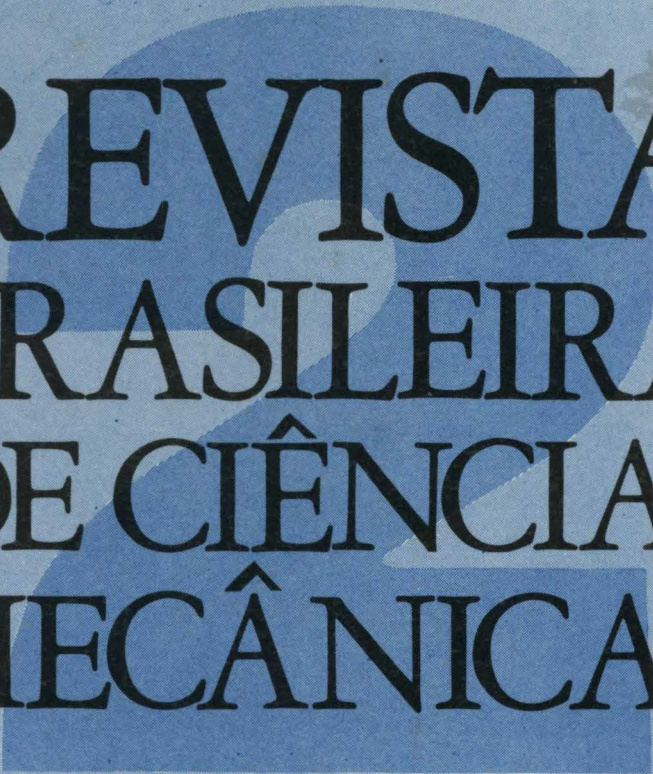




REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

REVISTA

BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS



Associação Brasileira de Ciências Mecânicas
MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM

Luiz Bevilacqua (Presidente)

Tito Luiz da Silveira (Vice-Presidente)

Raúl A. Feijóo (1º Secretário)

Antonio MacDowell (2º Secretário)

Augusto Galeão (1º Tesoureiro)

Arno Blass (2º Tesoureiro)

Vol. VII, nº 2 - Ago. 1985

**EDITOR
RESPONSÁVEL**

Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**

J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula

Arthur J. V. Porto

Berend Snoeijer

Bernardo Horowitz

C. S. Barcellos

D. E. Zampieri

Duraïd Mahrus

E. O. Taroco Aliano

F. Venâncio Filho

F. E. Mourão Saboya

Giulio Massarani

Guilherme Creuss

Hans Ingo Weber

Henner A. Gomide

Jan Leon Scieszko

Jersy T. Sielawa

J. J. Espíndola

Liu Hsu

Mauricio N. Frota

Miguel H. Hirata

Nelson Back

Nestor Zouain

Nivaldo L. Cupini

O. Maizsa Neto

Pedro Carajilescov

Sergio Colle

**COMPOSIÇÃO
GRÁFICA**

Rosangela L. Almeida

Tamara P. Souza

Editorial

99

Hydrodynamic loads on two closely spaced cylinders
moving in a large fluid region

101

Miguel H. Hirata

Sérgio Luís V. Coelho

Luiz Carlos Martins

Departamento de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

Resultados experimentais de um Rebocador Industrial
movido por um Volante de Inércia

115

Douglas Eduardo Zampieri

Hugo Ingo Weber

Simulation of reciprocating compressors: numerical
method and comparison with experimental data

129

José Alberto dos Reis Parise

Deptº de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

William G. Cartwright

School of Mechanical and Production Engineering

Nanyang Technological Institute

Singapore

O desenvolvimento de elementos de bordo para
problemas tridimensionais

153

Paul William Partridge

Professor Visitante

Fundação Universidade de Brasília

Departamento de Engenharia Civil

Uma formulação variacional geral para problemas
de troca de calor por Radiação difusa*

163

Rogério Martins Saldanha da Gama

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

LNCC/CNPq



J. DI GIORGIO EDITORES

TEL.: 261-5042 (PABX)

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO**

**DO CNPq E FINEP
COMPANHIA VALE DO RIO DOCE
IBM DO BRASIL**

99

101

115

129

153

183

Editorial
Hydrodynamic loads on two closely spaced cylinders
moving in a large fluid region

Miguel H. Hirta
Sergio Luis V. Coelho
Luiz Carlos Martins
Departamento de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

Resultados experimentais de um Robocador Industrial
movido por um Volante de Inércia

Douglas Eduardo Zampieri
Hugo Ingo Weber

Simulation of reciprocating compressors: numerical
method and comparison with experimental data

José Roberto dos Reis Farias
Departamento de Engenharia Mecânica - FUCRS
William G. Carvillat
School of Mechanical and Production Engineering
Nanyang Technological Institute
Singapore

O desenvolvimento de elementos de bordo para
problemas tridimensionais

Paul William Patridge
Professor Visitante
Fundação Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Civil

Uma formulação variacional geral para problemas
de troca de calor por radiação difusa

Rogério Martins Salbiano de Gama
Departamento de Engenharia Mecânica - FUCRS
LUCIO/CNPq

EDITOR
RESPONSÁVEL

EDITOR
EXECUTIVO

CONSELHO
EDITORIAL

Adriano F. D. Loula
Arthur J. V. Porto

Bernard Sirojer
Bernardo Horowitz

C. S. Barcellos
D. E. Zampieri

Orlando Martins
E. Q. Tancos Alencar

R. V. Vianello Filho
F. E. Mourão Szpoy

Guilherme Cruz
Guilherme Cruz

Hans Ingo Weber
Henri A. Gomide

Jan Leon Sirojer
Jesús T. Sirojer

J. J. Escobedo
J. J. Escobedo

Marcelo N. Figueira
Miguel H. Hirta

Nelson Back
Nelson Zouain

Nivaldo L. Corrêa
O. Moraes Neto

Pedro Caribonero
Sergio Colla

COMPOSIÇÃO
GRÁFICA
Rosaângela L. Almeida
Tamara P. Souza

HYDRODYNAMIC LOADS ON TWO CLOSELY SPACED CYLINDERS MOVING IN A LARGE FLUID REGION

Miguel H. Hirata

Sérgio Luís V. Coelho

Luiz Carlos Martins

Departamento de Engenharia Mecânica - COPPE/UFRJ

ABSTRACT

The flow around two closely spaced cylinders moving harmonically in an infinite fluid region is analysed. The motions amplitude is assumed to be small and the viscosity is neglected. The complex velocity potential is written as a series and, using a generalized form of the Blasius relations, the hydrodynamic loads can be calculated. For such a simple configuration of a multibodies system the analytical solution is used to check the results of a numerical analysis which uses the Boundary Element Method.

NOTATION

Uppercase

- F - hydrodynamic load
- W - complex potential
- C - added mass coefficient

Lowercase

- ℓ - distance between the dipole and origin of the coordinate system
- m' - added mass
- p - static pressure
- r - radius of a cylinder
- t - time

Greek

- δ - phase of the motion
 ε - small parameter
 μ - strenght of a dipole
 η - amplitude of the motion
 Φ - velocity potential
 ρ - specific mass
 ω - frequency of the motion

Subscripts

- A - refers to cylinder A
 B - refers to cylinder B

INTRODUCTION

This paper deals with the analysis of the flow around a group of bodies moving closely-spaced from each other. For distantly spaced bodies of simple forms, analytical solutions for the fluid problem can be found. Generally if the bodies have no simple forms or if they are closely-spaced one has to resort to numerical methods in order to get the solution for the fluid dynamic problem; these numerical methods are the finite difference method (F.D.M.) [1] and the finite element method (F.E.M.), [9],[10] which require the discretization of the fluid domain. As an alternative to those mentioned methods there is the boundary element method (B.E.M.) [2],[3],[4],[8] which requires only the discretization of the boundaries of the fluid domain.

As a preliminary study to problems with complex geometry, which will require the use of numerical methods, this paper deals with the analysis of the flow around two closely-spaced circular cylinders of radius γ_A and γ_B moving harmonically with small amplitude in an infinite fluid region. Assuming all the necessary conditions, the velocity field is given by the gradient of a velocity potential.

The solution to the potential problem is obtained analytically as the real part of a complex velocity potential written as a series; each term of such a series represents a dipole inside one of the circumferences. As the sequential index increases, the respective dipole is located nearer the circle

boundary. A generalized form for the Blasius relation, which is applied to non-steady state flows, is used to get the hydrodynamic loads.

A numerical solution to the same problem was obtained using the BEM. Added mass was, then, calculated for different configurations and the results show good agreement with those obtained using the analytical method.

FORMULATION OF THE PROBLEM

The equation of motion for an array of n bodies moving in a fluid region can be written as

$$[M]\{\ddot{\eta}\} + [C]\{\dot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{F_H\} \quad (1)$$

where $[M]$ is the mass matrix, $[C]$ the structural damping, $[K]$ the stiffness matrix and $\{F_H\}$ the hydrodynamic load vector. In the above equation the external loads are reduced to the hydrodynamic ones. The hydrodynamic vector can be split as

$$\{F_H\} = [M']\{\ddot{\eta}\} + [C']\{\dot{\eta}\} + [K']\{\eta\} + \{Q\} \quad (2)$$

where $[M']$ represents the inertia of the fluids (added mass matrix), $[C']$ the fluid damping, $[K']$ the fluid "stiffness" and $\{Q\}$ is the exciting force.

Since it is assumed that the viscosity effects can be neglected and that the fluid region extends to large distances from the bodies, F_H reduces to the inertia force. This is due to the fact that the flow is generated by the oscillation of the bodies, which move harmonically along the y -axis, as shown in Figure 1. The body motions are defined by

$$\eta_A^* = \bar{\eta}_A^* \sin(\omega^* t^*) \quad , \quad \eta_B^* = \bar{\eta}_B^* \sin(\omega^* t^* + \delta) \quad (3)$$

and the body surfaces by

$$F_A^* = (x^* - \ell_A^*)^2 + (y^* - \eta_A^*)^2 - r_A^{*2} = 0 \quad (4)$$

$$F_B^* = (x^* + \ell_B^*)^2 + (y^* - \eta_B^*)^2 - r_B^{*2} = 0$$

where the asterisk denotes dimensional variables and the dimensionless ones are without asterisk.

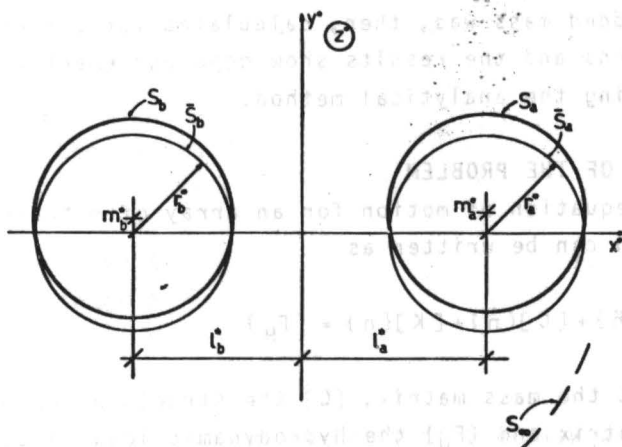


Figure 1. Modeling

Assuming all the necessary conditions for the existence of a velocity potential, a boundary value problem can be written. This problem is made non dimensional using ω^{*-1} and $r^* = \max(r_A^*, r_B^*)$ as references for time and lenght. In addition one writes the velocity potential as an assymptotic series

$$\phi(x, y, t, \epsilon) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots, \quad \phi_{n+1} = O(\phi_n) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0, \quad x, y, t \text{ fixed}$$

$$O(\epsilon) = O(\eta_A = \eta_A^* / r^*) = O(\eta_B = \eta_B^* / r^*)$$

Substituting the above expansion in the non-dimensional boundary value problem and considering only the leading terms, one gets [4]

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{..... in fluid region} \quad (5)$$

$$\frac{D\bar{\phi}_A}{Dt} = 2y \dot{\eta}_A \quad \text{..... in } \bar{S}_A \quad (6)$$

$$\frac{D\bar{\phi}_B}{Dt} = 2y \dot{\eta}_B \quad \text{..... in } \bar{S}_B \quad (7)$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \quad \text{..... at large distances} \quad (8)$$

where the quantities are non-dimensional and $D\bar{F}_A/D_t$, $D\bar{F}_B/D_t$ are the "linearized" form of the material derivative of the expressions defining the mean positions ($\bar{S}_A$ and $\bar{S}_B$):

$$\bar{F}_A = (x - \ell_A)^2 + y^2 - r_A^2 = 0$$

$$\bar{F}_B = (x + \ell_B)^2 + y^2 - r_B^2 = 0$$

$$\eta_A = \bar{\eta}_A \sin(t) \quad , \quad \eta_B = \bar{\eta}_B \sin(\omega t + \delta) \quad , \quad \omega = 1.$$

Note that in the above equations the subscript (1) in Φ_1 was deleted. It is also to be noted that a Taylor expansion was used to transfer the body condition from the actual to the mean position.

THE VELOCITY POTENTIAL

As mentioned before, the velocity potential defined by (5) - (8) is, in general, difficult to be obtained analitically and one has to resort to numerical methods. For our simple configuration, however, one can get an analytical solution.

Analytical Solution

Let's write

$$\Phi(x, y, t) = \text{Re} [W(z, t)] \quad (9)$$

where $W(z, t)$ is the complex velocity potential; an analytical function. Using the circle theorem [6], one has [4]

$$W(z, t) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_{An}}{Z - \ell_{An}} + \frac{\mu_{Bn}}{Z + \ell_{Bn}} \right) \quad (10)$$

where:

$$\mu_{A_0} = \bar{\eta}_A \omega r_A^2 \cos(\omega t) \quad ; \quad \mu_{B_0} = \bar{\eta}_B \omega r_B^2 \cos(\omega t + \delta)$$

$$\mu_{A(n+1)} = \mu_{Bn} \left(\frac{r_A}{\ell_{An} + \ell_{B_0}} \right)^2 \quad ; \quad \mu_{B(n+1)} = \mu_{An} \left(\frac{r_B}{\ell_{A_0} + \ell_{Bn}} \right)^2$$

$$\ell_{A(n+1)} = \ell_{A_0} - \frac{r_A^2}{\ell_{A_0} + \ell_{Bn}} \quad ; \quad \ell_{B(n+1)} = \ell_{B_0} - \frac{r_B^2}{\ell_{An} + \ell_{B_0}}$$

Each term of the series (19) represents a dipole inside one of the circles as shown in Figure 2. As it can be seen in that figure and in the above expression, the respective dipole is located nearer the boundary of the cylinder as the index of the term increases.

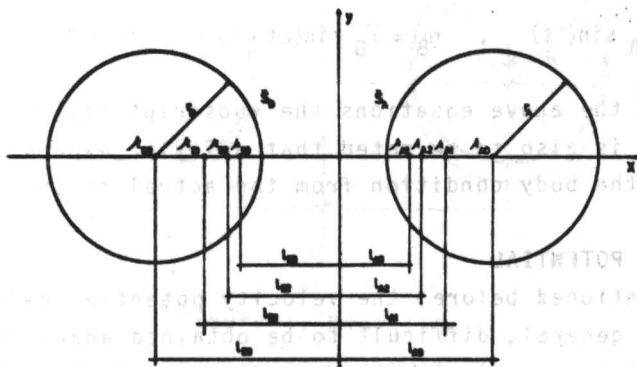


Figure 2. Dipole series

Solution Via BEM

To get the velocity potential utilizing the BEM one starts with the relation [1]:

$$a_i \Phi(Z_i) = \int_c \frac{\partial \Phi}{\partial n} \omega_i \, dc - \int_c \Phi \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \, dc \quad (11)$$

where

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{if } Z_i \text{ is an interior point} \\ 1/2 & \text{if } Z_i \text{ is on the contour } c. \end{cases}$$

and $\omega_i(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|z - Z_i|} \right)$, which represents a point source located at Z_i with an intensity equal to unity. The boundary of the fluid region is divided in N straight segments within which Φ is constant. We therefore have, for the boundary,

$$\frac{1}{2} \Phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \int_{c_j} \omega_i \, dc - \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{c_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \, dc \quad (12)$$

$$[H_{ij}]\{\phi_j\} = [G_{ij}] \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right\}, \quad (13)$$

if we define

$$G_{ij} = \int_{c_j} \omega_i \, dc$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{c_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \, dc & , i \neq j \\ \frac{1}{2} + \int_{c_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \, dc & , i = j \end{cases} \quad (14)$$

Equation (13) is of the form

$$[A_{ij}]\{x_j\} = \{b_i\} \quad (15)$$

where: $A_{ij} = H_{ij}$, $x_j = \phi_j$ and $b_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ when $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ is a known function on c .

We note that the evaluation of the line integrals on c are reduced to the integrals on $\bar{S}_A$ and $\bar{S}_B$, since the integral at large distances vanishes. Each surface, $\bar{S}_A$ and $\bar{S}_B$, was divided into 40 elements as shown in Figure 3. When 80 elements were used, the numerical results didn't show significant changes.

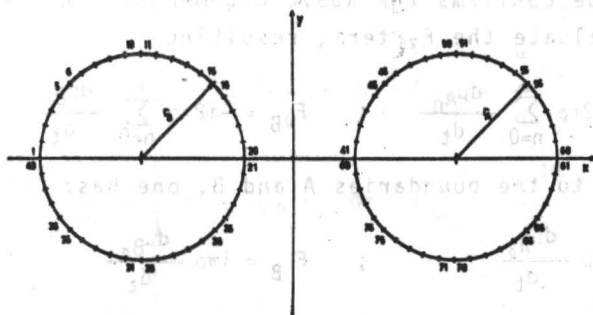


Figure 3. Discretization

THE HYDRODYNAMIC LOADS

The hydrodynamic loads can be obtained by direct integration of the pressure on the cylinders surfaces [7]

$$\vec{F}_H = - \int_C p \vec{n} ds \quad (16)$$

where $\vec{n}$ is the unit external normal. Alternatively, if one has the analytical solution, the generalized form of Blasius relations can be used [5].

$$F = X - i Y = F_1 + F_2 + F_3 \quad (17)$$

$$F_1 = \frac{i}{2} \rho \int_C \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 dz \quad (18)$$

$$F_2 = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_C \bar{W} dz \quad (19)$$

$$F_3 = \rho A_s \frac{d\bar{U}}{dt} \quad (20)$$

The bar over a complex quantity means its complex conjugate and the symbol A_s in F_3 means the sectional area.

The F_1 term is like the steady state load given by the usual Blasius relations and represents an attraction force between the cylinders. This term results from the integration of the quadratic ones in Bernoulli equation; they are of higher order and can be neglected. An expression in closed form is available and its numerical value confirms the above arguments. The residue theorem is used to evaluate the F_2 term, resulting

$$F_{2A} = -i2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{An}}{dt} ; \quad F_{2B} = -i2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{Bn}}{dt} \quad (21)$$

Applying (20) to the boundaries A and B, one has:

$$F_{3A} = i\pi\rho \frac{d\mu_{A0}}{dt} ; \quad F_{3B} = i\pi\rho \frac{d\mu_{B0}}{dt} \quad (22)$$

which represent the usual hydrodynamic inertial force acting on cylinders A and B respectively in an infinite fluid region. This

force is responsible for the added mass associated to the motion of the cylinders if they are moving far apart from each other. The F_{2A} force is the correction to F_{3A} , the force acting on cylinder A, due to the close presence of the cylinder B; an analogous interpretation is taken for the F_{2B} force.

To compute the added mass coefficients it is convenient to write the velocity potential as [5]

$$\Phi = \dot{\eta}_A \Phi_A(z) + \dot{\eta}_B \Phi_B(z) \quad (23)$$

$$\dot{\eta}_A \Phi_A = \operatorname{Re} \left[-i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_{A(2n)}}{Z - \ell_{A(2n)}} + \frac{\mu_{B(2n+1)}}{Z + \ell_{A(2n+1)}} \right) \right]$$

$$\dot{\eta}_B \Phi_B = \operatorname{Re} \left[-i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_{A(2n+1)}}{Z - \ell_{A(2n+1)}} + \frac{\mu_{B(2n)}}{Z + \ell_{B(2n)}} \right) \right]$$

where $\Phi_A - (\Phi_B)$ - is the velocity potential if the body B - (A) - is at rest and the body A - (B) - moves with unity velocity. From (16) and using the linearized form of Bernoulli equation, one has.

$$\tilde{F}_A = \tilde{F}_{AA} + \tilde{F}_{AB} = \ddot{\eta}_A \int_{\bar{S}_A} \Phi_A \tilde{n} ds + \ddot{\eta}_B \int_{\bar{S}_A} \Phi_B \tilde{n} ds$$

$$\tilde{F}_B = \tilde{F}_{BA} + \tilde{F}_{BB} = \ddot{\eta}_A \int_{\bar{S}_B} \Phi_A \tilde{n} ds + \ddot{\eta}_B \int_{\bar{S}_B} \Phi_B \tilde{n} ds$$

and therefore.

$$\begin{aligned} F_{AA_x} &= \ddot{\eta}_A \left[\int_{\bar{S}_A} \Phi_A \tilde{n} ds \right]_x = \ddot{\eta}_A M'_{AA_{yx}} & \text{or} & \quad C_{AA_x} = \frac{M'_{AA_{yx}}}{\pi r_A^2} \\ F_{AA_y} &= \ddot{\eta}_A \left[\int_{\bar{S}_A} \Phi_A \tilde{n} ds \right]_y = \ddot{\eta}_A M'_{AA_{yy}} & \text{or} & \quad C_{AA_y} = \frac{M'_{AA_{yy}}}{\pi r_A^2} \\ F_{AB_x} &= \ddot{\eta}_B \left[\int_{\bar{S}_A} \Phi_B \tilde{n} ds \right]_x = \ddot{\eta}_B M'_{AB_{yx}} & \text{or} & \quad C_{AB_x} = \frac{4M'_{AB_{yx}}}{\pi(r_A + r_B)^2} \\ F_{AB_y} &= \ddot{\eta}_B \left[\int_{\bar{S}_A} \Phi_B \tilde{n} ds \right]_y = \ddot{\eta}_B M'_{AB_{yy}} & \text{or} & \quad C_{AB_y} = \frac{4M'_{AB_{yy}}}{\pi(r_A + r_B)^2} \\ &\vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (24)$$

We note, in the notation, that M_{AB_y} is the y - component of the force on body A due to the acceleration of body B; the first capital letter in the index corresponds to the body on which the force is acting, the second to the body whose motion is responsible for the force, and the lower case letter means the direction of the force. The $M'_{AA_{yx}}$, $M'_{AA_{yy}}$, etc mean added-mass and C_{AA_x} , C_{AA_y} , the corresponding added-mass coefficients.

Numerical integration leads to the values of these coefficients but, using (21) and (22) one can write, for the present case.

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_A M'_{AA_{yy}} &= i \pi \rho \frac{d\mu_{A_0}}{dt} \\ \ddot{\eta}_B M'_{AB_{yy}} &= -i 2\pi \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\mu_{A_n}}{dt}, \text{ taking the body A at rest} \\ \ddot{\eta}_A M'_{BA_{yy}} &= -i 2\pi \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\mu_{B_n}}{dt}, \text{ taking the body B at rest} \\ \ddot{\eta}_B M'_{BB_{yy}} &= i \pi \rho \frac{d\mu_{B_0}}{dt} \\ M'_{AA_{yx}} &= M'_{AB_{yx}} = M'_{BA_{yx}} = M'_{BB_{yx}} = 0\end{aligned}\tag{25}$$

NUMERICAL RESULTS

Figure 4 shows the analytical results when the two cylinders have the same radius and the spacing between them is defined by $L = (1 - r/\ell)$. Of course $C_{AA} = C_{BB}$ and $C_{AB} = C_{BA}$ (the y index was deleted) and $C_{AB} = C_{BA} \rightarrow 0$ as $L \rightarrow 1$, the large spaced cylinders case. It is to note that for $L \rightarrow 0$, one cannot expect reliable results from a potential flow model but it is still valid to expect good results for $L \approx 0.05$ which means a gap of 1% of r .

Figure 5 shows the coefficients C_{AA} and C_{BB} for cylinders of different radii, and Figure 6 shows the crossed coefficients C_{AB} and C_{BA} . These coefficients represent the influence on the virtual mass of a cylinder due to its own movement, and due to the presence of the other one, respectively.

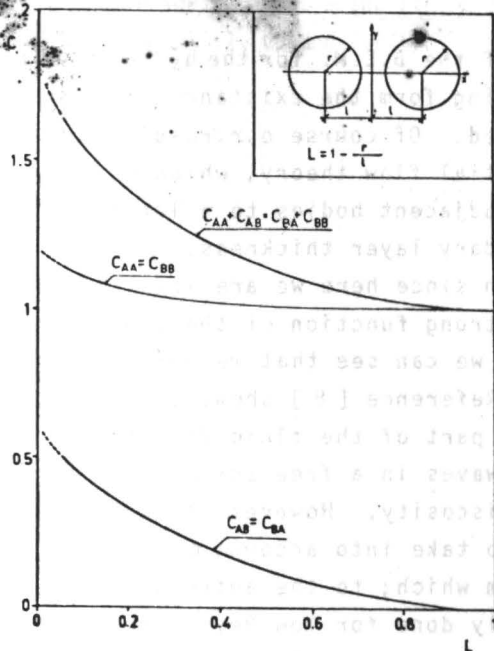


Figure 4. Additional mass coefficients

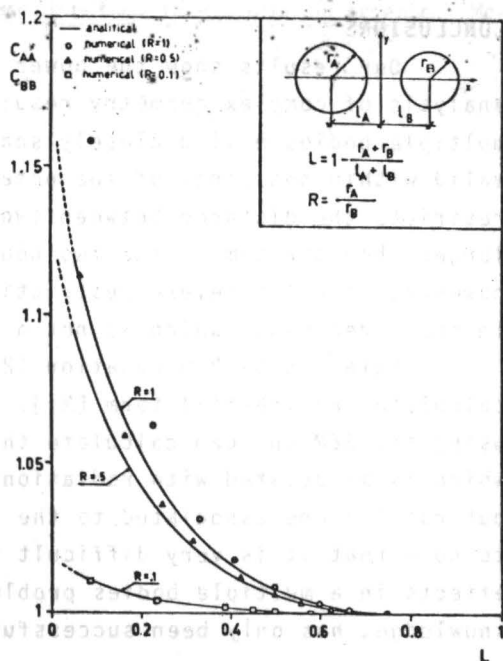


Figure 5. Coefficients C_{AA} and C_{BB}

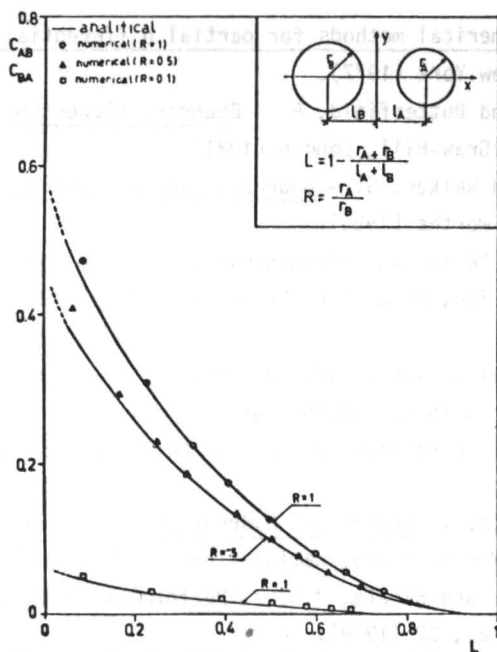


Figure 6. Coefficients C_{AB} and C_{BA}

CONCLUSIONS

Our results show the power of the B.E.M. for the hydrodynamic analysis of complex geometry resulting from the existence of multiple bodies moving closely spaced. Of course our results are valid within the range of the potential flow theory, which restricts the distance between two adjacent bodies to a length larger than the sum of the two boundary layer thickness. This, however, is not a severe restriction since here we are interested in the added mass, which is not a strong function of the viscosity.

Referring back to equation (2) we can see that we were able to calculate the inertial term $[M']$. Reference [8] shows that by using the BEM one can calculate the part of the fluid damping C' which is associated with radiation waves in a free surface problem, but not the one associated to the viscosity. However it is worth to note that it is very difficult to take into account the viscosity effects in a multiple bodies problem which, to the authors knowledge, has only been successfully done for low Reynolds number.

REFERENCE

- [1] Ames, W.F. — Numerical methods for partial differential equations, Academic Press, New York (1977).
- [2] Banerjee, P.K. and Butterfield, R. — Boundary element methods in engineering science, McGraw-Hill, London (1981).
- [3] Brebbia, C.A. and Walker, S. — Boundary element techniques in engineering, Newnes, Butterworths (1980).
- [4] Coelho, S.L.V. — "Esforços hidrodinâmicos em grupos de corpos submersos," M.Sc. Dissertation, Prog. Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (1983).
- [5] Hirata, M.H.; Coelho, S.L.V. and Martins, L.C. — "The flow around two closely spaced cylinders moving harmonically in an infinite fluid region," VII COBEM (VII Brazilian Congress of Mechanical Engineering), Uberlândia, MG (1983).
- [6] Milne-Thomson, L.M. — Theoretical hydrodynamics, Mac Millan, New York (1966).
- [7] Newman, J.N. — Marine hydrodynamics, The MIT Press (1978).
- [8] Pedrosa Jr., O.A. and Hirata, M.H. — "Performance of a floating wave-breaker," V COBEM, Campinas, SP (1979).
- [9] Pires Jr., F.C.M. e Hirata, M.H. — "O Método dos elementos finitos utilizado no estudo de um fôlio perto da superfície livre," IV COBEM, Florianópolis, SC (1977).

- [10] Zienkiewicz, O.C. — The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, London (1971).



DANCOR S.A.

INDÚSTRIA MECÂNICA

FÁBRICA DE BOMBAS HIDRÁULICAS

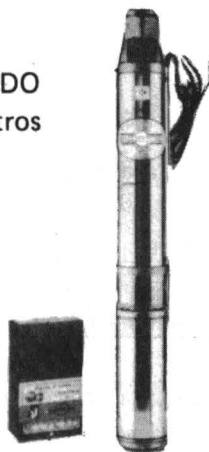
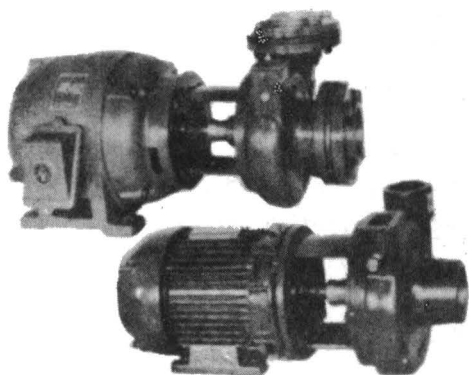
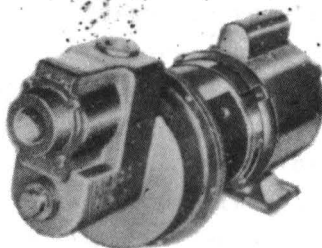
BOMBAS CENTRÍFUGAS
BOMBAS AUTO-ASPIRANTES
BOMBAS COM EJETOR

elétricas
a gasolina
diesel

BOMBAS PARA INCÊNDIO
BOMBAS PARA IRRIGAÇÃO

BOMBAS VERTICAIS
EJETORES PARA POÇOS PROFUNDOS

BOMBAS SUBMERSÍVEIS
PARA DRENAGEM
BOMBAS SUBMERSAS
PARA POÇO PROFUNDO
até 400 metros



DANCOR

Rua Jardim Botânico, 635 s/302 a 306 — Cep.: 22.470 — Tel.: 294-8332

Telex (021) 31503

Fábrica: Av. Brasil, 49.259 — Cep.: 23.000 — Tel.: 395-1212

End. Teleg. "DANCOR" — Caixa Postal 200

Rio de Janeiro — RJ

RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE UM REBOCADOR INDUSTRIAL MOVIDO POR UM VOLANTE DE INÉRCIA

Douglas Eduardo Zampieri

Hans Ingo Weber

Laboratório de Projeto Mecânico

DEM/FEC/UNICAMP - Campinas, SP

RESUMO

Foi construído sobre a base de um rebocador industrial um sistema de tração utilizando um volante de 1,5 kWh que fornece potência por um motor de 3 kW. Neste trabalho serão apresentadas conclusões sobre a eficiência deste sistema, detalhes construtivos da unidade de volante, considerações sobre a melhor maneira de transferir a potência, enfim, vantagens e desvantagens do veículo construído.

ABSTRACT

A flywheel storage system with 1.5 kWh capacity was built in a industrial vehicle with a 3 kW traction system. In this work there are presented informations about the concept, the efficiency and about the details of the flywheel unit. Advantages and disadvantages are discussed and considerations are made about the best way of transferring the power.

INTRODUÇÃO

Veículos com volantes de inércia tem sido objeto há mais de uma década de investigações em vários pontos do mundo. Há cerca de quatro anos houve um máximo de produtividade mensurável pelo número de trabalhos publicados a nível internacional. As duas últimas reuniões específicas para esta área foram em 1980 e 83, e têm seus resultados publicados [1,2]. De outro lado os americanos promoveram

em 1977 e 79 mais 2 simpósios sobre volantes. Uma nova reunião, a "4th Flywheel Technology Symposium" está sendo programada para 1985, o que significa um considerável espaçamento neste simpósio que chegou a ser repetido bienalmente.

Um trabalho desenvolvido no Brasil embora deva levar em conta as características nacionais de aproveitamento dos resultados, deve também apoiar-se em resultados de pesquisas internacionais extraíndo as informações que permitam a "queima de etapas" [3]. Por outro lado todo trabalho experimental é fortemente caracterizado pela disponibilidade de recursos para pesquisa. Baseado na experiência anterior de um protótipo de laboratório [4], resolveu-se construir um armazenador para veículo na sua configuração mais simples, isto é, com recarga intermitente e sem regeneração. Desta forma o trabalho centralizou-se no desenvolvimento de um módulo de armazenamento e de uma transmissão. O projeto foi adaptado para um rebocador industrial da Empresa SKAM, obtido por empréstimo.

Neste trabalho serão apresentados alguns aspectos referentes ao projeto e desempenho deste veículo. O sistema de tração é constituído por um volante de inércia de aço AISI 4340 fundido a vácuo, material gentilmente cedido pela Indústria de Aços ELETROMETAL, por uma redução 4 : 1 de um par de engrenagens helicoidais fabricadas por especial deferência pela Indústria ROMI, e de um gerador adaptado a partir de uma máquina utilizada em vagões ferroviários pela Firma ECIL. O gerador alimenta o sistema elétrico padrão existente no rebocador da SKAM.

O módulo de armazenamento é carregado através de um dispositivo acionado por um motor hidrostático. A autonomia obtida para o veículo, 7 minutos, foi menor que na previsão original (20 minutos) em grande parte pela falta de vácuo no recipiente que contém o volante. O veículo apresentou boa manobrabilidade e uma estabilidade adequada para movimento qualquer em superfície horizontal. Dinamicamente manifestou-se um problema de ressonância na faixa de 8000 rpm que, embora não chegue a prejudicar a operação deve ser estudado em especial.

DESCRIÇÃO DO PROJETO

Embora com aplicações diversas, as unidades de armazenamento de energia utilizadas apresentam uma estrutura semelhante. O componente fundamental é o volante armazenador de energia, constituído de

inércia, eixos, mancais, sistema de vácuo, sistema de lubrificação e sistema de proteção.

Foi construído um protótipo de engenharia constituído, basicamente, de um rebocador industrial, no qual a alimentação do motor de tração de corrente contínua é feita através da energia retirada de um volante, ao invés de baterias.

As características básicas deste protótipo (mostrado na Figura 1) permitem, avaliar a aplicabilidade de volantes em veículos e, em se tratando de um protótipo ainda são necessárias algumas melhorias tecnológicas para se viabilizar a custos compensadores tal emprego.

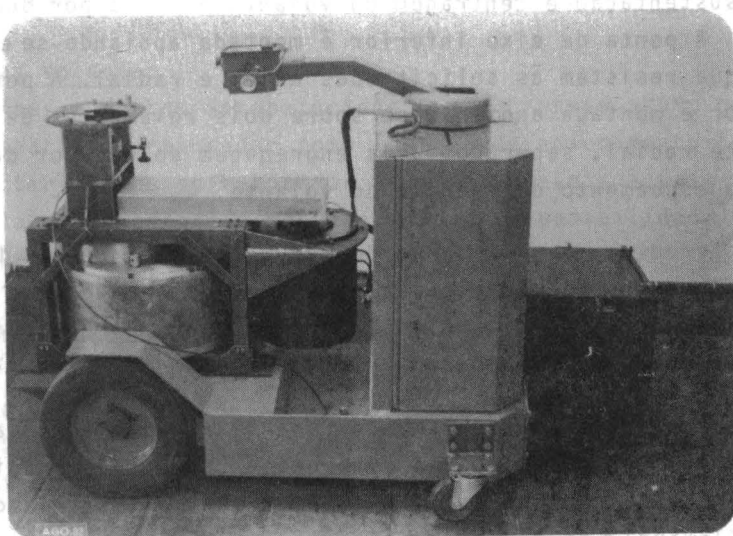


Figura 1. Vista de conjunto do protótipo

O método básico de projeto para a definição das medidas de parâmetros do volante foi o mesmo desenvolvido anteriormente em outros protótipos [5].

Considerando-se como velocidade máxima 12000 rpm como limitação tecnológica da transmissão mecânica, determinou-se os seguintes parâmetros:

Energia máxima armazenável	$E = 1,5 \text{ kWh}$
Diâmetro	$D = 490 \text{ mm}$
Tensão da máxima rotação	$\sigma_p = 307 \text{ N/mm}^2$
Máxima rotação	$N = 12000 \text{ rpm}$
Altura do pacote de discos	$H = 154 \text{ mm}$
Inércia	$I = 6,8 \text{ kgm}^2$
Massa	$M = 228 \text{ kg}$

O volante está montado com seu eixo de rotação na vertical. Nesta posição foi comprovado em trabalhos anteriores que são menores as solicitações nos mancais, decorrentes da inércia do volante e da movimentação do veículo. Consequentemente são menores também as solicitações nos eixos.

A sustentação e centragem do volante é feita por duas pontas de eixos. A ponta de eixo inferior é montada apoiando-se em dois rolamentos que resistem às solicitações axial e radial. A ponta do eixo superior é montada apoiando-se sobre dois rolamentos de resistência somente radial, separados pela engrenagem do redutor da alimentação e do escoamento da energia do volante.

Um terceiro eixo de saída do redutor é apoiado em dois pontos por rolamentos de sustentação radial. Neste eixo está montada a engrenagem do redutor, a polia da correia dentada que aciona o gerador e possuindo na extremidade um acoplamento tipo roda-livre.

A outra parte do acoplamento roda-livre está montada em alinhamento rigoroso com um quarto eixo que é sustentado em dois pontos por rolamentos de contato angular e tem na outra extremidade um acoplamento flexível e de rápida acoplagem.

Com esta configuração tornou-se possível a alimentação do volante com o motor hidráulico que se desengata rapidamente para a translação do veículo. Este desengate é possível porque a roda-livre permite que o quarto eixo pare de rodar com o terceiro eixo na rotação de trabalho.

Do ponto de vista operacional o protótipo pode ser simplificado como sendo constituído de 4 elementos principais a saber: tomada de força, redutor/multiplicador, volante, gerador. Um esquema da interligação entre estes elementos e suas faixas de operação é mostrado na Figura 2.

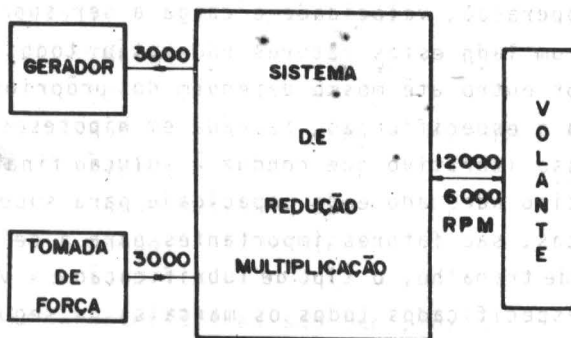


Figura 2. Esquema de operação do armazenador cinético de energia

A seguir detalharemos os principais componentes do protótipo esquematizado mais adiante na Figura 3, ou seja:

a) Volante:

Após contatos estabelecidos com a Empresa SKAM, optou-se pela utilização do rebocador como inércia de acionamento do volante. As características do rebocador foram favoráveis à sua utilização, particularmente pelo seu pequeno peso e disponibilidade de espaço.

Definiu-se que o diâmetro do volante não poderia exceder 50 cm por limitações de espaço e, que a energia máxima a ser armazenada deveria ser de 1,5 kWh. Com isto, ter-se-ia uma autonomia estimada em 15 minutos, até a recarga do volante por uma fonte externa elétrica.

O tempo de recarga previsto no projeto deveria ser de aproximadamente 2 minutos, requerendo uma potência de 67,5 kW, desenvolvida pelo motor elétrico que aciona o volante.

A forma escolhida para o volante deste projeto foi de um pacote de discos presos por parafusos passantes. Os motivos que levaram a esta escolha foram a facilidade de execução, uma tecnologia de projeto já desenvolvida e experiências acumuladas na realização de projeto anterior.

b) Mancais:

A escolha e especificação dos mancais requer, para seu perfeito desenvolvimento, que já estejam definidos vários parâmetros, tais como a solução construtiva a ser adotada, tipo de lubrificação,

temperatura de operação, velocidade e carga a ser suportada.

Como por um lado estes fatores não estão todos inicialmente já definidos e por outro até mesmo dependem dos próprios mancais, uma primeira escolha e especificação, baseada em hipóteses preliminares, inicia um processo iterativo que conduz à solução final e definitiva.

Além do tipo adequado e da capacidade para suportar as cargas nominais previstas, são fatores importantes para a seleção dos rolamentos a rotação de trabalho, o tipo de lubrificação e a vida prevista.

Ficaram especificados todos os mancais, da seguinte forma (ver de Figura 3):

- Volante:

Mancal Inferior - 7.305 BG contato angular em Tadem

Mancal Intermediário - 6.005-2 RS com 2 placas de vedação

Mancal Superior - 6.005

- Eixo Externo:

Mancal Inferior - 30.207 rolos cônicos

Mancal Superior - 6.207-2 RS com 2 placas de vedação

c) Redutor:

O sistema de transmissão utilizado no protótipo tem a finalidade de intercambiar energia entre tomada de força, volante e gerador. Este sistema atua como multiplicador durante o carregamento do volante e, como redutor durante a utilização da energia armazenada.

Entre os sistemas analisados optou-se por um par de engrenagens helicoidais na entrada e saída do volante, polias e correias dentadas para o acionamento do gerador, conforme mostra o esboço da Figura 3.

Foi adotado para o pinhão um número de dentes igual a 18, para evitar interferência, e para o diâmetro disponível um módulo normal de 2,5. A relação de transmissão sendo de 4 : 1 define uma coroa com 72 dentes. Adotou-se uma largura de 38mm.

Para acoplar o gerador do sistema ao redutor, foram projetadas duas polias iguais a uma correia sincronizada, para uma capacidade de transmissão de potência de aproximadamente 10 kW a uma velocidade máxima de 3000 rpm e uma relação de transmissão de 1 : 1.

d) Gerador:

A partir dos dados do motor de tração do rebocador foi especificado inicialmente um gerador de corrente contínua com as seguin

tes características:

Tensão:	24 V _{DC} ± 10%
Potência:	6 kW
Rotação:	2250 ± 740 rpm
Diâmetro:	360 mm
Comprimento:	550 mm
Campo:	série

Como tais características, são bem próximas daquelas apresentadas por geradores utilizados em veículos ferroviários, contratou-se a Firma ECIL Ltda., tradicional construtor deste ramo, que se prontificou a redimensionar o seu projeto de gerador tipo ESTATODINE, de forma a atender as especificações do projeto.

Este gerador apresenta, sobre os geradores de corrente contínua comum, as vantagens de não necessitar do sistema de comutação e de requerer baixíssima manutenção.

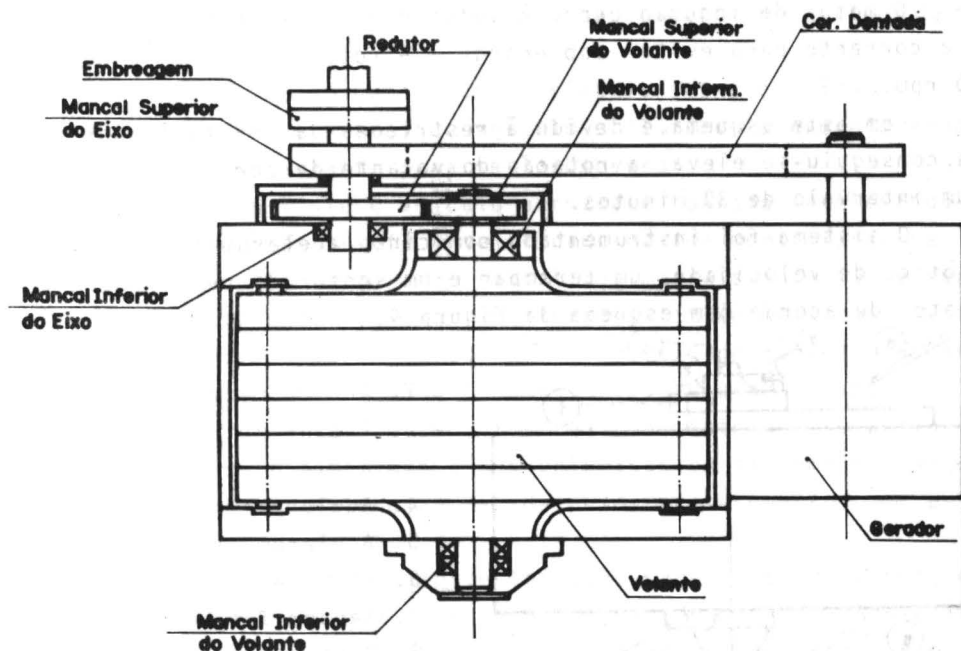


Figura 3. Armazenador cinético de energia

TESTES DE DESEMPENHO

Os testes foram realizados em duas fases: a primeira constituiu-se de testes preliminares, de caráter qualitativo, com o objetivo de se verificar, em condições de segurança, o desempenho geral do volante, do sistema de acionamento e da própria sistemática de testes; a segunda constituiu-se de testes finais de desempenho, de caráter quantitativo, com o objetivo de se verificar o comportamento do volante montado sobre o veículo e, do próprio veículo movimentando-se à custa da energia armazenada no volante.

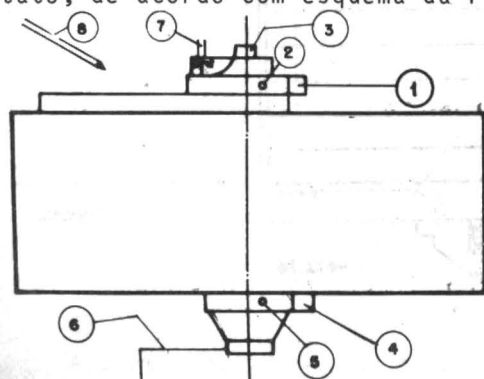
Para o acionamento do volante foi escolhida uma transmissão hidrostática devido às pequenas dimensões do motor hidrostático, da possibilidade de um controle contínuo da velocidade e tendo-se em conta que as estruturas para sustentar um motor de corrente contínua seriam exageradamente grandes.

Nessas condições e devido à existência de um motor trifásico de indução com potência de 30 HP e 5600 rpm, optou-se pelo acionamento da bomba por este motor, introduzindo-se um redutor de relação de transmissão 1,16 devido a bomba hidrostática admitir somente 3000 rpm na entrada, com o óleo pressurizado.

O motor de indução opera à velocidade constante, monitorando-se a corrente para evitar sobrecarga. A rotação à plena carga é de 3540 rpm.

Com este esquema, e devido às restrições da transmissão hidráulica, conseguiu-se elevar a rotação do volante de zero a 11.000 rpm em um intervalo de 30 minutos.

O sistema foi instrumentado com cinco acelerômetros, um sensor ótico de velocidade, um termopar e um sensor de temperatura por contato, de acordo com esquema da Figura 4.



1. Acelerômetro radial x
2. Acelerômetro radial y
3. Acelerômetro axial
4. Acelerômetro radial x'
5. Acelerômetro radial y'
6. Termopar
7. Sensor fotosensível
8. Ponta do termômetro

Figura 4. Montagem de instrumentação

Para fins de registro e documentação os sinais de velocidade e de aceleração foram levados a dois registradores, conforme indica do no esquema da Figura 5, para se obter os gráficos de queda de velocidade em função do tempo e da aceleração em função da rotação.

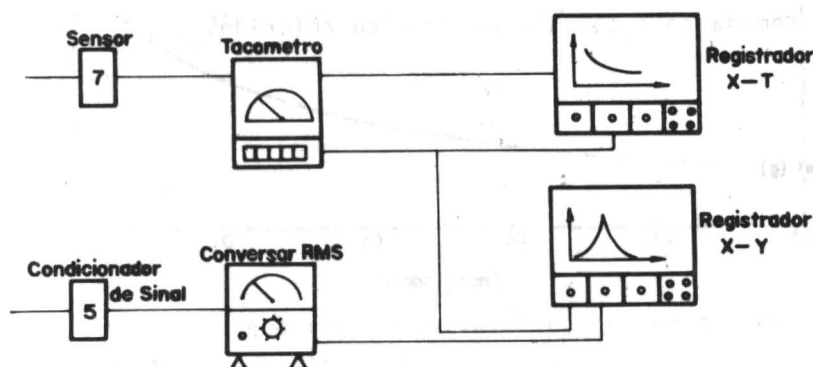


Figura 5. Esquema dos sinais dos registradores

Na segunda fase foram realizados basicamente dois tipos de testes:

- 19) Teste do comportamento do sistema sobre o veículo.
- 20) Teste de operação do veículo utilizando a energia armazenada no volante para se locomover.

No primeiro teste o veículo permaneceu parado, acelerando-se o volante desde repouso até a velocidade máxima monitorando-se os sinais de aceleração na direção radial nos mancais inferior e superior e na direção axial. Foram monitorados também os sinais de velocidade e temperatura. Após atingir a velocidade máxima o volante foi desacoplado do acionamento e deixado desavelerar, primeiro livremente e depois aplicando-se uma carga constante de 750 watts ao gerador. Foi assim observada a desaceleração do sistema em carga e em vazio bem como a aceleração medida pelos acelerômetros em ambas as situações.

No segundo teste o volante foi acelerado da mesma forma, monitorando-se os sinais até atingir a velocidade máxima. Nesse instante os cabos de transmissão de sinais foram desconectados e o acionamento desacoplado. O veículo foi então movimentado, observando-se as condições de operação e a autonomia.

Com o sistema montado sobre o veículo parado identificou-se um ponto de máximo no nível de vibração em torno de 10-300 rpm, com uma queda acentuada a partir desse ponto, o que caracteriza uma ressonância do sistema. Isto pode ser observado na Figura 6 que mostra os registros dos sinais de aceleração em função da velocidade do eixo de entrada do sistema. Deve-se aqui chamar a atenção que a velocidade do volante é quatro vezes maior que a do eixo de entrada, que foi tomada como abscissa no gráfico referido.

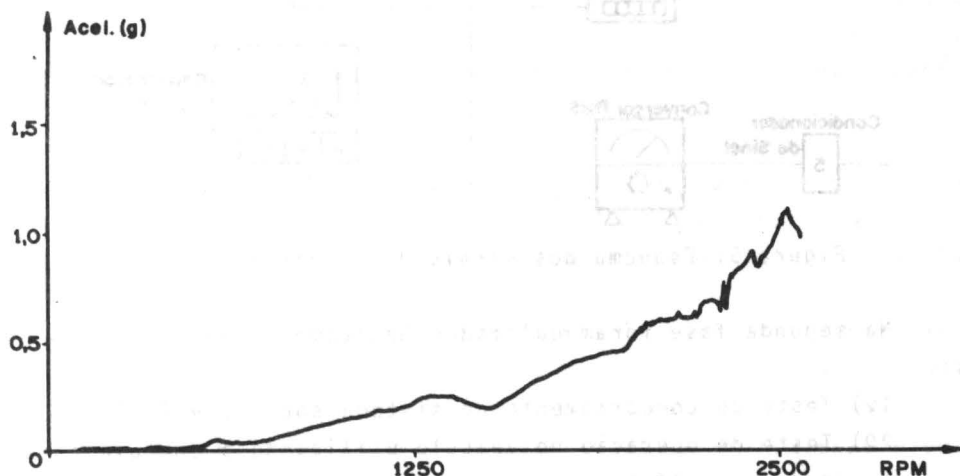


Figura 6. Nível de vibração em g's do mancal inferior do volante

A Figura 7 mostra o registro do sinal de velocidade durante a desaceleração do volante para a condição do gerador com uma carga constante de 750 watts. Nela fora, assinalados os pontos em que o gerador apresentava tensão de saída de 24 volts, que é o valor nominal, 20 volts que é o valor ainda possível de se operar e 15 volts, a partir do qual a tensão cai rapidamente a zero.

O último teste, de movimentação do veículo, apresentou uma autonomia de operação 7 minutos com o veículo saindo do ponto de acionamento, percorrendo um caminho com relativamente pouca manobra e poucas partidas, para finalmente retornar, de ré, ao ponto de onde saiu para uma possível recarga.

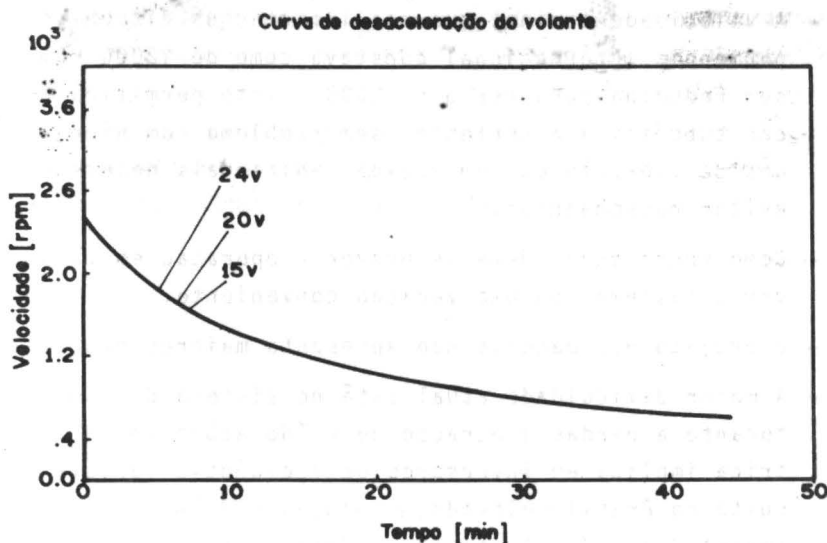


Figura 7. Desaceleração do volante com gerador em carga constante de 750 W

Um teste de partidas repetidas e percurso mínimo revelou a capacidade de até 120 partidas.

Cabe aqui observar que o gerador deveria, por especificação e testes de fábrica, continuar gerando tensão de 24 volts até uma rotação bem mais baixa, da ordem de 1.200 rpm. Isto poderá ser conseguido com uma revisão do sistema de controle do gerador e um reajuste adequado deste sistema. Com isso a autonomia do protótipo deverá ser bastante aumentada.

Verificou-se, ainda, que a temperatura nos mancais esteve sempre abaixo de 65°C, enquanto que a temperatura na periferia da caixa de proteção se apresentou bem mais elevada chegando-se a observar diferença de até 20°C nos testes mais prolongados.

CONCLUSÕES

A partir de uma experiência que transcende bastante aos resultados apresentados neste trabalho, e que foi acumulada nos últimos 8 anos em que vimos tratando com este assunto, pode-se traçar algumas conclusões:

- O volante de aço tem um projeto adequado à sua função. Ele será o preferido em aplicações industriais que correspondem às necessidades da próxima década. Eventualmente virá a ser substituído por um volante de fio de aço.

- A velocidade nominal que nas informações disponíveis da experiência internacional constava como de 12000 rpm, deve ser reduzida para cerca de 8000. Isto permitirá uma operação subcrítica a contento, sem problema com níveis exagerados de vibração ou com medidas adicionais necessárias para evitar ressonâncias.
- Como regra geral deve-se prever a operação em vácuo e prover o sistema com uma vedação conveniente.
- O projeto dos mancais não apresenta maiores problemas.
- A maior dificuldade atual está no sistema de transmissão no tocante a perdas e geração de ruído acústico. A solução elétrica implica em inversores de frequência variável, cujo custo no Brasil é elevado, a solução hidráulica em sistemas importados. A solução por redutores planetários é inexecutível do ponto de vista financeiro. Em outras palavras, para uma série de aplicações atingiu-se o limite daquilo que é razoável de serfeito no Brasil.

PERSPECTIVAS

Viabilizar um módulo de armazenamento por volante para aplicação veicular significa ter solução economicamente viável para a transmissão e para o comando elétrico ou hidráulico da mesma. Em termos de Brasil deve-se priorizar portanto os estudos nesta área.

Por outro lado mostram-se muito promissores os resultados com unidades integradas (seladas) para uso em nivelção de potência[6], bem como aplicações especiais que podem utilizar partes dos sistemas previamente desenvolvidos nos trabalhos realizados com o protótipo de laboratório e o protótipo veicular.

REFERÊNCIAS

- [1] Proceedings of the II European Symposium on Flywheel Energy Storage, Torino, Italy, May 3-13, 1983, 255 pgs.
- [2] Proceedings of the 1980 Flywheel Technology Symposium, Scottsdale, Arizona, USA, October 1980, 460 pgs.
- [3] Umweltfreundlicher Gabelstapler mit Schwungrad-Antrieb, Fördern und Heben, 33 nr.7/8 (1983) pp.549.
- [4] Weber, H.I. - "Apresentação do protótipo de laboratório de um veículo elétrico híbrido com volante," Anais do II CBE, Rio de Janeiro, Abril 81, pp.1171-1180.

- [5] Lepore Neto, F.P. & Rosa, C.A. — "Projeto de uma unidade de armazenamento mecânico de energia," Anais do I CBE, Rio de Janeiro, Dezembro 78, pp. 488-500.
- [6] Tardivo, J.E.; Zampieri, D.E. & Rosário, J.M. — "Análise do desempenho de um motor-gerador homopolar acoplado a um armazenador cinético de energia", Anais do VIII COBEM, Uberlândia, Dezembro 83, pp.79-89.

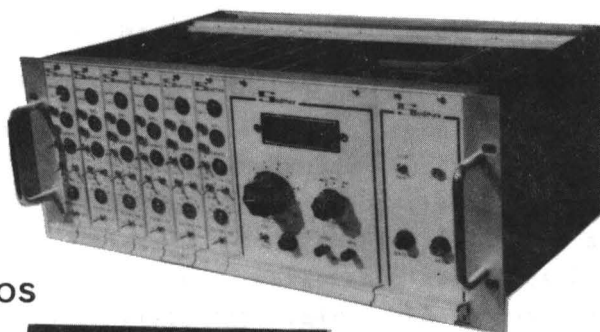


odmex

ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES

CONDICIONADORES AMPLIFICADORES
PARA EXTENSÔMETROS

•MEDIÇÕES
ESTÁTICAS
E DINÂMICAS



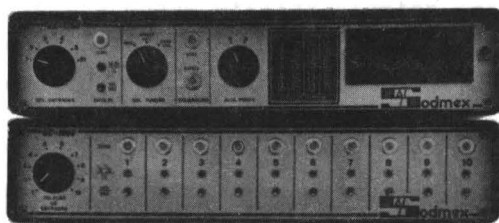
•EXTENSÔMETROS



•PRODUTOS DE
COLAGEM E
PROTEÇÃO

•PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS

•TREINAMENTO DE
PESSOAL



EXTENSOMETRIA BRASILEIRA

R.D.PEDRO H.O.BRAGANÇA, 240 - VILA JAGUÁRA - SP.
CEP: 05117 - TEL.: 260 7496 - TLX (011) 24794

SIMULATION OF RECIPROCATING COMPRESSORS: NUMERICAL METHOD AND COMPARISON WITH EXPERIMENTAL DATA

José Alberto dos Reis Parise

Dept^o de Engenharia Mecânica — PUC/RJ

William G. Cartwright

School of Mechanical and Production Engineering

Nanyang Technological Institute

Singapore

ABSTRACT

A model is described for simulating the thermodynamic behaviour of a reciprocating compressor. The compressor cycle is divided into small time-steps and a digital computer is used in the solution of partial differential equations which describe the energy balance in the cylinder control volume. Allowance is made for the effect of heat transfer to cylinder walls. Instantaneous mass flow rates are calculated in accordance with valve lift, which in turn, depends on valve dynamic characteristics. Results are compared with experimental data.

RESUMO

Um modelo de simulação do comportamento termodinâmico de um compressor alternativo é descrito. O ciclo do compressor é dividido em pequenos intervalos de tempo e um método numérico é utilizado na solução do sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o balanço de energia no volume de controle composto pelo cilindro. O efeito da troca de calor entre o gás e as paredes do cilindro é considerado. O fluxo instantâneo de massa é calculado em função da posição da válvula de sucção ou descarga, que, por sua vez, depende das características dinâmicas do sistema válvula-mola. Resultados são comparados com dados experimentais.

NOMENCLATURE

A	: area (m^2)
A_{ij}	: constants in equation of state, eq.(3)
C_D	: discharge coefficient
C_d	: drag coefficient
C_v	: viscous damping coefficient
D	: diameter (m)
F_{PL}	: valve pre-load (N)
g	: gravity acceleration (m/s^2)
h	: specific enthalpy (J/kg)
h	: film coefficient (W/m^2K)
k	: thermal conductivity (W/mK)
k_s	: spring stiffness (N/m)
L	: connecting rod length (m)
m	: mass (kg)
$\dot{m}$	: mass flow rate (kg/s)
Nu	: Nusselt number
p	: pressure (N/m^2)
Pr	: Prandtl number
Q	: heat (J)
R	: gas constant (J/kg K)
R	: crank radius (m)
s	: cylinder to piston distance (m)
t	: time (s)
T	: temperature (K)
U	: internal energy (J)
V	: volume (m^3)
W	: work (J)
w	: rotational speed (rad/s)
x	: piston distance from TDC (m)
y	: valve displacement (m)
γ	: isentropic index of expansion
θ	: crank angle
η_v	: volumetric efficiency
λ	: valve orientation coefficient

INTRODUCTION

The reciprocating type of compressor has been the subject of extensive development and is now capable of achieving a high standard of mechanical performance, in sizes ranging from a few Watts to several Megawatts of input power. Apart from many applications in process and manufacturing industries, reciprocating compressors have been used extensively for refrigeration and air conditioning. Heat pumping is a variation of refrigeration which is now receiving greatly increased attention because of its potential for energy saving, especially where heat is required at moderate temperature. It differs from refrigeration mainly in that interest is centered on the delivery of heat, rather than in the extraction of heat so as to sustain sub-atmospheric temperatures. A feature of heat pumping is that the temperature difference between the heat source and sink is likely to be more variable than in refrigeration. This results in a wider range of inlet and delivery pressures from the compressor. The heat flow rate or 'load' also varies widely. Variable speed of operation of the compressor is one method by which the changing operating conditions can be accommodated.

For these reasons, it is desirable to develop an analytical method of predicting the performance of any given compressor under different conditions of operation. Much research has already been undertaken, particularly on compressors working with gases approximating to the 'ideal gas' equation of state, $p v = R T$. Wambsganss and Cohen [1] pioneered in the analysis of spring loaded reed valves. Benson and Üçer [2] analysed the interaction between valve motion and pressure waves in the delivery and inlet ducts. Hamilton and Schwerzler [3] have modelled a commercial compressor, taking into account wave action, valve dynamics and real gas equations. A good level of accuracy was achieved though, as with all wave action calculations, data is required on the geometry of the inlet and outlet ducts, in addition to data on the compressor itself.

Some simplified analyses are also available in the literature. Squarer and Kothman [4] considered the valve problem by treating them as orifices with constant pressure drop. The same valve constant pressure drop approach was used by Hiller and Glicksman [5]. The authors have apparently taken into account the

main variables affecting compressor performance, even though the whole analysis was carried out on a 'lumped' basis over each stage of the compression cycle, i.e. no instantaneous analysis was made. Another simplified analysis came from Woollatt [6] whose main objective was to predict valve lift and pressure drop in air compressors. All the afore mentioned models dealt with perfect gas relationships only, and, apart from Hiller and Glicksman [5], did not consider heat transfer from cylinder walls. Prakash and Singh [7] proposed a model for a refrigeration compressor where pressures at suction and discharge chambers remained constant. The main shortcoming of their model, however, was to assume refrigerant vapour an ideal gas. Of importance is the attention given to heat transfer between suction and discharge gas streams, outside the cylinder, in the valve passages.

The present investigation aims to provide a relatively simple modelling of a compressor intended for refrigeration or heat pumping. Pressure fluctuations in the inlet and delivery ducts are ignored, so that pressures external to the compressor are considered to be steady throughout the cycle. The interaction between cylinders is then zero, so that the analysis can readily be applied to single or multiple cylinder single stage compressors. Real gas properties are taken into account by polynomial approximations to the equation of state of any working fluid. The dynamics of valve opening and closing is considered, and allowance is made for heat transfer from the cylinder.

ANALYTICAL MODEL

The principal equations which have been used in the compressor simulation are presented in this section.

Figure 1 is a diagram of a single cylinder of the compressor. The valves are operated by pressure difference between the cylinder and the inlet or outlet duct. The sequence of events within the cylinder is: with suction and delivery valves closed, gas trapped in the clearance volume expands. The suction valve then opens, and gas flows into the cylinder. On the compression stroke, both valves are closed, until cylinder pressure lifts the delivery valve. Gas is then displaced into the delivery duct until the delivery valve closes and the cycle is repeated.

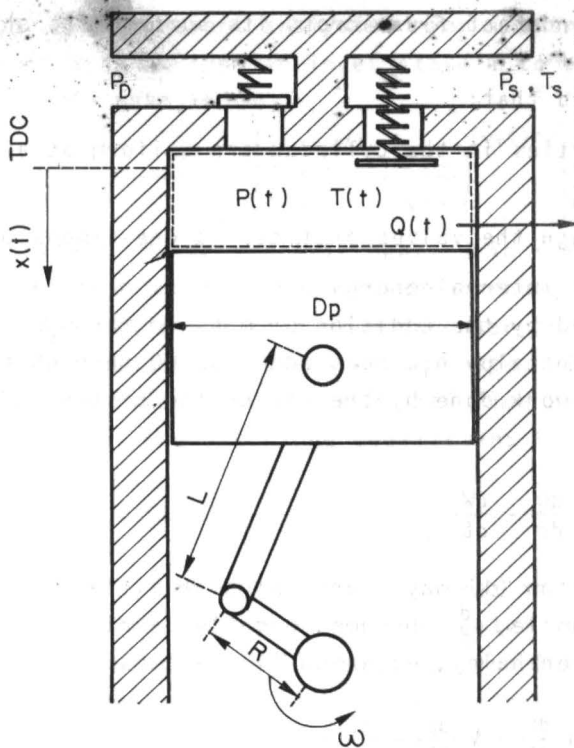


Figure 1. Diagrammatic model of a single cylinder reciprocating compressor[®]

The following six basic equations comprise the compressor analytical model:

- i) Energy equation applied to the cylinder control volume;
- ii) refrigerant state equation;
- iii) mass flow rate equations for refrigerant flow through the valves;
- iv) suction and discharge valve dynamic equations;
- v) heat transfer equation;
- vi) compressor kinematics equation (instantaneous cylinder volume equation).

Energy Equation

The control volume can be considered as an open system with two flow boundaries (suction and discharge valves), a moving

boundary (piston) and heat flux across its surface, as shown on Figure 1.

It is assumed that:

- i) the gas properties in the cylinder are uniform at any time, and
- ii) the flow through the valves orifices is one-dimensional.

The specific internal energy u of a mass m of gas in the cylinder is affected by the addition of mass dm through the inlet valve at specific enthalpy h_i , heat addition dQ through the cylinder walls and work done by the gas on the piston, dW . The energy balance is

$$\frac{dU}{dt} = h_i \frac{dm}{dt} + \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (1)$$

Quantities in equation (1) may change sign at different parts of the cycle. For example, $\frac{dm}{dt}$ becomes negative during discharge.

In terms of enthalpy, equation (1) becomes:

$$(h - h_i) \frac{dm}{dt} + m \frac{dh}{dt} - V \frac{dp}{dt} - \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2)$$

where V is the cylinder volume at time t .

Equation of State

The real gas equation of state was assumed to take the form of an equation relating enthalpy h , temperature T and pressure p ;

$$h = \sum_{i=0}^{i=3} (A_{i0} + A_{i1}T + A_{i2}T^2) p^i \quad (3)$$

Values for coefficients A_{00} to A_{32} are provided by Gatecliff and Lady [8], for a number of halogenated refrigerants.

It may be noted that equation (3) may also be applied to the ideal gas if all coefficients are zero except A_{00} and A_{01} .

Mass Flow Rate Equation

The flow of gas through the valves is highly complex, being three-dimensional, compressible, time dependent and frictional. It is treated as one-dimensional flow through a variable area

restriction in the present analysis. For isentropic flow through an orifice of area A_F from an inlet state 1 to a down-stream state 2, the mass flow rate is

$$\frac{dm}{dt} = A_F p_1 \left\{ \frac{2\gamma}{(\gamma-1)RT_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (4)$$

The gas constant R and specific heat ratio γ may be evaluated at the upstream state 1. The flow passage through an open, or partly open reed valve takes the form of a circular orifice, followed by radial flow between the reed and valve plate. The greatest restriction usually occurs in the radial flow region. For compressible flow, the discharge coefficient C_d approximates to

$$C_d = 0.703 + 0.138 \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - 1.515 \frac{p_2}{p_1} \right) \right] \quad (5)$$

At full valve lift, the effective flow area is equal to the actual area $A_{\max}$ multiplied by C_d . At partial valve lift, experiments by Woollatt [6], Wambsganss & Cohen [1], and Davis [9] have shown that the effective area of typical reed valves increases non-linearly as they open. Figure 2 shows the data provided by these investigators, together with the empirical curve fit used in the present analysis which gives the effective area A_F at valve lift y as

$$A_F = C_d A_{\max} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{y_{\max}} \right) \quad (6)$$

Equations (4), (5) and (6) enable the instantaneous mass flow rate through a valve to be estimated at any lift y , when pressure differences are known.

Valve Motion Equation

Lift and pressure difference are related by the dynamics of valve motion. The valve may be considered as being acted on by four forces. These are the aerodynamic force caused by pressure difference, the spring force, a viscous damping force, and finally the gravitational force. Newton's law of motion applied to the valve give an equation for the valve lift, gives

$$m_T \frac{d^2 y}{dt^2} + c_v \frac{dy}{dt} + k_s y = -F_{PL} + \lambda(m_v + m_s)g + C_D A_p \Delta p(t) \quad (7)$$

The total mass m_T of the valve includes a fraction of the spring mass, c_v is the viscous damping term, k_s is the spring stiffness and F_{PL} is the spring pre-load force when the valve is closed. The pressure difference acting on the projected area A_p of the reed is Δp and the coefficient C_D , typically 0.8, accounts for the variation of Δp across the surface of the reed. The sign of the gravitational term, $(m_v + m_s)g$, depends on the direction in which the valve opens, and is given by λ (equal to 1 or -1).

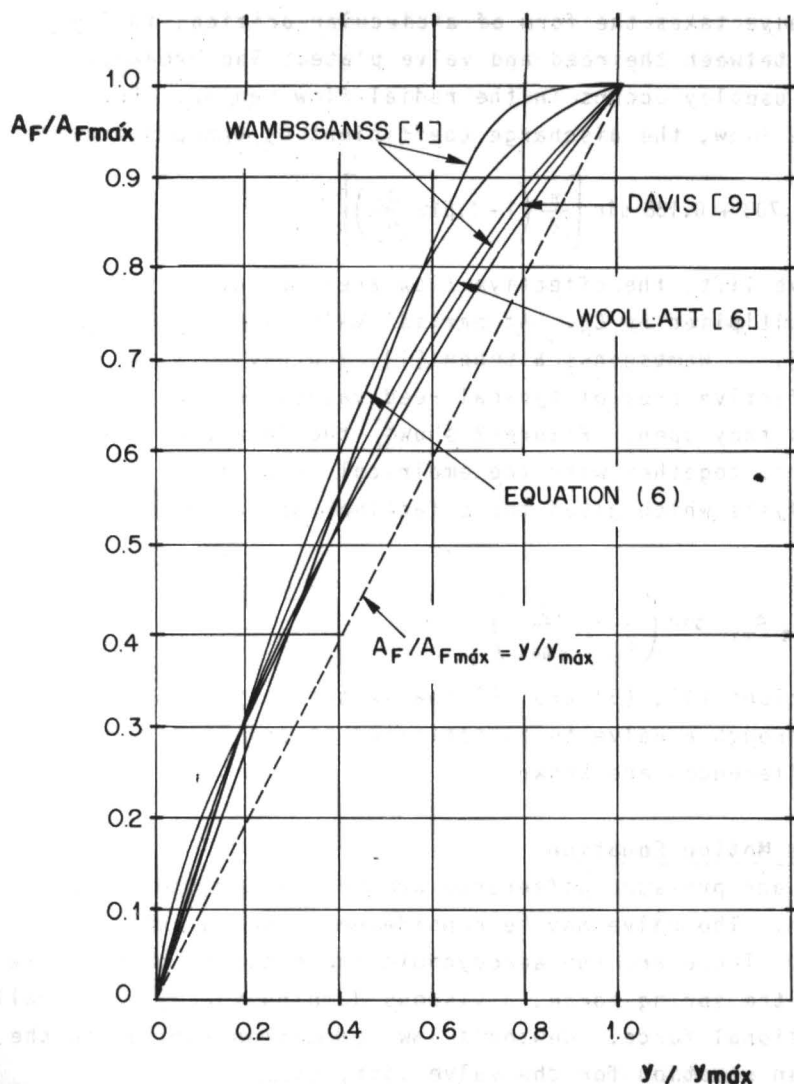


Figure 2. Valve effective flow area as a function of valve displacement

Other forces which actually exist have not been considered. Woollatt [6] suggests a force component due to valve bouncing after impact against the seat. This bouncing force is also present at maximum displacement and the rebound velocity is equal to the product of a coefficient of restitution by valve velocity at $y_{\max}$ or $y = 0$, whichever is the case. Considering no valve bouncing is equivalent to assuming that all the valve kinetic energy is lost when the valve reaches its seat. Oil 'stiction' force also can occur, delaying the valve opening. The value of this stiction force would depend on the amount of oil present in the gas stream.

Equation (7) has two time-dependent variables, P and y , and is therefore coupled to energy and mass flow rate equations. However, considering that the numerical solution progresses in small time-steps (0.5 degrees of crank angle), it is reasonable to assume that $\Delta p(t)$ remains constant throughout any one time interval. Therefore,

$$\Delta p(t) \approx \Delta p \quad (8)$$

Defining F_V as the sum of all time-independent force components, equation (7) becomes:

$$m_T \frac{d^2 y}{dt^2} + c_V \frac{dy}{dt} + k_S y = F_V \quad (9)$$

where

$$F_V = -F_{PL} + \lambda(m_V + m_S)g + C_D A_p \Delta p \quad (10)$$

Equation (9) can now be integrated to give explicit expressions for valve displacement and velocity. This approximation was used by Hai and Squarer [10] in a model of an undamped valve, but, to the authors knowledge, no work has yet employed it in a damped system.

Heat Transfer Equation

The rate of heat transfer $\frac{dQ}{dt}$ from the cylinder wall at temperature T_w to the gas in the cylinder at temperature T is given by

$$\frac{dQ}{dt} = h A_C (T_w - T) \quad (11)$$

A_c is the area of the cylinder head and the fraction of the cylinder wall not covered by the piston; h is the corresponding value of the heat transfer coefficient, varying at different parts of the stroke and calculated by the method of Adair et al. [11]. The cylinder wall temperature T_w was regarded as constant throughout the cycle. For air cooled cylinders, the value of T_w was selected to give a heat flow, between the cylinder and the surroundings, equal to the integrated heat flow between the gas and the cylinder wall during the complete cycle. The external area of the cylinder must, of course, allow for fin area and effectiveness, and the external heat transfer coefficient must be appropriate to the type of cooling, e.g. forced or natural convection.

The heat transfer coefficient is obtained from the corresponding Nusselt number, Nu , defined as,

$$Nu = \frac{h D_e}{k} \quad (12)$$

where k is the thermal conductivity and D_e is an characteristic length that takes into account the instantaneous shape of the working space. D_e is given by,

$$D_e = \frac{3 D_p s}{s + D_p} \quad (13)$$

where s is the instantaneous distance from the top of the piston to the cylinder.

According to Adair et al [11] the Nusselt number is given by,

$$Nu = 0.53 Re^{0.8} Pr^{0.6} \quad (14)$$

The Reynolds number was defined by means of the characteristic length, D_e and a 'swirl velocity', w_g .

Kinematic Equation

A kinematic equation relates V , t and crank geometry:

$$V(t) = \frac{\pi D_p^2}{4} \left\{ x + R(1 - \cos \omega t) + L \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \sin \omega t \right)^2} \right] \right\} \quad (15)$$

where D_p^2 is cylinder diameter, x is the effective length of the clearance volume, R is crank length, L is connecting rod length and ω is shaft speed.

METHOD OF SOLUTION

The equations presented in the previous section form a set of coupled non-linear ordinary differential equations. By integration with respect to time, a complete analysis of the sequence of events occurring in the compressor may be obtained. Input data to the computation includes all relevant dimensions of the compressor, valve characteristics, shaft speed, ambient temperature and heat transfer coefficient to the surroundings. The state of the refrigerant in the inlet manifold must be specified completely, but for the delivery manifold, only pressure need be prescribed. The state of the refrigerant within the cylinder is not known initially at any point in the cycle.

The cycle is divided into small time-steps, or crank-angle values. The solution procedure adopted was to re-arrange the governing equations as expressions for the rate of change of cylinder pressure p , temperature T and heat transferred Q . These three rate equations were solved by a fourth order Runge Kutta method to determine the increment in p , T and Q over each time step.

Starting with the piston at top dead centre, provisional starting values are needed for p , T and the cylinder wall temperature T_w . At the end of the cycle, final values of p , T and Q are obtained. The heat transfer from the gas to the cylinder wall must agree with that from the wall to the surroundings; if it does not, T_w is adjusted for a further cycle of calculations. End values of p and T may be used as starting values for the next cycle, or alternatively the adjustment may be modified by a damping factor. The cycle of calculations is repeated until the computation converges, so that final values of all variables at the end of the cycle are consistent with starting values at the beginning of the cycle.

Checks are also necessary to ensure that the time step is short enough. This is achieved by reducing the time step and ensuring that the same results are obtained. Typically, the necessary time increment corresponded to between 0.2° and 0.5° of crank movement, depending on shaft speed.

APPLICATION OF THE METHOD

Figure 3 shows a prediction of the performance of a compressor refrigerant 12 compressor operating over a wide speed range.

The simulation confirms the expected trends of decreasing volumetric efficiency with increasing speed, giving a non-linear increase of mass flow rate. Pressure drop across the valves also increases, so that with an inlet pressure of 5 bar, the minimum cylinder pressure during the suction stroke decreases from 4.7 bar at 200 rpm to only 2.2 bar at 2.200 rpm. The design speed is 900 rpm. At the delivery pressure of 10 bar, peak cylinder pressure rises from 10.4 bar to 14.9 bar over the same speed range. The combined effect of these irreversibilities causes the delivery temperature to increase from 68.9°C to the very high value of 93.9°C. The inlet gas temperature for these computations was 35°C, representing a superheat of almost 20°C.

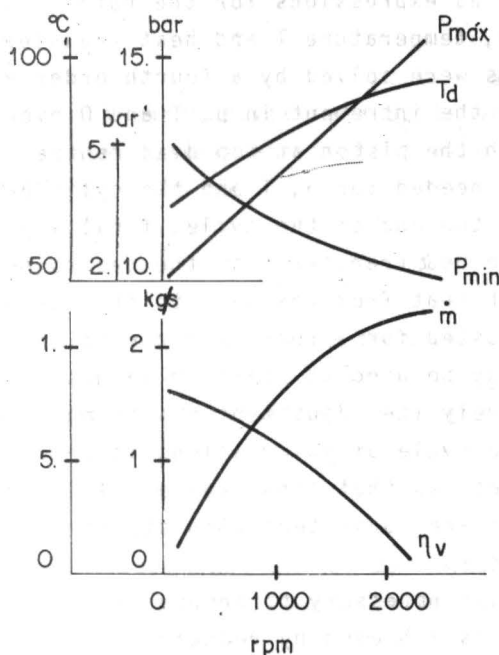


Figure 3. Effect of compressor speed on performance

COMPARISON WITH EXPERIMENTAL DATA

The simulation method has been applied to several compressors for which detailed geometrical data are known, but which have not been subjected to special tests to determine valve

discharge coefficient, effective area as a function of valve lift, or cylinder heat transfer rates. These quantities were determined by the empirical methods outlined in the Section devoted to the analytical method. Much of the available published data refers to air compressors, and the method has been applied to these, as well as refrigeration compressors, to estimate both overall performance trends and more detailed fluid properties within the cylinder.

Air Compressor

Figure 4 shows the variation of measured cylinder pressure and discharge valve displacement with crank angle for a single cylinder air compressor studied by Üçer [12]. Also shown is the cylinder pressure and valve displacement as predicted by the present model. The experiments were carried out on a small single stage air cooled compressor, pumping air from atmosphere to a delivery pipe and receiver with a nozzle at the end. Pressure variations up to ± 0.5 bar per cycle were observed at both the suction and delivery sides. Average suction and delivery pressure values were therefore estimated to act as input data for the model. The valves were helical spring loaded, of the poppet type.

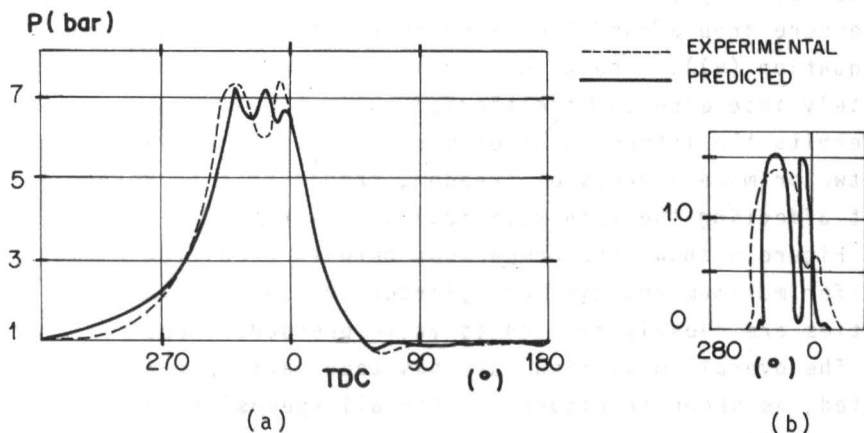


Figure 4. Comparison between predicted and experimental results from air compressor.

- a) Cylinder pressure vs. crank angle;
- b) Discharge valve displacement vs. crank angle.

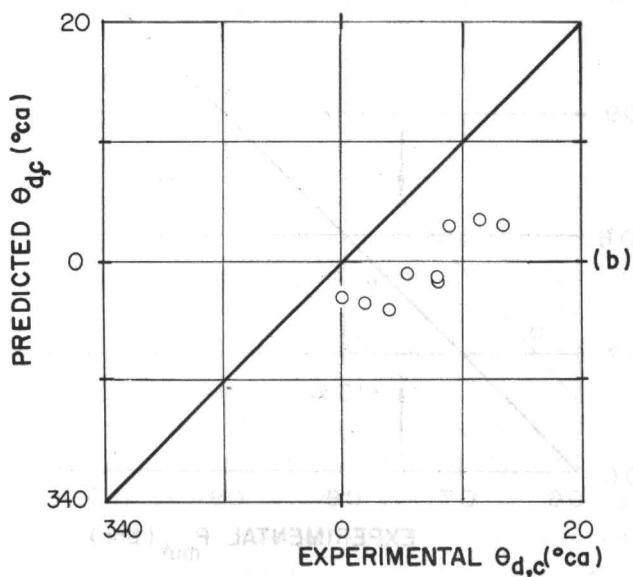
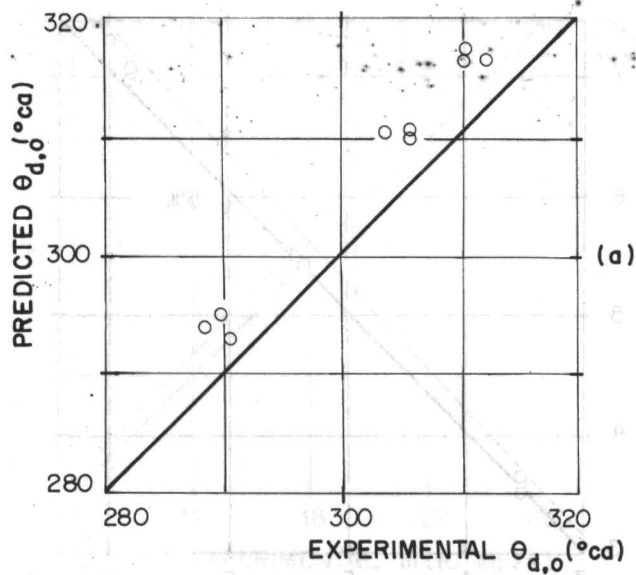


Figure 5. Comparison between experimental and predicted discharge valve opening ($\theta_{d,o}$) and closing ($\theta_{d,c}$) angles

A general accord between predicted and measured values is found in the pressure diagrams, particularly at the compression and re-expansion stages. The crank angle at which the valves open and close are also predicted satisfactorily, as shown in Figure 5, even though the estimated frequencies of pressure and valve oscillation during the charging and delivery stages are inaccurate. They are nearly twice those experimentally obtained. The assumption of constant suction and delivery pressure would be the first in the list for possible causes for such discrepancy. However, observation of the theoretical results from Benson and Üçer [2], whose model has taken into account pressure variation in both suction and discharge lines, shows that frequency patterns similar to those predicted by the present model were obtained. Therefore, the allowance for wave action would present no improvement over the results. Considering that the valve modelling in both analyses does not differ considerably, it may happen that the problem lies in this area. In fact, the valve model did not consider valve sticking and bouncing. Wambsganss and Cohen [1] have also pointed out that the one-degree of freedom valve model is, sometimes, insufficient to describe the valve behavior wholly.

This fact emphasizes one advantage the present model has over the majority of models available in the literature. By assuming the pressure drop across the valve as constant over a time-step (see Equation (8)), a solution for valve velocity and displacement completely independent of the thermodynamic model was made possible. This permits the introduction of more sophisticated valve models (with two or more degrees of freedom, should this be necessary) without affecting the main numerical solution.

Figure 6 shows the comparison between predicted and measured values for maximum and minimum cylinder pressures. These quantities are closely related to valve pressure drop.

The overall mass flow rate has been satisfactorily predicted, as shown in Figure 7. For all speeds the discrepancies were under 10%, with the best results being obtained at the lower speeds. The general trend was for predicted mass flow rate to be higher than the experimental value. An explanation may be that the discharge valve was predicted to stay open for a period of time somewhat longer than it actually did, as shown on Figure 5.

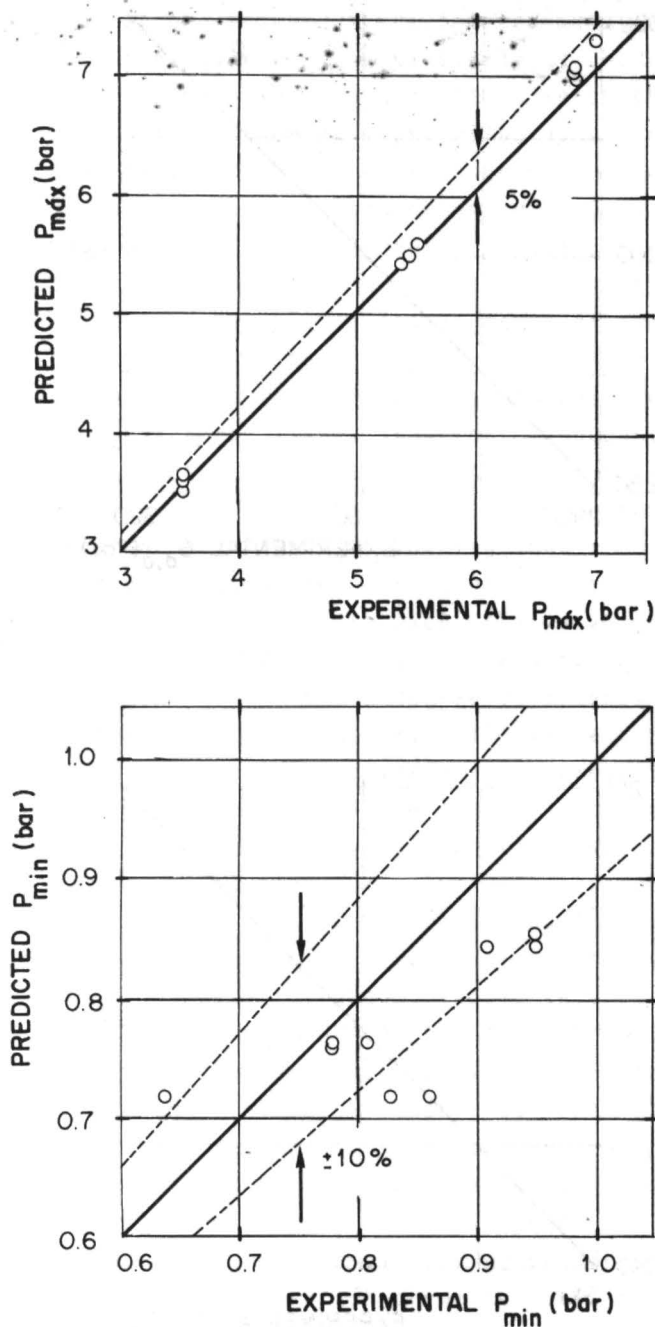


Figure 6. Comparison between experimental and predicted maximum and minimum pressures for air compressor

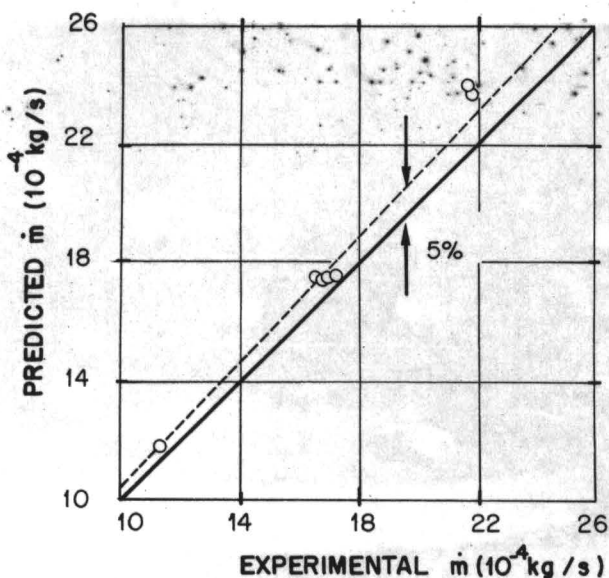
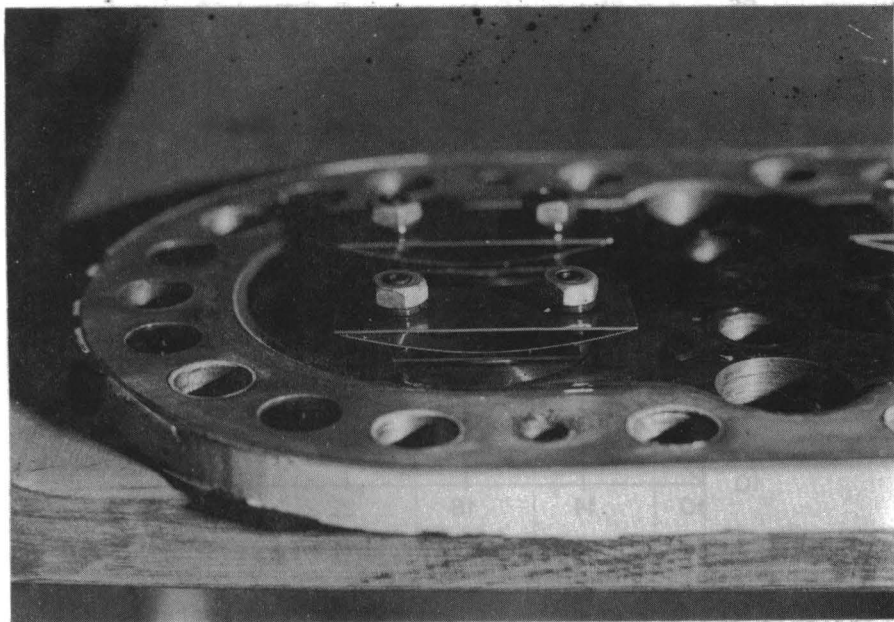


Figure 7. Comparison between experimental and predicted mass flow rate for air compressor

Heat Pump R-12 Compressor

This was a twin-cylinder compressor tested by Parise [13]. The discharge valves, assembled in a group of two per cylinder, were of the semi-elliptical spring loaded type. They were located at the cylinder head giving way to the discharge chamber at the top of the compressor. Figure 8 shows the details of the discharge valve plate assembly. Spring and valve were weighed in a precision balance with an accuracy of ± 0.001 g. The load-displacement characteristics of the springs were measured in a static dynamometer. Figure 9 shows the resulting force-displacement curve for one of the four discharge valves which enabled the determination of the spring pre-load and stiffness and also the valve maximum displacement. Very similar curves were obtained for the other three discharge valves.



mass flow rate for air compressor

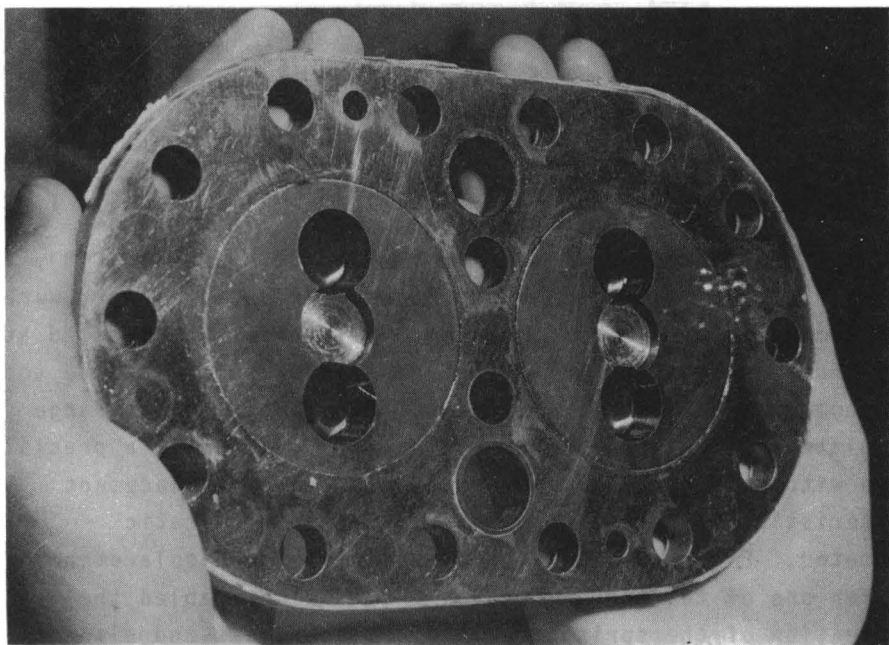


Figure 8. Discharge valve plate assembly

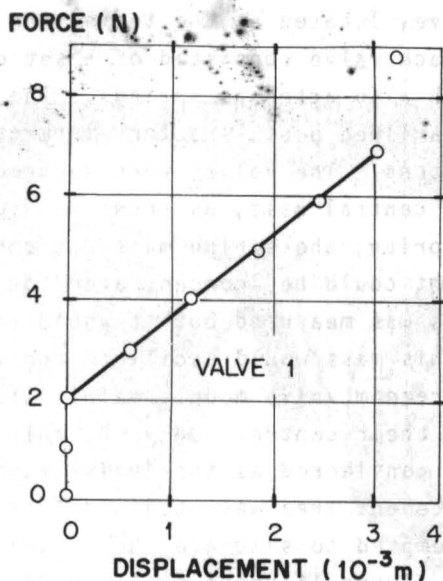


Figure 9. Load-displacement curve for one of the discharge valves

The gas leaving the cylinder would flow first through the circular valve ports in the cylinder head and then, after being deflected through 90 degrees, through a much smaller area, limited by the valve and its seat. This area, being the major restriction to flow, was assumed to be the characteristic flow area. Assuming that no tilt occurs during the valve movement, the maximum flow area per valve could be estimated by the following equation,

$$A_{F,\max,D} = \pi D_V y_{\max} \quad (15)$$

where D_V is the diameter of the valve port.

Similarly, the force area per valve was estimated as,

$$A_p = \frac{\pi D_V^2}{2} \quad (16)$$

The suction valve, located at the top of the piston, was of the diaphragm type. Each valve consisted of a set of three perforated discs, which also acted as springs. The gas charge was taken via lateral streamlined ports and then internally through the 'double trunk' pistons. The valves were secured to the piston, with no pre-load, by a central bolt, as shown in Figure 10. Since the valve acted as a spring, the spring mass was considered to be zero, so that all weight could be 'concentrated' on the valve itself. The valve mass was measured but it would be unrealistic to consider that all this mass would oscillate the way described by the one-degree of freedom valve model, mainly because the discs were firmly secured at their centre. Only one third of the weighted mass was then considered as the 'valve mass', m_v .

The load-displacement area was obtained from static measurements which attempted to simulate the actual loading of the valve under gas flow. Figure 11 shows the load-displacement curve for one of the suction valves. As expected, both valves showed a variable stiffness characteristic, becoming stiffer at higher loads. Even though the valve stiffness could be easily described by a polynomial function of the displacement [2], the present model only accepts a fixed value. Therefore, a compromising average value had to be estimated. No pre-load was found and a relatively small value for the maximum displacement was obtained. Other modes of valve displacement, for example non-axisymmetrical bending, are possible.

Figure 12 shows the comparison between experimental and predicted mass flow rates. It can be seen that the model has not been as successful in predicting compressor capacity as it was for the air compressor. Predicted values exceeded the experimental results by an average margin of 25%. In contrast, with an average error of 5°C, the prediction of the average delivery temperature can be considered as good, as seen in Figure 13.

From the results it can be concluded that the modelling for the suction valve was inadequate. Perhaps a dynamic flow test for the suction valve, as carried out by Wambsganss and Cohen [1] could show a different load-displacement curve, directly affecting the maximum displacement and maximum flow area.

Over-prediction of mass flow rate may also indicate that important restrictions to gas flow, between the suction and

delivery pressure measuring points, have been neglected by the simulation.

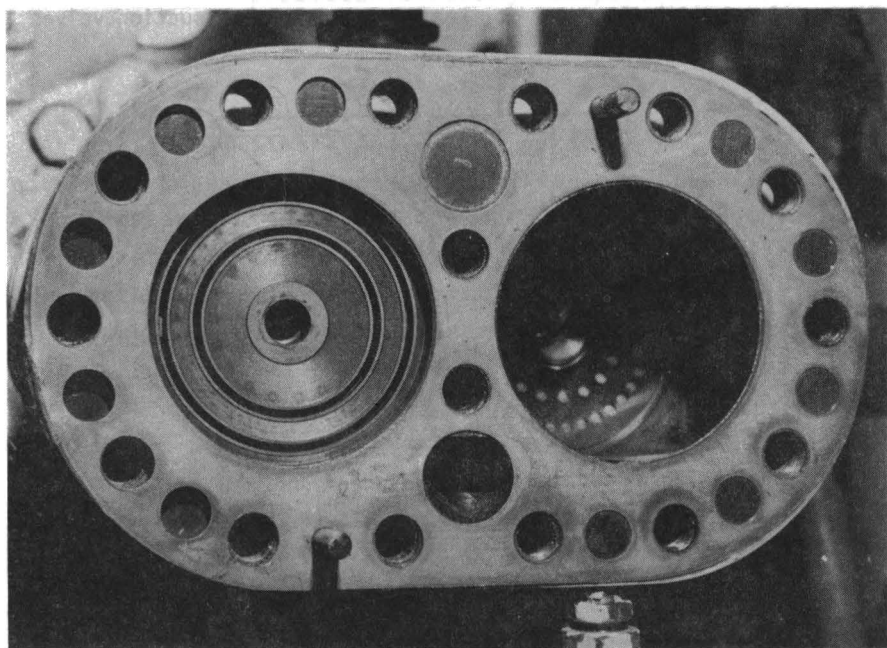
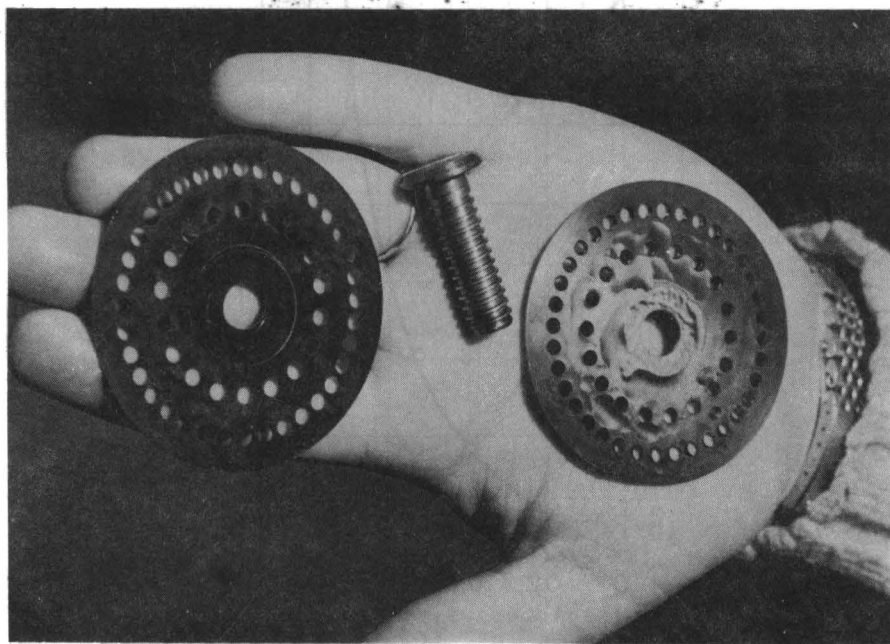


Figure 10. Detail of suction valve

FORCE (N)

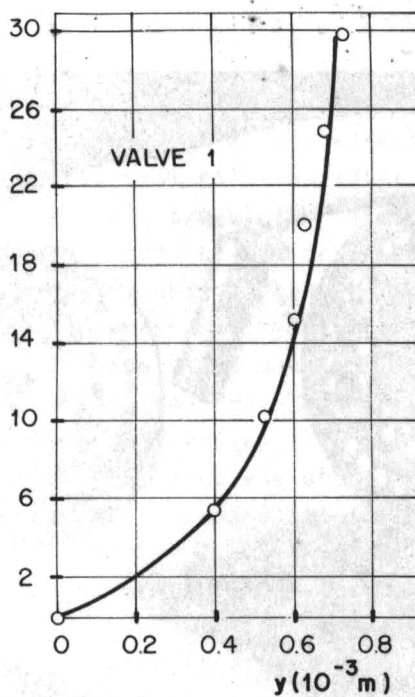


Figure 11. Load-displacement for heat pump compressor suction valves

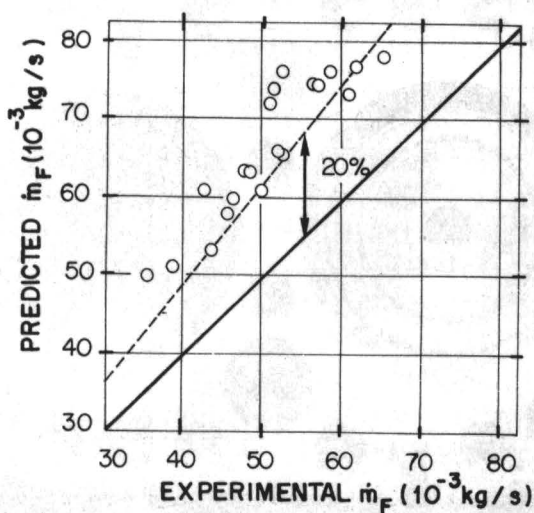


Figure 12. Comparison between experimental and predicted values of mass flow rate

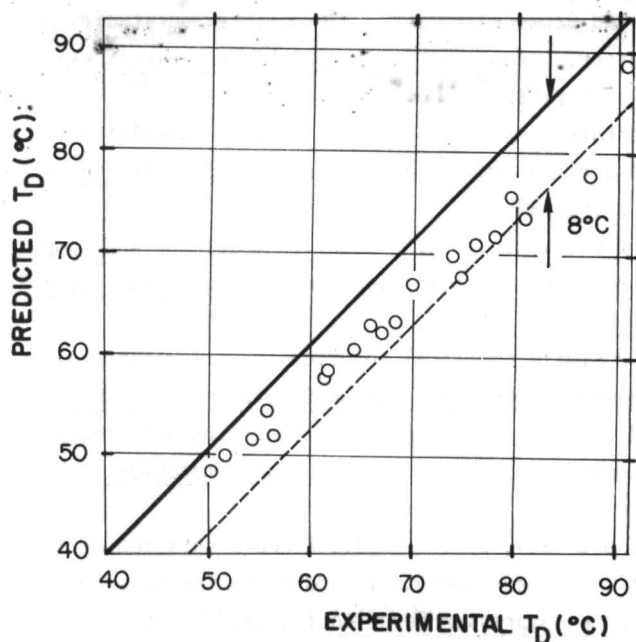


Figure 13. Comparison between experimental and predicted discharge temperature

CONCLUSION

An analytical simulation of the performance of a reciprocating compressor is presented. When dimensional details of the compressor are provided, the method enables the overall and internal performance to be estimated. When compared with test data, the method gives a good qualitative estimate of performance trends, though improvements are needed to account for mechanical losses and a more accurate estimate of valve motion is desirable.

REFERENCES

- [1] Wambsganss, M.W. and Cohen, R. — Dynamics of a reciprocating compressor with automatic reed valves. Proc. XII Int. Congress of Refrigeration, Paper 3.06, Madrid 1967.
- [2] Benson, R.S. and Üçer, A.S. — Some recent research in gas dynamic modeling of compressor systems. Proc. 1972 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.491-498.

- [3] Hamilton, J.F. and Schwerzler, D.D. — Computer aided studies of a refrigeration compressor. Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, vol.100, pp.599-603, October 1978.
- [4] Squarer, D. and Kothmann, R.E. — Digital computer simulation of a reciprocating compressor - A symplified analysis. Proc. 1972 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.502-505.
- [5] Hiller, C.C. and Glicksman, L.R. — Detailed modelling and computer simulation of reciprocating refrigeration compressors. Proc. 1976 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.12-17.
- [6] Woollatt, D. — A simple numerical solution for compressor valves with one degree of freedom. Proc. 1974 Purdue Compressor Tech. Conf., p.159-165.
- [7] Prakash, R. and Singh, R. — Mathematical modelling and simulation of refrigerating compressors. Proc. 1972 Purdue Compressor Tech. Conf., pp. 274-285.
- [8] Gatecliff, G.W. and Lady, E.R. — Explicit representation of the thermodynamic Properties of Refrigerants 12 and 22 in the Superheat Region. Proc. 1974 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.287-290.
- [9] Davis, H. — Effects of Reciprocating compressor valve design on performance and reliability. Proc. Instn. Mech. Engrs., 1969-70, vol.184, Pt 3R. Published in I. Mech. E. Conf. on 'Industrial Reciprocating and Rotary Compressors, Design and Operational Problems'. October 1970, paper 2, pp.9-23, London, U.K.
- [10] Hai, S.M. and Squarer, D. — Computer simulation of multicylinder compressors. Proc. 1974 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.178-185.
- [11] Adair, R.P.; Qvale, E.B. and Pearson, J.T. — Instantaneous heat transfer in reciprocating compressors. Proc. 1972 Purdue Compressor Tech. Conf., pp.521-526.
- [12] Üçer, A.S. — Unsteady flow in reciprocating compressor systems. Ph.D. Thesis, February 1970, UMIST, U.K.
- [13] Parise, J.A.R. — Theoretical and experimental analysis of a diesel engine driven heat pump. Ph.D. Thesis, January 1983, UMIST, U.K.

O DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS DE BORDO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

Paul William Partridge

Professor Visitante

Fundação Universidade de Brasília

Departamento de Engenharia Civil

RESUMO

Este trabalho examina o avanço dos estudos com o método de elementos de bordo; BEM, no contexto brasileiro. Se considera o desenvolvimento da técnica, as dificuldades encontradas e algumas das maneiras disponíveis para superá-las.

ABSTRACT

This paper examines the progress made in Boundary Element Methods, BEM, in Brazil. Some of the problems encountered during the development of the technique are considered together with ways found to solve them.

INTRODUÇÃO

Seguindo os trabalhos de Lachat [1] e Brebbia [2] que estabeleceram os BEM como "weighted residual techniques", colocando os BEM no contexto de análise numérica como desenvolvimento lógico após os FEM, começaram a surgir os primeiros trabalhos no Brasil com o método, por exemplo Halbritter et al [3] e Gesteira [4].

Os primeiros trabalhos usavam elementos de contorno unidimensionais para analisar problemas bidimensionais aproveitando a vantagem principal do método, a de reduzir em um a dimensionalidade do problema. Os primeiros problemas analisados foram elasticidade bidimensional e problemas governados pela equação de Laplace.

Em 1980 Partridge e Melamed [5] apresentaram um trabalho de circulação de águas rasas usando elementos de contorno, mais tarde estendido à análise com sub-regiões [6]. Na sua tese [7] Melamed analisa uma série de problemas bidimensionais inclusive alguns com a variável tempo. Vários elementos são usados inclusive alguns curvos.

Em 1981 Curotto [8] apresentou um trabalho de análise de elasticidade tridimensional com o elemento triangular linear. O trabalho incluiu a representação da força de corpo devido ao aumento de temperatura como integral de contorno. Scheer [9] começou o desenvolvimento da análise tridimensional com outros elementos obtendo sucesso com o elemento retangular linear de quatro nós.

Seguindo o trabalho de Patterson e Sheikh [10], Partridge apresentou uma maneira de resolver os problemas encontrados por Scheer, que se encontra na referência [11]. Neste trabalho usa-se elementos triangulares e retangulares curvos no espaço.

Rudolf na sua tese [12] discute o mesmo assunto além de apresentar soluções para a rotação de um cilindro com a força de corpo considerada como uma integral de superfície. Novamente elementos quadráticos curvos no espaço são empregados. Neste trabalho segue-se os resultados de Danson [13].

Outros trabalhos brasileiros incluem os de Moreira e Wrobel [14] tratando análise de elasticidade bidimensional por sub-regiões e [15] que trata forças de gravidade como integrais de superfície.

A seguir examinaremos a inter-relação destes trabalhos e as maneiras encontradas para superar as dificuldades que iam aparecendo no desenvolvimento do BEM como ferramenta eficiente para análise do contínuo.

No contexto internacional o trabalho com os BEM tem sido intenso. Acompanhar este desenvolvimento está fora do âmbito deste paper, porém existem cinco congressos internacionais organizados por Brebbia nos anos de 78, 80, 81, 82 e 83 que seriam indispensáveis. A referência [18] refere-se ao último congresso sobre BEM realizado no Japão em novembro de 1983.

EQUAÇÕES PARA O CASO TRIDIMENSIONAL

Para elasticidade linear tridimensional a formulação usual é

$$c_{ij}^L u_j^L + \int_S u_j t_{ij}^* ds = \int_S t_j u_{ij}^* ds + \int_V b_j u_{ij} dv \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

onde

c_{ij}^l é constante

u_j^l é o deslocamento no ponto l na direção j

u_j deslocamento num ponto de contorno na direção j

t_j força de superfície num ponto de contorno na direção j

u_{ij}^* tensor de deslocamentos: solução fundamental

t_{ij}^* tensor de forças de superfície obtido por diferenciação da solução fundamental para deslocamentos e substituição na relação constitutiva

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16 \pi G(1-\nu)r} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (2)$$

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{8 \pi (1-\nu)r^2} \left\{ n_k r_{,k} (1-2\nu)\delta_{ij} + 3 r_{,i} r_{,j} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (3)$$

onde

n normal externa à superfície

n_i cossenos diretores da normal

r distância do ponto singular até o ponto de integração

G, ν constantes elásticas

δ_{ij} delta de Kronecker

As constantes c^l são calculadas pela imposição da condição do movimento de corpo rígido.

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i^p - x_i^l}{r} \quad (4)$$

onde

x_i^l coordenada do ponto singular na direção i

x_i^p coordenada do ponto de integração na mesma direção

Substituindo a relação entre geometria e incógnitas nodais conheci-

das de elementos finitos

$$u = \sum \phi_i u_i^n \quad t = \sum \phi_i t_i^n \quad (5)$$

após as necessárias transformações de coordenadas e integrando sobre todo o contorno para cada nó m e cada direção i se obtém uma expressão matricial cheia

$$c_{ij}^L u_j^L + H_{ij} u_j = G_{ij} t_j + B_i \quad (6)$$

o termo B_i representando as forças de corpo, e que será examinado em detalhe mais adiante. Esta equação pode ser resolvida para valores desconhecidos de u_j e t_j no contorno.

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A maneira mais fácil de integrar as equações sobre o contorno é a quadratura de Gauss. No caso de elementos unidimensionais quatro pontos bastam [2,3]. Porém a integração de Gauss não é recomendada para o cálculo de H_{ij} e G_{ij} para o caso do ponto singular estar no mesmo elemento sobre o qual a integração esteja sendo feita. Nos trabalhos citados neste caso a integração é feita analiticamente. Estes trabalhos usam portanto elementos unidimensionais constantes e lineares.

Melamed [7] calcula estas integrais para o caso de elementos unidimensionais quadráticos retos, e examina o caso do elemento unidimensional quadrático curvo. Neste caso é necessário assumir a forma da curvatura, por exemplo arco de círculo.

O cálculo para o caso de elementos com curvatura geral parece difícil.

A fonte da falta de precisão da quadratura de Gauss quando a integração está sendo feita sobre o mesmo elemento onde se encontra o ponto singular pode ser vista para elasticidade tridimensional nas equações (1,4).

Substituindo (4) em (2) e (3) e por sua vez está última em (1) vê-se que a equação (1) envolve termos divididos por potências de r , portanto, com o ponto de integração no mesmo elemento que o ponto singular o valor de r fica pequeno e esta é uma fonte de erro numérico.

Watson [16] apresenta algumas sugestões de como resolver es-

te problema. Ao menos que um $\bar{n}$ coincide com um ponto de integração r não fica zero, porém apesar disto, experiências mostram que o uso da integração de Gauss para elementos que contêm o ponto singular pode resultar em considerável erro, particularmente no caso de elementos de ordem mais alta [9,11,12].

Curotto [8] faz a integração exata para o elemento triangular de três nós. Scheer [9] tenta o mesmo para o caso do elemento retangular de quatro nós obtendo algum êxito apenas no caso do elemento com ângulos retos. Tal procedimento parece duvidoso no caso de elementos de ordem mais alta e/ou com curvatura.

Uma maneira simples de resolver o problema é apresentada por Patterson e Sheikh [10]. O ponto singular é localizado no $\bar{n}$, mais na normal externa traçada a partir do $\bar{n}$, a uma distância compatível com o tamanho dos elementos. Apresentam-se fórmulas para o cálculo da posição do ponto singular fictício para o caso bidimensional. Assim o ponto singular nunca é num elemento, e qualquer tipo ou ordem de elemento com ou sem qualquer tipo de curvatura pode ser integrado facilmente usando apenas os pontos de Gauss.

No caso tridimensional empregando elementos planos a posição do ponto singular fictício pode ser calculada como segue.

Considere-se que num $\bar{n}$ encontram-se vários elementos. Cada elemento terá uma normal definida por três cossenos diretores. Colocando

$$\begin{aligned} a &= \sum \cos(n_i, x) \\ b &= \sum \cos(n_i, y) \\ c &= \sum \cos(n_i, z) \end{aligned} \quad (7)$$

e somando sobre os elementos que se encontram no $\bar{n}$, se

$$s = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \quad (8)$$

as coordenadas do ponto fictício ℓ' ($x'_\ell, y'_\ell, z'_\ell$) serão

$$\begin{aligned} x'_\ell &= x_\ell + d \cdot a/s \\ y'_\ell &= y_\ell + d \cdot b/s \\ z'_\ell &= z_\ell + d \cdot c/s \end{aligned} \quad (9)$$

(x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) sendo as coordenadas do nó ℓ . d é a distância $\ell - \ell'$ que deve ser compatível com o tamanho dos elementos.

No caso de elementos não planos os cossenos diretores devem ser calculados para o elemento no nó em questão. Se a geometria for conhecida, este cálculo não oferece dificuldades. Em todos os casos, os cossenos diretores nos pontos de integração tem que ser disponíveis para avaliar a equação (3), portanto o esforço extra é pequeno.

FORÇA DE CORPO COMO INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

Na equação (6) o termo B_i devido à força de corpo merece atenção especial. Nos trabalhos iniciais de Brebbia [2] sugere-se que, para fazer a integração deste termo, se divide o volume do corpo em células. Este procedimento, além de aumentar o volume de dados de entrada, destrói a natureza do método como sendo puramente de contorno.

Existem vários trabalhos em que a integral devido às forças de corpo é calculada a partir de uma transformação em integrais de contorno. Curotto [8] usa o enfoque matemático dado na referência [17] para calcular a força de corpo devida aos efeitos de temperatura como integral de contorno. Neste trabalho usa-se o elemento triangular linear. Danson [13] apresenta porém uma análise de diversos tipos de forças de corpo, em que mostra como podem ser transformadas em integrais de contorno. Por exemplo no caso de rotação o último termo da equação (1) fica

$$\int_V b_j u_{ij}^* dv = B_i$$

$$B_j = \frac{(1+\nu)}{4\pi E} \int_S \left\{ n_m r_{,m} m_{jk} y_k - r m_{jm} n_m + \frac{1}{2(1-\nu)} (m_{nm} r n_j - n_m m_{ms} y_s r_{,j}) \right\} ds \quad (10)$$

onde n_i , ν , r , $r_{,i}$ tem o mesmo significado que antes. E é o módulo de Young. m_{jk} é definido por

$$m_{jk} = \rho \begin{vmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1 \omega_2 & -\omega_3 \omega_1 \\ -\omega_1 \omega_2 & \omega_3^2 + \omega_1^2 & -\omega_2 \omega_3 \\ -\omega_3 \omega_1 & -\omega_2 \omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{vmatrix}$$

onde ω_i são as velocidades angulares em redor dos eixos x_i , e y_i é a distância do ponto de integração até o eixo na direção i .

RESULTADOS

A seguir apresentam-se resultados para o caso de um cilindro mostrado na Figura 1. O problema foi analisado usando pontos singulares fictícios. O caso é de rotação ao redor do eixo z , a integral de volume devido à força de corpo é substituída usando a equação (10).

Os dados do problema são:

Malha: 74 nós, 24 elementos quadrilaterais, quadráticos

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0,3$

$\rho = 7,8 \text{ tonnes/m}^3$; rotação 10.000 rpm

raio interno 10mm, raio externo 20mm, altura 20mm

Resultados para uma fatia de 90° encontram-se na Tabela 1.

Observe-se que há boa concordância entre os resultados obtidos pela análise com elementos de contorno e a solução exata.

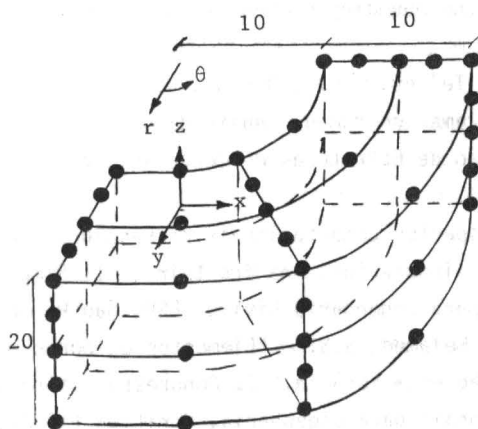


Figura 1. Cilindro com rotação

Tabela 1. Resultados para cilindro com rotação

Raio, cm	Deslocamento radial, cm		Tensão σ_r , KN/cm ²	
	BEM	Exato	BEM	Exato
1	1,45	1,50	3,18	3,16
1,45	1,26	1,22	1,77	1,80
2	1,16	1,16	1,22	1,22

CONCLUSÕES

Viu-se o desenvolvimento do método de elementos de contorno no contexto brasileiro, examinou-se como superar os problemas de integração exata das soluções fundamentais para o caso de integração sobre elementos contendo o ponto singular, além de como fazer uma integral de contorno das forças de corpo. Viu-se, portanto, que o método vai crescendo e superando as dificuldades inicialmente encontradas. Pode-se ver na Tabela 1 que o método apresenta bons resultados.

REFERÊNCIAS

- [1] Lachat, J.C. — "A further development of the boundary integral technique for elastostatics," These Ph.D., University of Southampton (1965).
- [2] Brebbia, C.A. — "The boundary element method for engineers," Pentech Press, London (1978).
- [3] Halbritter, A.L.; Telles, J.C. e Mansur, W.J. — "Aplicação dos elementos de contorno a problemas de campo," Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, CPGE, UFRGS, Porto Alegre (1978).
- [4] Gesteira, C. — "Aspectos computacionais na resolução de problemas de valor de contorno com singularidade na fronteira," II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, CESP, São Paulo (1978).
- [5] Partridge, P.W. e Melamed, S.S. — "Elementos de bordo na solução de problemas de circulação estacionária," II Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Curitiba (1980).
- [6] Partridge, P.W. — "Boundary elements for the solution of the steady state circulation of the river Guaíba-RS, Brazil," III Congresso Latino Ameri-

- cano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Buenos Aires (1982).
- [7] Melamed, S.S. - "O método dos elementos de contorno para problemas de campo," Tese de Mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre (1981).
- [8] Curotto, C.L. - "Método dos elementos de contorno para elasticidade tridimensional," Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro (1981).
- [9] Scheer, S. - "Método dos elementos de contorno aplicado à elasticidade tridimensional," Tese de Mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre (1982).
- [10] Patterson, C. e Sheikh, M.A. - "Regular boundary integral equations for stress analysis," em Boundary Element Methods Ed. Brebbia, C.A. Springer Verlag (1981).
- [11] Partridge, P.W. - "Comparison of boundary element results with singular point both on and outside the integration zone," IV Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Colloquia 83, Santiago, Chile (1983). Trabalho F4.
- [12] Rudolf, E.C. - "O método dos elementos de contorno com ponto singular fictício aplicado à elasticidade linear tridimensional," Tese de Mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre (1984).
- [13] Danson, D.J. - "A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces," em Boundary Element Methods, III International Seminar, Ed. Brebbia, C.A. Springer Verlag (1981).
- [14] Moreira, M.S. e Wrobel, L.C. - "Uma formulação consistente do método dos elementos de contorno para problemas de elasticidade plana tratados por sub-regiões," IV Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Colloquia 83, Santiago, Chile (1983). Trabalho F22.
- [15] Moreira, M.S. e Wrobel, L.C. - "Consideração de forças gravitacionais na análise de problemas de elasticidade plana pelo método dos elementos de contorno," IV Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Colloquia 83, Santiago, Chile (1983). Trabalho F23.
- [16] Watson, J.O. - "Advanced implementation of the boundary element method for two and three dimensional elastostatics," em Developments in Boundary Element Methods, Eds. Banerjee e Butterfield, Applied Science Publishers, London (1979).
- [17] Stippes, M. e Rizzo, F.J. - "A note of the body force integral of classical elastostatics," Zeit. Ang. Math. Physik 28, 339-42 (1977).
- [18] Brebbia, C.A.; Futagami, T. e Tanaka, M. - "Boundary elements," V Conferência Internacional, Hiroshima, Japão, Springer Verlag (1983).

COMENTÁRIOS DE:**MIGUEL H. HIRATA, COPPE/UFRJ****SOBRE O ARTIGO:****TORQUE ÚTIL E TORQUE DE ATRITO EM MODELOS DE CATAVENTO****PHILEMON MELO CUNHA****ANTONIO DA SILVA CASTRO SOBRINHO****RBCM, VOL.VI, Nº 1, 1984****Senhor Editor,**

Este trabalho apresenta falhas técnicas, como por exemplo figuras (6) e (10) que não são compatíveis com a boa prática de testes de rotores eólicos em túnel de vento.

Para a realização de testes com modelos reduzidos de rotores eólicos, no túnel de vento, sugere-se que a área do disco seja no máximo 20 a 25% da área da seção transversal do túnel e no caso, esta porcentagem foi bastante ultrapassada. Nos resultados apresentados não se faz, também, nenhum comentário a respeito de correções de bloqueio, etc., a despeito do fato de que o rotor praticamente ocupava toda a seção de testes. Acredito que o ponto central do trabalho não seja os resultados dos testes mas sim o aparelho; mesmo assim creio ser impróprio que conste do trabalho os resultados dos testes apresentados.

Nota do Editor:

Os comentários do Prof. Hirata foram recebidos pela RBCM em 09 de novembro de 1984 e encaminhados aos autores que até o momento não responderam.

UMA FORMULAÇÃO VARIACIONAL GERAL PARA PROBLEMAS DE TROCA DE CALOR POR RADIAÇÃO DIFUSA*

Rogério Martins Saldanha da Gama

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

LNCC/CNPq

RESUMO

É apresentado um princípio variacional aplicável à solução de todos os problemas de troca de calor por radiação difusa em meios não participantes. A teoria básica de radiação é discutida rapidamente, sendo deduzido o sistema de equações integrais que governa o fenômeno no caso mais geral, onde a temperatura é variável com a posição assim como a emissividade e a reflectância, que dependem também do comprimento de onda da radiação. Será mostrado que o sistema de equações pode ser sempre representado por uma Equação Integral de Fredholm de Segunda Espécie. Vários casos particulares são apresentados com as devidas simplificações.

ABSTRACT

It's shown a variational principle suitable for the solution of any problems involving heat interchange by diffuse radiation in nonparticipating media. The basic radiation theory is briefly discussed, with the deduction of the system of integral equations that governs the phenomenon in the general case where the temperature is variable according to the position, as well as the emittance and the reflectance which also depend on the radiation wavelength. It will be shown that the equation system can be always represented by a Fredholm integral equation of the second kind. Several particular cases are shown with the suitable simplifications.

*Trabalho desenvolvido durante a permanência do autor na PUC/RJ. Atualmente no LNCC/CNPq.

INTRODUÇÃO

A crescente necessidade de se solucionar problemas envolvendo a troca de calor por radiação fez com que nas duas últimas décadas uma grande quantidade de trabalhos na área fossem publicados. Não se encontra no entanto, dentre estes trabalhos, um que apresente uma formulação variacional realmente geral para problemas de troca de calor por radiação difusa em meios não participantes. Por isso o nosso principal objetivo aqui é apresentar esta formulação, completamente geral para o tipo de problema que se deseja estudar.

Formularemos matematicamente o fenômeno de transferência de energia radiante térmica entre superfícies que refletem e emitem diffusamente, onde suporemos que a emissividade e a reflectância destas superfícies podem variar com o comprimento de onda da radiação e com a posição. Também a temperatura será suposta variável com a posição. Desta forma teremos em mãos a formulação mais geral possível envolvendo energia radiante térmica difusa sendo transferida através de um meio que não participa do processo de transferência. Toda a formulação será baseada em espaços fechados por M superfícies que podem ser reais ou fictícias (representando o efeito de fontes externas de energia sobre as demais superfícies).

Uma vez que cada ponto sobre cada superfície considerada é afetado por todos os pontos que podem trocar energia radiante diretamente com ele, o balanço de energia é dado por um sistema de equações integrais lineares. Apresentaremos este sistema em termos da radiosidade monocromática, cujo conhecimento possibilita a determinação local da troca de calor.

Em geral sistemas de equações integrais não admitem solução analítica em forma fechada. Por isto a existência de um funcional, cujo extremo ocorre para as funções que representam a solução exata do sistema de equações integrais, consiste numa poderosa ferramenta para a obtenção de soluções aproximadas.

Depois de apresentada a formulação geral analisaremos vários casos particulares de grande interesse, mostrando as simplificações a serem efetuadas no funcional geral.

Discutiremos agora rapidamente a Teoria de Radiação necessária ao desenvolvimento do trabalho. Um tratamento mais detalhado e básico pode ser encontrado nas Refs. [1,2,3,4] onde a terminologia empregada é semelhante à deste trabalho.

ANÁLISE TEÓRICA

Vamos imaginar que temos uma região no espaço delimitada por M superfícies. Se estas superfícies possuírem pontos que estejam a temperaturas diferentes do zero absoluto então existirá uma troca de energia por radiação térmica entre elas, caso não estejam separadas por um meio opaco.

Cada ponto sobre cada superfície recebe energia radiante de todos os pontos que possam ser ligados a ele por uma linha reta que não cruze um meio opaco. Isto faz com que o balanço de energia seja dado por um sistema de equações integrais o qual vai considerar sobre cada ponto a energia que chega por emissão e por reflexão de outros pontos e a energia que parte do ponto considerado, também por emissão e reflexão.

Trataremos aqui apenas da troca de energia radiante térmica entre superfícies que emitem e refletem difusamente, ou seja, sem direções preferenciais. Esta hipótese faz com que não haja distinção entre energia emitida e energia refletida o que nos induz a trabalhar sempre com a soma das duas em cada ponto. A grandeza que representa a soma das energias, refletida e emitida, por unidade de tempo e área, para cada ponto, é chamada radiosidade e é em termos dela que escreveremos o balanço de energia. A radiosidade é em geral representada pela letra B .

Este balanço de energia deve ser aplicado a cada comprimento de onda de radiação.

Seja então a Figura 1 onde as linhas cheias representam superfícies opacas reais e as linhas pontilhadas representam superfícies fictícias, sendo que estas últimas traduzem o efeito de fontes externas de radiação e são, por simplicidade de tratamento, chamadas de superfícies. Estas superfícies fictícias não refletem energia e sua contribuição é sempre conhecida.

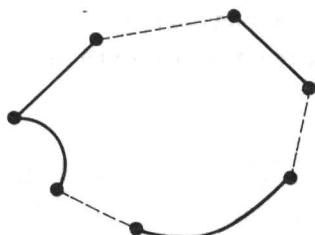


Figura 1. Espaço fechado por M superfícies

Assumindo que a região compreendida entre as M superfícies é formada por um gás que não participa da troca de energia, temos que toda a energia radiante que deixa algum ponto de alguma superfície atingirá as superfícies que estejam entre as M consideradas.

Definindo então $\epsilon_i(\lambda, r_i)$, emissividade monocromática, como sendo a razão entre o poder emissivo real da superfície e o poder emissivo de corpo negro, à mesma temperatura e comprimento de onda, para o ponto r_i sobre a superfície i e $\rho_i(\lambda, r_i)$, reflectância monocromática, como sendo a razão entre a energia refletida e a energia incidente, para cada comprimento de onda, no ponto r_i da superfície i , podemos escrever o balanço de energia como

$$B_i(\lambda, r_i) = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) + \rho_i(\lambda, r_i) H_i(\lambda, r_i) \quad i = 1, M \quad (1)$$

O índice i se refere à i -ésima superfície e $B_i(\lambda, r_i)$ e $H_i(\lambda, r_i)$ são respectivamente a radiosidade monocromática local e a energia incidente monocromática, por unidade de tempo e de área, local. Esta última é a soma das parcelas de energia provenientes de todas as outras superfícies e da própria superfície i , dada por

$$dA_i H_i(\lambda, r_i) = \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) dF_{dA_j-dA_i} dA_j \quad i = 1, M \quad (2)$$

onde as variáveis r_i e s_j representam os pontos sobre a superfície i , sendo s_j usada sempre como variável de integração. O termo $dF_{dA_k-dA_n}$ representa o fator de forma diferencial e é a razão entre a energia que, deixando dA_k , atinge dA_n e toda a energia que deixa dA_k . Pela primeira relação de reciprocidade podemos escrever que

$$H_i(\lambda, r_i) = \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad i = 1, M \quad (3)$$

Combinando (1) com (3) temos o sistema de equações integrais que representa, em termos da radiosidade monocromática, o balanço de energia radiante para cada comprimento de onda da radiação, dado por

$$B_i(\lambda, r_i) = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) + \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad i = 1, M \quad (4)$$

O poder emissivo espectral de corpo negro é dado pela lei de Planck

$$e_b(\lambda, T_i(r_i)) = \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2/(\lambda T_i(r_i))) - 1)} \quad (5)$$

onde as constantes valem $C_1 = 3.740 \times 10^{-5}$ erg cm²/seg e $C_2 = 1.4387$ cm K.

O fator de forma diferencial $dF_{dA_i-dA_j}$ é dado por [2,4]

$$dF_{dA_i-dA_j} = \begin{cases} \frac{\cos \beta_i(r_i, s_j) \cos \beta_j(r_i, s_j)}{\pi(r_i - s_j)(r_i - s_j)} dA_j \\ \text{ou} \\ \frac{(r_i - s_j) \otimes (s_j - r_i) n_i(r_i) \cdot n_j(s_j)}{\pi((r_i - s_j) \cdot (r_i - s_j))^2} dA_j \end{cases} \quad \beta_i, \beta_j \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$0 \quad \left\{ \beta_i > \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \beta_j > \frac{\pi}{2} \right.$$

Os vetores n_i e n_j são as normais unitárias voltadas para dentro da região fechada, os ângulos β_i e β_j são formados entre as respectivas normais e a linha reta que une r_i e s_j . O símbolo " $\otimes$ " representa o produto tensorial e " $\cdot$ " o produto interno.

Uma vez que a energia radiante que deixa uma certa superfície vai atingir a pontos pertencentes às M superfícies consideradas temos que

$$\sum_{j=1}^M \int_{A_j} dF_{dA_i-dA_j} = 1 \quad i = 1, M \quad (7)$$

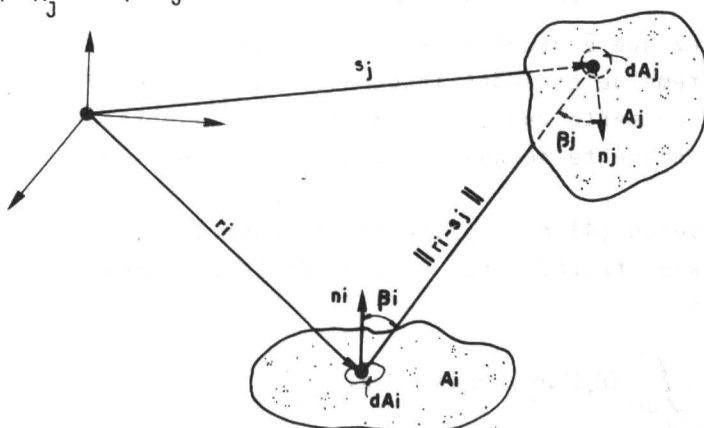


Figura 2. Esquema para o cálculo de $dF_{dA_i-dA_j}$

Antes de prosseguirmos a discussão é interessante questionar o que determina o número de superfícies que forma um certo arranjo fechado, como o da Figura 1. Este número é na verdade arbitrário. A Figura 1 sugere sete superfícies, mas poderíamos considerar dez ou apenas uma. Com isto podemos escrever o balanço de energia como uma equação integral de Fredholm de segunda espécie

$$B(\lambda, r) = \epsilon(\lambda, r) e_b(\lambda, T(r)) + \rho(\lambda, r) \int_A B(\lambda, s) dF_{dA-dA} \quad (8)$$

sendo a integração feita sobre a área total que envolve a região. As funções que aparecem em (8) são dadas, em analogia com (4), por

$$B(\lambda, r) = B_i(\lambda, r_i) \quad \text{para} \quad r = r_i, \quad i = 1, M \quad (9)$$

$$\epsilon(\lambda, r) = \epsilon_i(\lambda, r_i) \quad \text{para} \quad r = r_i, \quad i = 1, M \quad (10)$$

$$\rho(\lambda, r) = \rho_i(\lambda, r_i) \quad \text{para} \quad r = r_i, \quad i = 1, M \quad (11)$$

$$T(r) = T_i(r_i) \quad \text{para} \quad r = r_i, \quad i = 1, M \quad (12)$$

$$dF_{dA-dA} = dF_{dA_i-dA_j} \quad \text{para} \quad r = r_i \text{ e } s = s_j, \quad i, j = 1, M \quad (13)$$

Combinando as equações (6) e (13) temos que para pontos r e s que possam trocar energia diretamente

$$dF_{dA-dA} = \frac{(r-s) \otimes (s-r) n(r) \cdot n(s)}{\pi((r-s) \cdot (r-s))^2} \quad (14)$$

Uma vez que é usual e mais simples, continuaremos trabalhando com o sistema de equações integrais (4) ao invés da equação (8), tendo sempre em mente que (4) e (8) são equivalentes. Tal equivalência é erroneamente negada em [7], onde se considera ρ e ϵ constantes.

Resolvendo (4) e de posse das funções $B_i(\lambda, r_i)$ podemos determinar o calor trocado, por unidade de tempo e área, para a superfície i , como

$$q_i(r_i) = \int_0^\infty (B_i(\lambda, r_i) - H_i(\lambda, r_i)) d\lambda \quad (15)$$

já que $q_i(r_i)$ é a diferença entre toda a energia que chega e que sai,

para cada ponto. A equação (15) pode ser reescrita como

$$q_i(r_i) = \int_0^\infty \left[B_i(\lambda, r_i) - \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) dF_{dA_i-dA_j} \right] d\lambda \quad i=1, M \quad (16)$$

O sistema de equações integrais (4) assim como a equação (8) possuem sempre solução e esta é única [11].

Se pudermos assumir que a emissividade e a reflectância são independentes do comprimento de onda podemos trabalhar com o sistema (4) (ou com a equação (8)) integrado sobre todos os comprimentos de onda. Nestes casos o balanço de energia fica dado por

$$B_i(r_i) = \epsilon_i(r_i) \sigma T_i(r_i)^4 + \rho_i(r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad i=1, M \quad (17)$$

ou

$$B(r) = \epsilon(r) \sigma T(r)^4 + \rho(r) \int_A B(s) dF_{dA-dA} \quad (18)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann que vale $\sigma = 5,668 \times 10^{-5}$ erg/seg $\text{cm}^2 \text{K}^4$. A função radiosidade local $B_i(r_i)$ (ou $B(r)$) é dada por

$$B_i(r_i) = \int_0^\infty B_i(\lambda, r_i) d\lambda \quad i=1, M \quad (19)$$

e o calor trocado, por unidade de tempo e área, é dado por

$$q_i(r_i) = B_i(r_i) - \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(s_j) dF_{dA_i-dA_j} \quad (20)$$

Em todos os casos o calor trocado por cada superfície, por unidade de tempo, é calculado como

$$Q_i = \int_{A_i} q_i(r_i) dA \quad (21)$$

Até aqui trabalhamos sem levar em conta que, sobre superfície fictícias, a radiosidade monocromática é conhecida, sendo dada por

$$B_i(\lambda, r_i) = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) \quad (\text{se a superfície } i \text{ for fictícia}) \quad (22)$$

sendo que, usualmente, estas superfícies são supostas como negras,

ou seja, $\epsilon_i(\lambda, r_i) = 1$, sendo $T_i(r_i)$ a temperatura efetiva de corpo negro da superfície. Em geral se supõe temperatura constante.

Se tivermos $M-N$ superfícies fictícias podemos reduzir o sistema (4), que era de M equações integrais, para um sistema de N equações, ou seja

$$B_i(\lambda, r_i) = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) + \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) dF_{dA_i-dA_j} + \\ + \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \epsilon_j(\lambda, s_j) e_b(\lambda, T_j(s_j)) dF_{dA_i-dA_j} \quad i = 1, N \quad (23)$$

As superfícies i , tais que $1 \leq i \leq N$, são superfícies reais, enquanto que, aquelas para as quais $N+1 \leq i \leq M$, são fictícias.

No caso da emissividade e reflectância independermos do comprimento de onda, podemos integrar (23) sobre todos os λ para obter

$$B_i(r_i) = \epsilon_i(r_i) \sigma T_i(r_i)^4 + \rho_i(r_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(s_j) dF_{dA_i-dA_j} + \\ + \rho_i(r_i) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \epsilon_j(s_j) \sigma T_j(s_j)^4 dF_{dA_i-dA_j} \quad i = 1, N \quad (24)$$

Uma vez que estão bem fundamentados os modelos físico e matemático empregados vamos nos preocupar agora com a solução das equações. Estamos interessados em, conhecendo as distribuições de temperatura emissividade e reflectância, determinar a radiosidade sobre cada superfície considerada, para cada comprimento de onda λ .

Vários métodos numéricos se aplicam à solução de sistemas de equações integrais lineares. Neste trabalho porém, fixar-nos-emos em buscar a solução de (4) (ou qualquer das equações (8), (17), (23) e (18)) através de um funcional cujo extremo ocorre para a solução exata de (4).

Alguns princípios variacionais, menos gerais do que o que se verá apresentado aqui, podem ser encontrados em [2,6,7,8,9].

O PRINCÍPIO VARIACIONAL

Basearemos nossa discussão no sistema (23) o qual leva em conta o fato da radiosidade ser prescrita sobre as superfícies i , tal que $N+1 \leq i \leq M$. Este sistema de equações pode ser escrito como

$$B_i(\lambda, r_i) = \rho_i(\lambda, r_i) f_i(\lambda, r_i) + \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) dA_j \quad i = 1, N \quad (25)$$

onde as incógnitas são as funções $B_i(\lambda, r_i)$ $1 \leq i \leq N$. Comparando (25) com (23) concluímos que

$$f_i(\lambda, r_i) = \frac{\epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i))}{\rho_i(\lambda, r_i)} + \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \epsilon_j(\lambda, s_j) e_b(\lambda, T_j(s_j)) K_{ij}(r_i, s_j) dA_j \quad (26)$$

e

$$K_{ij}(r_i, s_j) dA_j = dF_{dA_i - dA_j} \quad (27)$$

Pela equação (6) temos então que

$$K_{ij}(r_i, s_j) = K_{ji}(s_j, r_i) = \begin{cases} \frac{(r_i - s_j) \otimes (s_j - r_i) n_i(r_i) \cdot n_j(s_j)}{\pi((r_i - s_j)(r_i - s_j))^2}; & \beta_i \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } \beta_j \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \beta_i > \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \beta_j > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (28)$$

Sejam então definidos os operadores lineares $\underline{R}$ e $\underline{Q}$ de tal forma que, sendo $\underline{B}$ o vetor com componentes $B_i(\lambda, r_i)$, os vetores $\underline{R} \underline{B}$ e $\underline{Q} \underline{B}$ tem a componente i dada por

$$\underline{R} \underline{B}_i = \frac{1}{\rho_i(\lambda, r_i)} B_i(\lambda, r_i) \quad (29)$$

$$\underline{Q} \underline{B}_i = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) dA_j \quad (30)$$

Assim podemos reescrever (25) como

$$\underline{R} \underline{B} = \underline{f} + \underline{Q} \underline{B} \quad (31)$$

onde o vetor $\underline{f}$ possui componentes $f_i(\lambda, r_i)$. Os operadores $\underline{R}$ e $\underline{Q}$ são auto-adjuntos.

A solução do sistema de equações (25) (ou (31)) é o vetor $\underline{B}$ que torna extremo o funcional I dado por

$$I[\underline{B}] = \frac{1}{2} \langle \underline{Q} \underline{B} | \underline{B} \rangle - \frac{1}{2} \langle \underline{R} \underline{B} | \underline{B} \rangle + \langle \underline{f} | \underline{B} \rangle \quad (32)$$

onde o espaço de funções admissíveis é composto pelos vetores $\underline{B}$ cujas componentes $B_i(\lambda, r_i)$ são de quadrado integrável sobre A_i .

O produto interno representado em (32) é dado por

$$\langle \underline{Q} \underline{B} | \underline{B} \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{A_i} \int_{A_j} B_i(\lambda, r_i) B_j(\lambda, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) dA_i dA_j \quad (33)$$

$$\langle \underline{R} \underline{B} | \underline{B} \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \frac{1}{\rho_i(\lambda, r_i)} B_i(\lambda, r_i)^2 dA_i \quad (34)$$

$$\langle \underline{f} | \underline{B} \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} f_i(\lambda, r_i) B_i(\lambda, r_i) dA_i \quad (35)$$

Tomando a primeira variação do funcional $I[\underline{B}]$ e igualando esta a zero obtemos

$$\begin{aligned} \delta I = \frac{1}{2} \left[\langle \underline{Q} \underline{B} | \delta \underline{B} \rangle + \langle \underline{Q} \delta \underline{B} | \underline{B} \rangle \right] + \langle \underline{f} | \delta \underline{B} \rangle - \\ - \frac{1}{2} \left[\langle \underline{R} \underline{B} | \delta \underline{B} \rangle + \langle \underline{R} \delta \underline{B} | \underline{B} \rangle \right] = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

e uma vez que os operadores $\underline{R}$ e $\underline{Q}$ são auto-adjuntos

$$\langle -\underline{R} \underline{B} + \underline{Q} \underline{B} + \underline{f} | \delta \underline{B} \rangle = 0 \quad (37)$$

o que, devido ao fato de $\delta \underline{B}$ ser arbitrário, faz com que (37) seja equivalente a (31) [5].

O sistema de equações (25), sempre que representa um problema de radiação pura dentro das hipóteses expostas na análise teórica, possui solução e esta é única [11].

Se a emissividade e a reflectância puderem ser assumidas independentes do comprimento de onda, poderemos trabalhar com a radiação local integrada sobre todos os comprimentos de onda, ou seja, (24). Nestes casos, em (33), (34) e (35), utilizaremos $B_i(r_i)$ no lugar de $B_i(\lambda, r_i)$ e a função $f_i(\lambda, r_i)$ será substituída por $f_i(r_i)$, dada por

$$f_i(r_i) = \frac{\varepsilon_i(r_i) \sigma T_i(r_i)^4}{\rho_i(r_i)} + \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \varepsilon_j(s_j) \sigma T_j(s_j)^4 K(r_i, s_j) dA_j \quad (38)$$

e o extremo do funcional $I[B]$ passará a ocorrer para a função que satisfizer o sistema de equações (24).

Quando o problema for formulado em termos da equação (8) o funcional $I[B]$ é dado da mesma forma que em (32), sendo que

$$\langle \underline{Q} \mid \underline{B} \rangle = \int_A \int_A B(\lambda, r) B(\lambda, s) K(r, s) dA \quad (39)$$

$$\langle \underline{R} \mid \underline{B} \rangle = \int_A \frac{1}{\rho(\lambda, r)} B(\lambda, r)^2 dA \quad (40)$$

$$\langle \underline{f} \mid \underline{B} \rangle = \int_A f(\lambda, r) B(\lambda, r) dA \quad (41)$$

onde $K(r, s)$ é dado por (28), sem os índices i e j .

A função $f(\lambda, r)$ é, neste caso, dada por

$$f(\lambda, r) = \frac{\varepsilon(\lambda, r)}{\rho(\lambda, r)} e_b(\lambda, T(r)) \quad (42)$$

No caso da equação (18) utilizamos $B(r)$ no lugar de $B(\lambda, r)$ e a função $f(\lambda, r)$ é substituída por

$$f(r) = \frac{\varepsilon(r)}{\rho(r)} \sigma T(r)^4 \quad (43)$$

Nos casos das equações (8) e (18) o extremo do funcional deve ser procurado levando-se em conta que a radiosidade é prescrita sobre as regiões contidas na área A que sejam consideradas negras.

CASOS PARTICULARES

Vamos abordar agora algumas situações onde se pode simplificar o problema matemático.

A utilização de hipóteses simplificadoras é, em geral, necessária em engenharia, onde se precisa obter dados de projeto em pouco tempo e com informações insuficientes para uma análise rigorosa.

Emissividade e Reflectância Constantes por Faixas de Comprimento de Ondas

Se pudermos assumir que $\epsilon_i(\lambda, r_i)$ e $\rho_i(\lambda, r_i)$ são constantes em cada faixa $(\Delta\lambda)_k$ de comprimento de onda, compreendida entre λ_k e λ_{k+1} , podemos integrar o sistema de equações (23) sobre λ entre cada λ_k e λ_{k+1} (com $\lambda_1 = 0$) para obter

$$\begin{aligned} B_i((\Delta\lambda)_k, r_i) = & \epsilon_i((\Delta\lambda)_k, r_i) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e_b(\lambda, T_i(r_i)) d\lambda + \\ & + \rho_i((\Delta\lambda)_k, r_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j((\Delta\lambda)_k, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) dA_j + \\ & + \rho_i((\Delta\lambda)_k, r_i) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \epsilon_j((\Delta\lambda)_k, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) \cdot \\ & \cdot \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e_b(\lambda, T_j(s_j)) d\lambda dA_j \quad i = 1, N \quad (44) \end{aligned}$$

onde $B_i((\Delta\lambda)_k, r_i)$ é dado por

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} B_i(\lambda, r_i) d\lambda = B_i((\Delta\lambda)_k, r_i) \quad (45)$$

Em (44) $\epsilon_i((\Delta\lambda)_k, r_i)$ e $\rho_i((\Delta\lambda)_k, r_i)$ são a emissividade e a reflectância na faixa de comprimento $(\Delta\lambda)_k$, no ponto r_i .

Deve ser observado que se considerarmos, em primeira aproximação, apenas uma faixa de comprimento de onda o sistema de equações (44) recai em (24).

Na prática esta análise é, em geral, feita sob a hipótese de que tanto emissividade quanto reflectância são constantes com a posição, sobre cada superfície considerada. Assim podemos escrever que

$$\begin{aligned} B_i((\Delta\lambda)_k, r_i) = & \epsilon_i((\Delta\lambda)_k) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e_b(\lambda, T_i(r_i)) d\lambda + \\ & + \rho_i((\Delta\lambda)_k) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j((\Delta\lambda)_k, s_j) K_{ij}(r_i, s_j) dA_j + \\ & + \rho_i((\Delta\lambda)_k) \sum_{j=N+1}^M \epsilon_j((\Delta\lambda)_k) \int_{A_j} K_{ij}(r_i, s_j) \cdot \\ & \cdot \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e_b(\lambda, T_j(s_j)) d\lambda dA_j \quad i = 1, N \quad (46) \end{aligned}$$

Algumas vezes considera-se também cada superfície como sendo isotérmica o que torna o problema ainda mais simples.

O calor trocado nestes casos pode ser determinado por (20) se calcularmos $B_i(r_i)$, por (19), como

$$B_i(r_i) = \int_0^\infty B_i(\lambda, r_i) d\lambda = \sum_K B_i((\Delta\lambda)_K, r_i) \quad (47)$$

sendo o somatório feito sobre todas as faixas de comprimento de onda. Na prática porém considera-se apenas um número finito de faixas de comprimento de onda que não cobre o espectro todo, desprezando assim a contribuição a partir de um certo comprimento de onda.

Comparando (44) e (46) com (25) podemos facilmente identificar os termos necessários à utilização do funcional (32).

Radiação Não Polarizada

Se a radiação envolvida é difusamente distribuída e não polarizada podemos aplicar a lei de Kirchhoff que diz que

$$\epsilon_i(\lambda, r_i) = \alpha_i(\lambda, r_i) \quad (48)$$

onde $\alpha_i(\lambda, r_i)$ é a absorptância monocromática.

Se as superfícies reais consideradas forem opacas então toda a energia incidente é absorvida ou refletida, assim

$$\rho_i(\lambda, r_i) + \alpha_i(\lambda, r_i) = 1 \quad (49)$$

Para estes casos podemos então escrever que

$$\rho_i(\lambda, r_i) = 1 - \epsilon_i(\lambda, r_i) \quad (50)$$

Em tais situações o sistema (23) pode ser escrito substituindo-se todos os $\rho_i(\lambda, r_i)$ através da equação (50).

Se além das hipóteses necessárias à aplicação da lei de Kirchhoff a emissividade e a absorptância puderem ser supostas independentes do comprimento de onda da radiação temos o caso particular de SUPERFÍCIES CINZAS onde (50) passa a ser dada por

$$\rho_i(r_i) = 1 - \epsilon_i(r_i) \quad (51)$$

Nos casos das superfícies reais poderem ser consideradas como cinzas podemos substituir $\rho_i(r_i)$ em (24) através da equação (51).

Superfícies Alongadas

Se as superfícies em questão são geradas por retas deslocando-se paralelamente a si mesmas então estas são ditas ALONGADAS. A grande simplificação aqui diz respeito ao cálculo do fator de forma que passa a ser dado por

$$dF_{dA_{x_i}-dA_{y_j}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_j} [\sin\theta(x_i, y_j)] dy_j, & \cos\theta(x_i, y_j) \geq 0 \\ 0, & \cos\theta(x_i, y_j) < 0 \end{cases} \quad (52)$$

Em (52) as variáveis x_i e y_j são escalares e representam pontos sobre a superfície i , que é aqui considerada como um arco.

Todas as funções envolvidas tem a dependência espacial traduzida por apenas uma variável escalar. As integrações no espaço são também feitas sobre uma variável, sendo os y_j 's utilizados sempre como variável de integração.

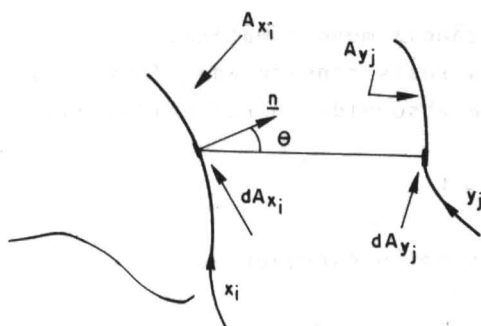


Figura 3. Esquema para o cálculo de $dF_{dA_{x_i}-dA_{y_j}}$

O balanço de energia pode ser então escrito como

$$B_i(\lambda, x_i) = \epsilon_i(\lambda, x_i) e_b(\lambda, T_i(x_i)) + \rho_i(\lambda, x_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_{y_j}} B_j(\lambda, y_j) K_{ij}(x_i, y_j) dy_j + \rho_i(\lambda, x_i) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_{y_j}} \epsilon_j(\lambda, y_j) e_b(\lambda, T_j(y_j)) K_{ij}(x_i, y_j) dy_j \quad (53)$$

$i = 1, N$

onde

$$K_{ij}(x_i, y_j) dA_{y_j} = dF_{dA_{x_i} - dA_{y_j}} \quad (54)$$

No caso das propriedades independerem do comprimento de onda, temos que (53) pode ser integrada sobre todos os λ , fornecendo

$$B_i(x_i) = \rho_i(x_i) \sigma T_i(x_i)^4 + \rho_i(x_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_{y_j}} B_j(y_j) K_{ij}(x_i, y_j) dy_j + \\ + \rho_i(x_i) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_{y_j}} \epsilon_j(y_j) \sigma T_j(y_j)^4 K_{ij}(x_i, y_j) dy_j; i=1, N \quad (55)$$

Para os sistemas (53) e (55) o produto interno que aparece em (32), é dado por integrações sobre os arcos que representam as superfícies alongadas. A identificação dos termos de (53) e (55) com (25) é fácil, devendo ser levado em conta que r_i e s_i são substituídos por x_i e y_i .

Problemas Simétricos

Suponhamos novamente o espaço fechado por M superfícies. Se cada uma das N superfícies reais estiver sujeita ao mesmo efeito externo (considerado aqui como o efeito das superfícies fictícias e das outras N-1 superfícies reais) e todas as N superfícies possuírem a mesma distribuição de temperatura, emissividade e reflectância (para uma escolha adequada de variáveis) então o problema de radiação é dito simétrico [10].

Em tais problemas é suficiente trabalhar com uma das equações que compõem o sistema de equações integrais (23), uma vez que a função radiossidade será a mesma sobre todas as superfícies reais em questão. Assim, temos que o balanço de energia na sua forma mais simples é dado por uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, ou seja

$$B(\lambda, r) = \epsilon_b(\lambda, T(r)) + \rho(\lambda, r) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B(\lambda, s) dF_{dA_i - dA_j} + \\ + \rho(\lambda, r) \sum_{j=N+1}^M \int_{A_j} \epsilon_j(\lambda, s_j) e_b(\lambda, T(s_j)) dF_{dA_i - dA_j} \quad (56)$$

A função $B(\lambda, r)$ representa a radiossidade monocromática sobre qualquer superfície i escolhida como referência. Uma vez que o efeito

externo é o mesmo para todas as superfícies reais, podemos escrever (56) como

$$B(\lambda, r) = \rho(\lambda, r) f(\lambda, r) + \rho(\lambda, r) \int_A B(\lambda, s) K(r, s) dA \quad (57)$$

onde, pela simetria imposta

$$K(r, s) dA = \sum_{j=1}^N dF_{dA_i - dA_j} \quad (\text{para qualquer } i) \quad (58)$$

Neste caso o funcional $I[B]$ assume a seguinte forma simplificada

$$I[b] = \int_A \int_A K(r, s) B(\lambda, r) B(\lambda, s) dA dA + \int_A 2 f(\lambda, r) B(\lambda, r) dA - \int_A \frac{1}{\rho(\lambda, r)} B(\lambda, r)^2 dA \quad (59)$$

onde A é a área de cada superfície real ($A = A_i$, $i = 1, M$).

CONCLUSÕES

Este trabalho estabelece uma formulação variacional, totalmente geral, para problemas de troca de calor por radiação pura entre superfícies que emitem e refletem difusamente. Alguns trabalhos tratam do problema supondo que tanto a emissividade quanto a reflectância são independentes da posição, o que é uma hipótese bastante restritiva, uma vez que estas dependem da temperatura e as superfícies, em problemas reais, não costumam ser isotérmicas. Deixando que a emissividade e a reflectância variem com a posição, podemos, com o tipo de tratamento apresentado, supor que estas não são funções contínuas, o que dá total liberdade na escolha do número de superfícies a serem consideradas já que estas poderão ser compostas por materiais diferentes.

A formulação variacional em termos monocromáticos também não é encontrada na bibliografia o que, somado ao fato de que os problemas tratados podem envolver superfícies não homogêneas e não isotérmicas, faz com que seja ainda maior a contribuição deste trabalho.

Um outro ponto importante de ser observado se refere à determinação do fator de forma. Em geral não se leva em conta que dois pontos r_i e s_j podem "não se ver", ou seja, podem não trocar energia radiante diretamente. Este fato é levado em conta em (6) e em (52).

A radiosidade monocromática local é sempre uma função positiva e, na pior das hipóteses, contínua por partes.

Um estudo detalhado do comportamento da função radiosidade monocromática pode ser encontrado em [11].

REFERÊNCIAS

- [1] Planck, M. — The theory of radiation. Dover Publications, New York, N.Y., (1966).
- [2] Wiebelt, J.A. — Engineering radiation heat transfer. Holt Rinchart & Winston, New York, N.Y. (1966).
- [3] Hottel, H.C. — Radiant heat transmission. McGraw-Hill, New York, (1969).
- [4] Sparrow, E.M. and Cess, R.D. — Radiation heat transfer. McGraw-Hill, Washington (1978).
- [5] Sagan, H. — Introduction to the calculus of variations. McGraw-Hill, New York, N.Y. (1969).
- [6] Sparrow, E.M. — Application of variational methods to radiation heat transfer calculations. Journal of Heat Transfer, C82, p.375-380 (1960).
- [7] Sparrow, E.M. and Haji-Sheikh, A. — A generalized variational method for calculating radiant interchange between surfaces. Trans. ASME, Journal of Heat Transfer, 87 :103-109 (1965).
- [8] Gama, R.M.S. — Métodos numéricos na solução de problemas de radiação pura. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1981.
- [9] Gama, R.M.S. and Saboya, F.E.M. — A variational method for radiant emission from diffuse V-Groove cavities. VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol.D, p.307-317, Rio de Janeiro (1981).
- [10] Gama, R.M.S. — Análise da troca de calor por radiação entre um arranjo simétrico formado por "N" superfícies e o meio ambiente. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, VI (1) : 59-74 (1984).
- [11] Gama, R.M.S. — Existência e unicidade de solução em problemas de radiação difusa. (a ser publicado).

INSTRUÇÕES PARA ASSOCIAR-SE À ABCM

- Preencher a ficha anexa, destacá-la e enviá-la para
ABCM
LCC - Laboratório de Computação Científica
Rua Lauro Müller, nº 455.
Caixa Postal 56018
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
- Remeter juntamente com a referida ficha, para o mesmo endereço, um cheque nominal (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas) no valor de 1,36 ORTN's, para sócios efetivos e US\$20,00 para estrangeiros. Estudantes pagarão a metade dos valores e sócios institucionais 27,16 ORTN's.



CONVITE AOS DOUTORES EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS E ÁREAS AFINS

O Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC/RJ) está procurando profissionais que desejem desenvolver, no mais alto nível, atividades de pesquisa e ensino na área de MECÂNICA DOS SÓLIDOS, preferencial mas não exclusivamente com ênfase em uma ou mais das seguintes sub-áreas: Análise Experimental de Tensões e Instrumentação em Mecânica dos Sólidos; Mecânica da Fratura e Fadiga; Vibrações e Acústica; Controles e Automação; Projeto Mecânico (CAD-CAM); ou Métodos Numéricos em Mecânica dos Sólidos (Elementos Finitos).

O profissional que procuramos deve ter concluído brilhantemente seu doutorado, e deve estar disposto não só a interagir com os grupos da Universidade ativos nestas áreas, como a desenvolver e dirigir seus próprios trabalhos de pesquisa original e independente. Também esperamos ativo envolvimento de nossos docentes na área de ensino, tanto a nível de graduação como de pós-graduação.

As instalações de pesquisa do DEM são muito boas e constam de vários laboratórios (Vibrações, Comportamento Mecânico dos Materiais, Análise Experimental de Tensões, Metrologia, Termociências, Oficina Mecânica, etc) dotados de infraestrutura completa e muito bem equipados, incluindo excelente suporte computacional. A produção científica vem se mantendo há muitos anos entre as maiores do país, e é objetivo do Departamento atingir níveis compatíveis com padrões internacionais em futuro próximo.

O DEM considerará candidatos em todos os níveis de experiência, desde professores Assistentes até Titulares. O salário é compatível com o mercado brasileiro e com os níveis de experiência, e é política da Universidade estimular participação de seus docentes em projetos e prestação de serviços de alto nível, que permitam complementação salarial. Os interessados deverão remeter até 31/12/85 uma cópia detalhada de seu Curriculum Vitae, cópias de seus principais trabalhos científicos publicados, cópia de seu diploma de doutoramento e cartas de recomendação para

Comitê de Contratação de Professores
a/c Prof. Jaime Tupiassú P. de Castro
Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
Rio de Janeiro, Brasil - 22453

com quem poderão ser obtidas informações adicionais, por carta ou através do telefone (021) 274-9922 R:329/330.

**PEDIDO DE ASSINATURA DA RBCM OU DE NÚMEROS ATRASADOS
QUER DA REVISTA OU ANAIS DE CONGRESSOS**

- Preencha a ficha anexa, indicando o desejado, e remeta para
ABCM

LCC - Laboratório de Computação Científica

Rua Lauro Müller, nº 455

Caixa Postal 56018

22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil



- Remeta, em anexo, um cheque nominal (Associação Brasileira de
Ciências Mecânicas) no valor indicado na referida ficha.

	BRASIL	EXTERIOR
Anais do COBEM	() 3,0 ORTN'S	() US\$ 100,00
Anais do SIBRAT	() 2,0 ORTN'S	() US\$ 50,00
Volume avulso RBCM	() 1,0 ORTN'S	() US\$ 25,00
Assinatura RBCM	() 2,0 ORTN'S	() US\$ 50,00

ASSINALE SUA SOLICITAÇÃO

Nome: _____

Endereço: _____

Cidade: _____ ESTADO: _____ CEP: _____

FORMULÁRIO PARA AFILIAÇÃO



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PARA USO DA ASSOCIAÇÃO

Recebido	Aprovado
Readmitido	Eleito Membro
Membro Nº	Anuidade

Membro Nº

Afiliação para
Nome (Abrevie se necessário)

- ☐ admissão
☐ mudança
☐ readmissão

para a categoria de Membro Individual

- ☐ Aspirante (Estudante)
☐ Efetivo

Se renovação, qual o último ano de afiliação efetiva?

Endereço Residencial
Rua, Nº, Apto.

CEP, Cidade, Estado, País

Endereço Comercial
Rua, Nº, Departamento, etc.

CEP, Cidade Estado, País

Empresa

Título Profissional

Posição Atual
Engenheiro de Produção, Professor Assistente, etc.

Data de Nascimento

Endereço para onde deve ser enviada correspondência: Residência ☐ Empresa ☐

FORMAÇÃO SUPERIOR E TÍTULOS

Indique em ordem cronológica sua formação superior. Em áreas de engenharia deve-se indicar, ex. Engenharia Mecânica, Metalúrgica, etc., e em áreas de especialização; Industrial, Ciências dos Materiais, etc. Estudantes devem indicar data prevista de graduação.

Universidades Graus Datas Área Especialização



Composto e impresso por
J. DI GIORGIO & CIA. LTDA.
Rua Vaz de Toledo, 536 - Eng. Novo - RJ

EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL

Indique em ordem cronológica sua experiência profissional. Seja explícito com relação a posições ocupadas (como Engenheiro de Produção, Consultor, etc.), funções exercidas (como Chefe de Departamento de Manutenção, Consultoria em Transientes Hidráulicos, etc.), datas e períodos das posições ocupadas.

		Período	Tempo Total
Posição _____	Empresa _____	De: _____	
Função _____		A: _____	
Posição _____	Empresa _____	De: _____	
Função _____		A: _____	
Posição _____	Empresa _____	De: _____	
Função _____		A: _____	

ÁREAS DE INTERESSE

- | | | | |
|---|--|---|---|
| ☐ Mecânica Teórica | ☐ Mecânica dos Sólidos | ☐ Mecânica dos Fluidos | ☐ Transferência de Calor e Massa |
| ☐ Termodinâmica | ☐ Mecânica das Estruturas | ☐ Propriedades dos Materiais | ☐ Processos de Fabricação |
| ☐ Projetos de Máquinas e Componentes | ☐ Análise Experimental | ☐ Vibrações e Acústica | ☐ Métodos Analíticos e Numéricos |
| ☐ Otimização e Controle. | ☐ | ☐ | ☐ |

Remeter para:

Secretaria da A B C M
LCC – Laboratório de Computação Científica
Rua Lauro Müller, 455
CEP 22290 – Rio de Janeiro, Brasil

OBJETIVOS DA A B C M

A Associação Brasileira de Ciências Mecânicas é uma Sociedade Civil, sem fins lucrativos, fundada em 19 de abril de 1975 por profissionais interessados em Ciências Mecânicas, com a finalidade de congregiar pessoas físicas e jurídicas visando:

- realizar Congressos, Simpósios, Conferências, Cursos e Reuniões Técnico-Científicas.
- promover o intercâmbio com associações similares do país e do exterior.

São atividades tradicionais da ABCM:

- O Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, que se realiza a cada dois anos na primeira quinzena de dezembro dos anos ímpares.
- O Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão - SIBRAT, que é realizado nos anos pares.
- A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas - RBCM, publicação trimestral.

- contribuir para o desenvolvimento da Engenharia Mecânica no Brasil;
- estimular um efetivo intercâmbio entre as Universidades, Centros de Pesquisa e a Indústria;
- divulgar o conhecimento em Ciências Mecânicas através de publicação de livros textos, monografias e revistas.

