

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i.e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

PUC — Pontifícia Universidade Católica do RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.



MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM

Luiz Bevilacqua (Presidente)

Hans Ingo Weber (Vice-Presidente)

Augusto Cesar Galeão (Secretário Geral)

Mauro Sergio Pinto de Sampaio (Secretário)

Maurício Nogueira Frota (Diretor de Patrimônio)

Vol. VIII nº 2 - Mai. 1986

EDITOR
RESPONSÁVEL
Rubens Sampaio

EDITOR
EXECUTIVO
J. M. Freire

CONSELHO
EDITORIAL

Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijer
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zampieri
Duraid Mahrus
E.O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guillermo Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jerzy T. Sielawa
J. J. Espíndola
Liu Hsu
Maurício N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Néstor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

- Conselho da ABCM - Biênio 86/87 71
- Stability of centrifuges partially filled with liquid 73
- Dr. Eberhard Brommundt**
Institut für Technische Mechanik (Mechanikzentrum)
Technische Universität Braunschweig
D-3300 Braunschweig
- Dynamics of the relative motion of a solid particle and a viscous fluid confined in cylindrical ducts of different geometries 87
- Roberto Guimarães Pereira**, Membro da ABCM
Maurício Nogueira Frota, Membro da ABCM
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
- Determinação teórica e experimental da velocidade de queima de propelente sólido 105
- Aparecida Minhoko Kawamoto**
IAE - Divisão de Química
CTA - São José dos Campos, SP
Gordiano Faria de Alvim Filho
ITA - Departamento de Aeronáutica
CTA - São José dos Campos, SP
- Sobre as soluções de problemas de troca de energia radiante térmica 121
- Rogério Martins Saldanha da Gama** - Membro da ABCM
LNCC/CNPq
- Análise não-linear do equilíbrio de estruturas unidimensionais elásticas planas 131
- Heraldo Silva da Costa Mattos**
Rubens Sampaio Filho, Membro da ABCM
Depto de Engenharia Mecânica, PUC/RJ
- Modeling of flexible multibeam systems by rigid-elastic superlements 151
- Werner O. Schiehlen**
Jochen Rauh
University of Stuttgart, Stuttgart, F.R.G.



**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
É PUBLICADA COM O APOIO**

**DO CNPq E FINEP
COMPANHIA VALE DO RIO DOCE
IBM DO BRASIL**

Conselho da ABCM eleito para o Biênio 86/87

Eng^o Carlos Alberto Couto, FINEP
Dr. Edgardo Taroco, LNCC/CNPq
Dr. Hazim Ali Al-Qureshi, ITA
Dr. Henner Alberto Gomide, UFU
Suplente - Dr. Jaime Tupiassú Pinto de Castro, PUC/RJ
Eng^o José Augusto R. do Amaral, NUCLEN
Suplente - Eng^o José Carlos Balthazar, UnB
Prof. José de Mendonça Freire, PUC/RJ
Suplente - Dr. Kazuo Hatakeyama, CEPED/BA
Dr. Raúl A. Feijóo, LNCC/CNPq
Dr. Rubens Sampaio Filho, PUC/RJ
Dr. Tito Luiz da Silveira, Fund. Souza Marques
Dr. Valder Steffen Junior, UFU

STABILITY OF CENTRIFUGES PARTIALLY FILLED WITH LIQUID

Dr. Eberhard Brommundt
Institut für Technische Mechanik (Mechanikzentrum)
Technische Universität Braunschweig
D-3300 Braunschweig

ABSTRACT

Paper presents a method to calculate the stability of a centrifuge the rigid cylinder of which is mounted on an elastic frame (a multi body discrete system) and partly filled with an inviscid liquid.

INTRODUCTION

The steady state motion of a centrifuge operating at high rotating speeds and containing some trapped liquid can get unstable over several ranges of the operating parameters. In these ranges the machine will undergo self-excited whirling motions very similar to a self-sustained modal oscillation of the interacting solid-liquid system. Such an oscillation is clearly distinct from an imbalance vibration by its frequency: The imbalance causes (mostly) vibrations with the rotational frequency whereas the self-excited system oscillates with a natural frequency, asynchronous with respect to the rotation. When both effects occur simultaneously beat-like motions are observed.

There is quite a number of investigations which study theoretically and experimentally simple basic setups, e.g. [1]-[14], and there are many, many more papers devoted to liquid-containing rockets and shells. But apparently, there is a lack of papers dealing with the machine dynamic aspects of the problem: How do the

solid parts of a complex machine, in a, say, discrete model interact with the liquid in the cylinder to produce instability?

We want to present a procedure suitable to study the stability of a machine which contains a swiftly rotating rigid cylinder partly filled with liquid as a constituent part. The procedure bases on the observation that for small viscosities of the liquid and a weakly damped machine both these influences neutralize each other and the sloshing behavior of the liquid determines the unstable regions, see e.g. [10], [5], [11], [13], [2]. Under these circumstances, approximate boundaries for the stability regions can be calculated from linearized equations for an inviscid incompressible liquid and an undamped machine. Very likely, viscosity and damping will influence the boundaries belonging to complicated "higher order" motions much more severely than those of the simple motions, see [5], Figure 9, [2], Figure 6. Even then the simple procedure has the advantage of pointing out those regions where instability might occur and which should be avoided or must be studied accurately to ensure stable operating conditions. In this paper we merely outline the procedure, list the necessary equations and formulas and present an example. The details are contained in [1]; an autonomous computer program for the transfer functions (FORTRAN 77 code) is available.

MODEL AND PROCEDURE

Let the motions of the solid parts of the machine be governed by the following linear, non-dissipative N-degrees of freedom discrete model:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{\Omega} \underline{G} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{f} \quad (1)$$

Here, Ω - constant angular velocity of the cylinder; \underline{x} - N-vector of generalized coordinates; \underline{M} , \underline{G} , \underline{K} - $N \times N$ matrices of masses (inertias), gyroscopic terms and stiffnesses, respectively; $\underline{M}^T = \underline{M}$, $\underline{G}^T = -\underline{G}$, $\underline{K}^T = \underline{K}$; \underline{f} - N-vector of liquid forces onto the cylinder. (The solid part parameters of the cylinder have to be included in (1)).

The cylinder has the normal position shown by the fixed cartesian basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in Figure 1 (\vec{e}_3 coincides with the axis of rotation). Its small displacements thereof are the lateral translations u_1, u_2 and the axial translation u_3 with respect to that basis, and the angular deflexions u_4, u_5 about \vec{e}_1, \vec{e}_2 , respectively. There is the geometrical relation

$$\underline{u} = \underline{A} \underline{x} \quad (2)$$

between $\underline{u} := (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T$ and \underline{x} ; the $5 \times N$ -matrix \underline{A} is constant.

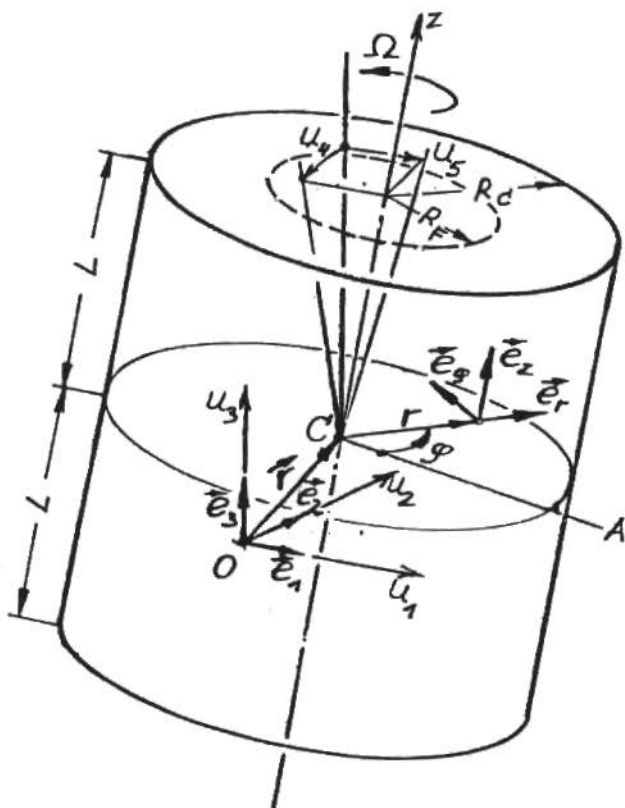


Figure 1. Deflections and coordinates of the cylinder

To scale all quantities and expressions to dimensionless form we introduce as references

$$R_C \text{ for length, } 1/\Omega \text{ for time, } R_C^3 \rho \text{ for mass .} \quad (3)$$

When Ω is varied to study its influence, a fixed value $\hat{\Omega}$ is chosen for scaling. Henceforth, all quantities are assumed to be dimensionless without further indication, except for L and R_F which will be denoted by

$$\tau := L/R_C, \quad R := R_L/R_C, \quad (0 < R \leq 1) . \quad (4)$$

The behavior of the inviscid, incompressible liquid is measured by the small velocities (v_r, v_ϕ, v_z) about the rigid body rotation and the pressure p , which is reduced to

$$P(r, \phi, z, t) := p - r^2/2 + R^2/2 \quad (5)$$

reference is the non rotating basis $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ of cylinder coordinates (cf. Figure 1). The behavior is governed by the partial differential equations

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} & -2 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 2 & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \\ p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi & 0 & z\sin\phi & -z\cos\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi & 0 & z\cos\phi & z\sin\phi \\ 0 & 0 & -1 & -r\sin\phi & r\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \end{pmatrix} \quad (6)$$

and the boundary conditions

$$P(R, \phi, z, t) + R h(\phi, z, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} (\phi, z, t) = v_r(r, \phi, z, t) \quad (7)$$

$$v_r(1, \phi, z, t) = 0 \quad , \quad v_z(r, \phi, \tau, t) = 0 \quad , \quad v_z(r, \phi, -\tau, t) = 0 \quad ;$$

h denotes the radial elevation of the free liquid surface.

The actions of the liquid onto the cylinder, corresponding to the coordinates u_1, \dots, u_5 are given by

$$\underline{f}_C = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \quad , \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_{z=-\tau}^{\tau} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(1, \phi, z, t) \cos \phi \, d\phi \, dz \quad , \\ f_2 &= \int_{z=-\tau}^{\tau} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(1, \phi, z, t) \sin \phi \, d\phi \, dz \quad , \\ f_3 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=R}^1 [P(r, \phi, \tau, t) - P(r, \phi, -\tau, t)] r \, dr \, d\phi \quad , \\ f_4 &= \int_{z=-\tau}^{\tau} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(1, \phi, z, t) z \sin \phi \, d\phi \, dz + \\ &\quad + \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi \int_{r=R}^1 [P(r, \phi, \tau, t) - P(r, \phi, -\tau, t)] r^2 \, dr \, d\phi \quad , \\ f_5 &= \int_{z=-\tau}^{\tau} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(1, \phi, z, t) z \cos \phi \, d\phi \, dz - \\ &\quad - \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \phi \int_{r=R}^1 [P(r, \phi, \tau, t) - P(r, \phi, -\tau, t)] r^2 \, dr \, d\phi \quad . \end{aligned} \quad (9)$$

The vector \underline{f}_C acts onto the system (1) by

$$\underline{f} = \underline{A}^T \cdot \underline{f}_C \quad ; \quad \text{cf. (1), (2)} \quad . \quad (10)$$

The complete set of equations (1), (2) and (5)-(10) is linear and autonomous. This suggests a solution of the form

$$(\underline{x}, \underline{f}, \underline{u}, \underline{v}_r, \underline{v}_\phi, \underline{v}_z, \underline{P}, \underline{f}_C) = (\hat{x}, \hat{f}, \hat{u}, \hat{v}_r, \hat{v}_\phi, \hat{v}_z, \hat{P}, \hat{f}_C) e^{\lambda \Omega t} \quad (11)$$

where the \hat{x} etc. do not depend on the time. A close study of the eigenvalue problem which arises from (11) shows that with λ an eigenvalue, $-\lambda$, λ^* (the complex conjugate of λ) and $-\lambda^*$ are eigenvalues, too. This means that there is instability if there is one λ with $\text{Re } \lambda \neq 0$, and a stable system is only neutrally (weakly) stable with

$$\lambda = j\omega, \quad \text{Re } \lambda = 0 \quad (12)$$

for all eigenvalues. (The statements that $-\lambda$ and λ^* are eigenvalues, too, coincide here; we can restrict our investigation to $\omega > 0$.) Figure 2 shows the transition from a stable operating speed Ω' to an unstable speed Ω'' via a stability boundary Ω'' , an extremum of $\Omega(\omega)$ where two ω 's meet and branch into two complex λ 's, which corresponds to instability. (This is essentially Wolf's procedure, [14].)

Thus, we can study the stability of our system by means of diagrams of the form of Figure 2a. To achieve that we express for $\lambda = j\omega$ the interaction between \hat{u} and \hat{f}_C due to the liquid by

$$\hat{f}_C = \Omega^2 \underline{F}(\omega) \hat{u} \quad (13)$$

where $\underline{F}(\Omega)$ is a 5×5 transfer matrix. Using (1), (2), (10) this leads to

$$\{\Omega^2[-\omega^2 \underline{M} + j\omega \underline{G} - \underline{F}(\omega)] + \underline{K}\} \hat{x} = 0 \quad (14)$$

If (14) is looked upon as an eigenvalue problem for Ω with $\omega (> 0)$ as a parameter, for known $\underline{F}(\omega)$ it can be evaluated by standard numerical routines and yields an N-manifold of values $\Omega_n(\omega)$, $n = 1, \dots, N$, which has to be interpreted as indicated in Figure 2.

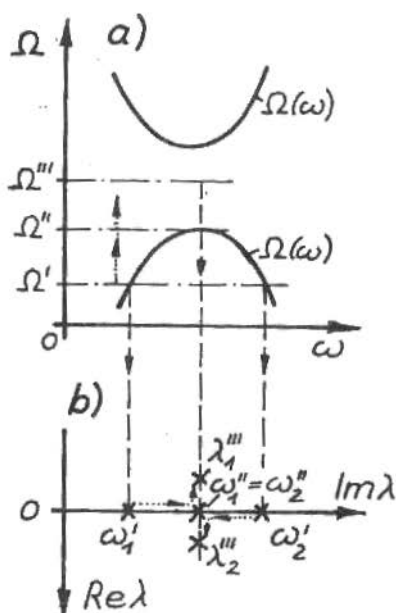


Figure 2. Transition from purely imaginary to complex eigenvalues

TRANSFER FUNCTIONS

Here we list the formulas for $\underline{F}(\omega)$.

The transfer matrix $\underline{F}(\omega)$ has the form

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_{11}(\omega) & -jF_{12}(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ jF_{12}(\omega) & F_{11}(\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44}(\omega) & -jF_{45}(\omega) \\ 0 & 0 & 0 & jF_{45}(\omega) & F_{55}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Lateral Translations

$$F_{11} = \omega^2 \pi (1-R^2) 2\tau \frac{\omega^4 (1+R^2) + (2R^2 - 12)\omega^2 + 4}{[\omega^2 (1+R^2) + 2]^2 - 16\omega^2}, \quad (16)$$

$$F_{12} = \omega^2 \pi (1-R^2) 2\tau \frac{4\omega^3 R^2}{[\omega^2(1+R^2) + 2]^2 - 16\omega^2} \quad (17)$$

Axial Translation

$$F_{33}(\omega) = 128\omega^4 \tau^3 / \pi^3 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k / (1+2k)^4, \quad (18)$$

where for

Case I

$$\omega^2 < 4 : \beta_k^I := (1+2k)\pi/2\tau\omega \cdot \sqrt{4-\omega^2} \quad (19)$$

and

$$\psi_k^I(\omega, R, \tau) = \left\{ 1 + \frac{8(\tau/R)(2\tau\beta_k^I)}{(1+2k)^2 \pi^2 + (2\tau\beta_k^I)^2} \frac{J_1(\beta_k^I) Y_0(\beta_k^I R) - Y_1(\beta_k^I) J_0(\beta_k^I R)}{J_1(\beta_k^I) Y_1(\beta_k^I R) - Y_1(\beta_k^I) J_1(\beta_k^I R)} \right\}^{-1} \quad (20)$$

Case II

$$\omega^2 > 4 : \beta_k^{II} := (1+2k)\pi/2\tau\omega \cdot \sqrt{\omega^2 - 4} \quad (21)$$

and

$$\psi_k^{II}(\omega, R, \tau) = \left\{ 1 - \frac{8(\tau/R)(2\tau\beta_k^{II})}{(1+2k)^2 \pi^2 - (2\tau\beta_k^{II})^2} \frac{I_1(\beta_k^{II}) K_0(\beta_k^{II} R) + K_1(\beta_k^{II}) I_0(\beta_k^{II} R)}{I_1(\beta_k^{II}) K_1(\beta_k^{II} R) - K_1(\beta_k^{II}) I_1(\beta_k^{II} R)} \right\}^{-1} \quad (22)$$

The symbols J_ν , Y_ν denote Bessel functions of the first and second kind, respectively, with the orders $\nu=0$ and $\nu=1$; I_ν , K_ν denote the modified Bessel functions.

Angular Deflexions

$$F_{44} = H(\omega, R, \tau) + H(-\omega, R, \tau) \quad (23)$$

$$F_{45} = H(\omega, R, \tau) - H(-\omega, R, \tau) \quad (24)$$

where

$$H(\omega, R, \tau) := \omega(2+\omega)\tau\pi \left[\frac{1-R^4}{4} - \frac{\tau^2}{3} \right] + \omega(1+\omega)(3+\omega) \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(1+2k)^2} \quad (25)$$

and for

Case I

$$|1+\omega| < 2: \quad \beta_k^I := (1+2k)\pi/2 \sqrt{|1+\omega^2| \cdot (1-\omega)(3+\omega)} \quad (26)$$

holds

$$\begin{aligned} X_k(\omega, R, \tau) = & \{ (2\tau)^2 C_{1k}(1, \omega, R, \tau) / (1+2k)^2 \pi^2 - 2[C_{1k}(1, \omega, R, \tau) \\ & - R C_{1k}(R, \omega, R, \tau)] / (\beta_k^I)^2 + [C_{0j}(1, \omega, R, \tau) - \\ & R^2 C_{0k}(R, \omega, R, \tau)] / \beta_k^I \} / \Delta_k(\omega, R, \tau) \end{aligned} \quad (27)$$

with

$$C_{0k}(r, \omega, R, \tau) := a_k(\omega, R, \tau) J_0(\beta_k^I r) + b_k(\omega, R, \tau) Y_0(\beta_k^I r) \quad (28)$$

($v = 1, 2$), and

$$\Delta_k := \det(\underline{a}_k, \underline{b}_k), \quad a_k := \det(\underline{c}, \underline{b}_k), \quad b_k := \det(\underline{a}_k, \underline{c}) \quad (29)$$

containing the columns

$$\underline{a}_k := \begin{pmatrix} (1+\omega) \beta_k^I J_0(\beta_k^I) + (1-\omega) J_1(\beta_k^I) \\ -(1+\omega) \beta_k^I R J_0(\beta_k^I R) + (1-\omega)(2+4\omega+\omega^2) J_1(\beta_k^I R) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\underline{b}_k := \begin{pmatrix} (1+\omega) \beta_k^I Y_0(\beta_k^I) + (1-\omega) Y_1(\beta_k^I) \\ -(1+\omega) \beta_k^I R Y_0(\beta_k^I R) + (1-\omega)(2+4\omega+\omega^2) Y_1(\beta_k^I R) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\underline{c} := (2, -R\omega(1+\omega))^T; \quad (32)$$

Case II

$$|1+\omega| > 2: \beta_k^I := (1+2k)\pi/2 |1+\omega| \cdot \sqrt{-(1-\omega)(3+\omega)} \quad (33)$$

and in (27)-(31) there have to be replaced $\beta_k^I(\omega, \tau)$ by $\beta_k^{II}(\omega, \tau)$, J_0 and J_1 by I_0 and I_1 , Y_0 and Y_1 by $-K_0$ and K_1 , respectively.

Remark: There exist finite limit values of $H(\omega, R, \tau)$ for $\omega \rightarrow \pm 1$ which is of interest for the computation of critical speeds.

EXAMPLE

In the "centrifuge" shown in Figure 3 all effects, mentioned before, come into action. The cylinder is freely rotating but otherwise rigidly mounted in the support which can - at the point A - tilt about \vec{e}_1 by the angle ψ_1 and rotate about \vec{e}_2 by ψ_2 . The elastic spring constants for the corresponding moments are K_1, K_2 , the moments of inertia (of the support plus shaft) are Θ_1, Θ_2 . The cylinder has the mass m_1 and the moments of inertia Θ_a (about axis) and Θ_p (perpendicular to axis, about C).

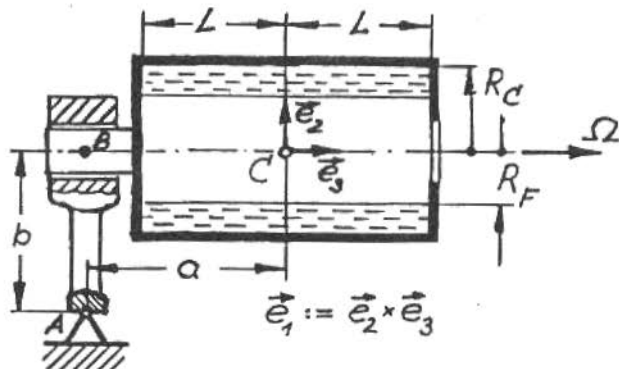
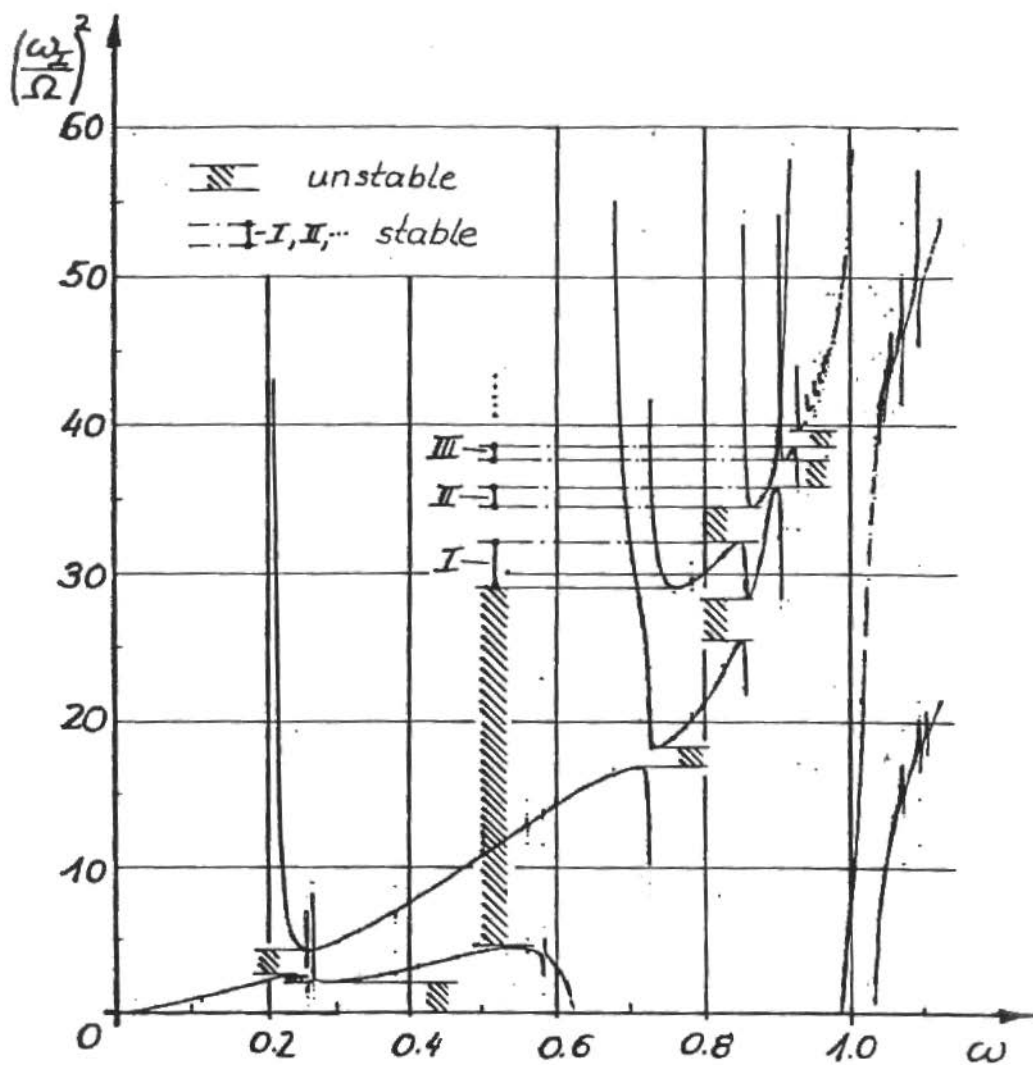


Figure 3. Centrifuge

With $\underline{x} := (\psi_1, \psi_2)^T$ there holds

$$\underline{u}^T = \underline{x}^T \underline{A}^T = (\psi_1, \psi_2) \begin{pmatrix} 0 & -a & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Figure 4. Functions $(\omega_I/\Omega)^2$ depending on ω

The equation (14) gets the form

$$\left\{ \Omega^2 \begin{pmatrix} -q_{11} & jq_{12} \\ -jq_{12} & -q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_I^2 & 0 \\ 0 & \omega_{II}^2 \end{pmatrix} \right\} \hat{x} = 0, \quad (35)$$

with $\omega_I^2/\Omega^2 := K_1/\rho R_C^5 \Omega^2$, $\omega_{II}^2/\Omega^2 := K_2/\rho R_C^5 \Omega^2$ and

$$\begin{aligned} q_{11}(\omega) &= \Theta_I \omega^2 + (a/R_C)^2 F_{11}(\omega) + (b/R_C)^2 F_{33}(\omega) + F_{44}(\omega), \\ q_{22}(\omega) &= \Theta_{II} \omega^2 + (a/R_C)^2 F_{11}(\omega) + F_{44}(\omega), \\ q_{12}(\omega) &= \Theta_{III} \omega + (a/R_C)^2 F_{12}(\omega) + F_{45}(\omega), \end{aligned} \quad (36)$$

where $\Theta_I := [\Theta_1 + \Theta_p + m(a^2 + b^2)/\rho R_C^5]$, $\Theta_{II} := [\Theta_2 + \Theta_p + ma^2]/\rho R_C^5$, $\Theta_{III} := \Theta_a/\rho R_C^5$.

For the values $a/R_C = 1.5$, $b/R_C = 1$, $L/R_C = 1$, $R_F/R_C = 1/\sqrt{2}$, $\Theta_I = 14$, $\Theta_{II} = 10$, $\Theta_{III} = 3$, $(\omega_I/\omega_{II})^2 = 2$ we obtain the 2-fold set of curves $(\omega_I/\Omega)^2$ as functions of ω shown in Figure 4. (There, to show the behavior for large speeds, $(\omega_I/\Omega)^2$ is plotted against ω .) Unstable regions are shaded, stable ones are numbered I, II, III, ... Especially the narrow regions will be severely influenced by viscosity and damping.

REFERENCES

- [1] Brommundt, E. — Frequenzgänge eines teilweise mit idealer Flüssigkeit gefüllten, rotierenden starren Zylinders. Institutsbericht Nr. 3/1985. Institut für Technische Mechanik, Techn. Universität Braunschweig 1985.
- [2] Brommundt, E.; Ostermeyer, G.P. — Stabilität eines fliegend, anisotrop gelagerten rotors, der Flüssigkeit enthält. Accept. for publication by Ingenieur-Archiv.
- [3] Cheng, C.A.; Berman, A.S.; Lundgreen, T.S. — Asynchronous instability of a rotating centrifuge partially filled with fluid. J. Appl. Mech. (Transact. ASME) 52 (1985), p.777-782.
- [4] Daich, I.M.; Bar, I.L. — Oscillations of a rotating rigid body with a cavity partially filled with a viscous liquid. Soviet Appl. Mechanics, 9 (1973), S. 516-520.
- [5] Hendricks, S.L. — Dynamics of flexible rotors partially filled with a viscous

- incompressible fluid. Dissertation, Univ. of Virginia, Charlottesville 1979.
- [6] Hendricks, S.L.; Morton, J.B. — Stability of a rotor partially filled with a viscous incompressible fluid. J. Appl. Mech. (Transact. ASME) 46 (1979), p.913-918.
- [7] Inoue, J.; Jinnouchi, Y.; Araki, Y. — Forced wave motion of liquid partially filling a high speed rotor. J. Mech. Design (Transact. ASME) Paper no. 85-DET-34, June 11, 1985.
- [8] Kaneko, S.; Hayama, S. — On free surface oscillations of a liquid partially filling a rotating cylinder. Bullet. JSME, 26 (1983), p.1985-1992 and 1993-2001.
- [9] Kollmann, F.G. — Experimentelle und theoretische untersuchungen über die kritischen drehzahlen flüssigkeitsgefüllter hohlkörper. Forsch. Ing.-Wes. 28 (1962), p.115-123 and 147-153.
- [10] Kuipers, M. — On the stability of a flexibly mounted rotating cylinder partially filled with liquid. Appl. Sci. Res., Section A, 13 (1964), p.121-137.
- [11] Lichtenberg, G. — Vibrations of an elastically mounted spinning rotor partially filled with liquid. J. Mechanical Design (Transact ASME) 104 (1982), p.389-396.
- [12] Stewartson, W. (Appendix by G.N. Ward) — On the stability of a spinning top containing liquid. J. Fluid Mech., 5 (1959), p.577-592.
- [13] Wohlbrück, R. — Stability of a rotor whose cavity has an arbitrary meridian and is partially filled with fluid. J. Mechanical Design (Transact. ASME) Paper no.85-DET-36, June 11, 1985.
- [14] Wolf Jr., J.A. — Whirl dynamics of a rotor partially filled with liquid. J. Appl. Mech. (Transact. ASME) 35 (1968), p.676-682.

DYNAMICS OF THE RELATIVE MOTION OF A SOLID PARTICLE AND A VISCOUS FLUID CONFINED IN CYLINDRICAL DUCTS OF DIFFERENT GEOMETRIES

Roberto Guimarães Pereira, Membro da ABCM
Maurício Nogueira Frota, Membro da ABCM
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

ABSTRACT

Experiments concerning the relative motion of solid particles and viscous fluids, confined within cylinders of arbitrary cross-section (circular, quadrangular and triangular) have been conducted. For all cases, and far beyond the Oseen's regime, the additional pressure force to viscous drag ratio ($\Delta P^+ A/D$) can be directly evaluated by means of parameters of the unperturbed flow, which, according to an existing theory, should only be expected for low Particle Reynolds Number. Suddenly a strong transition, which is very complex in nature and not fully understood, occurs.

RESUMO

Este trabalho descreve experimentos relacionados ao movimento relativo entre uma partícula sólida (fonte de perturbação) e um fluido viscoso, confinados no interior de cilindros de diferentes seções retas (circular, quadrangular e triangular). Para todos os casos investigados, e muito além do Regime de Oseen ($Re \gg 2$), a razão entre a força de pressão adicional e a força de arrasto, devido a presença da partícula, ($\Delta P^+ A/D$), pode ser diretamente determinada em função de parâmetros do escoamento não perturbado, o que só era esperado para $Re < 2$, de acordo com uma teoria existente. Com o aumento do Número de Reynolds, uma complexa e não completamente explicada transição ocorre.

INTRODUCTION

The dynamics and the relative motion of a particle in a viscous fluid assume importance and application in several useful engineering problems. In science and technology the problem of viscous flow through ducts containing particles is of interest in connection with a variety of process such as pollution, fixed and moving diluted fluidized beds, elutriation, pneumatic conveying, dust and mist collection. Even hemorheology would be a more complex application of the relative motion between non-rigid particles and a viscous fluid confined within a deformable walled pipè.

In the context of the present work, attention is given to the relative motion of a solid spherical particle and a Newtonian fluid confined within parallel walled cylinders of arbitrary, but uniform cross-section.

Let us first consider an infinitely long, cylinder completely filled with a homogeneous, incompressible, Newtonian fluid in steady laminar flow in absence of the perturbation source (solid particle). If we consistently refer the "undisturbed" fluid velocity \mathbf{v}^0 to a stationary coordinate system and if p^0 denotes the "undisturbed" pressure field, one may write:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0 \quad (1)$$

$$\mu_0 \nabla^2 \mathbf{v}^0 = \nabla p^0, \quad (2)$$

i.e., it is assumed that the motion satisfies the linearized Navier-Stokes Equation, from which the inertial terms have vanished identically. The superscript "0" refers to a property of the undisturbed fluid motion, i.e., flow in absence of the solid particle. (The duct is clear of any obstruction).

For a "disturbed" flow however, i.e., flow in the presence of a particle, the overall fluid motion is quite complex and is governed by the momentum equation,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \Pi \quad (3)$$

In this equation, Π is the pressure tensor, and

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\Pi} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

The above equation gives the force exerted across the surface element $d\mathbf{S}$ by the fluid lying on that side of the element into which $d\mathbf{S}$ is directed. For an incompressible, Newtonian fluid,

$$\boldsymbol{\Pi} = -\mathbf{I} p + 2\mu\boldsymbol{\Delta} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) \quad (5)$$

is the rate of deformation tensor. Similarly to (1), the continuity equation for the "disturbed" flow becomes:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

It is important to emphasize that the flow viewed by an observer moving with the particle will appear steady although it should never be considered so by an external observer fixed to the cylinder walls. For an observer moving with the particle velocity \mathbf{U} , the velocity field would be described by

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{U}t, 0) \quad (7)$$

and for this "relatively steady motion",

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

In the light of equation (7), equation (3) can be recast as follows:

$$\rho(\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} \quad (9)$$

It is customary in engineering practice to overcome the difficulties associated with the non-linearity in equation (9) by using a classical Oseen-type linearization of the above equation. This linearization is accomplished when \mathbf{v} is replaced by \mathbf{v}^0 in the first term of (9), i.e.:

$$\rho(\mathbf{v}^0 - \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} \quad (10)$$

To preserve the theoretical consistency of this linearization, not only the Oseen regime (i.e., $Re < 2$) should be preserved but also the smallness of the parameter a/R_0 (ratio of particle to duct characteristic dimensions) theoretically must be controlled [1]. This last restriction is immediately inferred from the fact that only in the near neighborhood of the "small" particle, the disturbed fluid velocity \mathbf{v} may be approximated by the corresponding undisturbed vector \mathbf{v}^0 (actually, as it will be experimentally shown later, and in spite of the linearization used, the Oseen's regime was verified to be an unnecessary condition).

BRIEF REVIEW OF THE LITERATURE

Calculation of the macroscopic pressure drop due to viscous flows through ducts (bounded flows) is one of the major objectives of theoretical hydrodynamics. In the fifties Haberman [2,3] carefully reviewed the scientific literature on slow viscous flow around solid and liquid particles. Brenner & Happel [4] developed a general treatment for similar problem. Approximate expressions were derived yielding the frictional drag, rotational couple and permanent pressure drop caused by the presence of an obstacle in the original Poiseuille flow field, regardless the preassigned position of the sphere. This work was an improved extension of Happel & Byrne [5] work who used the method of "reflections" where the solution of the governing equation was obtained by the sum of a series of velocity fields, all satisfying the momentum, continuity equations and a set of appropriate boundary conditions. Brenner greatly advanced this area publishing several other papers. His work on the dissipation of energy of suspended particles in a viscous liquid [6], probably could be seen as an evidence of a new theory being developed. A general method was devised for calculating the additional mechanical energy dissipation incurred by the presence of solid particles suspended in an incompressible viscous flow. Brenner calculated the additional dissipation rate of energy for a Newtonian fluid motion satisfying the continuity and the linearized momentum equation, together with appropriate boundary conditions:

$$\dot{E}^+ = \iint_{S_p} dS \cdot \Pi \cdot (\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}) \quad (11)$$

In this equation S_p denotes integration over the surface of the particle and S the internal surface of the cylinder walls. Brenner clearly showed the intrinsic source of the additional energy dissipation; i.e., the inability of the particle to accommodate itself to the original fluid motion at its surface. He also treated the case of nonspherical particles and recovered Einstein's formula for the apparent viscosity of a dilute suspension of spherical particles in connexion with Einstein's theory [7] of suspension viscosity.

Still for small values of the ratio a/R_0 and under creeping flow condition, Brenner [8] developed, in a much more simple approach, a general formula which permits a calculation of the pressure drop arising from the slow steady flow of a viscous fluid through a circular cylinder. Brenner was able to calculate the diminution in pressure, directly from the prescribed boundary velocities without requiring a detailed solution of the equations of motion, as originally done by Happel & Byrne [5] who used a much more complex procedure requiring a detailed calculation of the whole field. Finally Brenner [9] came out with a very simple and powerful theory where momentum and energy theorems were applied to the relative motion of a particle of arbitrary shape and a viscous fluid confined within a cylinder of arbitrary cross-section. Besides the remarkable results derived by Brenner, concerning calculation of the additional pressure drop, Brenner's work revealed the existence of a paradoxical analysis. His results revealed that even for the infinitely distant cylinder walls case, there exists a finite shearing force acting on the walls bounding the flow. It is worthwhile noting that his analysis emphasizes an important distinction between an unbounded fluid and one which is bounded at infinity.

Although Brenner's theory was developed based upon a Oseen-type linearization, systematic and redundant experiments exhaustively show its validity far beyond the Oseen's regime, as it will be further discussed in this paper. Even the fluid does not seem to be necessarily Newtonian, regardless the Newtonian restriction imposed on the rate of deformation tensor. This aspect of the theory which lacks experimental confirmation, is in process of investigation [10]. Brenner [11] also developed some work on the

hydrodynamics resistance of particles at small Reynolds numbers and lateral migration of solid particles in Poiseuille flow.

Summary of the Theory for Low Reynolds Number. Consider the relative motion of an arbitrary particle and a viscous fluid confined within a cylinder of arbitrary but uniform cross-section. From a force balance the pressure drop is given by

$$\Delta P^0 A = F_w^0 \quad (12)$$

In this equation we conveniently define a vector pressure drop, equal in magnitude to the usual scalar pressure drop and pointing in the direction of diminishing pressure. In equation (12), A is the cylinder cross-sectional area and F_w is the force exerted by the fluid on the cylinder walls.

Consider now the relative motion of this fluid and the particle (such that the fluid flows at the same fluid velocity as before). A new force balance yields:

$$\Delta P A = F_w + D \quad (13)$$

For this flow situation, in presence of the particle, $\Delta P A$ and F_w , are, respectively, the new values of the vector pressure drop and the force acting on the walls. ΔP is measured across two imaginary parallel planes (one of each side of the particle) separated by a "large" distance h . D is the drag force exerted by the fluid on the particle.

$$D = \iint_{S_p} \Pi \cdot dS$$

The additional fields arising from the presence of the particle, are:

$$v^+ = v - v^0 \quad p^+ = p - p^0$$

$$\Delta P^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} (\Delta P - \Delta P^0) \quad F_w^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} (F_w - F_w^0)$$

Subtraction of equations (13) and (12) together with the

information of the "additional field" yields

$$\Delta P^+ A = F_w^+ + D \quad (14)$$

The rate of mechanical energy dissipated by the fluid can be evaluated for both, the "perturbed" and the "unperturbed" motions, by noting that the dissipation rate is equal to the rate at which the stresses in the system are doing work, i.e.:

$$\dot{E} = -\iint_S dS \cdot \Pi \cdot \mathbf{v} \quad (15)$$

$$\dot{E}^0 = -\iint_{S-S_p} dS \cdot \Pi^0 \cdot \mathbf{v}^0 \quad (16)$$

from the above equation one obtains the additional dissipation rate within the cylinder arising from the presence of the perturbation source (particle) in the flow field:

$$\dot{E}^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} (\dot{E} - \dot{E}^0) \quad (17)$$

The surface of integration given in (15) is the surface, S , bounding the fluid volume which must include the side walls, S_w , of the cylinder, the two cross-section ends of the cylinder, $S_{\pm h}$, the surface S_p of the particle "wetted" by the viscous fluid. The appropriate boundary conditions to be taken into account in the evaluation of (15) are:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 = 0 \quad , \quad \text{on } S_w \quad (18)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad , \quad \text{on } S_p \quad (19)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 \quad , \quad \text{on } S_{\pm h} \quad (20)$$

It is convenient to obtain the solution of (15) in terms of the mean velocity \mathbf{V}_m given by

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{A} \iint_A \mathbf{v}^0 \cdot d\mathbf{A}$$

In general, the couple experimented by the particle in the perturbed flow, is given by

$$L = \iint_{S_p} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Pi} \cdot d\mathbf{S})$$

where \mathbf{r} is measured from a point along the axis of rotation.

Equation (15) finally yields:

$$\dot{E} = \Delta P \cdot \mathbf{V}_m A - \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} - \Omega \cdot \mathbf{L} \quad (21)$$

Physically equation (21) confirms that no work is done by the stresses at the cylinder walls ($\mathbf{v} = 0$ on S_w); while the lead term in (21) arises from the work done by the pressures acting over the ends of the cylinder, the two remaining terms denote the work done by the stresses acting over the particle surface. Using similar arguments, equation (16) yields:

$$\dot{E}^0 = \Delta P^0 \cdot \mathbf{V}_m A \quad (22)$$

Combining (17), (21) and (22), one obtains the additional dissipation rate:

$$\dot{E}^+ = \Delta P^+ \cdot \mathbf{V}_m A - \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} - \Omega \cdot \mathbf{L} \quad (23)$$

It should be carefully noted that the additional dissipation rate \dot{E}^+ may either be obtained by equation (11) or alternately by equation (23). While equation (11) arose from arguments concerning the governing equations applied to the perturbed fluid motion, equation (23) directly states that the instantaneous rate at which mechanical energy is being dissipated must overcome the increase of kinematic and Potential energy in addition to the difference between the rate at which the stresses, acting over the surfaces bounding the fluid, are doing work.

The beauty and simplicity of equation (23) relies in the fact that the "additional" pressure drop ΔP^+ may be calculated from the corresponding dissipation rate.

Brenner's most remarkable result came from equating the solution of equation (11) and equation (23). Although the solution

of equation (11) gets much more involved than the procedure used to obtain equation (23), in the course of its solution, for the case of a "small particle", Brenner obtained a closed form solution to equation (11) by considering a relative order of magnitude of each term resulting from the substitution of an expression for $(\mathbf{v}-\mathbf{v}^0)$ in equation (11). \mathbf{v} comes from equation (19) while \mathbf{v}^0 arises from a Taylor series expansion applied to the unperturbed flow field as the flow field may be assumed regular at all points. After all the above hypothesis are considered and after performing the necessary manipulation, the resulting solution of equation (11) is combined with equation (23) yielding Brenner's final results

$$\Delta P^+ \cdot V_m A = v_0^0 \cdot D \quad (24)$$

Returning to a scalar equation, and providing that D is understood to refer only to that component of the force on the particle which is parallel to the cylinder walls and, since \mathbf{v}^0 is always in the same direction as V_m , no ambiguity in algebraic sign results from writing, more conveniently, equation (17) as follow:

$$\Delta P^+ A/D = v_0^0/V_m \quad (25)$$

It is in fact noteworthy that the ratio of the pressure drop to the particle drag forces (parameters of the perturbed flow), LHS of equation (25) equally balances the RHS containing parameters of the unperturbed flow.

Combining (14) and (25) one can derive an expression yielding unexpected paradoxical results for the additional force on the walls:

$$F_w^+ = (v_0^0/V_m - 1)D \quad (26)$$

In order to illustrate the notability of the theory, lets, simultaneously, consider the ratio v_0^0/V_m for several different flows, for which the solutions of the rectilinear unperturbed flow equations (1) and (2) are known [12].

For the case of a flow along a circular cylinder of radius R_0 , the unperturbed Poiseullian velocity distribution is given by:

$$\frac{v_0^0}{V_m} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \quad (27)$$

The counterparts of this equation for unperturbed rectilinear laminar flows in channels of various cross-sections can be derived from reference [12]. For the case of an equilateral triangle cross-section (sections defined by the lines $y = \pm x\sqrt{3}$ and $y = m$), the nearly parabolic velocity distribution is given by Boussinesq's formula

$$v^0 = \frac{K}{4m} (y-m)(3x^2 - y^2) \quad (28)$$

where K is a dimensional parameter related to the volumetric flow rate Q :

$$60 Q \sqrt{3} = K m^4 = 60 m^2 V_m$$

For the analogous case of a duct of square cross-section (section defined by the lines $x = \pm \ell$ and $y = \pm \ell$), the velocity distribution is given by a series expansion

$$v^0 = \frac{1}{2} K \left[\ell^2 - y^2 + \frac{4}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} N^{-3} \operatorname{sech} Na \operatorname{Cosch} Nx \cos Ny \right] \quad (29)$$

where:

$$2 \ell N = (2n+1)\pi$$

$$Q = K \left[\frac{4}{3} \ell^4 - \frac{8}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} N^{-5} \tanh(Nh) \right] = 4\ell^2 V_m$$

Using the appropriate velocity distribution, as given by the above equations, and for the particular case of a "small" particle located along the cylinder axis, one may organize Table I

Table I. Pressure drop and wall shearing force in confined viscous flows

CYLINDER CROSS-SECTION	$\Delta P^+ A/D = v_0^0 / V_m$	F_w^+ / D
Circular	2.000	1.000
Equilateral triangle	2.222	1.222
Quadrangular	2.093	1.093

Table I, which is theoretically limited to the Oseen's regime, emphasizes that there exists a finite shearing force acting on the "far" walls of the cylinder. Notice that, for all cases, $F_W^+ \neq 0$ (although, it could be thought, from simple fluid mechanics arguments, that $F_W^+ = 0$, since the side wetted walls are infinitely distant from the small particle) for the circular cylinder flow $F_W^+/D = 1.0$. Surprisingly, this additional shearing force F_W^+ , due to the presence of the particle in the flow field, may even be greater than the drag force which acts directly on the particle. As shown in Table I, for the cases of flow along quadrangular and triangular shaped ducts, this shearing forces acting on the far side walls are 9.3% and 22.2% greater than the correspondent viscous drag forces, respectively.

EXPERIMENTAL RESULTS

In spite of the strong theoretical consistency of Brenner's theory, it is so rich in detail and so instigating, yielding paradoxal results, that it would never be trusted without a reliable experimental confirmation. This experimental verification was sistematically performed and constitutes the main objective of the present work. A few attempts to provide confirmation of Brenner's theory have been reported and a complete review of the literature is given in [13]. Due to severe experimental difficulties, associated with measurements of very small pressure differences (on the order of small fractions of mm Hg), some of the available data only covers a small regime [14] or display a very larger scatter and were as much as 50% uncertain [15]. The available results concerning confirmation of Brenner's theory seem to be restricted to circular cylinders [16,17].

Experimental set up. Figure 1 shows, schematically, the apparatus employed to develop the confirmation of the theory. The apparatus consisted basically of four main parts: (i) a vertical, 3m long, plexyglass cylinder (test cylinder), within which the particles were dropped; (ii) a vertical, 3m long, plastic pipe joined at its base to the main column and employed to balance the hydrostatic pressure in the main column; (iii) an accurate differential pressure transducer system, which had its pressure inlets connected by tubing to the air volumes on the top of both

columns; (iv) a strip-chart recorder, which recorded signals from the differential pressure transducer. Both columns were filled with liquid to within a few cm of the top. The remainder of the system contained air (working fluid of the pressure transducer) at essentially atmospheric pressure, which served to transmit to the transducer the pressure differences created by the particle motion. Details concerning the experimental facility, solid particles and viscous fluid are given in [13]. Individual particles released along the axis of the cylinder, filled with the viscous fluid, induced minute pressure differences ΔP^* which were measured by a pressure transducer (Type 77-H1)/control unit (77M-XRP), manufactured by MKS Instruments.

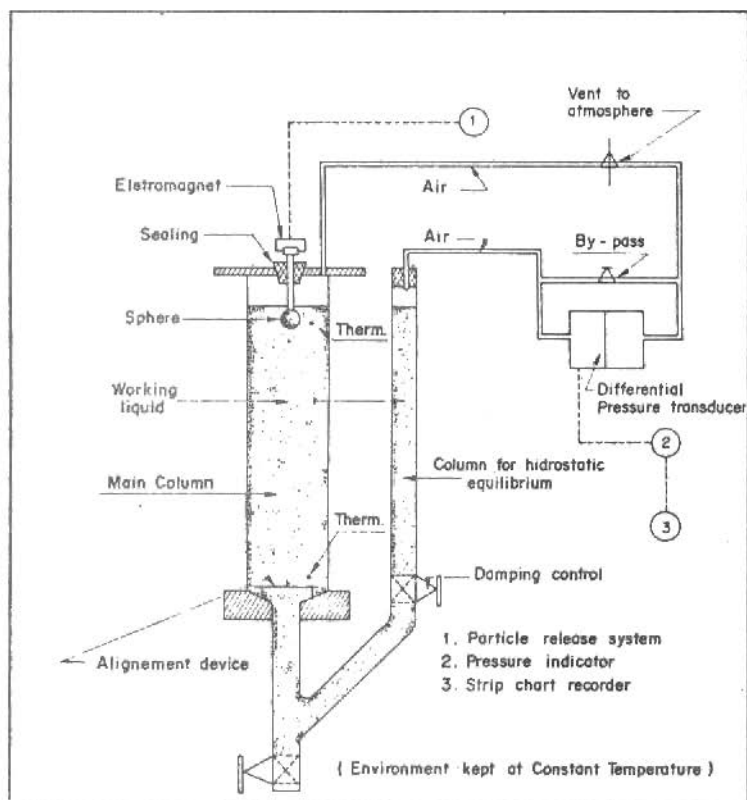


Figure 1. Experimental facility

This is a rapid-response, differential pressure transducer consisting essentially of a grounded metallic diaphragm operating as a capacitor plate, driven by an amplifier system. The transducer was excited in a bridge configuration by a sinusoidal oscillator. Calibration of the pressure measurement system is discussed elsewhere [18]. A submicron pressure level (10^{-3} mm Hg full scale) was successfully calibrated within better than 1% [13].

The present investigation. Figure 2 summarizes current measurements of the additional dynamic pressure force to viscous drag ratio, obtained in circular and non-circular cylinders. A base-line data set were obtained in a circular cylinder, in the Oseen's regime. These data were also compared with Feldman's results [16] which represent the most complete data set available. Figure 2 also summarizes, for comparison, all available results.

ANALYSIS & CONCLUSIONS

According to Figure 2, Brenner's theory is fully confirmed. Three cylinder geometries have been exhaustively investigated. The theoretical values $\Delta P^+ A/D = v_0^0/V_m = 2.000, 2.093$ and 2.222 corresponding respectively to the cases of circular, quadrangular and triangular cylinders, have experimentally been verified for different flow regimes.

Referring to Figure 2 one may conclude:

- i) from the circular cylinder data which strongly support Brenner's theory and also duplicate all Feldman's result [16] and few other experimental works, the overall experimental procedure was fully qualified. The data points seen actually constitute the base-line data set and each point represents an average of more than 20 replication of each experiment [13];
- ii) Brenner's theory was confirmed for very low Reynolds Number. Severe experimental difficulties, resulting from measurements of very small pressure differences (10^{-3} mm Hg), arise when experiments are to be performed at very low Reynolds number in the Stokes regime ($Re < 0.1$). This regime was investigated in the quadrangular cylinder. Measurements of $\Delta P^+ A/D$ were performed at Reynolds Number as small as 0.05. In this region the agreement between experiments and theory is better than 0.5%;

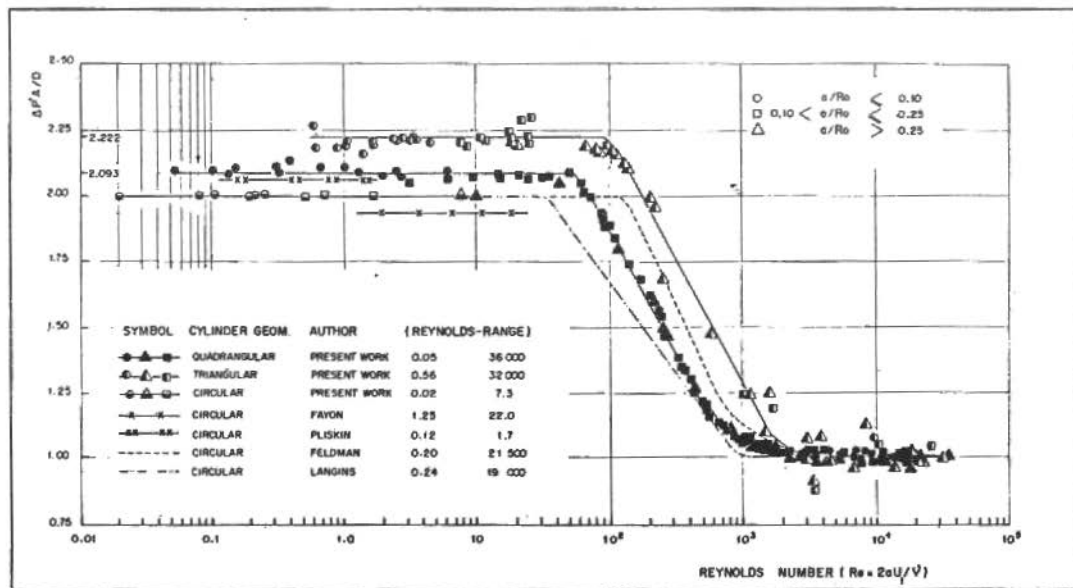


Figure 2. The state of the art concerning Brenner's theory.
Experimental confirmation

- iii) theoretically, due to the Oseen-type linearization used in the governing equation, the domain of Brenner's theory extends to the Oseen's regime ($Re < 2$). For all cases investigated, irrespectively of the cylinder geometry, the theory was confirmed (see Figure 2);
- iv) for all cases, Brenner's theory allows (regardless the cylinder geometry) important hydrodynamic parameters of the perturbed flow to be evaluated by the corresponding parameters of the unperturbed flow, even far beyond the Oseen's regime. The limit of validity of the theory is set by the Reynolds Number corresponding to the end of the "patamar" seen in Figure 2. Considering that (25) does not contain any of the usual hydrodynamic parameters (e.g., viscosity, density, particle size or velocity) which might suggest a dependence on the Reynolds Number, it seems reasonable to expect (actually proved to be so) that Brenner's theory should extend beyond the Oseen's regime. However, how far beyond $Re < 2$ is an open question impossible to be answered by theoretical arguments. In addition, physically, it should also be expected that $F_w^+ = 0$, meaning that fluid bounded at infinity is equivalent to the situation of an unbounded fluid, as might otherwise be implied by elementary momentum arguments.
- The breakdown of Brenner's theory seems to be related to the instability of the wake behind the sphere in motion. This complex mechanism is discussed elsewhere [13]. If the transition mechanism can be attributed to this instability one should not expect that the beginning of the transition region should depend upon the cylinder geometry; it should only depend upon the particle shape or perhaps on the a/R_0 value. Very likely, the apparent disagreement between Feldman's and Langin's results arises from the fact that they covered the transition region using different a/R_0 spheres. Unfortunately, Feldman's and Langin's particles shape were not quite identical. Feldman used composite polyethylene-steel spheres not perfectly spherical in shape and, probably, the instability of the flow in the wake behind the particle could also affect the complex mechanism associated with transition. At this point it lacks information about the mentioned disagreement. New experiments

are in progress in order to better explain this phenomenon.

- v) beyond the "patamar", seen in Figure 2, the additional pressure force to viscous drag ratio, $\Delta P^+ A/D$, abruptly decreases asymptotically towards the value 1.0. Although, apparently, it seems that the cylinder geometry affects transition, it seems safe to conclude that for Re beyond transition (Re_t), the following limit is always valid, regardless the geometry:

$$\lim_{Re_t \rightarrow \infty} (\Delta P^+ A/D) = 1.0 \quad (30)$$

This limit value 1.0 actually sets the flow regime ($Re > Re_t$) corresponding to the situation in which a fluid bounded at infinity can be modelled as an unbounded fluid. As one knows, for engineering purposes, few are not the situation in which similar hypothesis are made, regardless the flow regime. Application of this theory and advances in this controversial and interesting issue are in progress.

REFERENCES

- [1] Lamb, H. Hydrodynamics. 6th Ed. Cambridge University Press, New York, 1932, pp.572-617.
- [2] Haberman, H. — Wall effect for rigid and fluid spheres in slow motion. David Taylor Model Basin Report, also Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech. (Brussels), 1956.
- [3] Haberman, H. — Wall effect for rigid and fluid spheres in slow motion within a moving liquid. David Taylor Model Basin Report, 1957.
- [4] Happel, J. & Brenner, H. Slow viscous flow past a sphere in a cylindrical tube. J. Fluid Mech., 4 : 195-213, 1958.
- [5] Happel, J. & Byrne, B.J. — Motion of a sphere and fluid in a cylindrical tube. Industr. Engng. Chem., 46 : 1181-1186, 1954.
- [6] Brenner, H. — Dissipation of energy due to solid particles suspended in a viscous liquid. Phys. Fluids, 1 : 338-346, 1958.
- [7] Einstein, A. — Investigations on the theory of the brownian movement. Dover, New York, 1956, p.36.
- [8] Brenner, H. — Pressure drop due to viscous flow through cylinders. J. Fluid Mech., 6 : 542-546, 1959.
- [9] Brenner, H. — Dynamics of a particle in a viscous fluid. Chem. Engng. Sci., 17 : 435-446, 1962.

- [10] Ribeiro, G.A.S.M. — Dinâmica da partícula em um fluido não-Newtoniano. Dept. Eng. Mec., PUC/RJ, Tese de Mestrado em Desenvolvimento, 1986.
- [11] Cox, R.G. & Brenner, H. — The lateral migration of solid particles in poiseuille flow: Part 1. Chem. Engng. Sci., 23 : 147-173, 1968.
- [12] Dryden, H.L.; Murnaghan, F.D. & Bateman, H. — Hydrodynamics. Dover, New York, 1956, pp.197-296.
- [13] Pereira, R.G. — Experimentos sobre a pressão dinâmica adicional no escoamento relativo entre partículas sólidas e fluido viscoso. Tese de Mestrado, Dept. Eng. Mec., PUC/RJ, 1985.
- [14] Pliskin, I. — Pressure drop due to the slow settling of a sphere in a cylinder containing a viscous fluid. M.Ch.E. Thesis, New York University, New York, 1962.
- [15] Fayon, A.M. — Effect of a cylindrical boundary on rigid spheres suspended in a moving viscous liquid. Sc.D. Dissertation, New York University, New York, 1959.
- [16] Feldman, G.A. — Experiments on the pressure drop created by a sphere settling in a liquid at Reynolds up to 20.000. Ph.D. Dissertation, New York University, Bronx, New York, 1967.
- [17] Langins, J. — Dynamic pressure drop induced by cones and sphere settling in a cylindrical conduit. M.Ch.E. Thesis, McGill University, Montreal, 1969.
- [18] Frota, M.N. — A new accurate method for calibrating submicron pressure transducers (1 to 10^{-3} torr). Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp.181-184, São José dos Campos, São Paulo, dezembro de 1985.

DETERMINAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL DA VELOCIDADE DE QUEIMA DE PROPELENTE SÓLIDO

Aparecida Minhoko Kawamoto

IAE - Divisão de Química

CTA - São José dos Campos, SP

Gordiano Faria de Alvim Filho

ITA - Departamento de Aeronáutica

CTA - São José dos Campos, SP

RESUMO

A queima erosiva de propelentes sólidos tem sido estudada por diversos autores, utilizando diferentes métodos. Neste trabalho, estudou-se teoricamente e experimentalmente a queima erosiva de motores-foguetes colocados em série. O estudo teórico baseou-se na resolução numérica do modelo matemático de Lenoir e Robillard [1]. A parte experimental foi realizada utilizando-se motores de diâmetro de garganta (0,0295m a 0,060m) e comprimento (0,488m a 1,708m) variáveis, com blocos de propelente "composite" de perfuração estrelada e detectores de fim de queima. Paralelamente, ensaios em bomba de queima e motores de queima interna e externa foram utilizados para determinação da velocidade de queima não erosiva. Uma análise crítica, com comparação entre resultados teóricos e experimentais, é também apresentada.

ABSTRACT

Erosive burning of solid propellants has been studied by several authors applying different methods. In this work, a theoretical and an experimental study of erosive burning in rocket motors assembled in series were performed. The theoretical study was established through a numerical mathematic treatment developed by Lenoir and Robillard [1]. The experimental work was performed using motors with throat diameter from 0.0295m to 0.060m and lengths from 0.488m to 1.708m with star shaped on star perforated composite propellants grain with embedded end of burning detectors. At the same time experimental tests in a bomb and internal/external burning rocket were performed to determine non-erosive rate data. A comparative critical analysis between theoretical and experimental results is also presented.

NOMENCLATURA

A_b	área da superfície de queima do propelente (m^2)
A_p	área da seção transversal do canal de escoamento dos gases, usualmente chamada de passagem (m^2)
A_t	área da garganta da tubeira (m^2)
C^*	velocidade característica (m/s)
C_F	coeficiente de empuxo
e	espessura queimada do bloco de propelente
F	empuxo (N)
G_g	fluxo mássico por unidade de área ($kg/(m^2 s)$)
I_{sp}	impulso específico (s)
L	comprimento total do bloco de propelente (m)
\bar{M}	peso molecular dos produtos de combustão
M	número de Mach
p	pressão estática
P_C	pressão de estagnação na entrada da tubeira (seção C) (N/m^2)
P_F	pressão em $x = 0$, ou seja, na seção anterior do bloco de propelente (N/m^2)
q	fluxo mássico por unidade de área ($kg/(m^2 s)$)
$R = \frac{\bar{R}}{M}$	constante específica dos gases ($(Nm)/(kgk)$)
\bar{R}	constante universal dos gases ($(Nm)/(Kmol k)$)
τ	tempo (s)
T	temperatura de estagnação dos gases (K)
T_C	temperatura adiabática de chama (k)
t_i	temperatura inicial do propelente (k)
V_b	velocidade de queima não erosiva (m/s)
V_e	velocidade de queima erosiva (m/s)
V	volume total da câmara de combustão (m^3)
V_g	volume livre ocupado pelos gases (m^3)

Z	ângulo do divergente da tubeira
γ	razão dos calores específicos
Γ	$\sqrt{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma-1}}}$
ρ_g	massa específica dos gases (kg/m^3)
ρ_p	massa específica do propelente (kg/m^3)
ϕ	razão de mistura comburentes combustíveis

INTRODUÇÃO

A velocidade de queima de propelentes sólidos é uma complexa função de muitas variáveis e pode ser representada, como aproximação, pela seguinte relação funcional:

$$r = r(p, T_c, t_i, V_g, \phi)$$

Investigações experimentais sobre um mesmo propelente tem demonstrado que a velocidade de queima, depende principalmente da velocidade dos gases (V_g) e da pressão p [1]. A influência de V_g é chamada erosão e a queima do propelente sob estas condições é a queima erosiva [7], que provoca um aumento na mesma.

O fenômeno erosivo aparece comumente nos motores foguetes a propelente sólido que possuem uma pequena razão entre a área de passagem e a área garganta.

A queima erosiva tem sido estudada através de vários métodos: queima interrompida, fotografias de alta velocidade, etc. Para o presente estudo foram utilizados motores foguetes de vários comprimentos, mantendo constante a relação:

$$k_{n_i} = \frac{A_b}{A_t} ,$$

onde se tem a vantagem de conseguir resultados de queima erosiva em condições mais reais.

OBJETIVO DO TRABALHO

É feita uma investigação teórica e experimental da queima erosiva do propelente "composite" com os objetivos:

- a) Determinar as curvas de pressão, empuxo e a velocidade média de queima, através de uma sistemática de cálculos e utilizando a teoria de Lenoir e Robillard [1].
- b) Obter os resultados experimentais da pressão, empuxo e velocidade média de queima, realizando uma série de ensaios com motores foguetes de diversos comprimentos.
- c) Estudo da distribuição da pressão, velocidade de escoamento dos gases e velocidade total de queima em seções representativas no interior da câmara de combustão.
- d) Estudo da velocidade de queima não erosiva através de trabalhos experimentais em bomba de queima (tipo Crawford) e motor de queima interna/externa.

EQUAÇÕES DESCRITIVAS DO PROBLEMA

Tem-se três etapas distintas na queima do bloco de propelente:

- queima erosiva
- queima não erosiva
- fim de queima

Combustão Erosiva do Bloco. A velocidade de queima nesta fase é:

$$r = v_b + v_e \quad (1)$$

onde:

$$v_b = a p^n \quad (2)$$

$$v_e = \alpha_1 G_g^{0,8} / L^{0,2} \exp\left(\frac{\beta \cdot p_p \cdot r}{G_g}\right) \quad (3)$$

Para um dado propelente, a e n são valores determinados experimentalmente. Os coeficientes α_1 e β são considerados independentes da natureza do propelente.

Através de trabalhos experimentais [1] tem-se:

$$\alpha_1 = 5,70 \text{ cm}^{2,8} \text{ kg}^{-0,8} \text{ s}^{-0,2}$$

$$\beta = 53$$

A velocidade dos gases (V_g) e pressão (p) em seções representativas ao longo do bloco propelente são expressas por:

$$V_{g_x} = \frac{A_{b_x} \rho_p}{A_p \rho_g} \cdot r \quad (4)$$

$$p_x^{(2)} = \frac{P_F}{1 + \Gamma M^2} \quad (5)$$

A variação de P_F [4] é expressa através de:

$$\frac{P_F}{1 + \Gamma^2 \left(\frac{A_t}{A_p}\right)^2} = \frac{\Gamma^2 A_p \rho_p \sqrt{RT_c}}{A_t} \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma^2 \left(\frac{A_t}{A_p}\right)^2 \right] \quad (6)$$

O cálculo do empuxo (F) é feito através da expressão:

$$F = P_c A_t \left[\frac{2}{(\gamma-1)} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} (1 + \cos Z)/2 + A_e (p_e - p_o) \quad (7)$$

Z = ângulo do divergente da Tubeira

γ = razão de calores específicos [5]

A fase de combustão erosiva termina quando a seção de passagem dos gases na perfuração central é suficientemente grande para que a velocidade de escoamento gasoso não interfira mais sobre a velocidade de combustão do propelente, ou seja:

$$V_e = 0 \quad e \quad r = V_b$$

Combustão Não Erosiva do Bloco. Nesta fase, a velocidade de queima se reduz a:

$$r = V_b = ap^n \quad (8)$$

tendo em vista que: $pV_g = mRt$, considerando $t = T_c$ e sendo m a massa dos gases queimados, a equação para o cálculo da pressão [3] é dada por:

$$\frac{dp}{de} = \frac{1}{V_g(e)} \left[A_b(e)(\alpha_2 - p) - \frac{q \cdot RT_c A_t}{ap^n} \right] \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \rho_p \cdot R \cdot T_c$$

Esta equação não tem solução analítica, sendo então necessário utilizar métodos numéricos. O método utilizado foi de Runge-Kutta.

Fim de Queima. Ao fim da queima do bloco $V_b = 0, V_g = V$ e $p = P$ uniforme no interior da câmara. Assim tem-se que:

$$\frac{dp}{de} = \frac{1}{V} [-q \cdot R \cdot T \cdot A_t]$$

sendo:

$$q = \left[\gamma \cdot \frac{2}{\gamma+1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{R \cdot T} \right]^{1/2} \quad P_c = \Gamma \frac{1}{\sqrt{R \cdot T_c}} P_c = \frac{f}{C^*} \cdot P_c$$

MATERIAL E MÉTODO

Foram realizados 3 trabalhos experimentais relativos à velocidade de queima:

- Trabalho com bomba de queima (Foto 1), motor de queima interna/externa (Foto 2) e Motor Teste (Foto 3) para determinar a velocidade de queima não erosiva, ou seja, $V_b = a p^n$, mais especificamente determinar as constantes a e n.
- Trabalho com vários motores testes para determinar a velocidade de queima erosiva. Cada motor possui um comprimento de 0,488m. São feitas montagens com estes motores para a realização dos ensaios (Foto 4). Estas montagens são feitas porque o comprimento do grão de propelente de um único motor frente às altas velocidades de escoamento dos gases sobre a superfície não é suficiente para acusar queima erosiva.

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÃO

Para o cálculo dos coeficientes a e n da fórmula empírica $V_b = a p^n$ (Velocidade de queima não erosiva), foram utilizados 3 métodos:

Bomba de Queima (Tipo Crawford). Foram realizados 26 ensaios, de onde se obtêm as curvas de P vs τ e as velocidades de queima.

Os resultados constam da Figura 1, (curva 1b), que apresentam os seguintes valores de a e n:

$$a = 0,967 \text{ (mm/s)/(kgf/cm}^2\text{)}^n = 2,5936 \times 10^{-6} \text{ (m/s)/(N/m}^2\text{)}^n$$

$$n = 0,5152$$

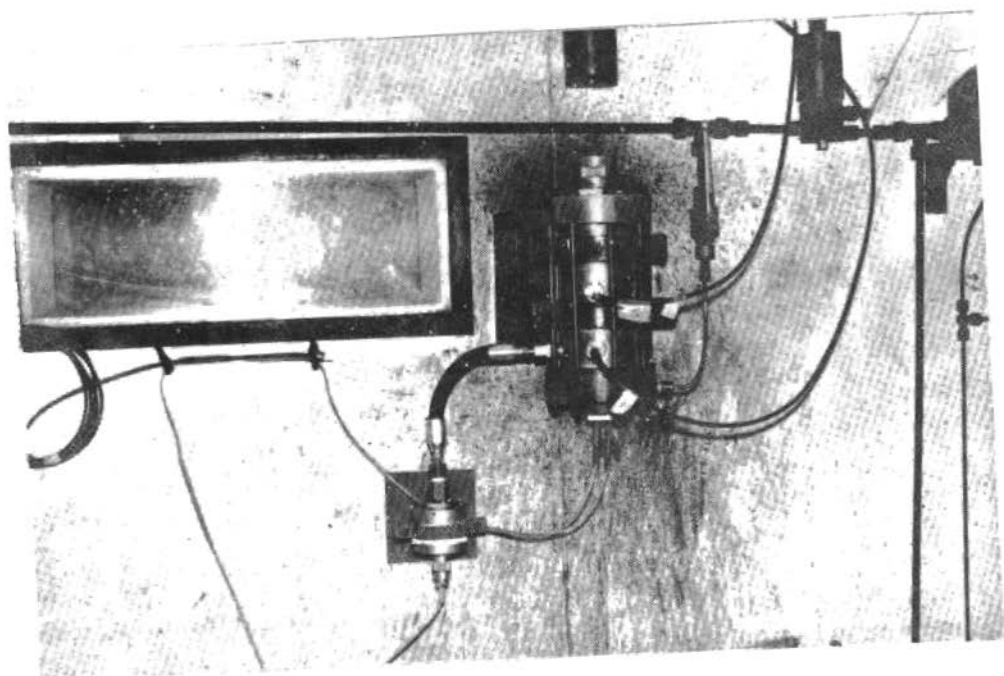


Foto 1

Motor de Queima Interna/Externa. Foram realizados 15 ensaios experimentais programados para fornecer pressões na faixa de 20 a 45 atm. Os resultados constam da Figura 1 (curva b), com os seguintes valores de a e n:

$$a = 0,7073 \text{ (mm/s)/(kgf/cm}^2\text{)}^n = 1,3847 \times 10^{-6} \text{ (m/s)/(N/m}^2\text{)}^n$$

$$n = 0,5428$$

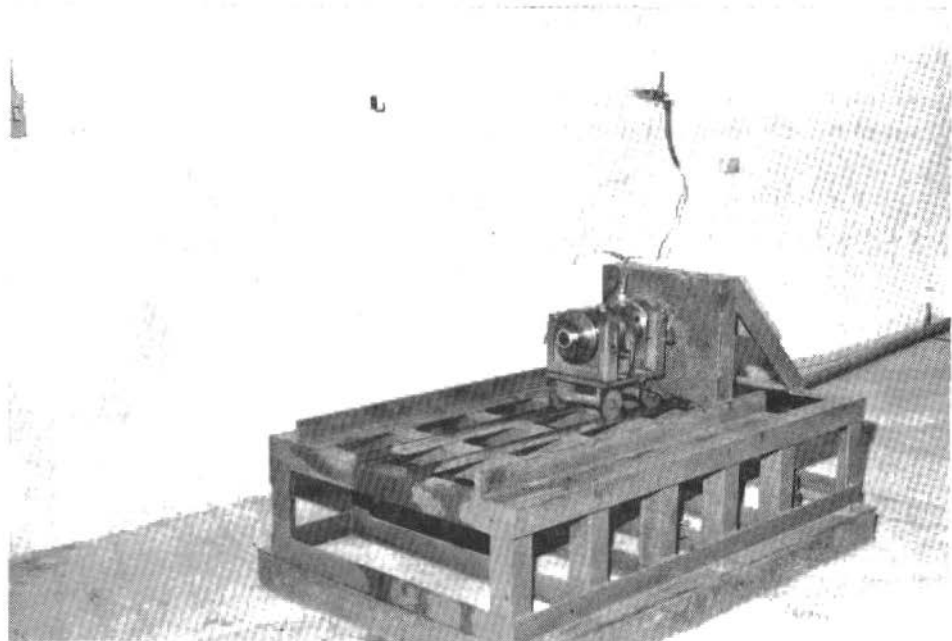


Foto 2

Motor Teste. Foram realizados 6 ensaios experimentais, cujos resultados constam da Figura 1 (curva 1c), com:

$$a = 0,6267 \text{ (mm/s)/(kgf/cm}^2\text{)}^n = 1,299 \times 10^{-6} \text{ (m/s)/(N/m}^2\text{)}^n$$

$$n = 0,5376$$

Da comparação das curvas tem-se um excelente acordo nos valores de n, revelando que estes independem do tipo de ensaio. Ao contrário, observa-se que os valores de a diferem do motor teste para a bomba de queima e motor de queima interna/externa de 48% e 13% respectivamente.

Estas diferenças são explicadas devido ao fato que as condições que influenciaram nos valores de a não foram mantidas constantes por ocasião dos ensaios (geometria e temperatura inicial do grão)

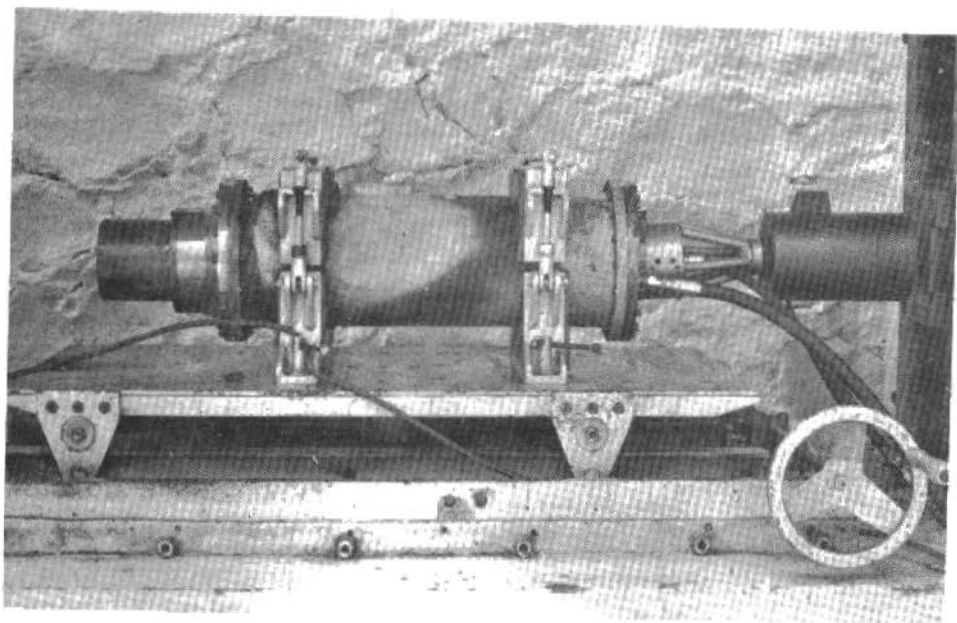


Foto 3

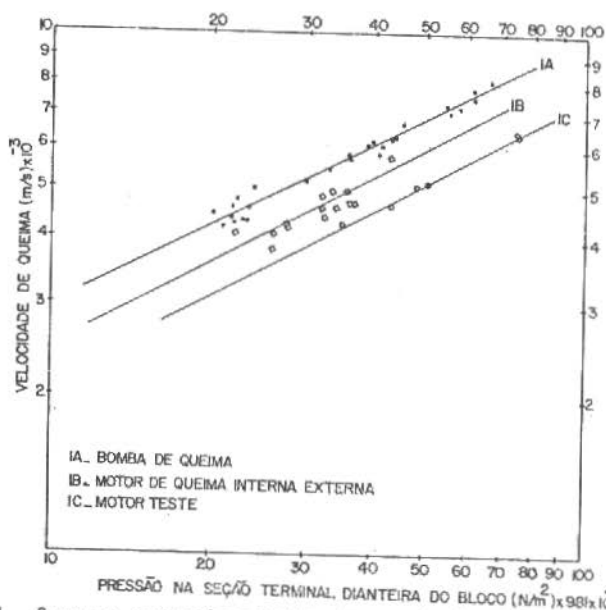
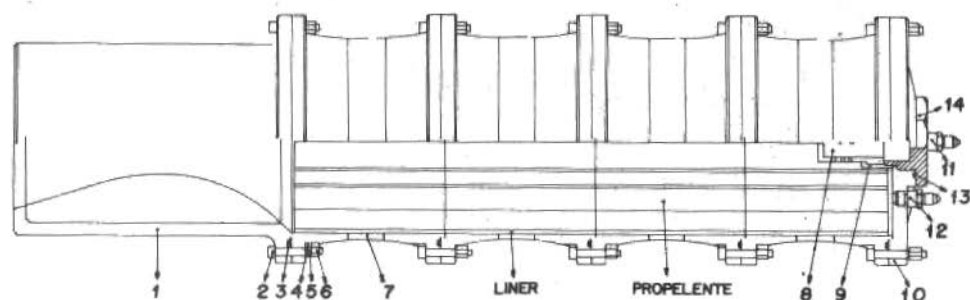


Figura 1. Curvas experimentais da variação da pressão com a velocidade de queima-bomba de queima interna e externa e motor teste

Observa-se que na fórmula da velocidade de queima não erosiva ($V_b = ap^n$) variações nos valores de a são muito menos representativas que aquelas nos valores de n .

Desta forma, quaisquer dos métodos utilizados para determinação destes parâmetros (a e n) poderiam ser considerados como alternativa.

Ensaio de Queima Erosiva.



ITEM	DESIGNAÇÃO
1	CARTER EQUIPADO
2	PARAFUSO DE FIX. DO TUBO MOTOR
3	ANEL DE VEDAÇÃO DO TUBO MOTOR
4	ARRUELA LISA
5	ARRUELA DE PRESSÃO
6	PORCA DE FIXAÇÃO DO TUBO MOTOR
7	TUBO MOTOR
8	CESTO DE IGNIÇÃO
9	LUVA DO IGNITOR
10	TAMPA DIANTEIRA
11	TOMADA DE PRESSÃO PRINCIPAL
12	TOMADA DE PRESSÃO SECUNDÁRIA
13	ANEL DE VEDAÇÃO DO IGNITOR
14	CABEÇOTE DO IGNITOR

Foram utilizados 15 ensaios experimentais:

- 05 ensaios com motores de comprimento 0,488m (1 motor apenas);
- 03 ensaios com motores de comprimento 0,976m (acoplamento de 2 motores);
- 01 ensaio com motor de comprimento 1,220m (acoplamento de 2 1/2 motores);
- 03 ensaios com motores de comprimento 1,464m (acoplamento de 3 motores);
- 01 ensaio com motor de comprimento 1,708m (acoplamento de 3 1/2 motores).

São calculadas pressões e empuxos médios, I_{sp} , C^* e C_F (Tabela 1). A Figura 2 apresenta as curvas experimentais e teóricas de pressão e empuxo com o tempo para motor de comprimento 0,488m. Para os demais comprimentos a forma das curvas são semelhantes.

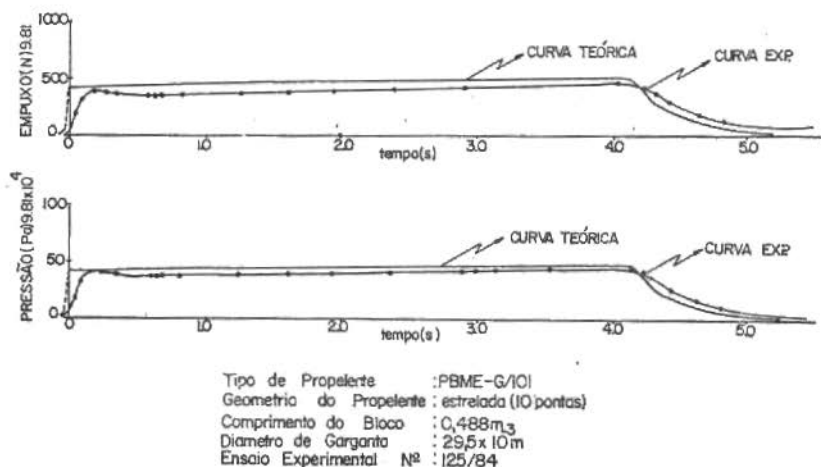


Figura 2. Curvas experimentais e teóricas da pressão e empuxo para o motor foguete de comprimento = 0,488m

Resultados Teóricos. O estudo, como dito anteriormente, foi baseado na teoria de Lenoir-Robillard, utilizando análise numérica. Com estes resultados foram construídas as curvas P_{VST} , F_{VST} e calculadas pressões e empuxos médios, I_{sp} , C^* e C_F (Tabela I).

TABELA I. Quadro comparativo dos parâmetros experimentais e teóricos

Parâmetros de Desempenho	0,488 m		0,976 m		1,220 m		1,464 m				1,708 m	
	Experim.	Teórico	Experim.	Teórico	Experim.	Teórico	$A_t = 20,15 \times 10^{-4} \text{m}^2$		$A_t = 28,4 \times 10^{-4} \text{m}^2$		Experim.	Teórico
							Experim.	Teórico	Experim.	Teórico		
$\bar{P}(\text{Pa}) \times 10^{-5}$	40,40 $\pm 0,67$	45,47	41,92 $\pm 1,61$	45,13	42,27	45,43	45,73 $\pm 0,40$	46,25	26,09	24,06	33,12	34,70
F(N)	4191,4 $\pm 22,7$	4776,8	8758,1 $\pm 200,1$	9451,6	10678,5	11876,8	13802,0 $\pm 26,6$	14412,8	9684,6	9617,2	13092,9	14292,2
Isp(s)	194,0 $\pm 1,6$	218,4	196,1 $\pm 3,7$	211,3	193,6	212,2	199,2 $\pm 1,8$	185,8	186,8	179,01	189,1	177,9
C_F	1,52 $\pm 0,02$	1,54	1,54 $\pm 0,03$	1,53	1,49	1,53	1,48	1,52	1,31	1,41	1,40	1,46
$C^*(\text{m/s})$	1255,0 ± 17	1394,1	1253,0 ± 43	1356,7	1276,4	1361,3	1327,2 $\pm 0,02$	1199,0	1394,1	1243,34	1327,4	1199,0
$t_b(\text{s})$	4,26 $\pm 0,04$	4,20	4,11 $\pm 0,05$	4,10	4,16	4,10	4,0	3,60	5,28	5,20	4,64	4,0

Discussão. Verificou-se que há boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais (Tabela I). A análise dos resultados experimentais para os vários comprimentos ($L = 0,488\text{m}$, $0,976\text{m}$, $1,220\text{m}$, $1,464\text{m}$ e $1,708\text{m}$) dos motores foguetes revela a presença do fenômeno erosivo com pouca intensidade, e isto é razoável tendo em vista que a razão entre as áreas de passagem e garganta é suficientemente grande ($A_p/A_t > 2$), embora a velocidade dos gases alcance valores maiores que 180m/s [6].

Observa-se que o fenômeno de queima erosiva provoca uma queda nos valores de I_{sp} , C_F , C^* , além de uma maior diferença entre as velocidades de queima ao longo do grão.

No entanto, verificou-se que a erosão, embora presente, não interfere de forma drástica nos resultados dos ensaios experimentais. Sabe-se de sua existência em maior ou menor intensidade na queima dos motores, mas mantendo-se a relação $A_p/A_t > 2$ sua presença não modifica de maneira tão significativa os resultados esperados para o desempenho do motor, qualquer que seja o comprimento deste.

As velocidades médias de queima foram obtidas através dos detetores de fim de queima (fios de cobre de $0,2\text{mm}$), localizados ao longo do bloco propelente.

Este método é bastante preciso, pois trabalhos experimentais mostram a inexistência de um gradiente de temperatura ao longo da espessura do propelente, ou seja, para uma diferença de 10^{-5}m entre as superfícies, a temperatura passa de 3000K para 300K . Assim, a interrupção dos fios detetores de fim de queima ocorre no instante em que a chama chega até estes, e isto fornece então, resultados bastante confiáveis.

A comparação das velocidades médias de queima teóricas e experimentais estão na Tabela II e mostram boas concordâncias. Observa-se um desvio na faixa de 2 a 10% das velocidades médias de queima teóricas e experimentais nas seções próximas à tubeira. Nas seções próximas ao ignitor estes desvios podem alcançar 15%. Ressalta-se que, caso fossem realizados um maior número de ensaios para o cálculo de uma média mais precisa destas velocidades de queima, os desvios entre os modelos certamente seriam menores.

Apesar das diferenças que se observam entre os modelos teóricos e experimentais, o trabalho forneceu resultados razoáveis. A análise numérica fica como um importante instrumento para futuros estudos em combustão erosiva de propelente sólido com perfuração estrelada.

TABELA II. Quadro comparativo das velocidades médias de queima experimentais e teóricas para motores de diversos comprimentos

L(m)	0,488 m		0,976 m		1,220 m		1,464 m			
$\bar{v}(\text{m/s}) \times 10^3$	Experim.	Teórico	Experim.	Teórico	Experim.	Teórico	$A_t = 20,51 \times 10^{-4} \text{m}^2 \mid A_t = 28,3 \times 10^{-4} \text{m}^2$			
							Experim.	Teórico	Experim.	Teórico
r_1	5,20 $\pm 0,08$	4,57	5,34 $\pm 0,22$	4,65	5,41	4,64	5,63 $\pm 0,07$	4,67	4,17	3,50
r_2	5,13 $\pm 0,05$	4,57	5,26 $\pm 0,13$	4,65	4,40	4,64	5,37 $\pm 0,20$	4,67	3,94	3,50
r_3	5,32 $\pm 0,05$	4,57	5,37 $\pm 0,10$	4,65	5,36	4,64	5,48 $\pm 0,14$	4,68	4,04	3,54
r_4	—	—	5,21 $\pm 0,14$	4,65	5,07	4,64	5,55 $\pm 0,09$	4,70	4,19	3,58
r_5	—	—	5,23 $\pm 0,13$	4,65	5,07	4,65	5,67 $\pm 0,13$	4,71	4,19	3,65
r_6	—	—	5,49 $\pm 0,15$	4,65	5,19	4,65	5,61 $\pm 0,01$	4,75	4,36	3,70
r_7	—	—	—	—	—	—	5,82 $\pm 0,01$	4,76	5,03	3,75

CONCLUSÕES

Do trabalho pode-se concluir que:

- 1) As velocidades médias de queima obtidas experimentalmente através do detetores de fim de queima são bastante precisas e mostram boas concordâncias com as velocidades médias obtidas através do modelo teórico (Tabela II). Nas seções próximas à tubeira os desvios entre os valores teóricos e experimentais estão na faixa de 2% a 10%, e nas seções próximas ao ignitor os desvios podem alcançar 15%.
- 2) Há uma boa concordância entre os parâmetros de desempenho teóricos e experimentais (Tabela I). O desvio máximo entre os modelos é por volta de 10%.
- 3) Os tempos de fim de queima das seções transversais do grão propelente próximos à tubeira, obtidas através dos ensaios experimentais são sempre menores, conseqüentemente indicam velocidades de queima maiores. Através do modelo teórico, obtém-se as velocidades de queima e estas também são maiores na região próxima à tubeira. Isto vem, então, indicar a presença do fenômeno erosivo.
- 4) Nos motores menores ($L = 0,488m$) os tempos de fim de queima ao longo do grão propelente obtidos experimentalmente são aproximadamente iguais. Conclui-se que nestes motores a erosão praticamente não acontece.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Eng^o Mauro Melo Dolinsky e ao Eng^o Wilfried Rudolf Lamm pelo apoio prestado ao desenvolvimento do trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Lenoir, J.M. and Robillard, G. — A mathematical method to predict the effects of erosive burning in solid propellents rockets. Sixth Symposium (international) on Combustion.
- [2] Green, Jr, L. — Erosive burning of some composite. Jet Propulsion, 24 (1) : 9-15, February 1954.
- [3] Larue, P. — Determination des caracteristiques d'un bloc de poudre par des essais preliminaires a petite echelle. O.N.E.R.A. Etude 2244/E Note Technique nº 1, Decembre 1958.

- [4] Alvim Fº, G.F. - "Apostila Prp - 11", Prop/2/1979 - ITA, Departamento de Aeronáutica, CTA, São José dos Campos, SP.
- [5] NASA Lewis Research Center, SP-273 - Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Chapman-Jougeut Detonations. National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1971.
- [6] "High speed aerodynamics and jet propulsion". Vol.XII-Ed. D.E. Lancaster , Princeton, N.J. Princeton University Press (1960).
- [7] Vandenkerckhove, J.A. - Theoretical investigation of erosive burning of solid propellants. Technical Report Contrat nº AF61 (032) 354 - July 1961.

SOBRE AS SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE TROCA DE ENERGIA RADIANTE TÉRMICA

Rogério Martins Saldanha da Gama - Membro da ABCM
LNCC/CNPq

RESUMO

A troca de energia radiante térmica entre superfícies que emitem e refletem difusamente é um fenômeno governado por sistemas de equações integrais. Será demonstrado que em problemas reais tais sistemas possuem solução sempre e esta é única, podendo ser expressa em forma de Séries de Neumann. A título de exemplo é resolvido um problema típico, que possui solução analítica em forma fechada.

ABSTRACT

The thermal radiant energy interchange among diffusely emitting and diffusely reflecting surfaces is a physical phenomenon governed by integral equations systems. It will be shown that, in real problems, such systems always have a solution, this solution is unique and can be expressed in Neumann's Series. As an example a typical problem is solved.

INTRODUÇÃO

A troca de calor por radiação pura entre superfícies que emitem e refletem difusamente, através de meios que não participam do processo de transferência de energia, é governada por sistemas de equações integrais. Considerando que a distribuição de temperaturas seja conhecida, estes sistemas são lineares e tem como incógnitas as radiosidades [1,3] em cada ponto de cada superfície.

Basearemos nossa análise num espaço físico fechado por M superfícies que emitem e refletem difusamente energia radiante térmica. Se assumirmos que o espaço físico, encerrado pelas M superfícies, não participa da transferência de energia teremos que toda a energia que deixar um certo ponto de uma certa superfície atingirá a uma (ou mais) das outras $M-1$ e/ou a ela mesmo.

Este princípio nos habilita a escrever o balanço de energia para as M superfícies da seguinte forma [1]

$$B_i(\lambda, r_i) = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) + \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \quad i = 1, M \quad (1)$$

onde λ é o comprimento de onda considerado, r_i é a posição sobre a superfície i , s_j é a posição sobre a superfície j (sendo a letra "s" usada para as variáveis de integração), $e_b(\lambda, T_i(r_i))$ é o poder emissivo monocromático de corpo negro na temperatura $T_i(r_i)$, $\epsilon_i(\lambda, r_i)$ é a emissividade monocromática no ponto r_i e $\rho_i(\lambda, r_i)$ é a reflectância monocromática no ponto r_i .

A radiosidade monocromática é denotada por $B_i(\lambda, r_i)$ para o comprimento de onda λ e ponto r_i sobre a superfície i . Esta é uma medida de toda a energia radiante térmica que deixa a superfície, por unidade de tempo e de área, naquele ponto (ou seja: energia emitida + energia refletida).

A função $K(r_i, s_j)$ tem as seguintes propriedades:

a) $K(r_i, s_j) = 0$ se os pontos r_i e s_j não puderem trocar energia diretamente

b) $K(r_i, s_j) = K(s_j, r_i)$ (2)

c) $\sum_{j=1}^M \int_{A_j} K(r_i, s_j) dA = 1$ para todo r_i , $1 \leq i \leq M$ (3)

Todas as superfícies reais refletem uma parcela finita da energia incidente, em cada comprimento de onda. Este argumento é suficientemente forte para assegurar a existência e a unicidade da solução $B_i(\lambda, r_i)$. Neste trabalho veremos no entanto que não é preciso esta imposição para que tenhamos solução única. Na realidade podemos trabalhar em situações onde suponhamos a existência de superfícies perfeitamente refletoras ($\rho(\lambda, r_i) = 1$), desde que algumas condições sejam satisfeitas.

O sistema de equações (1) pode ser escrito na seguinte forma

$$\underline{I} \underline{B} = \underline{f} \quad (4)$$

onde \underline{B} é o vetor de componentes $B_i(\lambda, r_i)$ e os vetores $\underline{I} \underline{B}$ e \underline{f} possuem a componente i dada por

$$(\underline{I} \underline{B})_i = B_i(\lambda, r_i) - \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \quad (5)$$

$$f_i = \epsilon_i(\lambda, r_i) e_b(\lambda, T_i(r_i)) \quad (6)$$

Em engenharia se está, em geral, interessado na determinação local da troca de calor, por unidade de tempo e área. Uma vez conhecidas as radiosidades monocromáticas podemos calcular o calor trocado, no ponto r_i da superfície i , como

$$q_i(r_i) = \int_0^{\infty} \left(B_i(\lambda, r_i) - \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \right) d\lambda \quad (7)$$

que representa a diferença entre toda a energia radiante que deixa a superfície i , no ponto r_i , e toda a energia incidente neste mesmo ponto.

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Para demonstrar que (1) (ou(4)) possui solução é suficiente mostrar que o operador \underline{I} é inversível, ou seja [2]

$$\underline{I} \underline{B} = 0 \iff \underline{B} = 0 \quad (8)$$

A "volta" é óbvia já que \underline{I} é linear e limitado. Para demonstrar a "ida" vejamos quem são as soluções de

$$B_i(\lambda, r_i) = \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA, \quad i = 1, M \quad (9)$$

Integrando sobre todos os A_i 's ficamos com

$$\sum_{i=1}^M \int_{A_i} B_i(\lambda, r_i) dA = \sum_{i=1}^M \int_{A_i} \rho_i(\lambda, r_i) \left(\sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \right) dA \quad (10)$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^M \int_{A_i} B_i(\lambda, r_i) dA = \sum_{i=1}^M \int_{A_i} B_i(\lambda, r_i) \left(\sum_{j=1}^M \int_{A_j} \rho_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \right) dA \quad (11)$$

Sendo assim, para mostrar que o operador \underline{I} é inversível, é preciso apenas mostrar que

$$\sum_{j=1}^M \int_{A_j} \rho_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA < 1 \quad \text{para todo } i \quad (12)$$

Para que a desigualdade acima seja satisfeita é suficiente (devido à equação (3)) que exista uma região A_k tal que

$$\int_{A_k} (1 - \rho_k(\lambda, s_k)) K(r_i, s_k) dA > 0 \quad (13)$$

para todo ponto r_i , sobre qualquer superfície i .

Fisicamente a condição suficiente (13) diz que é preciso que haja uma certa região A_k que possa trocar energia, diretamente, com todos os pontos que compõem o espaço fechado (pelas M superfícies) e que a reflectância $\rho_k(\lambda, s_k)$ seja menor do que a unidade, em A_k . Deve ser notado que o número de superfícies consideradas é arbitrário sendo escolhido de acordo com a conveniência [1].

Em problemas reais temos esta condição (13) satisfeita, já que todas as superfícies envolvidas possuem reflectância menor do que 1, o que garante (12) imediatamente.

Sendo o operador \underline{I} linear, a unicidade da solução é trivialmente demonstrada já que se

$$\underline{I} \underline{B}^* = \underline{f} \quad \text{e} \quad \underline{I} \underline{B}^{**} = \underline{f} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}(\underline{B}^* - \underline{B}^{**}) = \underline{0} \quad (14)$$

o que, pela inversibilidade de \underline{I} , leva a $\underline{B}^* = \underline{B}^{**}$.

LIMITAÇÃO INFERIOR E SUPERIOR DA SOLUÇÃO

Uma vez que (3) é válida sempre existirão pontos r_k e r_n , para cada comprimento de onda λ , tais que para todo r_i

$$B_k(\lambda, r_k) \geq \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \geq B_n(\lambda, r_n) \quad (15)$$

Para provar a limitação superior da solução, tomamos o sistema (1), que nos fornece, para o ponto r_k

$$B_k(\lambda, r_k) \leq \epsilon_k(\lambda, r_k) e_b(\lambda, T_k(r_k)) + \rho_k(\lambda, r_k) B_k(\lambda, r_k) \quad (16)$$

Sendo as superfícies opacas e a radiação não polarizada teremos que [3]

$$\epsilon_k(\lambda, r_k) = 1 - \rho_k(\lambda, r_k) \quad (17)$$

o que associado a (16) nos leva a

$$B_k(\lambda, r_k) \leq e_b(\lambda, T_k(r_k)) \quad (18)$$

Por um procedimento análogo ao que gerou a desigualdade (16) podemos escrever que

$$B_n(\lambda, r_n) \geq \epsilon_n(\lambda, r_n) e_b(\lambda, T_n(r_n)) + \rho_n(\lambda, r_n) B_n(\lambda, r_n) \quad (19)$$

o que por (17) nos leva a

$$B_n(\lambda, r_n) \geq e_b(\lambda, T_n(r_n)) \quad (20)$$

As desigualdades (18) e (20) nos mostram as cotas superior e inferior para a radiosidade monocromática local num problema de radiação pura.

Estas cotas permitem que os resultados obtidos através de métodos aproximados sejam checados. Na realidade podemos, antes de iniciar a solução do problema, saber quais serão os maiores e menores valores que podem ser assumidos pela radiosidade. Para isto, com base em (18) e (20) escrevemos

$$\text{MAX}[e_b(\lambda, T_i(r_i))] \geq B_i(\lambda, r_i) \geq \text{MIN}[e_b(\lambda, T_i(r_i))] \quad (21)$$

onde $\text{MAX}[\dots]$ e $\text{MIN}[\dots]$ são, para cada λ , o maior e o menor valores assumido pelo poder-emissivo monocromático de corpo negro para as M superfícies consideradas. Este valor pode ser calculado, a priori, através da Lei de Planck [1,3], já que todas as temperaturas são conhecidas.

SOLUÇÃO POR SÉRIES DE NEUMANN

Toda solução de um problema real de troca de calor por radiação difusa pura, através de meios não participantes, pode ser expressa em Séries de Neumann. Tomemos então (1) na forma

$$\underline{B} - \underline{S} \underline{B} = \underline{f} \quad (22)$$

onde a componente i do vetor $\underline{S} \underline{B}$ é dada por

$$(\underline{S} \underline{B})_i = \rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \quad (23)$$

Definamos então a métrica $d(\underline{u}, \underline{v})$ como

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = \sup |u_i(\lambda, r_i) - v_i(\lambda, r_i)| \quad (24)$$

para cada λ , onde as funções consideradas são limitadas, como ocorre com a radiosidade monocromática. O supremum é tomado sobre todos os pontos r_i , sobre todas as superfícies i , com i variando de 1 até M .

Para mostrar que \underline{S} é uma contração, temos que

$$d(\underline{S} \underline{u}, \underline{S} \underline{v}) = \sup |\rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} (u_j(\lambda, s_j) - v_j(\lambda, s_j)) K(r_i, s_j) dA| \quad (25)$$

ou ainda

$$d(\underline{S} \underline{u}, \underline{S} \underline{v}) \leq \sup |u_i(\lambda, r_i) - v_i(\lambda, r_i)| \sup |\rho_i(\lambda, r_i) \sum_{j=1}^M \int_{A_j} K(r_i, s_j) dA| \quad (26)$$

Pela equação (3) podemos escrever também que

$$d(\underline{S} \underline{u}, \underline{S} \underline{v}) \leq d(\underline{u}, \underline{v}) \sup [\rho_i(\lambda, r_i)] \quad (27)$$

Num problema real teremos sempre que

$$\sup (\rho_i(\lambda, r_i)) < 1 \quad (28)$$

o que faz com que \underline{S} seja uma contração.

A solução de (1) (ou (22)) pode ser então obtida pela seguinte série convergente

$$\underline{B} = \underline{f} + \sum_{p=1}^{\infty} \underline{S}^p \underline{f} \quad (29)$$

Aqui consideramos as componentes $B_i(\lambda, r_i)$ pertencentes ao espaço das funções de quadrado integrável sobre A_i .

A série em (29) é chamada "Série de Neumann".

UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA (1)

Podemos reescrever o sistema (1) utilizando apenas operadores auto-adjuntos. Assim procedendo temos

$$\underline{R} \underline{B} - \underline{Q} \underline{B} = \underline{g} \quad (30)$$

onde as componentes i dos vetores $\underline{R} \underline{B}$, $\underline{Q} \underline{B}$ e \underline{g} são

$$(\underline{R} \underline{B})_i = \frac{1}{\rho_i(\lambda, r_i)} B_i(\lambda, r_i) \quad (31)$$

$$(\underline{Q} \underline{B})_1 = \sum_{j=1}^M \int_{A_j} B_j(\lambda, s_j) K(r_i, s_j) dA \quad (32)$$

$$g_i = \frac{\epsilon_i(\lambda, r_i)}{\rho_i(\lambda, r_i)} e_b(\lambda, T_i(r_i)) \quad (33)$$

O vetor \underline{B} que satisfaz (30) ou (1) é aquele que torna extremo o funcional $I[\underline{B}]$ dado por [1]

$$I[\underline{B}] = \langle \underline{Q} \underline{B} | \underline{B} \rangle - \langle \underline{R} \underline{B} | \underline{B} \rangle + 2 \langle \underline{g} | \underline{B} \rangle \quad (34)$$

sendo o produto interno $\langle | \rangle$ calculado da seguinte forma

$$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^M \int_{A_i} u_i(\lambda, r_i) v_i(\lambda, r_i) dA \quad (35)$$

sendo o espaço de funções admissíveis o das funções de quadrado integrável sobre as superfícies i .

TROCA DE CALOR ENTRE UMA CAVIDADE ESFÉRICA E UMA SUPERFÍCIE NEGRA PLANA CIRCULAR

Para ilustrar o que foi discutido neste trabalho vamos apresentar um exemplo simples [3] que possui solução analítica em forma fechada.

Determinaremos a troca de calor por radiação térmica difusa em espaço fechado por duas superfícies ($M=2$), sendo uma plana e outra em forma de casca esférica.

O arranjo a ser estudado é apresentado na Figura 1 a seguir.

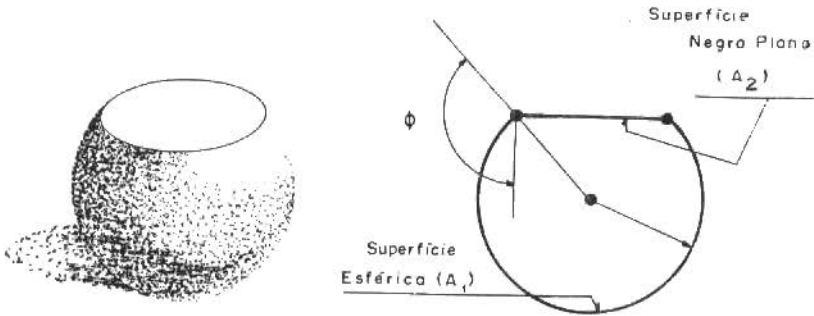


Figura 1. Esquema do problema estudado

Suporemos que a superfície esférica possua temperatura T_1 , emissividade $\epsilon_1(\lambda)$ e reflectância $\rho_1(\lambda)$, sendo todos independentes da posição e que a superfície plana circular, que é negra, esteja a uma temperatura T_2 .

Uma vez que a superfície 2 é negra, sua radiosidade é conhecida e dada por

$$B_2(\lambda) = e_b(\lambda, T_2) \quad (36)$$

que é o próprio poder emissivo monocromático de corpo negro.

Assim sendo o sistema de equações integrais (1) se reduz à seguinte Equação Integral de Fredholm de Segunda Espécie

$$B_1(\lambda, r) = \epsilon_1(\lambda) e_b(\lambda, T_1) + \rho_2(\lambda) e_b(\lambda, T_2) \int_{A_2} K(r_1, s_2) dA + \rho_2(\lambda) \int_{A_1} K(r_1, s_1) B_1(\lambda, s_1) dA \quad (37)$$

Da bibliografia temos que $K(r_1, s_1)$ é constante e dado por [3]

$$K(r_1, s_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \quad (38)$$

com o auxílio de (3), escrevemos a seguinte equação

$$B_1(\lambda, r_1) = \epsilon_1(\lambda)e_b(\lambda, T_1) + \rho_1(\lambda)e_b(\lambda, T_2) + \rho_1(\lambda) \times \left(\int_{A_1} B_1(\lambda, s_1) K(r_1, s_1) dA - \int_{A_1} e_b(\lambda, T_2) K(r_1, s_1) dA \right) \quad (39)$$

Definindo agora a função radiossidade monocromática adimensional $B_1^+(\lambda, r_1)$ como

$$B_1^+(\lambda, r_1) = \frac{B_1(\lambda, r_1) - e_b(\lambda, T_2)}{\epsilon_1(\lambda)e_b(\lambda, T_1) + (\rho_1(\lambda) - 1)e_b(\lambda, T_2)} \quad (40)$$

e combinando (38), (39) e (40) chegamos a

$$B_1^+(\lambda, r_1) = 1 + \rho_1(\lambda) \int_{A_1} B_1^+(\lambda, s_1) \frac{1}{4\pi R^2} dA \quad (41)$$

Resolvendo (41) por Séries de Neumann tiramos que

$$B_1^+(\lambda, r_1) = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots \quad (42)$$

onde

$$X = \rho_1(\lambda) \left(\frac{1 - \cos\phi}{2} \right) < 1 \quad (43)$$

Assim sendo chegamos a

$$B_1^+(\lambda, r_1) = B_1^+(\lambda) = \frac{1}{1 - X} \quad (44)$$

solução esta que poderia ter sido obtida diretamente de (41).

De posse de (44) podemos calcular o calor trocado através de (7) obtendo, para a superfície esférica

$$q_1 = \int_0^\infty \frac{[\epsilon_1(\lambda)e_b(\lambda, T_1) + (\rho_1(\lambda) - 1)e_b(\lambda, T_2)](\cos\phi + 1)}{2 - \rho_1(\lambda)(1 - \cos\phi)} d\lambda \quad (45)$$

que é o calor trocado localmente, por unidade de tempo e área, pela

superfície esférica, sendo constante neste caso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou situar os modelos clássicos utilizados para o estudo de troca de calor por radiação térmica dentro do contexto da matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] Gama, R.M.S. - Uma Formulação Variacional Geral para Problemas de Troca de Calor por Radiação Difusa, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, pp. 163-179, vol. VII, nº 2, (1985).
- [2] Kreyszig, E. - Introductory Functional Analysis with Applications; John Wiley & Sons, New York, (1978).
- [3] Sparrow, E.M. and Cess, R.D. - Radiation Heat Transfer; McGraw Hill, Washington, (1978).

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO EQUILÍBRIO DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS ELÁSTICAS PLANAS

Heraldo Silva da Costa Mattos

Rubens Sampaio Filho, Membro da ABCM

Deptº de Engenharia Mecânica, PUC/RJ

RESUMO

Apresenta-se uma teoria mecânica não-linear para a modelagem do equilíbrio de estruturas unidimensionais elásticas planas e um método numérico simples (conhecido como método do tiro) para a solução do sistema de equações diferenciais resultantes.

Um problema envolvendo grandes deformações de um arco elástico extensível é resolvido e analisado, ilustrando as possibilidades de aplicação da teoria.

ABSTRACT

This paper presents a non-linear mechanical theory for one-dimensional structures and a simple numerical method (known as shooting method) to solve the resulting system of differential equations.

A problem of large deformations of an extensible elastic arc is solved and analysed, showing the applicability of the theory.

INTRODUÇÃO

Corpos com uma das dimensões predominantes são cada vez mais utilizados como elementos estruturais, geralmente submetidos a grandes deformações. Arcos, anéis, cabos em linhas de transmissão e em estruturas submarinas (*off-shore*) são alguns exemplos. A dificuldade e o custo da solução dos sistemas não-lineares resultantes são

os principais obstáculos apresentados pelas teorias do contínuo tridimensionais, o que motiva o desenvolvimento de modelos mais simples. Por essa razão são desenvolvidas teorias unidimensionais de sólidos. Nestas procura-se caracterizar o comportamento de corpos esbeltos por um conjunto de equações tendo o tempo e o parâmetro de uma curva no espaço como as únicas variáveis independentes.

Apesar da maior simplicidade das equações obtidas através das teorias unidimensionais, a solução dos sistemas resultantes é, ainda, uma tarefa não trivial. O desenvolvimento de métodos numéricos para a solução desses problemas é uma área de pesquisa bastante ativa, uma vez que a inexistência de técnicas gerais de solução tem sido um dos principais limitantes para a aplicação efetiva dessas teorias.

Este trabalho apresenta uma teoria mecânica exata para estruturas unidimensionais elásticas planas em equilíbrio. O adjetivo exato é utilizado no sentido de que a teoria seja desenvolvida a partir de princípios geométricos e mecânicos fundamentais sem hipóteses simplificadoras adicionais. Muitas das derivações clássicas das teorias unidimensionais carecem de clareza, com hipóteses introduzidas aleatoriamente, o que dificulta a interpretação física dos resultados.

Nesta teoria a estrutura é considerada deste o início como um contínuo unidimensional, ou seja, uma curva material imersa num espaço pontual euclidiano E^2 a qual pode sofrer não só flexão, mas também extensão. A deformação é causada por forças e momentos distribuídos e (ou) concentrados ao longo do corpo. As equações de equilíbrio são obtidas sem fazer qualquer restrição à curvatura inicial e ao tamanho das deformações. As equações constitutivas utilizadas consideram o material elástico e linear. A não-linearidade do sistema é devida, portanto, apenas à geometria.

O comportamento de uma estrutura em equilíbrio é modelado por um sistema de sete equações diferenciais ordinárias com condições de contorno que dependem do problema em questão. Quando essas condições de contorno são definidas somente no ponto inicial do intervalo garante-se a existência e unicidade de soluções, existindo técnicas numéricas de solução razoavelmente simples e largamente empregadas (como os métodos de Runge-Kutta e outros [2]). Para o caso geral, com condições arbitrárias, é possível ter mais do que uma ou nenhuma solução, não existindo teoria de existência que cubra todas as situações possíveis.

Este trabalho apresenta também uma técnica numérica simples para encontrar soluções desses problemas, conhecida como método do tiro [1,2]. A idéia básica do método é a de, quando for possível, substituir as condições de contorno gerais do problema por condições iniciais equivalentes, resolvendo-o, então, por um dos métodos numéricos conhecidos de solução de problemas de valor inicial. Essas condições iniciais equivalentes são obtidas por um processo iterativo que será detalhadamente descrito.

Como exemplo é resolvido o problema de valor de contorno não linear que modela o equilíbrio de um semi-anel engastado em uma das extremidades e sollicitado por uma força horizontal P . Para alguns valores da força P não encontradas até três configurações de equilíbrio. Os resultados são apresentados graficamente.

CONFIGURAÇÕES-DEFORMAÇÃO

Uma estrutura Γ é definida como um conjunto de pontos materiais, ou partículas, que podem ser postas em correspondência bijectiva com os pontos de uma curva $C \subset E^2$. Portanto, uma configuração β dessa estrutura é caracterizada por

$$\begin{aligned} \beta : \Gamma &\rightarrow C \\ \beta(\cdot) &= x \end{aligned} \tag{1}$$

satisfazendo as seguintes condições:

A função β é uma bijecção que associa cada ponto material (\cdot) de Γ a um ponto de uma região C de E^2 . x representa o lugar ou posição ocupado por uma partícula (\cdot) da estrutura na configuração β . A região C é uma curva, ou seja, é sempre possível definir uma parametrização

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow C \\ \alpha(v) &= x \end{aligned} \tag{2}$$

de um intervalo real fixo $v \in [v_1, v_2] = I$ em C satisfazendo as seguintes condições:

$$\alpha \in C(I), \quad \frac{d\alpha(v)}{dv} \neq 0 \quad \forall v \in I$$

Considerando-se uma configuração β_R definida por

$$\begin{aligned} \beta_R : \Gamma &\rightarrow C_R \subset E^2 \\ \beta_R(\cdot) &= X \end{aligned} \quad (3)$$

uma configuração de referência, então a deformação da estrutura da configuração β_R até a configuração β é descrita pelo mapeamento:

$$\begin{aligned} \chi : C_R &\rightarrow C \\ \chi(X) &= x \end{aligned} \quad (4)$$

O comprimento de arco s para a curva C é definido da seguinte forma:

$$s = L(v) = \int_{v_1}^v \left\| \frac{d\alpha(\xi)}{d\xi} \right\| d\xi \quad (5)$$

onde $L(v_2) = l$ é o comprimento total de C . De forma análoga, para a curva C_R o comprimento de arco \bar{s} :

$$S = L_R(v) = \int_{v_1}^v \left\| \frac{d\alpha_R(\xi)}{d\xi} \right\| d\xi \quad (6)$$

$L_R(v_2) = l_R$ é o comprimento total de C_R . L e L_R são inversíveis, pois, por definição,

$$\frac{d\alpha(v)}{dv} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\alpha_R(v)}{dv} \neq 0 \quad \forall v \in I.$$

De (2), (5) e (6) tem-se que qualquer função definida em Γ , C ou C_R pode ser referida aos parâmetros v , s ou S fazendo-se composição de funções. Dessa forma torna-se possível o desenvolvimento de uma teoria mecânica unidimensional para a estrutura, ou seja, onde a única variável independente seja v , s ou S .

Daqui para diante, por "abuso de notação", será usado o mesmo símbolo f para representar qualquer função $f(\cdot)$ e suas compostas com as funções definidas anteriormente. Onde houver possibilidade de confusão o argumento será definido explicitamente. Exemplo:

$$f(v) \equiv f(\beta_R^{-1}(\alpha_R(v))), \quad f(s) \equiv f(\beta_R^{-1}(\alpha_R(L^{-1}(s))), \quad f(S) \equiv f(\beta_R^{-1}(\alpha_R(L_R^{-1}(S))))$$

Define-se então:

$$a = a(\cdot) = \frac{da(s)}{ds} = \frac{dx}{ds} \quad (7)$$

$$A = A(\cdot) = \frac{d\alpha_R(S)}{dS} = \frac{dX}{dS}$$

$a(\cdot)$ é um vetor unitário tangente à curva C no ponto material (\cdot) , $a(\cdot)$ forma uma base para o espaço unidimensional tangente à curva C em (\cdot) . $A(\cdot)$ é um vetor tangente à curva C_R no ponto material (\cdot) , $A(\cdot)$ forma uma base para o espaço unidimensional tangente à curva C_R no ponto (\cdot) .

Seja (i_1, i_2) uma base cartesiana para o espaço das translações V associado com E^2 , fixa num ponto arbitrário o . Sejam $\theta(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ os ângulos entre i_1 e $a(\cdot)$, $A(\cdot)$, respectivamente. $\theta(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ são medidos à partir de i_1 considerando-se positivo o sentido anti-horário, logo:

$$A(\cdot) = \cos\phi(\cdot) i_1 + \text{sen}\phi(\cdot) i_2$$

$$A^\perp(\cdot) = -\text{sen}\theta(\cdot) i_1 + \cos\phi(\cdot) i_2 \quad (8)$$

$$a(\cdot) = \cos\theta(\cdot) i_1 + \text{sen}\theta(\cdot) i_2$$

$$a^\perp(\cdot) = -\text{sen}\theta(\cdot) i_1 + \cos\theta(\cdot) i_2$$

Para facilitar o entendimento, a Figura 1 representa, de forma esquemática, as definições apresentadas até o momento.

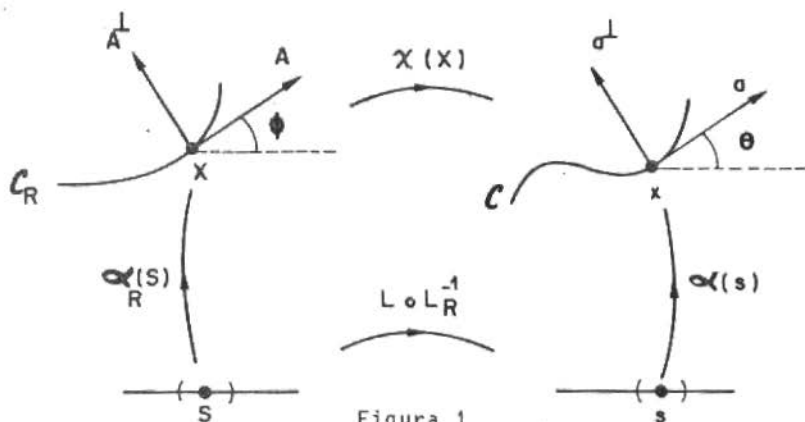


Figura 1

É fácil verificar que, dado um vetor $N(\cdot) = N_1(\cdot) a(\cdot) + N_2(\cdot) a^\perp(\cdot)$

$$\frac{dN(v)}{dv} = \left[\frac{dN_1(v)}{dv} - N_2(v) \frac{d\theta(v)}{dv} \right] a(v) + \left[\frac{dN_2(v)}{dv} + N_1(v) \frac{d\theta(v)}{dv} \right] a^\perp(v) \quad (9)$$

onde o parâmetro v pode ser substituído por qualquer uma das variáveis s e θ .

Considerando-se (x_1, x_2) as coordenadas do ponto $x \in E^2$ em relação à base (i_1, i_2) , é possível obter:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= \frac{ds}{ds} \cos\theta \\ \frac{dx_2}{ds} &= \frac{ds}{ds} \sin\theta \end{aligned} \quad (10)$$

Nesta teoria, a deformação da estrutura consiste no deslocamento dos pontos e na rotação dos vetores $a(\cdot)$. Como, por definição, esses vetores permanecem sempre tangentes à curva C , as rotações não são independentes dos deslocamentos. O contínuo definido até aqui reflete algumas características do corpo (tridimensional) real que se procura modelar matematicamente. Neste caso a rotação dos vetores $a^\perp(\cdot)$ representa a rotação da seção reta associada a cada ponto, o que é análogo a hipótese de que seções planas e perpendiculares à linha neutra permaneçam planas e perpendiculares após a deformação. O modelo considera a extensibilidade da estrutura, e como será visto adiante, não são feitas restrições quanto ao tamanho das deformações.

É possível construir-se teorias ainda mais sofisticadas, refletindo outras características tridimensionais, como a variação da área da seção reta numa deformação e sem a restrição de que a seção reta permaneça perpendicular à linha neutra. O preço que se paga por essas sofisticações, é o aumento do número de variáveis no problema e possivelmente uma maior não-linearidade do sistema de equações diferenciais obtido. Além disso, como fator complicador, existe a dificuldade no estabelecimento de equações constitutivas razoáveis.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Na seção anterior, o movimento do contínuo foi tratado sem considerar as causas que o determinam. Nesta seção estas causas serão discutidas definindo-se as equações de equilíbrio. Antes dessas

equações serem postuladas, tornam-se necessárias algumas definições preliminares para simplificar a notação e reduzir os cálculos.

— Dada uma base cartesiana (e_1, e_2) de V , o produto interno $u \cdot v$ e o produto antissimétrico $u \wedge v$ de vetores $u, v \in V$, $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, são dados pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ u \wedge v &= u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{aligned} \quad (11)$$

— Para qualquer parametrização $\alpha: I \rightarrow C(\alpha(v) = x, v \in I)$ e para qualquer função f definida em C , tem-se:

$$\int_C f(x) dx = \int_I f(\alpha(v)) \left\| \frac{dx}{dv} \right\| dv \quad (12)$$

As equações de equilíbrio são definidas na configuração deformada C . No entanto, usando (2) e (12) é possível trabalhar no espaço de parâmetros. Postula-se então para uma configuração β de uma estrutura $\Gamma(\beta: \Gamma \rightarrow C)$ e para qualquer parametrização $\alpha: [v_1, v_2] \rightarrow C$, $\alpha(v) = x, v \in [v_1, v_2]$:

Conservação de Massa. A cada ponto da estrutura é associado um escalar positivo chamado densidade de massa ρ , respectivamente satisfazendo

$$\int_{v_1}^v \rho(\xi) \left\| \frac{dx}{d\xi} \right\| d\xi = \int_{v_1}^v \rho_R(\xi) \left\| \frac{dX}{d\xi} \right\| d\xi \quad (13)$$

ρ_R é a densidade na configuração de referência.

Equilíbrio de Forças. Sejam os vetores $P_i (i = 0, K; K \text{ inteiro})$ forças externas concentradas em pontos $v_i \in [v_1, v_2]$; $N = N(v)$ o vetor força interna e $n = n(v)$ a força externa distribuída, então:

$$\int_{v_1}^v n(\xi) \left\| \frac{dX}{d\xi} \right\| d\xi + N(v) + \sum_{i=0}^K P_i(v_i) = 0 \quad (14)$$

Equilíbrio de Momentos. Sejam os escalares $M_j (j = 0, 1; 1 \text{ inteiro})$ os momentos externos concentrados em pontos $v_j \in [v_1, v_2]$; $M(v)$ o momento interno e $m(v)$ o momento externo distribuído, então:

$$\int_{v_1}^v \left[m(\xi) + r(\xi) \wedge n(\xi) \right] \left\| \frac{dx}{d\xi} \right\| d\xi + r(v) \wedge N(v) + \sum_{i=0}^K r(v_i) \wedge P_i(v_i) + M(v) + \sum_{j=0}^1 M_j(v_j) = 0 \quad (15)$$

$r(v) = \alpha(v) - o$ é o vetor posição do ponto v , na configuração deformada, relativo a uma origem arbitrária fixa o .

O parâmetro v em (13), (14) e (15) pode ser substituído por qualquer uma das variáveis s ou S sem alterar a validade das expressões.

Com o material apresentado, é possível mostrar que, na ausência de forças e momentos concentrados as equações (13), (14) e (15) são equivalentes a

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{ds}{dS} \rho_R \\ \frac{dN}{dS} + \frac{ds}{dS} n &= 0 \\ \frac{dM}{dS} + \frac{ds}{dS} a \wedge N + \frac{ds}{dS} m &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

e que cargas e momentos concentrados $P_i(S_i)$, $M_i(S_i)$ determinam saltos em N e M nos pontos S_i :

$$\begin{aligned} N(S_i^+) - N(S_i^-) + P_i &= 0 \\ M(S_i^+) - M(S_i^-) + M_i &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Usando (9) e (11) as equações (16)_{2,3} em componentes ficam:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dS} - \frac{d\theta}{dS} N_2 + \frac{ds}{dS} n_1 &= 0 \\ \frac{dN_2}{dS} + \frac{d\theta}{dS} N_1 + \frac{ds}{dS} n_2 &= 0 \\ \frac{dM}{dS} + \frac{ds}{dS} N_2 + \frac{ds}{dS} m &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

onde $N = N_1 a + N_2 a^\perp$; $n = n_1 a + n_2 a^\perp$.

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Sejam as seguintes medidas de deformação:

$$\epsilon = \frac{ds}{dS} - 1 \quad , \quad K = \frac{d\theta}{dS} - \frac{d\phi}{dS}$$

Nessa teoria um material será elástico se

$$N_1 = N_1(\epsilon, K) \quad ; \quad M = M(\epsilon, K) \quad (19)$$

Motivadas pela teoria tridimensional serão usadas nesse trabalho as seguintes equações constitutivas lineares:

$$\begin{aligned} N_1 &= EA \left(\frac{ds}{dS} - 1 \right) \\ M &= EI \left(\frac{d\theta}{dS} - \frac{d\phi}{dS} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

onde E é o módulo de elasticidade. A é a área da seção reta e I o momento de inércia. Com (10), (18), (19) obtem-se um sistema de sete equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com 7 incógnitas ($N_1, N_2, M, \theta, s, x_1, x_2$). Com as condições de contorno corretas é possível modelar qualquer problema envolvendo grandes deformações de uma estrutura elástica. Resta apresentar métodos numéricos sistemáticos para a solução dos problemas resultantes.

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Num problema de valor inicial

$$y'(v) = f(v, y(v)) \quad ; \quad y(v_1) = t$$

$$v \in [v_1, v_2] = I$$

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (21)$$

$$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \in \mathbb{R}^n$$

se f satisfaz algumas condições de regularidade, a solução existe $\forall v \in I$, é única e depende continuamente do valor inicial t . O se-

guinte teorema, apresentado sem prova [2,4], lista estas condições:

Teorema: Se f for definida e contínua em $D = \{(v,y) | v_1 \leq v \leq v_2, y \in \mathbb{R}^n\}$, v_1, v_2 finitos, e a matriz jacobiana $\nabla_y f(v,y) = [\partial f_i / \partial y_j]$ existe, é contínua e limitada em D , então, $\forall (v_0, t) \in D$ existe exatamente uma função $y(v)$ tal que:

- a) $y(v)$ é continuamente diferenciável $\forall v \in [v_1, v_2]$;
- b) $y'(v) = f(v, y(v)) \quad \forall v \in [v_1, v_2]$;
- c) $y(v_0) = t$;
- d) $y(v;t)$ é continuamente diferenciável $\forall t \in \mathbb{R}^n$.

Usando esse teorema, após algum raciocínio, é possível verificar que, para todo problema de valor inicial envolvendo o sistema formado por (10), (18) e (20) com m, n_1, n_2 contínuas e limitadas; a solução existe, é única e depende de uma maneira continuamente diferenciável do valor inicial.

Existem diversos métodos numéricos conhecidos que aproximam a solução de um problema de valor inicial. Neste trabalho supõe-se que o leitor esteja familiarizado com eles, não sendo discutido os diversos aspectos de sua implementação. Para detalhes sobre vantagens, limitações, problemas de convergência e precisão, existe uma vasta bibliografia [4].

Um método bastante popular é o de Runge-Kutta de quarta ordem. Para a aproximação da solução do problema (21) utiliza-se o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned}
 y^{(i+1)} &= y^{(i)} + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
 K_1 &= f(v^{(i)}, y^{(i)})W \\
 K_2 &= f(v^{(i)} + \frac{1}{2}W, y^{(i)} + \frac{1}{2}K_1)W \\
 K_3 &= f(v^{(i)} + \frac{1}{2}W, y^{(i)} + \frac{1}{2}K_2)W \\
 K_4 &= f(v^{(i)} + W, y^{(i)} + K_3)W
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

onde

$$W = (v_1 - v_2)/m$$

$$v^{(i)} = v_1 + (i-1)W \quad ; \quad i = 1, m$$

$$y^{(i)} = y(v_1^{(i)})$$

Os problemas de valor inicial são um caso particular dos problemas de valor de contorno, nestes deseja-se as soluções de um sistema:

$$y' = f(v, y); \quad r(y(v_1), y(v_2)) = 0$$

$$v \in [v_1, v_2] = I$$

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{23}$$

$$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$r: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se f satisfaz as condições do teorema 1, o problema (21) tem uma única solução $y(v; t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$. Supondo a existência de solução para (23), encontrar uma solução desse problema pelo método do tiro é equivalente a encontrar um vetor $t \in \mathbb{R}^n$ de forma que, resolvendo numericamente o problema (21), a condição $r(y(v_1; t), y(v_2; t)) = 0$ seja satisfeita.

Ou seja, uma solução de (23) é obtida encontrando-se um zero da função

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \rightarrow r(t, y(v_2; t))$$

É possível utilizar diversos métodos para achar zeros de funções. Supõe-se também que o leitor esteja familiarizado com eles, não sendo discutidos em profundidade [2,3].

Em geral utiliza-se o método de Newton ou uma de suas variações. Na sua forma mais simples, o método de Newton se resume a resolver iterativamente

$$-G(t^{(i)}) = \nabla G(t^{(i)})_{\Delta t} (i) \\ \Delta t^{(i)} = t^{(i+1)} - t^{(i)} \tag{24}$$

até encontrar um valor $t^{(i)}$ tal que $\|G(t^{(i)})\| < \epsilon$, ϵ dado. O índice i representa o número da iteração e ∇G é o gradiente da função G . $G(t)$

é obtida resolvendo-se numericamente (21), determinando-se $y(v_2; t)$ e substituindo em $r(t, y(v_2; t)) \equiv G(t)$. Como não se conhece uma expressão analítica para G , torna-se necessário o uso de uma expressão aproximada para o gradiente de G em (24), perdendo-se em geral, a convergência (local) quadrática do método de Newton.

Usando-se o método de Newton, tem-se o seguinte fluxograma para o método do tiro:

- 1) Escolher um vetor inicial $t^{(0)}$;
- 2) Determinar $y(v_2; t^{(i)})$, aproximando por (22) o problema de valor inicial:

$$y' = f(v, y(v; t^{(i)})); y(v_1) = t^{(i)}$$

- 3) Calcular

$$G(t^{(i)}) \equiv r(t^{(i)}, y(v_2; t^{(i)});$$

- 4) Verificar se

$$\|G(t^{(i)})\| < \epsilon$$

SIM + PARA E IMPRIME $t^{(i)}$ E $y(v^{(j)}, t^{(i)})$; $j = 1, m$

NÃO + CONTINUA

- 5) Cálculo aproximado de $\nabla G(t^{(i)})$:

$$\nabla_{ij} G(t^{(i)}) = \left[G_i t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots, t_j^{(i)} + \Delta t_j, \dots, t_n^{(i)} - G_i t_1^{(i)}, \dots, t_j^{(i)}, \dots, t_n^{(i)} \right] / \Delta t_j;$$

- 6) Solução do sistema:

$$-G(t^{(i)}) = \nabla G(t^{(i)}) \Delta t^{(i)}$$

- 7) Calcular

$$t^{(i+1)} = t^{(i)} + \Delta t^{(i)}$$

- 8) Retornar para (2)

G_i e t_i são, respectivamente, as i -ésimas componentes dos G e t .

OBSERVAÇÃO

Como será mostrado adiante, dependendo das condições de contorno, é possível fazer algumas simplificações no método apresentado. Para maiores detalhes ver [1].

EXEMPLO

Considera-se o equilíbrio de um semi-anel engastado em uma das extremidades e na outra solicitado por uma força horizontal P . A figura 2 mostra a estrutura na configuração de referência (um semi-círculo de raio R) e na configuração deformada. Por convenção será usada a seguinte notação $N(S) \equiv N_1(S)$ é o esforço normal e $Q(S) \equiv N_2(S)$ é o esforço cortante.

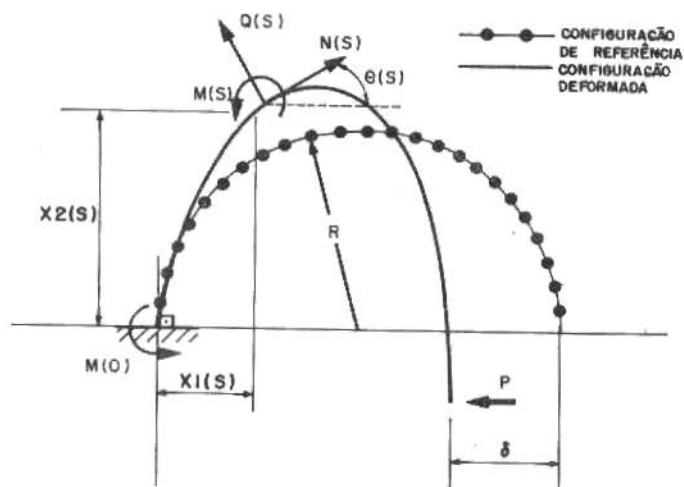


Figura 2

As equações (10), (18) e (20) modelam a estrutura submetidas as seguintes condições de contorno: $N(S) = -P \cos\theta(S)$, $Q(S) = P \sin\theta(S)$, $M(\pi R) = 0$, $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$, $s(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Considerando-se A , I , E constantes ao longo do comprimento, $\frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{R}$, $n_1 = n_2 = m = 0$ obtém-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dS} &= - \frac{ds}{dS} P \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad M(\pi R) = 0 \\ \frac{d\theta}{dS} &= \frac{M}{EI} - \frac{1}{R} \quad ; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2} \\ \frac{ds}{dS} &= 1 - \frac{P \cos \theta}{EA} \quad ; \quad s(0) = 0 \\ \frac{dx_2}{dS} &= \frac{ds}{dS} \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad x_2(0) = 0 \\ \frac{dx_1}{dS} &= \frac{ds}{dS} \cos \theta \quad ; \quad x_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Observe que esse problema não-linear de auto-valor possui quatro condições de contorno definidas no ponto inicial $S = 0$ do intervalo $[0, \pi R]$ e apenas uma no ponto final $S = \pi R$. Isto permitirá uma simplificação no método, respeitando as idéias básicas apresentadas.

Resolver o problema (25) é equivalente a encontrar um valor $t \in \mathbb{R}$ de forma que, resolvendo o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dS} &= - \frac{ds}{dS} P \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad M(0) = t \\ \frac{d\theta}{dS} &= \frac{M}{EI} - \frac{1}{R} \quad ; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2} \\ \frac{ds}{dS} &= 1 + \frac{P \operatorname{sen} \theta}{EA} \quad ; \quad s(0) = 0 \\ \frac{dx_2}{dS} &= \frac{ds}{dS} \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad x_2(0) = 0 \\ \frac{dx_1}{dS} &= \frac{ds}{dS} \cos \theta \quad ; \quad x_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

o valor de M no ponto $S = \pi R$ seja igual a zero ($M(\pi R) = 0$). Ou seja, encontrar a(s) solução(ões) de (26) é equivalente a encontrar o(s) zero(s) da função

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow M(\pi R ; t, P) \end{aligned}$$

Fixado um valor de P , o valor $G(t_0)$ de G para um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ é obtido resolvendo-se numericamente (26) com $t = t_0$, determinando-se o valor de M no ponto $S = \pi R$.

É importante observar que é possível estudar o sinal de G e, dentro de um intervalo real $I(t \in I)$ garantir a determinação de todas as soluções de (25).

Neste caso como $G : R \rightarrow R$ pode ser mais interessante utilizar o método da bisseção ou regula -falsi no lugar do de Newton para determinar o(s) zero(s) de G , já que eles não necessitam da determinação de derivadas de G .

Na apresentação dos resultados todas as variáveis do problema foram adimensionalizadas. Em vez de P e M serão usados P/P^* e M/M^* , onde $P^* = EI/R^2$ e $M^* = EI/R$. As variáveis com dimensão de comprimento foram divididas por $L^* = \pi R$. No processo de adimensionalização surge um parâmetro de extensibilidade definido por $C = I/(AR^2)$.

A figura 3 mostra as curvas da carga P versus o momento no engaste ($S=0$) para $C = 1.E-5$. Fixado um valor de P/P^* , cada ponto das curvas corresponde a uma solução de (25). A partir de $P/P^* = .471$ são encontradas três soluções dado um valor qualquer de P/P^* . Cada solução corresponde a uma configuração de equilíbrio, consequentemente o modelo permite a existência de mais de uma configuração de equilíbrio para alguns valores de P/P^* .

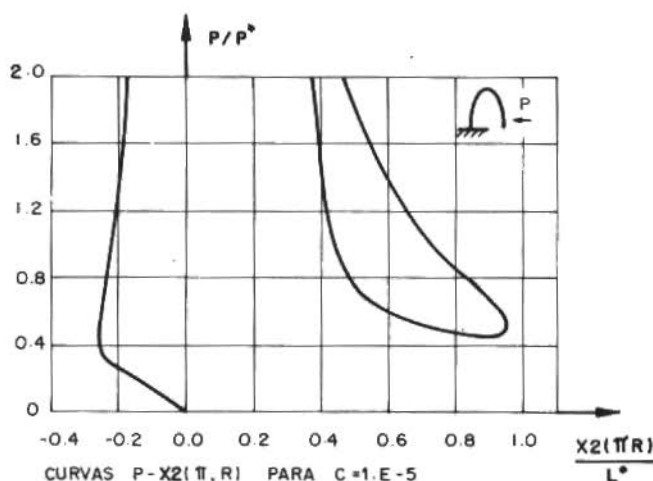


Figura 3

A figura 4 mostra as curvas da carga P versus $x_2(\pi R)$ para $C = 1.E-5$.

Usando a figura 3 como referência é possível traçar a sequência de configurações deformadas relativas a cada curva. Na figura 5 está dada a sequência de configurações relativas à curva que se inicia em $P/P^* = 0$. Na figura 6, está dada a sequência de configurações relativas à segunda curva.

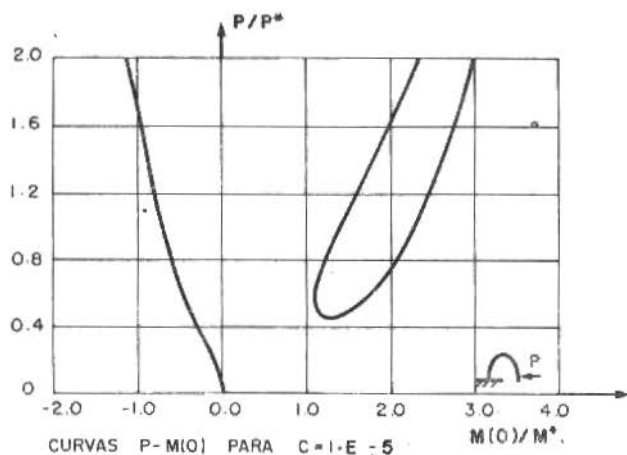


Figura 4

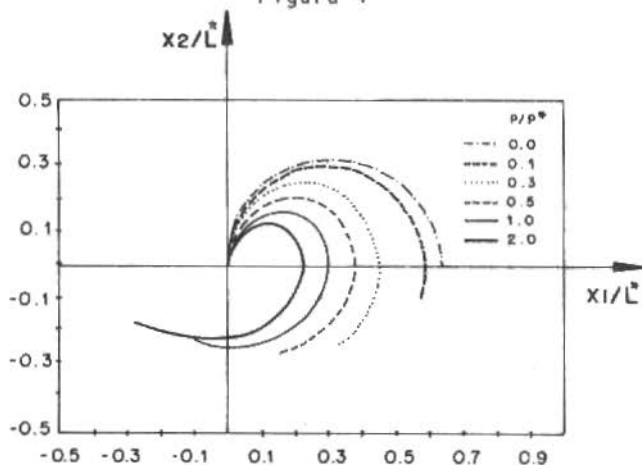


Figura 5

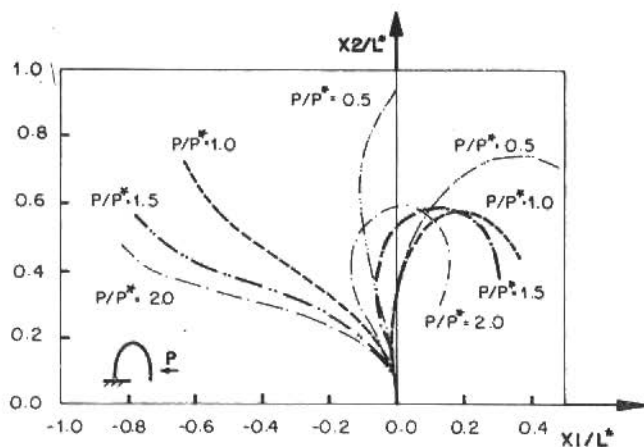


Figura 6

CONCLUSÃO

Com o material apresentado é possível a modelagem do equilíbrio de estruturas elásticas, extensíveis, submetidas a variados tipos de carregamentos, com a área e o momento de inércia da seção reta variando ao longo do comprimento, sem fazer restrições quanto a curvatura inicial e ao tamanho das deformações.

Introduzindo-se hipóteses simplificadoras nesta teoria é possível a obtenção de equações equivalentes as da teoria clássica (linear). Isto mostra que esta pode ser vista como um caso particular da teoria mais geral desenvolvida neste trabalho.

Com as seguintes hipóteses:

- H1 - A expressão (20)₁ não é válida. Isto é, o esforço normal não está relacionado com a medida de deformação ϵ .
- H2 - A estrutura é inextensível ($s(S) = S$).
- H3 - Os deslocamentos são pequenos ($\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$).
- H4 - A estrutura está inicialmente reta ($\frac{d\Phi}{dS} = 0$).
- H5 - Não existem esforços distribuídos.
- H6 - O único esforço externo é uma força horizontal P aplicada numa das extremidades.

o sistema original de sete equações se reduz a

$$\frac{dM}{dx_1} + P \theta = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \theta$$

ou, de forma equivalente:

$$\frac{d^2\theta}{dx_1^2} + \frac{P\theta}{EI} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

A primeira dessas equações é a clássica equação de Euler para vigas retas, cuja solução geral é

$$\theta(x_1) = c_1 \cos(\lambda x_1) + c_2 \sin(\lambda x_2)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e $\lambda = \left(\frac{P}{EI}\right)^{1/2}$.

Definindo-se as condições de contorno, é possível a obtenção das soluções desse problema linear de autovalor.

Exemplo: Viga com uma extremidade engastada e a outra livre.

Condições de contorno: $\theta(0) = 0, \frac{d\theta(L)}{dx_1} = 0$

Soluções do problema: $\theta_0(x_1) = 0$
 $\theta_n(x_1) = c_2 \sin(\lambda_n x_1)$
 $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, n = 1, 2, 3, \dots$

Neste caso é possível mostrar que os autovalores (e portanto as cargas críticas) do problema linearizado são os mesmos do que os do problema não linear inextensível.

Entretanto, quando se considera a extensibilidade, nem sempre os autovalores do problema linearizado coincidem com os do problema não-linear. Para maiores detalhes ver ([6],[7]).

Embora a teoria clássica seja adequada em muitos casos práticos ela é incapaz de tratar problemas onde estejam envolvidas gran-

des deformações, como, por exemplo, na determinação do comportamento pós-crítico de estruturas flambadas.

Com o método do tiro, é possível a solução numérica dos problemas de valor de contorno que modelam o equilíbrio de estruturas unidimensionais elásticas. O método é bastante simples, permitindo o estudo de problemas não-lineares, sendo particularmente eficiente em problemas de bifurcação e no caso de soluções múltiplas.

Finalmente, para uma análise completa, resta a apresentação de equações constitutivas não-lineares e o estudo da estabilidade das configurações obtidas. Tratam-se de questões importantes e que não são triviais. Este estudo será apresentado num futuro trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Mattos, H.S.C. – Método do tiro na resolução de estruturas unidimensionais. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1984.
- [2] Stoer, J. & Bulirsh, R. – Introduction to numerical analysis. Springer Verlag, 1980.
- [3] Ortega, J.M. & Rheinboldt, W.C. – Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, 1970.
- [4] Do Carmo, M.P. – Differential geometry of curves and surfaces. Prentice-Hall, 1976.
- [5] Sotomayor, J. – Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA, 1979.
- [6] Almeida, M.R. & Sampaio, R. – Flambagem de barras extensíveis. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, VII (4) : 373-384, 1985.
- [7] Rabinowitz, P.H. – Application of bifurcation theory. Academic Press, 1977.

MODELING OF FLEXIBLE MULTIBEAM SYSTEMS BY RIGID-ELASTIC SUPERELEMENTS

Werner O. Schiehlen

Jochen Rauh

University of Stuttgart, Stuttgart, F.R.G.

ABSTRACT

Recent trends in the dynamics of multibody systems include also the research on flexible beam and rigid body systems. Such multibeam systems are found in particular in robot dynamics where large non-linear body motions and small linear elastic vibrations have to be investigated. Due to the unavoidable coupling between rigid body motions and elastic vibrations, a unified modelling of such systems is necessary. The superelement based on the multibody system approach offers the possibility to extend available formalisms like NEWEUL to flexible systems. A comparison with the finite element method is given.

INTRODUCTION

For the dynamical analysis of mechanisms, vehicles and robots, a mathematical model of the mechanical system has to be found. In the past, it was often sufficient to model the system by the multibody approach. The equations of motion of such a multibody system can be generated with computer aid using numerical or symbolical formalisms like ADAMS [1] or NEWEUL [2], respectively.

With the increasing demands on velocity and accuracy of the mechanical systems, the elasticities cannot be neglected. While flexible joints can easily be modeled with the above mentioned

multibody formalisms, the elasticity due to flexible links, resulting, e.g., from the long and slender form of lightweight robot arms, requires special consideration. The well known program packages for finite element analysis are usually restricted to small motions with respect to the inertial frame. Extensions have to be made for the large nonlinear motion of the finite elements, see e.g. Sunada and Dubowsky [3] or Shabana [4].

In this paper, the method of multibody systems is applied to the modeling of flexible multibeam systems. A new superelement using rigid bodies and elastic springs is specified, which allows the immediate application of available multibody formalisms even for flexible systems. A comparison of the different multibody and finite element approaches is presented for a simple example.

MULTIBODY BEAM ELEMENTS

For the modeling of flexible beams, the method of multibody systems has to be extended. The procedure is to partition rigid links and to include massless beams or springs for consideration of the structural elasticity. The result is an increased number of degrees of freedom of the link. Consequently, better accuracy can only be achieved by higher system order.

In the following, four different modeling approaches for multibody beam elements will be discussed.

Approach 1. The inertia of the flexible link B_j is evenly distributed among the $p_{ej} + 1$ particles M_{jk} at the nodes, which are connected by p_{ej} massless beams, see Figure 1. This approach is well-known in literature as lumped mass method.

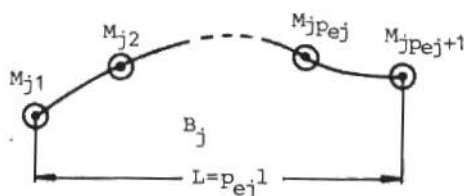


Figure 1. Approach 1 (Lumped Mass Method)

Approach 2. The flexible link B_j is modeled using p_{ej} elastic elements B_{jk} , consisting of two particles M_{jk1} and M_{jk2} at the nodes, connected by a massless beam of length l , see Figure 2.

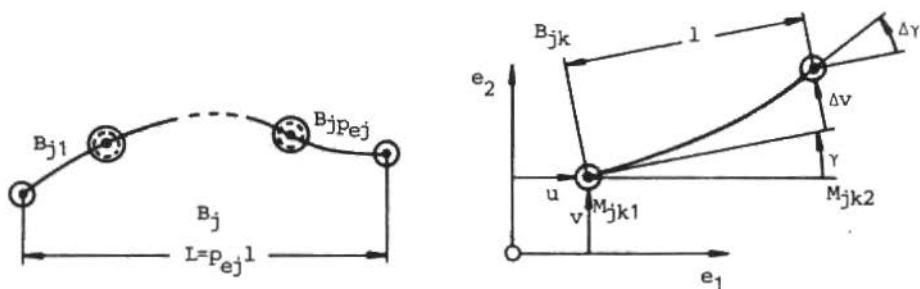


Figure 2. Approach 2 (Particle Beam Element)

Approach 3. The flexible link B_j is modeled using p_{ej} elastic elements B_{jk} as above. The elements consist of two rigid bodies B_{jk1} and B_{jk2} with length $l/2$, which are connected at the nodes by a massless beam of the length l , see Figure 3.

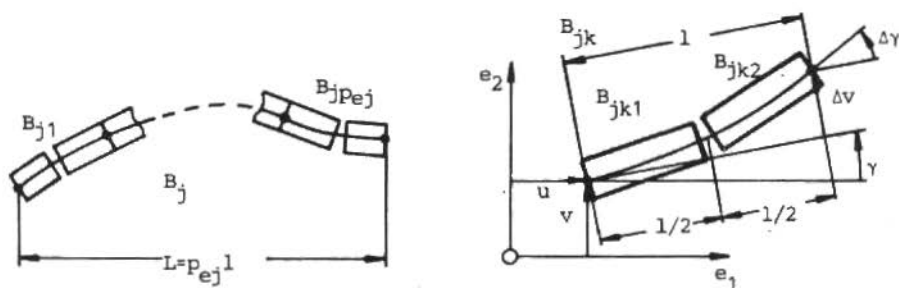


Figure 3. Approach 3 (Hybrid Beam Element)

Approach 4. Again, the flexible link B_j is modeled using p_{ej} elastic elements B_{jk} . The symmetric elements consist of three rigid bodies B_{jk1} , B_{jk2} and B_{jk3} , with lengths k_1 , $(1-2k)l$ and k_1 , respectively, which are connected by joints and torsional springs c_{jk1} , c_{jk2} and c_{jk3} , see Figure 4. All elements may have the same

partitioning coefficient $0 < k < 0.5$. These elements are called superelements.

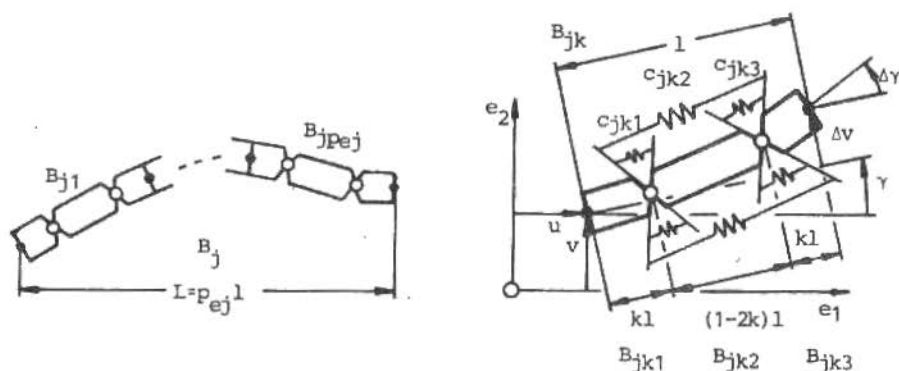


Figure 4. Approach 4 (Rigid-Elastic Superelement)

Stiffness Properties. The stiffness properties of the four approaches have to fit with the static behavior as known from linear elastostatics. For an elastic beam of length l and bending stiffness EI it yields

$$\begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}, \quad (1)$$

see Figure 5.

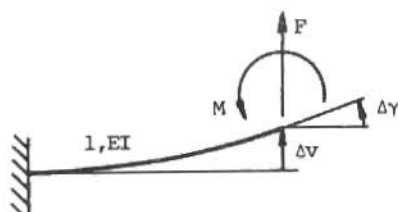


Figure 5. Elastic beam with static load

From this equation, the stiffness matrix for the massless beam used in the approaches 1, 2 and 3 can be determined by inversion as

$$\begin{matrix} F \\ M \end{matrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{matrix} 12 & -6l & \Delta v \\ -6l & 4l^2 & \Delta \gamma \end{matrix} \quad (2)$$

For approach 4, the spring constants can be identified by comparison of coefficients as

$$\begin{aligned} c_{jk1} &= c_{jk3} = 6 \frac{EI}{l} (1-2k)^2, \\ c_{jk2} &= 2 \frac{EI}{l} (-1+6k-6k^2), \end{aligned} \quad (3)$$

Here, k is again the partitioning coefficient of the superelement.

Inertia Properties. The inertia properties of the multibody beam elements have to fit at least with the inertia properties of a rigid beam for large motions without elasticity effects as known from nonlinear dynamics. Hence, it follows that the total mass and the total moment of inertia of the bended beam have to be the same as of an equivalent rigid beam.

For approach 1, the inertia of the particles M_{jk} is $m_{jk} = m_j / (p_{ej} + 1)$, where m_j is the mass of the beam B_j . In approach 2, the inertia of each particle M_{jk1} and M_{jk2} is $m_{jk}/2$, where $m_{jk} = m_j / p_{ej}$ is the mass of the beam element B_{jk} . The resulting total moment of inertia for the flexible beam is always larger than for the rigid beam for both approaches 1 and 2, even if the total mass m_j is the same. Therefore, the two approaches are not considered any further.

In approach 3, the mass of each body B_{jk1} and B_{jk2} is $m_{jk}/2$, where $m_{jk} = m_j / p_{ej}$ means again the mass of the beam element. In approach 4, the masses of the three bodies are km_{jk} and $(1-2k)m_{jk}$ corresponding to their lengths. The total mass m_j and the total moments of inertia correspond to the moment of inertia of the equivalent rigid beam for the approaches 3 and 4.

Local Equations of Motion. Formulating Newton's and Euler's equations for the bodies $B_{jk} \dots$ and applying D'Alembert's principle, the local equations of motion for the elastic element B_{jk} read as

$$M_{jk}(x_{jk})x_{jk} + K_{jk} x_{jk} + k_{jk}(x_{jk}, x_{jk}) = q_{jk}(x_{jk}, t) \quad , \quad (4)$$

where M_{jk} is the inertia matrix, K_{jk} is the stiffness matrix due to the massless beam or springs, k_{jk} is the vector of generalized gyroscopic forces and q_{jk} is the vector of generalized applied forces due to gravity and actuators. The vector x_{jk} summarizes the generalized coordinates of the free elastic element, given by the rigid body motions u, v, γ and the elastic deformations $\Delta v, \Delta \gamma$. It has to be pointed out that the result is only correct if the quadratic terms of $\Delta v, \Delta \gamma$ are considered. Connecting the elastic elements, see Figures 3 and 4, and applying D'Alembert's principle once again, the local equations of motion for the flexible link B_j are obtained as

$$M_j(x_j)x_j + K_j x_j + k_j(x_j, x_j) = q_j(x_j, t) \quad , \quad (5)$$

where the matrices have the same meaning as in (4). The position vector x_j includes now the rigid body motions u, v, γ and all elastic deformations.

Global Equations of Motion. For a multibeam system of p_r rigid links and p_e flexible links, the local equations of motion can be summarized by

$$\begin{aligned} M_i(x_i)x_i + k_i(x_i, x_i) &= q_i(x_i, t) \quad , \quad i = 1(1)p_r \quad , \\ M_j(x_j)x_j + K_j x_j + k_j(x_j, x_j) &= q_j(x_j, t) \quad , \quad j = 1(1)p_e \quad . \end{aligned} \quad (6)$$

Regarding the corresponding constraints and applying D'Alembert's principle again the global equations of motion remain as

$$M(y)y + K y + k(y, y) = q(y, t) \quad , \quad (7)$$

where M is a symmetric positive definite inertia matrix, k is a vector of centrifugal forces, q is a vector of generalized applied forces and y means the vector of the remaining generalized coordinates.

If the vector \mathbf{y} is partitioned in a vector \mathbf{y}_r of large rigid body motions and a vector \mathbf{y}_e of small elastic motions, and the generalized applied forces are restricted to gravity forces \mathbf{q}_g and actuator forces \mathbf{q}_a , the equations of motion can be partitioned as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_r(\mathbf{y}_r) & \mathbf{M}_{re}(\mathbf{y}_r) \\ \mathbf{M}_{er}(\mathbf{y}_r) & \mathbf{M}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r(t) \\ \mathbf{y}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r(t) \\ \mathbf{y}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \mathbf{q}_g(\mathbf{y}) = \mathbf{q}_a(t) . \quad (8)$$

The structure of the global equations of motion is strongly nonlinear, in the case of rigid and flexible multibeam systems, respectively. Therefore, for simulation purposes, the number of degrees of freedom should be as small as possible. Then, it remains the question on the accuracy of the results, which will be investigated for a simple example.

COMPARISON OF THE APPROACHES

For comparison of the different modeling approaches, a simple beam pendulum with a discrete mass \mathbf{M} is analysed with respect to an equilibrium position, see Figure 6.

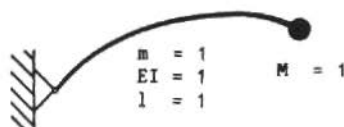


Figure 6. Beam pendulum

In the case of small linear vibrations without gravity and actuator torques, the eigenvalue problem appearing for the continuous system model can be completely solved. The corresponding characteristic equation, see e.g. Meirovitch [6], reads as

$$\cosh \lambda_j \sin \lambda_j - \sinh \lambda_j \cos \lambda_j + 2 \frac{M}{m} \lambda_j \sinh \lambda_j \sin \lambda_j = 0 . \quad (9)$$

For the eigenfrequencies it follows

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \lambda_j^2, \quad (10)$$

where m is the mass of the beam and L is its length. The numerically computed eigenfrequencies will serve as reference solution.

Hybrid Beam Element (Approach 3). The equations of motion are given as

$$\mathbf{M} \mathbf{y} + \mathbf{K} \mathbf{y} = 0 \quad (11)$$

The vector of generalized coordinates is for p elastic elements with $f = 2p + 1$ degrees of freedom

$$\mathbf{y} = [\gamma_0, v_1, \gamma_1, \dots, v_p, \gamma_p]^T \quad (12)$$

For $p = 3$, e.g., the inertia matrix is

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} (1 + \frac{M}{m})L^2 & & & & & & & \\ \frac{1}{3} L & 1 & & & & & & \\ \frac{1}{108} L^2 & 0 & \frac{1}{108} L^2 & & & & & \\ \frac{2}{3} L & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \frac{1}{108} L^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{108} L^2 & & & \\ (\frac{11}{24} + \frac{M}{m})L & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{M}{m} & & \\ \frac{1}{27} L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} L & \frac{1}{216} L^2 & \end{bmatrix} \quad (13)$$

and the stiffness matrix reads as

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 648 & & & & & & \\ 0 & 0 & 24L^2 & & & & & \\ 0 & -324 & -54L & 648 & & & & \\ 0 & 54L & 6L^2 & 0 & 24L^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -324 & -54L & 324 & & \\ 0 & 0 & 0 & 54L & 6L^2 & -54L & 12L^2 & \end{bmatrix} \quad (14)$$

The eigenfrequencies of this model are compared with the exact solutions given above. The relative errors for the first two eigenfrequencies are plotted depending on the number of elastic elements used, see Figure 7. It turns out that the eigenfrequencies are smaller than in reality and the errors are decreasing monotonically.

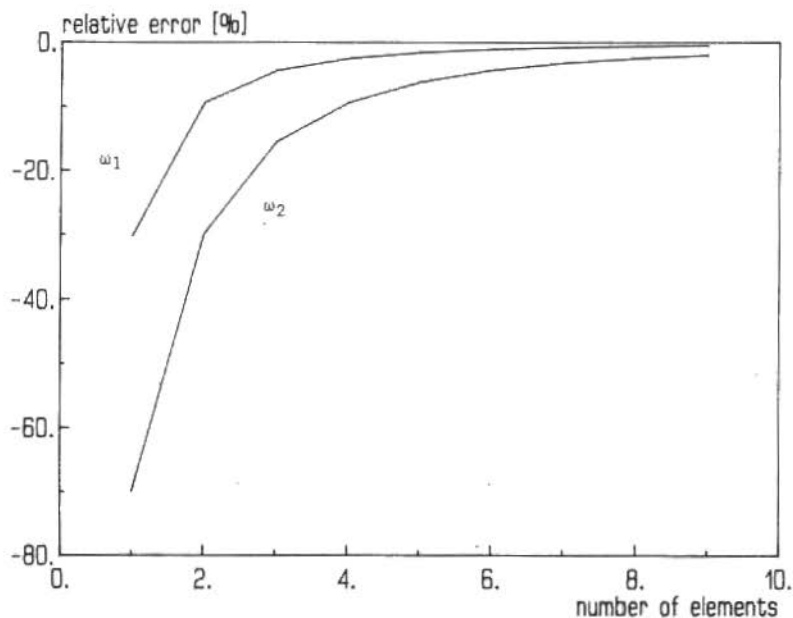


Figure 7. Hybrid beam element

Rigid-Elastic Superelement (Approach 4). The equations of motion look like (11). However, the inertia matrix (13) is now given as

$$M = m \begin{bmatrix} (1 + \frac{M}{m})L^3 & & & & & & & \\ \frac{1}{3}L & \frac{2}{3}(1+k) & & & & & & \\ \frac{1}{27}(k-k^2)L^3 & 0 & \frac{2}{27}(k^2-k^3)L^3 & & & \text{symm.} & & \\ \frac{2}{3}L & \frac{1}{6}(1-2k) & \frac{1}{18}(k-2k^2)L & \frac{2}{3}(1+k) & & & & \\ \frac{1}{27}(k-k^2)L^3 & \frac{1}{18}(2k^2-k)L & \frac{1}{54}(2k^3-k^2)L^3 & 0 & \frac{2}{27}(k^2-k)L^3 & & & \\ (\frac{1}{18}(8+k-k^2) + \frac{M}{m})L & 0 & 0 & \frac{1}{6}(1-2k) & \frac{1}{18}(k-2k^2)L & \frac{1}{3}(1+k) + \frac{M}{m} & & \\ \frac{4}{27}(k^2-k)L^3 & 0 & 0 & \frac{1}{18}(2k^2-k)L & \frac{1}{54}(2k^3-k^2)L^3 & \frac{1}{18}(k^2-2k)L & \frac{1}{27}(k^2-k^3)L^3 & \end{bmatrix} \quad , (15)$$

while the stiffness matrix is identical with (14). The spring constants depend on the partitioning coefficient k , see (3). A uniformly partitioned beam is obtained for $k = 1/4$; then the spring constants are

$$c_1 = c_3 = \frac{3}{2} \frac{EI}{L}$$

and

$$c_2 = \frac{1}{4} \frac{EI}{L}$$

A more simple model is found for

$$k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

it follows

$$c_1 = c_3 = 2 \frac{EI}{L}$$

and c_2 disappears.

The relative errors for the first two eigenfrequencies of these two cases are plotted in Fig. 8 and 9. For $k = 1/4$, the errors are always negative, i.e. the eigenfrequencies are also smaller as in reality. However, the errors do not decrease monotonically. For $k = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$, some eigenfrequencies are smaller and some are larger than in reality, while the errors decrease very fast.

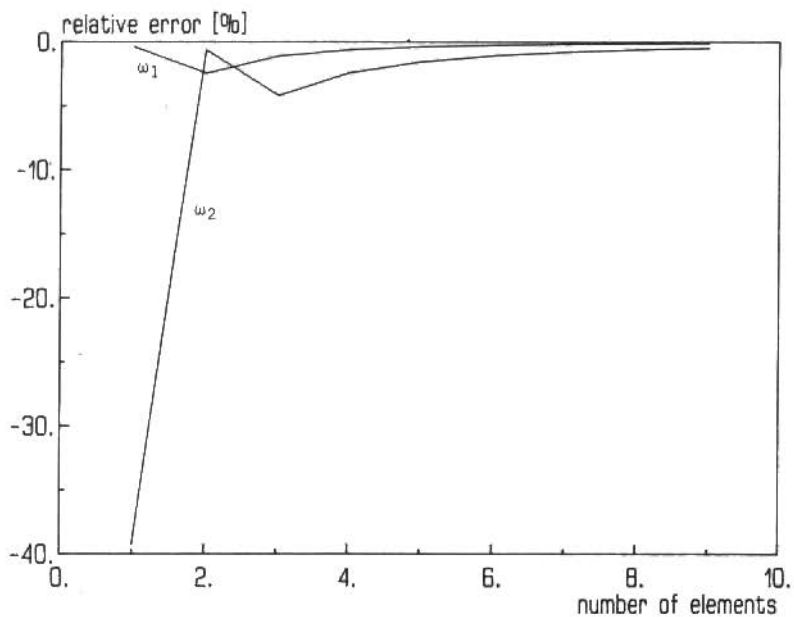


Figure 8. Rigid-elastic superelement $[k = \frac{1}{4}]$

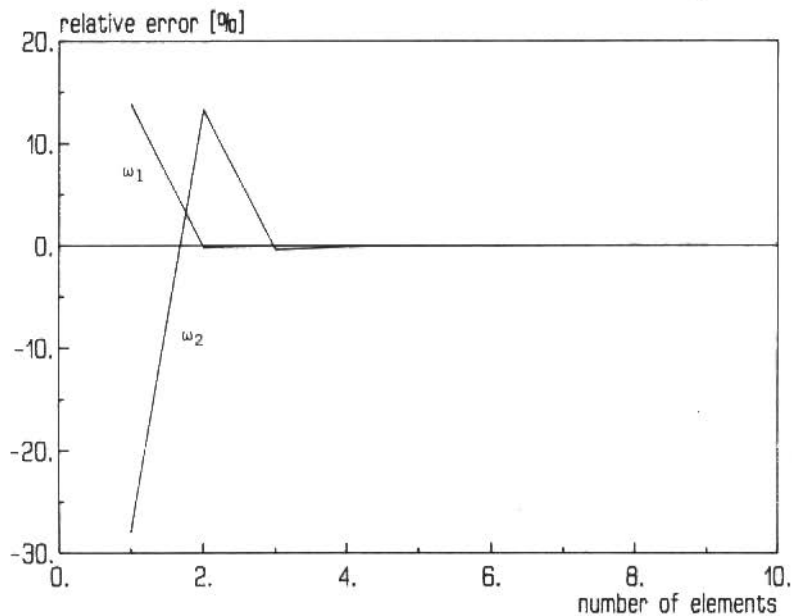


Figure 9. Rigid-elastic superelement $[k = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})]$

Finite Beam Element. For reasons of comparison, the beam is now modeled by p finite beam elements. The local equation of motion of a single element are obtained from Cauchy's equation of motion by applying D'Alembert's principle, see [5]. The resulting equations for the beam pendulum look like (11) again. The inertia matrix is now given as

$$M = m \begin{bmatrix} (1 + \frac{M}{m})L^2 & & & & & & & \\ \frac{1}{3}L & \frac{26}{35} & & & & & & \\ \frac{1}{135}L^2 & 0 & \frac{2}{945}L^2 & & & & \text{symm.} & \\ \frac{2}{3}L & \frac{9}{70} & \frac{13}{1260}L & \frac{26}{35} & & & & \\ \frac{1}{135}L^2 & -\frac{13}{1260}L^2 & -\frac{1}{1260}L^2 & 0 & \frac{2}{945}L^2 & & & \\ (\frac{9}{20} + \frac{M}{m})L & 0 & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{1260}L & \frac{13}{35} + \frac{M}{m} & & \\ \frac{13}{540}L^2 & 0 & 0 & -\frac{13}{1260}L & -\frac{1}{1260}L^2 & -\frac{11}{630}L & \frac{1}{945}L^2 & \end{bmatrix}, \quad (16)$$

while the stiffness matrix is still identical with (14). The relative errors for the eigenfrequencies are plotted in Fig.10. In this case, all the errors are positive.

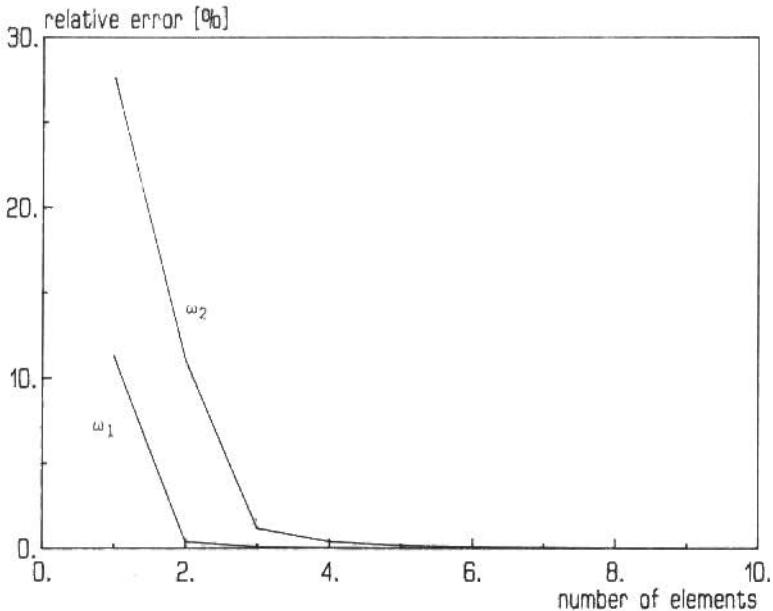


Figure 10. Finite beam element

CONCLUSION

In this paper, different multibody beam models for the modeling of flexible links were discussed. Modeling the elasticity by rigid bodies and massless beams or springs is a straight-forward extension to the method of multibody systems. The available formalisms are well suited to handle this kind of approach. While the first two approaches with concentrated masses at the nodes don't lead to consistent inertia properties, the hybrid beam element and the rigid-elastic superelement give consistent results for large rigid body motions. For the hybrid beam element, the resulting eigenfrequencies are found to be much too low, since the inertia is overemphasized with respect to elastic deformation. The superelement with $k = 1/4$ still leads to eigenfrequencies, which are too low, but the errors are rather small. With $k = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$, some eigenfrequencies are too low and some are too high, and the errors are really small, too. The partitioning coefficient k of the element has influence on the kind of approximation of the eigenfrequencies. Therefore, the choice of the parameter is to some extent a matter of taste. Using the finite element approach, the obtained eigenfrequencies are found to be too high. A comparison of the approaches shows also that the results are equivalent if a sufficient number of elastic elements is chosen. In particular, the rigid-elastic superelement features high accuracy for flexible multibeam systems using established multibody formalisms.

REFERENCES

- [1] Chace, M.A. - Methods and experience in computer aided design of large-displacement mechanical systems. In: Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, ed. E.J.Haug, Springer, 1984, pp.233-259.
- [2] Schiehlen, W.O. - Dynamics of complex multibody systems. SM Archives, 9 pp.159-195 (1984).
- [3] Sunada, W. and Dubowsky, S. - The application of finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and coplanar linkage systems. Journal of Mechanical Design, 103 : 643-651, July 1981.
- [4] Shabana, A.A. - Automated analysis of constrained systems of rigid and flexible bodies. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 107 : 431-439, Oct.1985.
- [5] Schiehlen, W.O. - Technische dynamik. Stuttgart: Teubner, 1986.
- [6] Meirovitch, L. - Elements of vibration analysis. Tokyo: McGraw-Hill, 1975.

