2(\Delta\xi)^2 Pr J_{\theta}} \quad (23e)$$

Vortex Equation

$$\Omega_{i,j} = A_{\Omega} \Omega_{i+1,j} + B_{\Omega} \Omega_{i-1,j} + C_{\Omega} \Omega_{i,j+1} + D_{\Omega} \Omega_{i,j-1} + E_{\Omega} \theta_{i+1,j} + F_{\Omega} \theta_{i-1,j} + G_{\Omega} \theta_{i,j} \quad (24)$$

where,

$$J_{\Omega} = \frac{(\Delta\eta_{i+1} - \Delta\eta_i)u_{i,j}}{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i} + 2 \left\{ \frac{1}{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i} + \frac{1}{(\Delta\xi)^2} \right\} \quad (24a)$$

$$A_{\Omega} = \frac{(2 - |u_{i,j}| \Delta\eta_i)}{\Delta\eta_{i+1} (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\Omega}} \quad (24b)$$

$$B_{\Omega} = \frac{(2 + |u_{i,j}| \Delta\eta_i)}{\Delta\eta_i (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\Omega}} \quad (24c)$$

$$C_{\Omega} = \frac{(2 - |v_{i,j}| \Delta\xi)}{2(\Delta\xi)^2 J_{\Omega}} \quad (24d)$$

$$D_{\Omega} = \frac{(2 + |v_{i,j}| \Delta\xi)}{2(\Delta\xi)^2 J_{\Omega}} \quad (24e)$$

$$E_{\Omega} = \frac{\Delta\eta_i Gr_b}{\Delta\eta_{i+j} (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\Omega}} \quad (24f)$$

$$F_{\Omega} = - \frac{\Delta\eta_{i+1} Gr_b}{\Delta\eta_i (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\Omega}} \quad (24g)$$

$$G_{\Omega} = \frac{(\Delta\eta_{i+1} - \Delta\eta_i) Gr_b}{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i J_{\Omega}} \quad (24h)$$

Poisson Equation for the Stream Function

$$\Psi_{i,j} = A_{\psi} \Psi_{i+1,j} + B_{\psi} \Psi_{i-1,j} + C_{\psi} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) + D_{\psi} \Omega_{i,j} \quad (25)$$

where,

$$J_{\psi} = 2 \frac{1}{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i} + \frac{1}{(\Delta\xi)^2} \quad (25a)$$

$$A_{\psi} = \frac{2}{\Delta\eta_{i+1} (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\psi}} \quad (25b)$$

$$B_{\psi} = \frac{2}{\Delta\eta_i (\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i) J_{\psi}} \quad (25c)$$

$$C_{\psi} = \frac{1}{(\Delta\xi)^2 J_{\psi}} \quad (25d)$$

and

$$D_{\psi} = \frac{A_{\psi}}{(\Delta\xi)^2}$$

Velocity Components

$$u_{i,j} = \frac{(\psi_{i,i+1} - \psi_{i,i-1})}{2\Delta\xi} \quad (26)$$

$$v_{i,j} = -\frac{\Delta\eta_{i+1} \Delta\eta_i}{(\Delta\eta_{i+1} + \Delta\eta_i)} \left\{ \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})}{(\Delta\eta_{i+1})^2} - \frac{(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j})}{(\Delta\eta_i)^2} \right\} \quad (27)$$

where, $i = 2, 3, \dots, N$ and $j = j^* = N+1-i$.

The iteration schemes for $\theta_{i,j}$, $\Omega_{i,j}$, and $\psi_{i,j}$ are set out sequentially as follows and implemented using Gauss-Seidel iteration technique.

$$\theta_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_\theta) \theta_{i,j}^n + \left[A_\theta \theta_{i+1,j}^n + B_\theta \theta_{i-1,j}^{n+1} + C_\theta \theta_{i,j+1}^n + D_\theta \theta_{i,j-1}^{n+1} \right] \omega_\theta \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{i,j}^{n*+1} &= (1 - \omega_\Omega) \Omega_{i,j}^{n*} + \left(A_\Omega \Omega_{i+1,j}^{n*} + B_\Omega \Omega_{i-1,j}^{n*+1} \right) \omega_\Omega + \\ &+ \left(C_\Omega \Omega_{i,j+1}^{n*} + D_\Omega \Omega_{i,j-1}^{n*+1} + E_\Omega \theta_{i+1,j}^{n+1} + F_\Omega \theta_{i-1,j}^{n+1} \right) \omega_\Omega + \\ &+ G_\Omega \theta_{i,j}^{n+1} \omega_\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{n**+1} &= (1 - \omega_\psi) \psi_{i,j}^{n**} + \left(A_\psi \psi_{i+1,j}^{n**} + B_\psi \psi_{i-1,j}^{n**+1} \right) \omega_\psi + \\ &+ \left(C_\psi \left(\psi_{i,j+1}^{n**} + \psi_{i,j-1}^{n**+1} \right) + D_\psi \Omega_{i,j}^{n*+1} \right) \omega_\psi \end{aligned} \quad (30)$$

where n , n^* , n^{**} are the number of iterations and ω_θ , ω_Ω , ω_ψ , represent the relaxation parameters for the temperature, vorticity and stream function fields and $1 < (\omega_\theta, \omega_\Omega, \omega_\psi) < 2.0$. Following Nogotove [11] for flow situations where the Rayleigh number is less than 10^5 , $\omega_\theta = \omega_\Omega = 1.0$ and ω_ψ is chosen to be 1.6. The criterion for iteration convergence of the (θ, Ω, ψ) system of difference equations is chosen in this case to be:

$$\epsilon_\Gamma = \Sigma \left| \Gamma_{i,j}^{k*+1} - \Gamma_{i,j}^{k*} \right| \leq 10^{-3} \quad (31)$$

Alternatively, to further save computer space and reduce computation time, steady state solutions may be obtained from a

rough grid system and then grid parameters are decreased and the crude approximations are extrapolated to zero grid size with reasonable confidence following Ozoe et al [12].

Boundary Approximations

Along the hypothetical plane of symmetry, i.e. $\eta = 0$, the temperature and vortex functions values are approximated by:

$$\theta_{1,j} = \frac{(\Delta\eta_2 + \Delta\eta_3)^2 \theta_{2,j} - (\Delta\eta_2)^2 \theta_{3,j}}{(\Delta\eta_2 - \Delta\eta_3)^2 - (\Delta\eta_2)^2} \quad (32)$$

$$\Omega_{1,j} = \frac{(\Delta\eta_2 + \Delta\eta_3)^2 \Omega_{2,j} - (\Delta\eta_2)^2 \Omega_{3,j}}{(\Delta\eta_2 + \Delta\eta_3)^2 - (\Delta\eta_2)^2} \quad (33)$$

Along the curved boundary,

$$\Omega_{i,j} = \frac{u_{i,j-1}}{\Delta\xi} - \frac{v_{i-1,j}}{\Delta\eta_i} \quad (34)$$

where $i = 2, 3, \dots, N$ and $j^* = j = N+2-i$

HEAT TRANSFER CALCULATIONS

The local circumferential heat transfer coefficients are defined through the conduction-referenced Nusselt numbers given by:

$$Nu(\phi) = - \frac{\frac{\partial\theta(\phi)}{\partial\bar{n}}|_w}{\left[\theta_m|_i - \theta_w(\phi) \right]} \quad (35)$$

where,

$$\frac{\partial\theta(\phi)}{\partial\bar{n}} = \frac{\varepsilon \left\{ \varepsilon^2 \xi \frac{\partial\theta(\phi)}{\partial\eta} \Big|_w + \eta \frac{\partial\theta(\phi)}{\partial\xi} \Big|_w \right\}}{1 - (1 - \varepsilon^4)^{1/2}} \quad (36)$$

$$\theta_m|_i = \frac{\sum_{j=1}^{N+2-i} [u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2]^{1/2} \theta_{i,j}}{\sum_{j=1}^{N+2-i} [u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2]^{1/2} (N+1-i)} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (37)$$

$$\theta_w(\phi) = (1 - \sin(\phi)) / 2 \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2} \quad (38)$$

The mean Nusselt number is obtained from:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} Nu(\phi) \, d\phi \quad (39)$$

The integral in equation (39) is evaluated exactly but can be obtained by any standard numerical quadrature scheme using unequal interval sizes.

RESULTS AND DISCUSSION

The Flow Patterns

The flow patterns considered are for the bottom-heated elliptic cylinders for which thermal stratification is potentially unstable. For the range of parameters examined in this case, two flow regimes, namely: bicellular and multicellular, are identified.

(i) Steady-state bicellular flow: For Rayleigh numbers lying between 0 and 500, the flow pattern consists of unsymmetrical cells in each quadrant. Figures 3a and 3b clearly show fluid circulations and the resulting temperature distributions. Near the top region of the first quadrant, thermal stratification is indicated. However, because the convective action appears to be more pronounced in the central region of the first quadrant of the ellipse, the isotherms exhibit characteristic distortions which resemble the letter "S". In the fourth quadrant where the convective activity appears to be less vigorous, thermal stratification is shown and the isotherms are almost horizontal.

(ii) Steady-state multicellular flow: For the same range of Rayleigh numbers, as the eccentricity increases from 0.4 to 0.8, pockets of circulations appear near the bottom of the cylinders and the stream lines are crowded towards the top of the cylinders. The isotherms in the first quadrant suffer considerable deformations for high Rayleigh numbers - in this case, $Ra = 500$. In the middle of the first quadrant, the familiar thermal "caves" vanish and isotherms are duplicated as shown in Figure 3d. However, thermal stratification characteristic are still prevalent in the fourth quadrant.

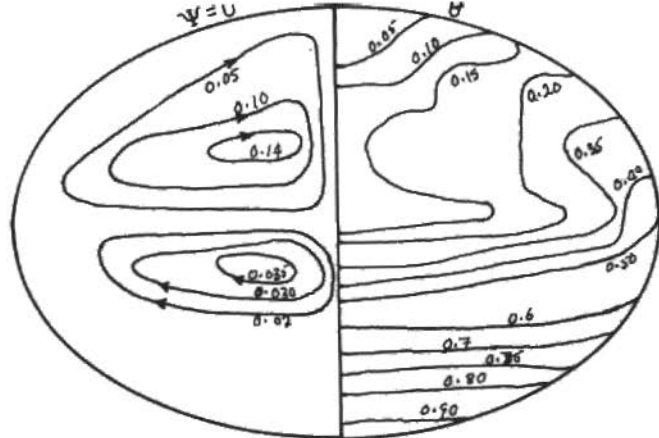


Figure 3a. $Ra = 250$

eccentricity = 0.4

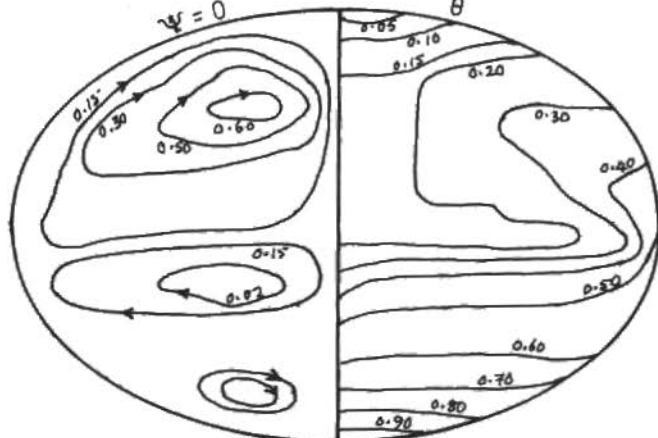


Figure 3c. $Ra = 250$

eccentricity = 0.8

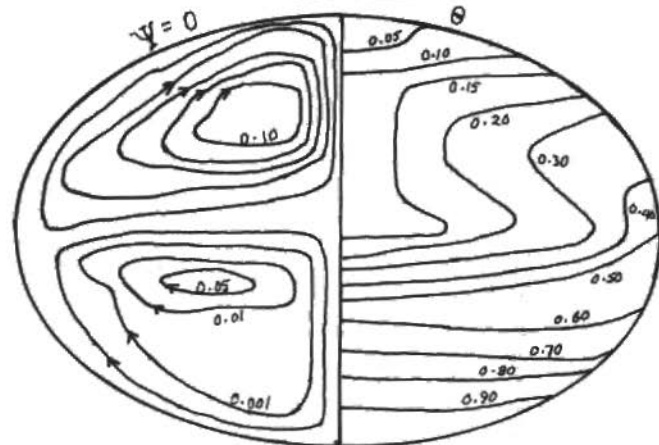


Figure 3b. Streamlines and isotherms, $Ra = 500$

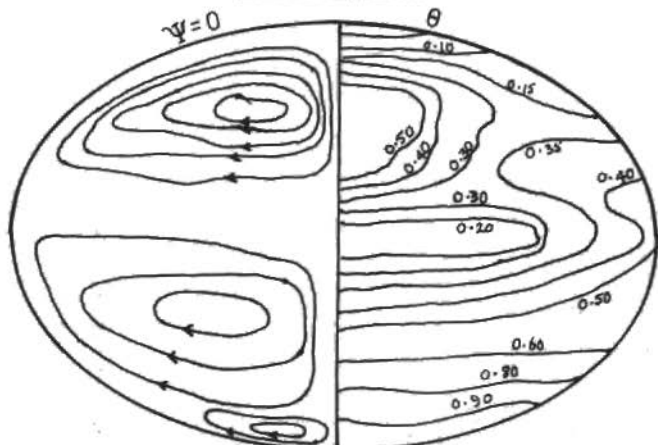


Figure 3d. Streamlines and isotherms, $Ra = 500$

Heat Transfer

Heat transfer is described in terms of the local peripheral Nusselt numbers for typical Rayleigh numbers and eccentricities. As shown in Figure 4, for unstable stratification, most of the heat transfer occurs at locations which correspond to $\phi = \pm 6$ degrees. Also, it is observed that the Nusselt number changes sign twice for both bicellular and multicellular regimes. Figure 5 illustrates the influence of Rayleigh numbers on the mean Nusselt numbers. Clearly, critical values of the Rayleigh numbers are predicted for which heat transfer rates are maximized. However, the heat transfer situation worsens as the Rayleigh number exceeds the critical value. This observation could be attributed to the development of the multicellular flow structure accompanied by drastic changes in the temperature field. The isotherms are duplicated and localized high temperature spots are shown.

CONCLUDING REMARKS

The effect of eccentricity on heat transfer has been reported in this work with particular reference to bottom-heated elliptic enclosures. Existence of optimum Rayleigh numbers is manifested. A rigorous determination of these critical Rayleigh numbers is not presented here but work is currently going on in this respect.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to the University of Ilorin for providing financial support through the Senate Research Grant. My gratitude also goes to Dr.P. Onumanyi of the Department of Mathematics for his comments and criticisms.

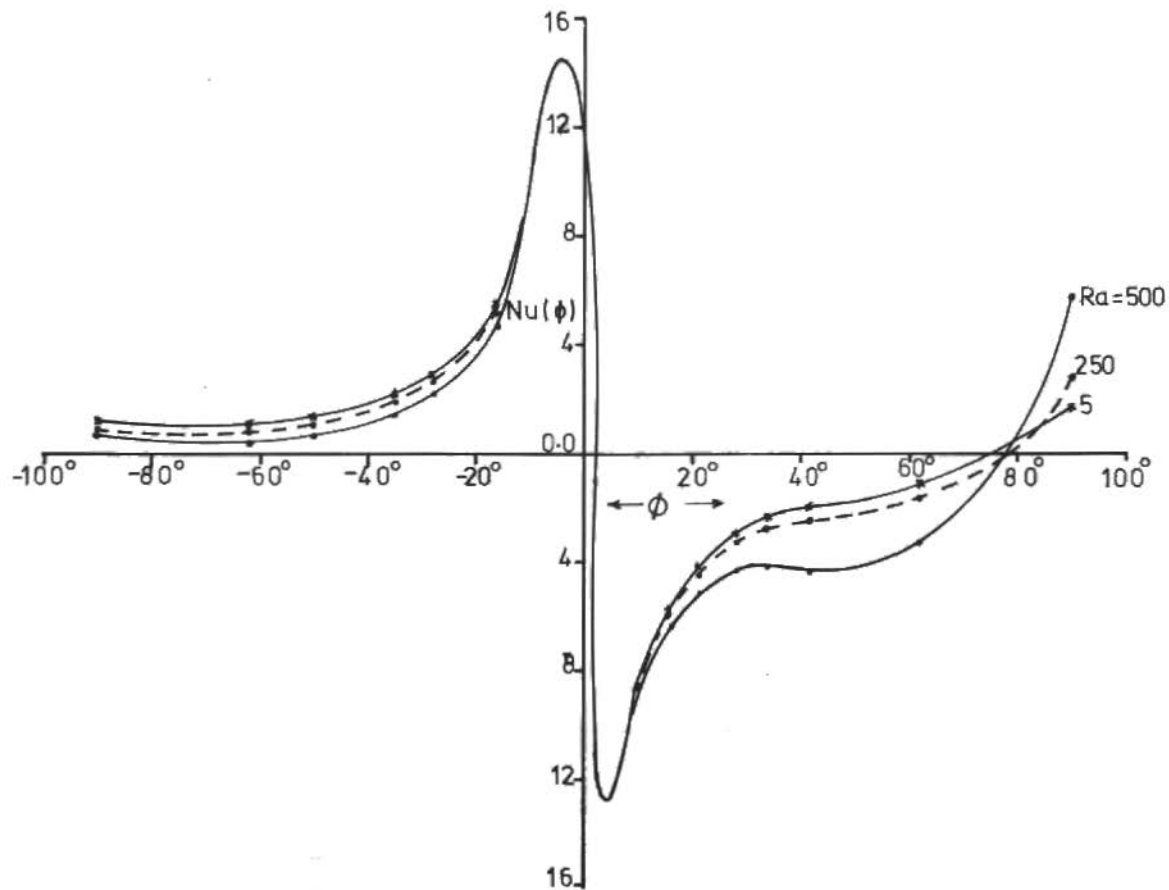


Figure 4. Local peripheral Nusselt numbers for $e = 0.4$ and $Gr_b = 100$

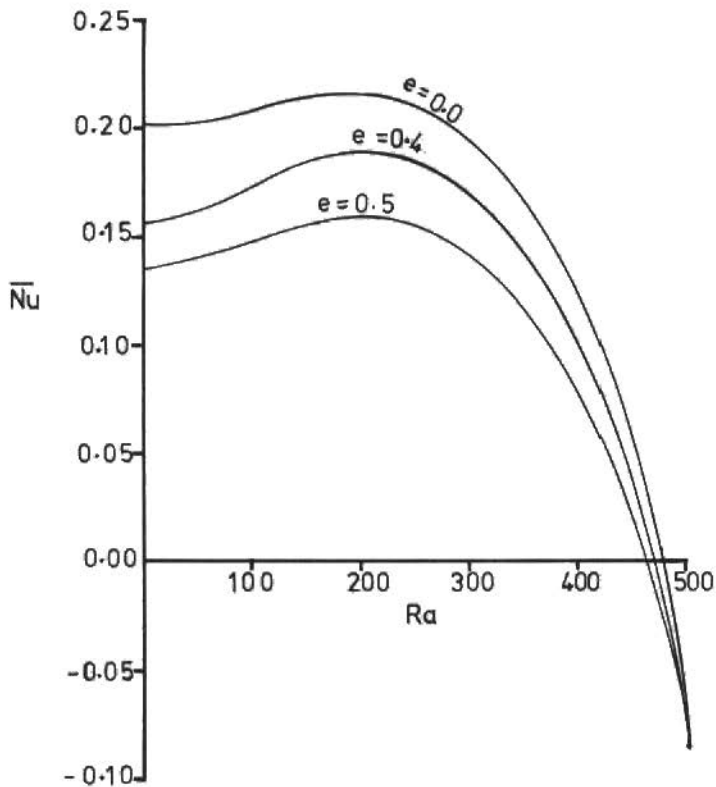


Figure 5. Variation of mean Nusselt number with Rayleigh number

REFERENCES

- [1] Mertol, A.; Greif, R. and Zvirin, Y. — Two-dimensional study of heat transfer and fluid flow in a natural convection loop. J. Heat Transfer, Trans. ASME, 104: 508-514, 1982.
- [2] Gebhart, B. — Heat transfer. 2nd edition, McGraw-Hill.
- [3] Tal(Thau), R.; Lec, D.N. and Sirignano, W.A. — Hydrodynamics and heat transfer in sphere assemblages - Cylindrical cell models. Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (9): 1265-1273, 1983.
- [4] Carnahan, B.; Luther, H.A. and Wilkes, J.O. — Applied Numerical Methods. John Wiley and Sons Publishers.
- [5] Maliska, C.R. — Grid layout design for non-orthogonal numerical fluid flow modelling. VII COBEM, D-4, 87-95, 1983.

- [6] Roache, P. - Computational fluid dynamics. Hermosa Publishers.
- [7] Ostrach, S. - New aspects of natural convection heat transfer. Trans. ASME, 75 : 1287-1290, 1953.
- [8] Tritton, D.J. - Physical fluid dynamics. Van Nostrand Reinhold, 1982.
- [9] Faris, G.N. and Viskanta, R. - An analysis of laminar combined forced and free convection heat transfer in a horizontal tube. Int. J. Heat Mass Transfer, 12 : 1295-1309, 1969.
- [10] Rego O.A.A. and Fernandez, E.C. - Convecção natural em tubos verticais com propriedades variáveis e pressão imposta numa extremidade. VII COBEM, A-12, 119-130, 1983.
- [11] Nogotove, E.F. - Applications of numerical heat transfer. UNESCO Series in Thermal and Fluids Engineering. Hemisphere Publishing Corporation, 1978.
- [12] Ozoe, H.; Sayama, H. and Churchill, S.W. - Natural convection in inclined square channel. Int. J. Heat Mass Transfer, 17 : 401-406, 1974.

FLAMBAGEM DE BARRAS EXTENSÍVEIS

Murilo Pereira de Almeida

Rubens Sampaio - Membro da ABCM

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

RESUMO

Constrói-se um modelo para descrever a flambagem de uma barra elástica onde leva-se em conta a estensibilidade da barra. São apresentadas equações para calcular as cargas e modos críticos. O resultado central do trabalho é a existência de somente um número finito de cargas críticas, diferença fundamental com respeito ao problema clássico da elástica.

INTRODUÇÃO

O problema da elástica, estudado por James Bernoulli, Daniel Bernoulli e Euler [1], consiste no estudo das configurações de equilíbrio de uma barra inextensível sujeita unicamente a compressão axial.

O modelo adotado para esse estudo, geometricamente exato, conduz a uma equação semilinear do tipo

$$\frac{d}{ds} \left(A(s) \frac{d\theta}{ds} \right) + P \operatorname{sen} \theta = 0 \quad ,$$

onde s é comprimento de arco, $\theta(s)$ é o ângulo entre a tangente à curva em s e a direção da carga aplicada, P é a magnitude da carga aplicada e A é a rigidez a flexão da barra, suposta estritamente maior que zero.

O resultado básico desse modelo é a existência de um conjunto

infinito discreto de cargas críticas que correspondem a pontos de bifurcação.

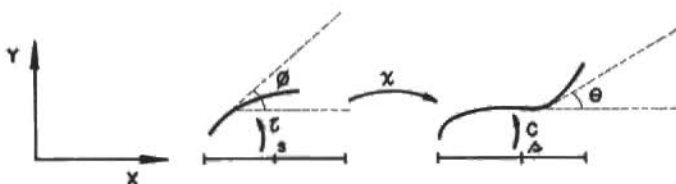
Apresentaremos nesse trabalho um modelo geometricamente exato para descrever flambagem de barras levando em conta a variação de comprimento da barra devido a compressão. A ausência da hipótese de inextensibilidade no nosso modelo acarreta que o número de cargas críticas é finito, em marcante contraste com o modelo inextensível.

Nosso modelo é bem mais realista que os presentes em uso em projeto de engenharia e bastante superior ao considerado por Love [2] e Reiss [3] que são geometricamente inexatos, isto é, envolvem aproximações da geometria.

Medidas de Deformação

Apresentaremos aqui, para melhor exposição das idéias, apenas deformações planas.

A elástica será representada, em sua configuração inicial e deformada, por curvas planas como sugerido na figura abaixo, onde s , ϕ e θ são os comprimentos de arco nas configurações inicial e deformada e os ângulos formados com a horizontal pelas tangentes às configurações inicial e deformada, respectivamente.



Usaremos como medida de deformação as variáveis

$$\epsilon(s) = \frac{ds'}{ds} - 1, \quad \mu = \frac{d}{ds} (\theta - \phi) = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds'}{ds} - \frac{d\phi}{ds}$$

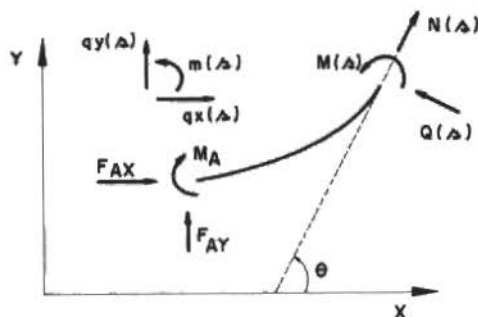
Observe que ϵ mede a variação de comprimento por unidade de comprimento da configuração inicial e que $K = d\phi/ds$ e $k = d\theta/ds'$ são as curvaturas das configurações inicial e deformada, respectivamente. Logo

$$\mu + K = k(1 + \epsilon)$$

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Nessa seção derivaremos as equações de equilíbrio de uma barra plana sujeita a esforços generalizados distribuídos dados por forças e momentos.

Para derivarmos as equações de equilíbrio governando o problema faremos balanço de forças e momento entre o extremo A e uma seção Δ qualquer da barra na sua configuração deformada. A figura abaixo esquematiza o problema.



M_A , F_{Ax} , F_{Ay} são os esforços atuando em A; $m(\Delta)$, $q_x(\Delta)$, $q_y(\Delta)$ as solicitações externas; e $M(\Delta)$, $N(\Delta)$, $Q(\Delta)$ os esforços internos na seção.

As equações de equilíbrio são:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad F_{Ax} + N \cos \theta - Q \operatorname{sen} \theta + \int_0^{\Delta} q_x(\xi) d\xi = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore \quad F_{Ay} + N \operatorname{sen} \theta + Q \cos \theta + \int_0^{\Delta} q_y(\xi) d\xi = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{(A)} = 0 \quad \therefore \quad & -M_A - (N \cos \theta - Q \operatorname{sen} \theta) \int_0^{\Delta} \operatorname{sen}[\theta(\xi)] d\xi + \\ & + (N \operatorname{sen} \theta + Q \cos \theta) \int_0^{\Delta} \operatorname{sen}[\theta(\xi)] d\xi + \int_0^{\Delta} m(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^{\Delta} \left\{ q_x(\xi) \int_0^{\xi} \operatorname{sen}[\theta(\zeta)] d\zeta \right\} d\xi + \\ & + \int_0^{\Delta} \left\{ q_y(\xi) \int_0^{\xi} \cos[\theta(\zeta)] d\zeta \right\} d\xi + M = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Localizaremos essas equações tomando derivadas com respeito a δ , obtendo:

$$\frac{d}{d\delta} (N \cos\theta - Q \sin\theta) + q_x(\delta) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\delta} (N \sin\theta + Q \cos\theta) + q_y(\delta) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\delta} + Q + m(\delta) = 0 \quad (6)$$

É conveniente considerar balanço de forças nas direções tangente e normal à configuração deformada, combinando (4) e (5), e notando

$$n(\delta) = q_x(\delta) \cos\theta + q_y(\delta) \sin\theta$$

$$q(\delta) = -q_x(\delta) \sin\theta + q_y(\delta) \cos\theta$$

obtemos:

$$\frac{dN}{d\delta} - Q \frac{d\theta}{d\delta} + n = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{d\delta} + N \frac{d\theta}{d\delta} + q = 0 \quad (8)$$

O conjunto (6), (7), (8), ou equivalente (4), (5), (6), são as equações de equilíbrio da barra referidas à configuração deformada. As equações de equilíbrio referidas à configuração inicial são obtidas transformando variáveis, de δ para s , e são:

$$M' + (1+\varepsilon)Q + (1+\varepsilon)m = 0 \quad (9)$$

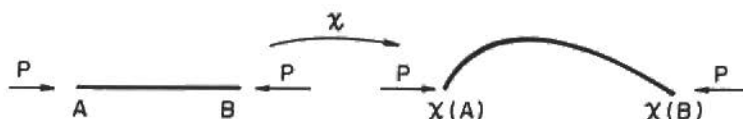
$$N' - (\mu+K)Q + (1+\varepsilon)n = 0 \quad (10)$$

$$Q' + (\mu+K)N + (1+\varepsilon)q = 0 \quad (11)$$

onde $()' = \frac{d}{ds} ()$ e por "abuso" de notação usamos os mesmos símbolos para M , N , Q , m , n , q como função de δ e s embora, obviamente, as expressões funcionais não coincidam necessariamente.

MODELO

Queremos estudar as configurações de equilíbrio de uma barra compressível, que na configuração inicial \bar{e} é reta e submetida unicamente a esforços de compressão. A configuração reta, com compressão apropriada, \bar{e} sempre uma configuração de equilíbrio; o que estamos sobretudo interessados \bar{e} na existência de configurações não retas, denominadas doravante de flambadas. Nosso objetivo \bar{e} construir um modelo matemático que nos permita determinar quantas e quais são as configurações de equilíbrio associadas a um dado valor de carga de compressão axial.



Adotaremos como hipóteses constitutivas

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad , \quad \mu = \frac{M}{EI} \quad (12)$$

onde EA e EI são constantes que dependem do material e da geometria da barra.

Consideremos que nas equações de equilíbrio, (1) a (11) temos

$$q = n = m = 0 \quad , \quad F_{Ay} = M_A = 0 \quad , \quad F_{Ax} = p \quad (13)$$

Das equações (1) e (2) tem-se imediatamente que

$$Q = P \operatorname{sen} \theta \quad , \quad N = -P \operatorname{cos} \theta \quad (14)$$

A configuração inicial da barra sendo reta resulta que

$$\mu = \theta' \quad (15)$$

Substituindo as equações (12), (13), (14) e (15) nas equações de equilíbrio obtemos

$$\theta'' + \beta(1 - i^2 \beta \operatorname{cos} \theta) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (16)$$

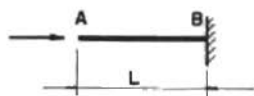
onde

$$\beta = \frac{P}{EI} \quad , \quad i^2 = \frac{I}{A} \quad .$$

Estudaremos o problema de uma barra AB, livre em A e engastando em B, ou seja, com as condições de contorno

$$\theta' = 0 \quad \text{em} \quad A \quad (17)$$

$$\theta = 0 \quad \text{em} \quad B \quad (18)$$



SOLUÇÃO DO MODELO

Considerando que a barra na configuração inicial tem comprimento unitário (o que equivale a iniciar com uma barra de comprimento L e fazer uma mudança de variáveis para $\frac{s}{L}$), temos que resolver o problema

$$\theta'' + \beta(1 - i^2 \beta \cos\theta)\text{sen}\theta = 0 \quad , \quad 0 < s < 1 \quad (19)$$

$$\theta'(0) = \theta(1) = 0 \quad (20)$$

Vejamos inicialmente para que valores do parâmetro β temos solução não trivial. Para isso basta estudar o problema

$$\theta'' + k \theta = 0 \quad (21)$$

$$\theta'(0) = \theta(1) = 0$$

onde

$$k = \beta(1 - i^2 \beta)$$

Os autovalores para o problema linearizado são

$$k_n = (2n-1)^2 \pi^2/4 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Para que β_n seja real e necessário que

$$n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}$$

o que restringe o número de cargas críticas de flambagem.

Vamos agora resolver o problema completamente. Seja $\theta(0) = \alpha$. Multiplicando (19) por θ' e integrando entre 0 e s achamos

$$(\theta'(s))^2 = 2\beta(\cos\theta(s) - \cos\alpha) - i^2\beta^2(\cos^2\theta(s) - \cos^2\alpha) \quad (22)$$

Por conveniência adotaremos a transformação de variáveis

$$p = \sin \frac{\alpha}{2} \quad , \quad p \sin\phi = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (23)$$

Substituindo (23) em (22) encontramos após algumas operações a equação integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi} F(\phi, \beta, p) d\phi = 1 \quad (24)$$

onde

$$F(\phi, \beta, p) = \left\{ \beta(1 - p^2 \sin^2\phi) [1 - i^2\beta(1 - p^2(1 + \sin^2\phi))] \right\}^{-1/2} .$$

A equação (24) é resolvida iterativamente para determinar β . Determinamos (s) pela equação (19) com $\theta(0) = \alpha$ e a seguir determinamos as deformações e os esforços por (12), (14) e (15). A configuração flambada é obtida integrando-se as equações

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \theta(s) \quad \text{ou} \quad x' = (1 + \epsilon(s)) \cos \theta(s)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \theta(s) \quad \text{ou} \quad y' = (1 + \epsilon(s)) \sin \theta(s)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentaremos aqui alguns resultados obtidos com o modelo. A introdução da extensibilidade da barra no modelo faz que o número de cargas críticas seja finito, existindo situações em que não há carga crítica real. Além disso, a carga crítica obtida pelo modelo

é maior que a encontrada pelo problema clássico da elástica; o que é visto na Figura 1, que mostra como a relação β_n/k_n varia com $2i\sqrt{k_n}$, onde β_n e k_n são ps parâmetros de carga crítica para o n-ésimo modo de flambagem no modelo extensível e inextensível, respectivamente. Ressalta-se que o número de cargas críticas está limitado pela relação $2i\sqrt{k_n} \leq 1$.

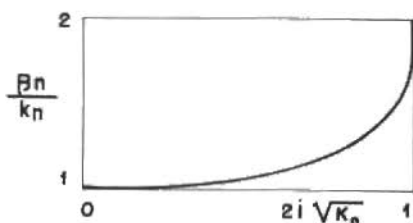


Figura 1. Taxa de ampliação das cargas críticas

O comportamento pós-crítico para os três primeiros modos de flambagem de uma barra com $i = 0,1$, determinado pelo modelo com e sem extensibilidade, está mostrado na Figura 2, que é o gráfico de β contra o ângulo α , que a barra faz com a horizontal em $s = 0$. Observa-se que inicialmente a barra extensível requer maiores cargas para um mesmo α e que à medida que α aumenta isso se inverte.

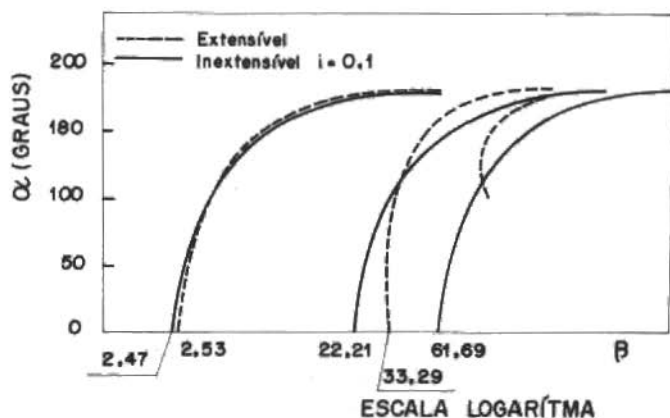


Figura 2. Comportamento pós-crítico

A barra com $i = 0,1$ não tem carga crítica real para o terceiro modo; entretanto, é possível encontrar neste modo configuração flambada para α grande.

Na Figura 3 estão mostradas as configurações deformadas, referentes ao 1º modo de flambagem, para barras submetidas ao mesmo parâmetro de carregamento ($\beta = 2,55$), sendo uma inextensível e a outra extensível com $i = 0,1$.

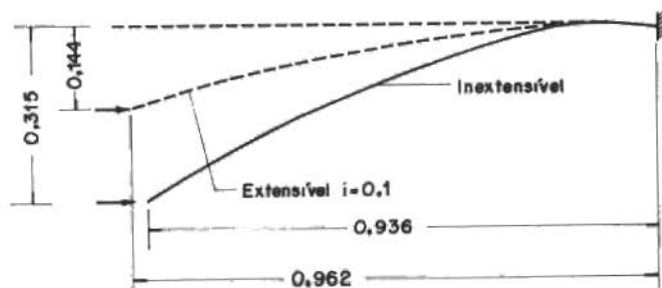


Figura 3. Configurações deformadas

REFERÊNCIAS

- [1] Truesdell, C. - The rational mechanics of flexible or elastic bodies. L. Euleri Opera Omnia (2), 11₂, Füssli, Zurich, 19860.
- [2] Love, A.E.H. - A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover, 1944.
- [3] Reiss, E.L. - Column Buckling - An elementary example of bifurcation. em J.B. Keller e S. Antman: Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems; Benjamin, 1969.
- [4] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. - Theory of elastic stability. McGraw-Hill, 2ª edição, 1961.
- [5] Rabinowitz, P.H. - Applications of bifurcation theory. Academic Press, 1977.

APÊNDICE

MODELO GEOMETRICAMENTE APROXIMADO

Obteremos a partir do modelo apresentado, outro geometricamente aproximado encontrado na literatura [3], verificando que simplificações são introduzidas bem como o que isto acarreta quanto a sua aplicação.

Colocaremos as equações em termos das coordenadas cartesianas da configuração deformada (x e y) e então faremos as considerações simplificadas. As equações básicas do nosso modelo são

$$\theta'' + \beta(1 - i^2 \beta \cos\theta)\text{sen}\theta = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\delta' = 1 + \varepsilon = 1 - i^2 \beta \cos\theta \quad , \quad (\text{A.2})$$

$$x' = (1 + \varepsilon)\cos\theta \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$y' = (1 + \varepsilon)\text{sen}\theta \quad ; \quad (\text{A.4})$$

e as condições de contorno de uma barra engastada e livre

$$\begin{aligned} \theta'(0) &= \theta(1) = 0 \\ y(0) &= y_0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Das equações (A.1), (A.2) e (A.4) temos que (A.1) pode ser escrita como

$$\theta'' + \beta y' = 0 \quad , \quad (\text{A.6})$$

que após ser integrada entre 0 e s resulta em

$$\theta' + \beta(y' - y_0) = 0 \quad . \quad (\text{A.7})$$

Das equações (A.3) e (A.4) temos

$$\theta = \text{arctg}(y'/x') \quad (\text{A.8})$$

e portanto

$$\theta' = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2 + (y')^2} \quad (\text{A.9})$$

Combinando (A.2), (A.3) e (A.4), levando em consideração que de (A.8) temos

$$\cos\theta = x' \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \quad ,$$

chegamos a

$$-i^2 \beta = x' + \frac{(y')^2 - \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{2x'} \quad (A.10)$$

Façamos a expansão da raiz quadrada em torno de $y' = 0$ obtendo

$$\sqrt{(x')^2 - (y')^2} = x' + \frac{(y')^2}{2x'} + O((y')^3) \quad (A.11)$$

Substituindo (A.11) em (A.10) temos

$$-i^2 \beta = x' - 1 + (y')^2 \left(1 - \frac{1}{2x'}\right) \times \frac{1}{x'} + \frac{O((y')^3)}{x'} \quad .$$

Escrevendo as coordenadas x e y em termos dos deslocamentos u e v dos pontos nas direções dos eixos cartesianos temos

$$x = X + u \quad (A.13)$$

$$y = Y + v \quad (A.14)$$

onde X, Y são as coordenadas na configuração de referências.

A configuração inicial é dada por

$$X(s) = s \quad \text{e} \quad Y(s) = 0 \quad (A.15)$$

onde temos que

$$x' = 1 + u' \quad (A.16)$$

e

$$y' = v' \quad (A.17)$$

Considerando pequenos deslocamentos desprezamos em (A.9) os produtos entre suas derivadas, obtendo $\theta' \approx v''$ e em consequência (A.7) ficando

$$v'' + \beta(v - v_0) = 0 \quad (A.18)$$

Temos também que

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{1+u'} \approx 1 - u' \quad (\text{A.19})$$

e então em (A.12) retendo termos até a ordem 2, temos

$$-i^2 \beta = u' + \frac{1}{2} (v')^2 \quad (\text{A.20})$$

As condições de contorno do modelo aproximado em termos dos deslocamentos ficam

$$0 = \theta'(0) = v''(0)$$

$$0 = \theta(1) = v'(1)$$

$$v(0) = y_0$$

$$v(1) = 0$$

Executando o mesmo procedimento para uma coluna bi-rotulada, obtemos o modelo apresentado por Reiss [3].

O modelo aproximado leva em conta que os deslocamentos são pequenos o suficiente para desprezar os termos de ordens superiores a 2° , não sendo portanto, adequado para a determinação de configurações que se afastem bastante da inicial. O processo de aproximação torna possível a obtenção dos autovalores β através de uma equação linear (A.18), sendo estes, entretanto, diferentes dos autovalores do problema original. O modelo aproximado calcula os autovalores do problema linearizado e utiliza o encurtamento s_0 para a determinação da função $u(s)$ do deslocamento paralelo ao eixo inicial da barra.

AGRADECIMENTO

A Direção da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas agradece a contribuição de todos os revisores que se empenharam para a boa apresentação dos trabalhos publicados durante este ano de 1985.

Alvaro Toubes Prata, UFSC
Antonio MacDowell de Figueiredo, COPPE/UFRJ
Antonio Santos Vargas, PUC/RJ
Berend Snoeijer, UFSC
Carlos Alberto de Almeida, PUC/RJ
Cid Santos Gesteira, UFBA
Edgar Taroco, LNCC/CNPq
Euclides de Carvalho Fernandes, ITA
Fernando Venâncio Filho, PROMON
Francisco Eduardo Mourão Saboya, PUC/RJ
Francisco Paulo Lépore Neto, UFU
Hans Ingo Weber, UNICAMP
Henner Alberto Gomide, UFU
Jan Leon Scieszko, COPPE/UFRJ
Jarcy T. Sielawa, ITA
José Alberto dos Reis Parise, PUC/RJ
José João Espíndola, UFSC
José Luiz de França Freire, PUC/RJ
José Telles, COPPE/UFRJ
Leonardo Goldstein Junior, UNICAMP
Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos, COPPE/UFRJ
Luiz Bevilacqua, PUC/RJ
Maurício Nogueira Frota, PUC/RJ
Miguel H. Hirata, COPPE/UFRJ
Nelson Back, UFSC
Néstor Alberto Zouain Pereira, PUC/RJ
Ney Augusto Dumont, PUC/RJ
Paulo Murillo de Souza Araújo, PUC/RJ
Paulo Rizzi, ITA
Paulo Roberto de Souza Mendes, PUC/RJ
Ronaldo Bastos, COPPE/UFRJ
Rogério Martins Saldanha da Gama, LNCC/CNPq
Sergio Colle, UFSC
Sidney Stuckenbruck, PUC/RJ
Solly Andy Segenreich, PUC/RJ
Washington Braga Filho, PUC/RJ

ÍNDICE GERAL

VOL. VII - Nº 1

Editorial	3
Determination of Bending-free geometries for shells of revolution under axisymmetric loads	5
<p>Luiz Bevilacqua, Membro da ABCM Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/RJ Dauro Braga Noronha Junior, Membro da ABCM Natron – Consultoria e Projetos S/A.</p>	
Análise de Tensões em Curvas Tubulares Segmentadas	29
<p>Almir Silveira de Souza Filho Arthur Martins Barbosa Braga José Luiz de França Freire, Membro da ABCM Dept^o de Engenharia Mecânica – PUC/RJ</p>	
Analyses of pipe mitred bends through a modified beam model – F e Approach	53
<p>Carlos Alberto de Almeida, Membro da ABCM Angela Cristina Souza Leão de Salles Dept^o de Engenharia Mecânica – PUC/RJ</p>	
Interdisciplinary research related to mechanical engineering	71
<p>Christian P. Burguer Department of Engineering Science and Mechanics Iowa State University</p>	

VOL. VII - Nº 2

Editorial	99
Hydrodynamic loads on two closely spaced cylinders moving in a large fluid region	101
<p>Miguel H. Hirata Sérgio Luís V. Coelho Luiz Carlos Martins Departamento de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ</p>	
Resultados experimentais de um Rebocador Industrial movido por um Volante de Inércia	115
<p>Douglas Eduardo Zampieri Hugo Ingo Weber</p>	
Simulation of reciprocating compressors: numerical method and comparison with experimental data	129
<p>José Alberto dos Reis Parise Deptº de Engenharia Mecânica — PUC/RJ William G. Cartwright School of Mechanical and Production Engineering Nanyang Technological Institute Singapore</p>	
O desenvolvimento de elementos de bordo para problemas tridimensionais	153
<p>Paul William Partridge Professor Visitante Fundação Universidade de Brasília Departamento de Engenharia Civil</p>	
Uma formulação variacional geral para problemas de troca de calor por Radiação difusa*	163
<p>Rogério Martins Saldanha da Gama Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ LNCC/CNPq</p>	

VOL. VII - Nº 3

- Boundary integral method evaluation of the nusselt number in laminar flow in ducts of arbitrary cross section 185
- Sergio Cole**
Professor of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Federal University of Santa Catarina
Caixa Postal 476
88.000 - Florianópolis - SC
Brazil
- Escoamento paralelo de filme líquido laminar e corrente turbulenta de ar num canal 207
- P. M. S. Araújo**
A. S. Vargas
Deptº de Engenharia Mecânica
PUC/RJ
- Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais, Parte 1: Camadas viscosas 225
- Marcos Aurélio Ortega**
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SCJ - SP
- Rotação de um gás entre dois cilindros coaxiais Parte 2: Núcleo e solução geral 245
- Marcos Aurélio Ortega**
Deptº de Aerodinâmica
ITA/SJC - SP
- Relações constitutivas para escoamentos de fluidos não-newtonianos através de meios porosos saturados 267
- Rogério Martins Saldanha da Gama, LNCC/CNPq**
Rubens Sampaio, DEM-PUC/RJ

Vol. VII, nº 4

Editorial	289
Some critical remarks on the use of potential drop and compliance systems to measure crack growth in fatigue experiments	291
Jaime Tupiassú Pinho de Castro - Membro da ABCM Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	
Análise não-linear da estabilidade elástica de torres estaiadas	315
Antônio Manuel Dias Henriques - Membro da ABCM Instituto de Pesquisas Espaciais. Victor Prodonoff - Membro da ABCM Centro de Pesquisas da Petrobrás	
Análise tridimensional de vigas utilizando modelo com número reduzido de graus-de-liberdade	335
Carlos Alberto de Almeida - Membro da ABCM Alejandro Andueza Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	
A numerical study of natural convection in horizontal elliptic cylinders	353
F.L. Bello-Ochende Department of Mechanical Engineering Faculty of Engineering and Technology University of Ilorin Ilorin - Nigéria	
Flambagem de barras extensíveis	373
Murilo Pereira de Almeida Rubens Sampaio - Membro da ABCM Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ	

INSTRUÇÕES PARA ASSOCIAR-SE À ABCM

- Preencher a ficha anexa, destacá-la e enviá-la para ABCM

LCC - Laboratório de Computação Científica

Rua Lauro Müller, nº 455

Caixa Postal 56018

22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil



- Remeter juntamente com a referida ficha, para o mesmo endereço, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor de 1,36 ORTN's, para sócios efetivos e US\$20,00 para estrangeiros. Estudantes pagarão a metade dos valores e sócios institucionais 27,16 ORTN's.



FORMULÁRIO PARA AFILIAÇÃO



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PARA USO DA ASSOCIAÇÃO

Recebido	Aprovado
Readmitido	Eleito Membro
Membro Nº	Anuidade

Membro Nº

Afiliação para
Nome (Abrevie se necessário)

pedido de admissão mudança readmissão para a categoria de Membro Individual Aspirante (Estudante) Efetivo

Se renovação, qual o último ano de afiliação efetiva?

Endereço Residencial
Rua, Nº, Apto.

CEP, Cidade, Estado, País

Endereço Comercial
Rua, Nº, Departamento, etc.

CEP, Cidade Estado, País

Empresa

Título Profissional

Posição Atual
Engenheiro de Produção, Professor Assistente, etc.

Data de Nascimento

Endereço para onde deve ser enviada correspondência: Residência Empresa

FORMAÇÃO SUPERIOR E TÍTULOS

Indique em ordem cronológica sua formação superior. Em áreas de engenharia deve-se indicar, ex. Engenharia Mecânica, Metalúrgica, etc., e em áreas de especialização; Industrial, Ciências dos Materiais, etc. Estudantes devem indicar data prevista de graduação.

Universidades	Graus	Datas	Área	Especialização

EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL

Indique em ordem cronológica sua experiência profissional. Seja explícito com relação a posições ocupadas (como Engenheiro de Produção, Consultor, etc.), funções exercidas (como Chefe de Departamento de Manutenção, Consultoria em Transientes Hidráulicos, etc.), datas e períodos das posições ocupadas.

	Período	Tempo Total
Posição _____ Empresa _____ Função _____	De: A:	
Posição _____ Empresa _____ Função _____	De: A:	
Posição _____ Empresa _____ Função _____	De: A:	

ÁREAS DE INTERESSE

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> Mecânica Teórica | <input type="checkbox"/> Mecânica dos Sólidos | <input type="checkbox"/> Mecânica dos Fluidos | <input type="checkbox"/> Transferência de Calor e Massa |
| <input type="checkbox"/> Termodinâmica | <input type="checkbox"/> Mecânica das Estruturas | <input type="checkbox"/> Propriedades dos Materiais | <input type="checkbox"/> Processos de Fabricação |
| <input type="checkbox"/> Projetos de Máquinas e Componentes | <input type="checkbox"/> Análise Experimental | <input type="checkbox"/> Vibrações e Acústica | <input type="checkbox"/> Métodos Analíticos e Numéricos |
| <input type="checkbox"/> Otimização e Controle. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Remeter para:

Secretaria da A B C M
LCC - Laboratório de Computação Científica
Rua Lauro Müller, 455
CEP 22290 - Rio de Janeiro, Brasil

OBJETIVOS DA A B C M

A Associação Brasileira de Ciências Mecânicas é uma Sociedade Civil, sem fins lucrativos, fundada em 19 de abril de 1975 por profissionais interessados em Ciências Mecânicas, com a finalidade de congrega pessoas físicas e jurídicas visando:

- realizar Congressos, Simpósios, Conferências, Cursos e Reuniões Técnico-Científicas.
- promover o intercâmbio com associações similares do país e do exterior.

São atividades tradicionais da ABCM:

- O Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, que se realiza a cada dois anos na primeira quinzena de dezembro dos anos ímpares.
- O Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão - SIBRAT, que é realizado nos anos pares.
- A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas - RBCM, publicação trimestral.-

