

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

# PROGRAMA DE APOIO A PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS



A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalurgia, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os Trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Editor Executivo da RBCM  
Secretaria da ABCM  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea  
22453 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

---

*The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.*

*Manuscripts for submission must contain unpublished material, i. e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.*

*The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.*

*Executive Editor of RBCM  
Secretary of ABCM  
PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea  
22453 — Rio de Janeiro, RJ — Brazil*

*The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.*



**EDITOR  
RESPONSÁVEL**  
Rubens Sampaio

**EDITOR  
EXECUTIVO**  
J. M. Freire

**CONSELHO  
EDITORIAL**

Abimael F. D. Loula  
Arthur J. V. Porto  
Berend Snoeijer  
Bernardo Horowitz  
C. S. Barcellos  
D. E. Zempieri  
Duraid Mahrus  
E. O. Taroco Aliano  
F. Venâncio Filho  
F. E. Mourão Saboya  
Giulio Massarani  
Guilherme Creuss  
Hans Ingo Weber  
Henner A. Gomide  
Jan Leon Scieszko  
Jerzy T. Sielawa  
J. J. Espíndola  
Liu Hsú  
Maurício N. Frota  
Miguel H. Hirata  
Nelson Back  
Nestor Zouain  
Nivaldo L. Cupini  
O. Maizza Neto  
Pedro Carajilescov  
Sergio Colle

**FORMULAÇÕES CINEMÁTICA, DE  
EQUILÍBRIO E MISTA PARA ELASTO-  
PLASTICIDADE EM TENSÕES PLANAS** 103

Mildred Ballin Hecke  
Néstor Zouain Pereira – Membro da ABCM  
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

**A PARAMETRIC ANALYSIS OF MOISTURE  
MIGRATION IN POLYMERS** 133

Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM  
Sergio Colle – Membro da ABCM  
Rinaldo Puff  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CALOR  
TRANSIENTE EM REGIÕES INFINITAS  
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTOURNO COM DUPLA  
RECIPROCIDADE** 161

Carlos Friedrich Loeffler  
IME – Seção de Engenharia Mecânica

Webe João Mansur  
COPPE/UFRJ – Programa de Engenharia Civil

**MODELAGEM DO COMPORTAMENTO  
ESTÁTICO DE CABOS SUBMARINOS** 173

Heraldo Silva da Costa Mattos – Membro da ABCM  
Rubens Sampaio – Membro da ABCM  
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica





# 5º SIMPÓSIO BRASILEIRO SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO

*mit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor*

## OBJETIVO

Estimular o intercâmbio entre centros de pesquisa, universidades, indústrias e empresas de projeto visando a divulgação, aperfeiçoamento e desenvolvimento de novas técnicas nas áreas de tubulações e vasos de pressão.

## PATROCINADORES

### SPONSORS

CNPq, FINEP  
UNESCO, OEA, ALALC

## INSCRIÇÕES

Sócios da ABCM — US\$ 75,00  
Não Sócios — US\$ 100,00

A inscrição dá direito aos anais do Simpósio e à participação no coquetel de abertura.

## DATAS IMPORTANTES

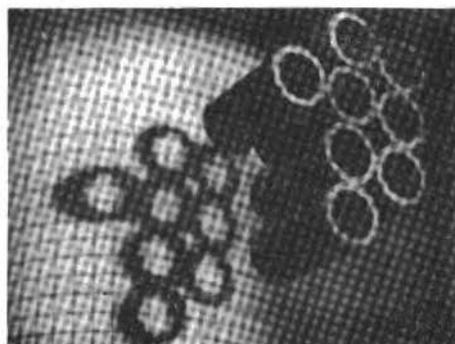
30/04/88 — Limite para envio dos resumos dos trabalhos.  
31/08/88 — Limite para a entrega do texto final dos trabalhos a serem submetidos ao Conselho Editorial.

## ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA MAILING ADDRESS

Secretaria do 5º SIBRAT  
Laboratório Nacional de Computação Científica  
Rua Lauro Müller, 455  
22290 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil  
Tel.: (021) 541-2132 — ramal 148

## ORGANIZADORES ORGANIZERS

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Comitê de Tubulações e Vasos de Pressão da ABCM



SALVADOR, BAHIA, BRASIL  
25 — 28/10/88

PROMOÇÃO DA / PROMOTED BY  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS MECÂNICAS  
ABCM

## APOIO SUPPORT

Secretaria de Ciência e Tecnologia do  
Estado da Bahia  
Secretaria de Ciência e Tecnologia do  
Estado do Rio de Janeiro

## FORMULAÇÕES CINEMÁTICA, DE EQUILÍBRIO E MISTA PARA ELASTO-PLASTICIDADE EM TENSÕES PLANAS

Mildred Ballin Hecke

Néstor Zouain Pereira – Membro da ABCM

PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

### RESUMO

Métodos numéricos para a análise de tensões em um corpo elasto-plástico, sob estado plano de tensões ao longo do processo de carga, são desenvolvidos a partir de formulações variacionais. Estes princípios de mínimo, cujas variáveis são incrementos finitos de deslocamentos, tensões e deformações plásticas, são discretizados pelo MEF, e dualizados para mostrar que todos recaem em um mesmo problema de programação matemática. Vários elementos finitos, cinemáticos, de equilíbrio e mistos, para estado plano, são apresentados. Mostra-se uma aplicação em uma placa com entalhe tracionada.

### ABSTRACT

Numerical methods for the stress analysis of an elastic-plastic body, under plane stress along the loading process, are derived from variational formulations. These minimum principles, whose variables are finite increments of displacement, stress and plastic strain fields, are discretized by the FEM and dualized to show that all of them lead to the same mathematical programming problem. Several kinematical, statical and mixed finite elements are presented. An application is shown concerning a notched strip under traction.

## INTRODUÇÃO

O cálculo de tensões e deformações com modelos elasto-plásticos, onde são levados em consideração os processos de deformação irreversível ou plástica e o descarregamento elástico local, tem larga aplicação na análise de componentes mecânicos. Para estes modelos dois problemas básicos são identificados: a análise elasto-plástica (ou incremental) [6,2] e a análise limite [6,1,3]. No primeiro são calculadas tensões em um processo de carga conhecido, e no segundo é obtido apenas o valor do fator de amplificação das cargas prescritas que produz o colapso plástico.

Neste trabalho, a análise elasto-plástica é desenvolvida a partir de formulações variacionais [4,2] cujas variáveis são os incrementos finitos dos campos de deslocamento, tensão ou deformação plástica. Sendo assim, estes princípios variacionais definem completamente os métodos numéricos, exceto pela interpolação espacial, o que não acontece quando se utilizam princípios em taxas que precisam de procedimentos adicionais para impor admissibilidade plástica ou verificar descarregamento elástico local [9].

A ênfase do trabalho é na aplicação destas formulações para estado plano de tensões, mostrando o desenvolvimento de alguns elementos finitos, cinemáticos, de equilíbrio, e mistos, apropriados para esta situação.

O enfoque escolhido para a formulação dos princípios variacionais, que se convencionou chamar de otimização ou análise convexa, permite estabelecer os problemas de programação matemática para os quais existem técnicas numéricas apropriadas. Em particular, o método numérico utilizado [2], que procura a anulação do resíduo no equilíbrio iterando com uma regra do tipo quase-Newton, realiza o cálculo das deformações plásticas resolvendo problemas de complementaridade linear a nível de cada elemento finito da discretização.

São apresentados resultados para uma placa tracionada e com entalhes simétricos para alguns dos elementos propostos.

## CINEMÁTICA E EQUILÍBRIO; PARTICULARIZAÇÃO PARA ESTADO PLANO DE TENSÕES

Considere-se um corpo que ocupa uma região  $B$  do espaço tridimensional. Assume-se que as deformações são infinitesimais e que as restrições no contorno  $\partial E_u$  são homogêneas e do tipo bilateral.

Define-se o conjunto dos campos de deslocamentos possíveis

como

$V = \{u(x), \text{suficientemente regulares } u |_{\partial B_u} = 0\}$  que, neste caso, coincide com o conjunto dos deslocamentos virtuais.

As derivadas com relação ao "tempo"  $t$  de  $u(x)$  representam os campos  $v(x)$  das velocidades possíveis, e são também elementos de  $V$ .

O operador linear  $\mathcal{D}$  relaciona a deformação  $E$  com os deslocamentos  $u$ , e em forma análoga, a taxa de deformação  $D$  com a velocidade de  $v$ , que são elementos de  $W$  (conjunto das deformações e taxas de deformações), ou seja,

$$E = \mathcal{D}u \quad ; \quad D = \mathcal{D}v \quad (1)$$

No caso em questão, este operador é a parte simétrica do gradiente.

Reconhece-se as forças  $L$  que podem atuar no corpo como o conjunto  $(\bar{a}, \bar{b})$  das forças de superfície que atuam em  $\partial B_r = \partial B - \partial B_u$ ; e as forças de volume. Chama-se potência externa sobre  $v$  a

$$P_e = L(v) = \int_B \bar{b} \cdot v \, dB + \int_{\partial B_u} \bar{a} \cdot v \, d\partial B \quad (2)$$

A carga  $L$  pertence a  $V'$ , espaço dual topológico de  $V$ .

Denota-se por  $T$  as tensões ou esforços internos, e por  $P_i$  a potência interna que representa-se por

$$P_i = - \int_B T \cdot \mathcal{D}v \, dB \quad (3)$$

Tem-se também que  $T$  pertence a  $W'$ , espaço dual de  $W$ .

Para definição de equilíbrio adota-se o Princípio das Potências Virtuais: "a tensão  $T$  está em equilíbrio com a carga  $L$  se

$$P_i + P_e = 0 \quad \forall v^* \in V \quad (4)$$

e ainda,

$$\int_B T \cdot \mathcal{D}v^* \, dB = L(v^*) \quad \forall v^* \in V \quad (5)$$

A partir desta definição reconhece-se o conjunto de tensões equilibradas com  $L$

$$S(L) = \{T \in W^* \mid \int_E T \cdot D v^* dS = L(v^*) \forall v^* \in V\}. \quad (6)$$

Dá-se o nome de estado plano de tensões, quando é possível encontrar um plano definido pela sua normal  $\bar{n}$  para o qual

$$T \bar{n} = 0. \quad (7)$$

Portanto, reconhece-se

$$W'_p = \{T_p \in W' \mid T_p \bar{n} = 0\}. \quad (8)$$

Seja  $Oxyz$  um sistema de coordenadas ao qual o corpo está referido. Neste caso, tomando-se  $\bar{n}$  coincidente com o eixo  $z$ , as componentes não nulas serão  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ .

#### RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTO-PLÁSTICA. PARTICULARIZAÇÃO PARA ESTADO PLANO

O comportamento elasto-plástico de um material pode ser descrito pelas seguintes relações

$$f(T, \lambda) \leq 0 \quad (9)$$

$$\dot{T} = \mathbb{D} (D - D^P) \quad (10)$$

$$D^P = f_T \dot{\lambda} \quad (11)$$

$$f \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0. \quad (12)$$

A equação (9) estabelece o critério de plastificação. A função  $f$  é de valor vetorial e cada uma das suas componentes representa um modo de escoamento; sendo assim a desigualdade nesta equação se aplica a cada componente. O parâmetro  $\lambda$  representa a história de deformação plástica. A equação (10) exprime a proporcionalidade da taxa de tensão com a taxa da deformação elástica, onde o tensor de elasticidade é chamado de  $\mathbb{D}$ . A equação (11) é a lei de escoamento, associada à função limite de escoamento  $f$  ( $f_T$  é o gradiente de  $f$  em relação à  $T$ ). O número de componentes do vetor  $\dot{\lambda}$  é igual ao de mo-

dos de escoamento em  $f$ . Note-se que o parâmetro escolhido para representar a história plástica é integrado no "tempo"  $t$ . A relação de complementaridade (12) impõe que a contribuição na taxa de deformação plástica de modos inativos (ou elásticos,  $f_j < 0$ ) é nula.

Um tipo de função de plastificação conveniente é a seccionalmente linear

$$f(T, \lambda) = N^T T - H\lambda - R \quad (13)$$

onde a matriz constante  $N = f_{,T}$  tem em suas colunas os vetores normais aos modos de escoamento, o vetor  $R$  as respectivas distâncias à origem, e a matriz constante  $H = -f_{,\lambda}$  contém os parâmetros de escoamento do material. No caso de plasticidade ideal  $H$  é nula.

No estado plano de tensões

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

O critério de Von-Mises para estado plano de tensões é definido pela função de escoamento

$$f(T) = \left[ \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (15)$$

onde  $\sigma_Y$  é a tensão de escoamento em tração e compressão pura. Esta função delimita um elipsóide no espaço de tensões, mostrado na figura 1-a. Uma aproximação linear inscrita com 14 modos de escoamento para esta função é dada pelas relações

$$N = \begin{pmatrix} A & A & -A & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & C & C & -C & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & A & -A & -A & -C & -C & C & C & 0 & 0 \\ B & -B & B & -B & B & -B & B & -B & D & -D & D & -D & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$R = [A \ A \ A \ A \ A \ A \ A \ A \ C \ C \ C \ C \ \frac{\sqrt{2}}{3} \ \frac{\sqrt{2}}{3}] \quad (17)$$

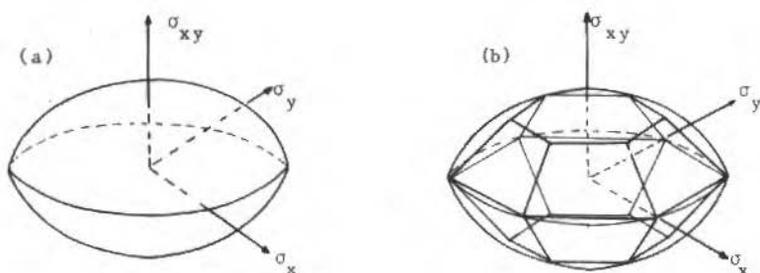


Figura 1. Critério de Mises. Linearização com 14 modos

$$A = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{3}}} \quad B = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{14-2\sqrt{3}}} \quad C = \frac{1}{\sqrt{8-3\sqrt{3}}} \quad D = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{16-6\sqrt{3}}} \quad (18)$$

O critério de Tresca para estado plano de tensões é dado por

$$f(T) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} - \sigma_Y \quad (19)$$

A superfície de escoamento correspondente, inscrita no elipsóide de Mises, é apresentada na figura 2-a. Uma linearização inscrita com 12 modos de escoamento, apresentada em [4] é mostrada na figura 2.

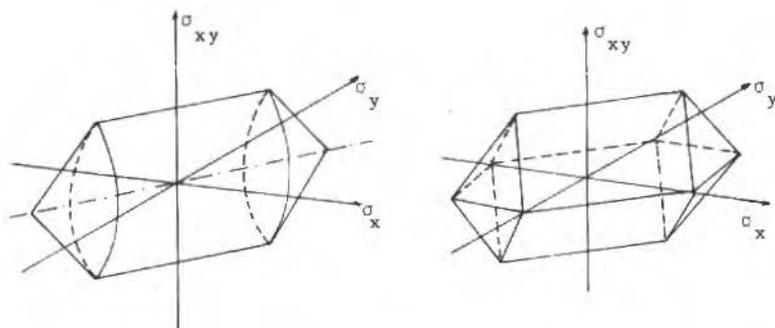


Figura 2. Critério de Tresca. Linearização com 12 modos

### FORMULAÇÕES PARA ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

Nesta seção são apresentadas as formulações variacionais do problema de análise incremental elasto-plástica. A divisão do processo em passos de carregamento se faz necessária devido a que o comportamento do material é dependente da história das deformações plásticas. Consequentemente, o problema é formulado como o cálculo do estado do corpo ao final de um incremento de carga iniciado em uma situação em que os deslocamentos, tensões e deformações plásticas são conhecidas.

Na procura de soluções numéricas estes incrementos de carga, deslocamentos, tensões e deformações plásticas são necessariamente finitos. No entanto, é frequente achar métodos numéricos formulados como princípios variacionais em taxas que são complementados com procedimentos, geralmente iterativos, destinados à verificação de admissibilidade plástica das tensões obtidas, ou à realização de modificações devidas a ocorrência de descarregamento elástico local.

Entretanto, é possível formular princípios variacionais em termos de incrementos finitos no tempo [6], que definem completamente um método numérico, e constituem uma aproximação, com características conhecidas, para o processo elasto-plástico real. A seguir são apresentados alguns destes princípios de mínimo. A sua relação com princípios estendidos [3] em taxas foi discutida nas referências [2,3]. Para funções de escoamento seccionalmente lineares, eq. (13), as soluções obtidas por estes princípios em incrementos finitos garantem tensões finais em equilíbrio e plasticamente admissíveis; e também possibilitam a ocorrência de descarregamento elástico local, desde que iniciado junto com o incremento de carga.

A seguir, são enunciados estes princípios para os incrementos das variáveis deslocamento, tensão e multiplicadores plásticos, denotados por  $\Delta u$ ,  $\Delta T$  e  $\Delta \lambda$ , e onde os valores no início do passo são identificados por um sub-índice  $t$ .

A formulação cinemática da análise incremental elasto-plástica consiste em achar  $\Delta u$  e  $\Delta \lambda$  resolvendo:

$$\inf_{\Delta u, \Delta \lambda} \left\{ \int_B \left[ \frac{1}{2} D \nabla \Delta u \cdot \nabla \Delta u + \frac{1}{2} (N^T D N + H) \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - N^T D \nabla \Delta u \cdot \Delta \lambda - f_t \cdot \Delta \lambda \right] dB - \Delta L(\Delta u) \right\} \quad (20)$$

sujeito a

$$\Delta u \in V \quad \Delta \lambda \in \Lambda \quad (21)$$

onde  $\Lambda$  é o conjunto de funções  $\lambda$  não negativas em todo  $B$ .

A formulação de equilíbrio (estática), dual da anterior, é o problema de encontrar a solução  $\Delta T$  e  $\Delta \lambda$  de

$$\sup_{\Delta T, \Delta \lambda} \int_B \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T - \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda \right] d \quad (22)$$

sujeito a

$$\Delta T \in \Delta S \quad \Delta \lambda \in \Lambda \quad (23)$$

$$\int_B (f_t + N^T \Delta T - H \Delta \lambda) \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) dS \leq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda \quad (24)$$

As restrições neste problema são a condição de equilíbrio incremental e a admissibilidade plástica das tensões obtidas no estado final para o incremento de carga. Para esta última restrição foi adotada a forma variacional, em lugar da forma local

$$f_t + N^T \Delta T - H \Delta \lambda \leq 0 \quad \forall x \in B \quad (25)$$

porque isto será necessário para a discretização desta imposição. A formulação estática admite também a forma equivalente a seguir

$$\sup_{\Delta T} \inf_{\Delta \lambda} \int_B \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T + \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - N^T \Delta T \cdot \Delta \lambda - f_t \cdot \Delta \lambda \right] dS \quad (26)$$

sujeito a

$$\Delta T \in \Delta S \quad \Delta \lambda \in \Lambda \quad (23)$$

A formulação mista estabelece que  $\Delta u$ ,  $\Delta T$  e  $\Delta \lambda$  são a solução do problema

$$\sup_{\Delta T} \inf_{\Delta \lambda} \int_B \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T + \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - N^T \Delta T \cdot \Delta \lambda + \Delta T \cdot \nabla \Delta u - f_t \cdot \Delta \lambda \right] dS - \Delta L(\Delta u) \quad (27)$$

sujeito a

$$\Delta T \text{ e } \Delta S \qquad \Delta \lambda \text{ e } \Lambda. \qquad (23)$$

### O PROBLEMA ELASTO-PLÁSTICO DISCRETO

Os problemas de otimização da seção anterior estão definidos em espaços funcionais de dimensão infinita. Soluções aproximadas são obtidas quando estes problemas passam a ser definidos em espaços de dimensão finita. Cabe salientar aqui que a introdução nos princípios de mínimo da condição de admissibilidade plástica também na forma variacional permite a substituição de um conjunto infinito de restrições (por exemplo as equações (25)) pelo conjunto finito de inequações correspondentes às bases de interpolação. Para a construção das funções de base utiliza-se o Método dos Elementos Finitos. Distinguir-se-á, a partir deste item, campos através da seguinte notação

$$\hat{u} = u(x) \qquad (\text{indica campo de deslocamentos})$$

reservando-se

$$u \qquad (\text{indica deslocamentos nodais})$$

para vetores discretos. Em forma análoga para  $\hat{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\hat{T}$ ,  $T$ ,  $\hat{f}$ ,  $f$ ,  $\hat{D}$ ,  $D$ ,  $\hat{N}$ ,  $N$  e  $\hat{R}$ ,  $R$ .

### Formulação Cinemática Discreta

Propõe-se as seguintes interpolações

$$\hat{u} = Y_u u^i \qquad \hat{\lambda} = Y_\lambda \lambda^i \qquad (28)$$

para os campos de deslocamentos e de fatores plásticos, onde  $u^i$  e  $\lambda^i$  são os vetores de parâmetros de deslocamentos e multiplicadores plásticos do elemento  $i$ . Os operadores de interpolação  $Y_u$  e  $Y_\lambda$  podem ser construídos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos.

Sejam  $u$  e  $\lambda$  os vetores que colecionam as componentes de  $u^i$  e  $\lambda^i$  de todo o corpo e  $L_u^i$  e  $L_\lambda^i$  as matrizes booleanas que representam as relações de incidência entre estes dois vetores. Então

$$u^i = L_u^i u \qquad \lambda^i = L_\lambda^i \lambda \qquad (29)$$

Utilizando-se os campos aproximados (28), o princípio de mínimo em incrementos finitos da expressão (20), fica

$$\min_{\Delta u \quad \Delta \lambda} \left[ \frac{1}{2} K \Delta u \cdot \Delta u - K_{u\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta u + \frac{1}{2} K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - f_t \cdot \Delta \lambda - \Delta F \cdot \Delta u \right] \quad (30)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

onde

$$K = \sum_{i=1}^{n_e} L_u^{iT} K^i L_u^i \quad ; \quad K^i = \int_B (\mathcal{D} Y_u)^T \hat{D} \mathcal{D} Y_u \, dB \quad (32)$$

$$K_{u\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_u^{iT} K_{u\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{u\lambda}^i = \int_B (\mathcal{D} Y_u)^T \hat{D} \bar{N} Y_\lambda \, dB \quad (33)$$

$$K_{\lambda\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^{iT} K_{\lambda\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{\lambda\lambda}^i = \int_B Y_\lambda^T (\bar{N}^T \hat{D} \bar{N} + \hat{H}) Y_\lambda \, dB \quad (34)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^{iT} f^i \quad ; \quad f^i = K_{\lambda u}^i u^i - K_{\lambda\lambda}^i \lambda^i - R^i \quad (35)$$

$$R^i = \int_B Y_\lambda^T \hat{R} \, dB \quad (36)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n_e} L_u^{iT} F^i \quad (37)$$

onde  $n_e$  é o número total de elementos e  $F^i$  a parcela referente as cargas de superfície e corpo no elemento  $i$ .

O incremento do campo de tensões é obtido a partir da solução elementar  $\Delta u^i$  e  $\Delta \lambda^i$  como segue

$$\Delta \hat{T} = \hat{D} (\mathcal{D} Y_u \Delta u^i - \bar{N} Y_\lambda \Delta \lambda^i) \quad (38)$$

### Formulação Estática Discreta

A seguinte aproximação é proposta para o campo de tensões

$$\hat{T} = Y_T T^i + \hat{T}_b^i \quad (39)$$

onde  $Y_T$  é o operador de interpolação de tensões que pode ser construído utilizando-se o Método dos Elementos Finitos;  $T^i$  é o vetor de parâmetros de tensão do elemento  $i$  e  $\bar{T}_b^i$  é a parcela referente a carga de corpo prescrita no elemento  $i$ .

Agrupando-se em  $T_a$  os parâmetros de tensão de todo o corpo referente às cargas de superfície  $\bar{a}$  prescritas, em  $T$  os parâmetros de tensão de todo o corpo que estão livres de prescrição, pode-se obter os parâmetros de tensão do elemento  $i$  utilizando-se as matrizes booleanas  $L_T^i$  e  $L_a^i$  que representam as relações de incidência entre estes vetores, ou seja

$$T^i = L_T^i T + L_a^i T_a \quad (40)$$

Substituindo-se a expressão (40) em (39), a tensão em cada ponto pode ser obtida por

$$\hat{T}_i = Y_T^i L_T^i T + \bar{T}^i \quad (41)$$

onde

$$\bar{T}^i = Y_T L_a^i T_a + \bar{T}_b^i \quad (42)$$

agrupa as parcelas devidas as prescrições referentes às cargas de superfície e de corpo.

Já para o campo  $\lambda$ , a aproximação proposta é

$$\hat{\lambda} = Y_\lambda \lambda^i \quad (43)$$

e com a utilização da matriz booleana de incidência  $L_\lambda^i$ , tem-se

$$\hat{\lambda} = Y_\lambda L_\lambda^i \lambda \quad (44)$$

onde  $\lambda$  é o vetor que agrupa os parâmetros de escoamento de toda a estrutura.

Utilizando-se as relações (39) e (44), o princípio de dois campos (22) toma a forma

$$\max_{\Delta T, \Delta \lambda} \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T - \Delta \bar{E} \cdot \Delta T - \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda \right] \quad (45)$$

$$\left| \begin{array}{l} B^T \Delta T = \Delta F + \Delta \bar{F}_a + \Delta \bar{F}_b \\ f_t + N^T \Delta T - H \Delta \lambda - \Delta \bar{R} \leq 0 \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left| \begin{array}{l} f_t + N^T \Delta T - H \Delta \lambda - \Delta \bar{R} \leq 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

sendo

$$f_t = N^T T_t - H \lambda_t - R_t - \bar{R}_t \quad (48)$$

e onde

$$D^{-1} = \sum_{i=1}^{n_e} L_T^{iT} (D^i)^{-1} L_T^i ; \quad (D^i)^{-1} = \int_{S_i} Y_T^T \hat{D}^{-1} Y_T dS \quad (49)$$

$$\Delta \bar{E} = \sum_{i=1}^{n_e} L_T^{iT} \Delta \bar{E}^i ; \quad \Delta \bar{E}^i = \int_{S_i} Y_T^T \hat{D}^{-1} \Delta \bar{T}^i dS \quad (50)$$

$$H = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^i H^i L_\lambda^i ; \quad H^i = \int_{S_i} Y_\lambda^T \hat{H} Y_\lambda dS \quad (51)$$

$$N = \sum_{i=1}^{n_e} L_T^{iT} N^i L_\lambda^i ; \quad N^i = \int_{S_i} Y_T^T \hat{N} Y_\lambda dS \quad (52)$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^i \Delta \bar{R}^i ; \quad \Delta \bar{R}^i = - \int_{S_i} Y_\lambda^T \hat{N}^T \Delta \bar{T}^i dS \quad (53)$$

$$R = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^i R^i ; \quad R^i = \int_{S_i} Y_\lambda^T \hat{R} dS \quad (54)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^i f^i ; \quad f^i = N^{iT} T^i - H^i \lambda^i - R^i - \bar{R} \quad (55)$$

A restrição de equilíbrio, que é dada pela expressão (46) é obtida da condição de equilíbrio entre elementos como explicado a seguir. Seja  $S^i$  o vetor que agrupa as tensões nos pontos de imposição explícita de equilíbrio do elemento  $i$ , e  $F$  o vetor global das cargas de superfície prescritas nestas direções. Se a matriz booleana  $L_F^i$  representa a relação de incidência entre as direções de imposição explícita de equilíbrio do elemento  $i$  e as direções globais,

o equilíbrio de todo o corpo é dado pela relação

$$\sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} S^i = F . \quad (56)$$

Os parâmetros de tensão  $T^i$  estão relacionados com as tensões  $S^i$  dos pontos de imposição de equilíbrio para o elemento  $i$  através da expressão

$$B^{iT} T^i = S^i + S_b^i \quad (57)$$

onde  $B^{iT}$  é a matriz de equilíbrio elementar e  $S_b^i$  a parcela devida a carga de corpo. Substituindo-se (57) e (39) em (56), chega-se a

$$\bar{B}^T T = \bar{F} + \bar{F}_a + \bar{F}_b \quad (58)$$

onde

$$\bar{B}^T = \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} B^{iT} L_T^i \quad (59)$$

$$\bar{F}_a = - \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} B^{iT} L_a^i T_a \quad (60)$$

$$\bar{F}_b = \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} S_b^i . \quad (61)$$

Frequentemente a montagem destas condições de equilíbrio para a estrutura produz um sistema com equações redundantes, ou ainda, incompatível se as cargas não forem corretamente prescritas. A seguir mostra-se a necessidade de efetuar uma operação de redução das equações de equilíbrio redundantes, de maneira que a restrição de equilíbrio fique

$$B^T T = F \quad (62)$$

onde  $B^T$  é formada por todas as linhas de  $\bar{B}^T$ , linearmente independentes. Admitindo por simplicidade que estas sejam as primeiras, então

$$\tilde{B} = [B \quad B^r] \quad (63)$$

onde  $B$  e  $B^R$  verificam as condições

$$i) Bu = 0 \quad \text{só se } u = 0 \quad (64)$$

$$ii) B^R = BU \quad \text{com } U_{.j} \neq 0 \quad (65)$$

sendo  $U_{.j}$  a coluna  $j$  da matriz  $U$ .

Esta decomposição da matriz  $\bar{B}$  define o vetor de deslocamentos duais rígidos  $u^R$  e as correspondentes reações  $F^R$ , tais que

$$\bar{F} = [F \quad F^R]^T ; \quad \bar{u} = [u \quad u^R]^T . \quad (66)$$

Conseqüentemente, a cinemática obtida na dualização da condição de equilíbrio não reduzida, descrita em termos do vetor  $\bar{u}$  contém graus de liberdade de corpo rígido, as componentes de  $u^R$ . Estes devem ser eliminados para se obter um problema bem condicionado, o que significa que, por exemplo, se consegue solução única na fase elástica do carregamento.

A decomposição da matriz  $\bar{B}$ , que determina  $B$ ,  $B^R$  e  $U$ , permite também verificar a consistência das cargas prescritas. Com efeito, a equação de equilíbrio decomposta resulta

$$B^T T = F \quad ; \quad B^{RT} T = F^R \quad (67)$$

donde, pela aplicação da propriedade (ii), tem-se

$$U^T F = F^R . \quad (68)$$

Esta equação mostra que as reações prescritas  $F^R$  devem ser estaticamente compatíveis com as cargas livres prescritas  $F$ , ou caso contrário, o equilíbrio é impossível.

Finalmente, a identificação de graus de liberdade rígidos e a verificação de consistência das cargas podem ser realizadas mediante decomposições de Gauss, Q R, etc. da matriz  $\bar{B}$  [5].

#### Formulação Mista Discreta

O modelo misto pode ser construído a partir das seguintes interpolações

$$\bar{u} = Y_u u^i \quad \bar{\lambda} = Y_\lambda \lambda^i \quad \bar{T} = Y_T T^i \quad (69)$$

onde  $Y_u$ ,  $Y_\lambda$  e  $Y_T$  são os operadores de interpolação que são construídos através do Método dos Elementos Finitos. Substituindo-se (69) no princípio (27), tal formulação toma a forma

$$\max_{\Delta T} \min_{\Delta u, \Delta T} \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T - \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - N^T \Delta T \cdot \Delta \lambda + \Delta T \cdot B \Delta u - f_t \cdot \Delta \lambda - \Delta F \cdot \Delta u \right] \quad (70)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (71)$$

onde as matrizes,  $D^{-1}$ ,  $H$ ,  $N$ ,  $F$ ,  $f_t$  são dadas pelas relações (49), (51), (52), (37) e (55) e ainda

$$B = \sum_{i=1}^n L_T^{iT} B^i L_u^i \quad ; \quad B^i = \int_B Y_T^T \varnothing Y_u dB \quad (72)$$

#### MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELASTO-PLÁSTICO DISCRETO

Os problemas formulados na seção anterior podem ser solucionados através da utilização de diversas técnicas. Utilizou-se aqui um procedimento iterativo, para a solução de tal problema, que foi proposto por Feijóo e Zouain na referência [2].

#### Formulação Cinemática

O princípio de 2 campos introduzido na seção anterior consiste em

$$\min_{\Delta u, \Delta \lambda} \left[ \frac{1}{2} K \Delta u \cdot \Delta u - K_{u\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta u + \frac{1}{2} K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - f_t \cdot \Delta \lambda - \Delta F \cdot \Delta u \right] \quad (30)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

cujas condições de otimalidade são

$$K \Delta u - K_{\lambda u}^T \Delta \lambda - \Delta F = 0 \quad (73)$$

$$-K_{\lambda u} \Delta u + K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda - f_t \geq 0 \quad (74)$$

$$\{-K_{\lambda u} \Delta u + K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda - f_t\} \cdot \Delta \lambda = 0 \quad (75)$$

$$\Delta \lambda \geq 0 \quad (31)$$

O procedimento iterativo [2] consiste em, encontrar  $\Delta u$  tal que anule a função resíduo  $\psi(\Delta u)$ , onde

$$\psi(\Delta u) = K\Delta u - K_{\lambda u}^T \Delta \lambda - \Delta F \quad (76)$$

e  $\Delta \lambda$  é obtido, para um dado  $\Delta u$ , resolvendo-se para cada elemento o seguinte problema de complementaridade linear

$$(-K_{\lambda u}^e \Delta u^e + K_{\lambda \lambda}^e \Delta \lambda^e - f_t^e) \cdot \Delta \lambda^e = 0 \quad (77)$$

$$-K_{\lambda u}^e \Delta u^e + K_{\lambda \lambda}^e \Delta \lambda^e - f_t^e \geq 0 \quad \Delta \lambda^e \geq 0 \quad (78)$$

Para anular a função resíduo são usados, por exemplo, métodos iterativos do tipo quase-Newton. Para aplicação destes procedimentos somente é necessário conhecer a regra de obtenção do valor do resíduo para um dado  $\Delta u$ , não sendo necessário a obtenção de qualquer matriz "tangente", que não existe por ser  $\psi(\Delta u)$  não diferenciável.

### Formulação Estática

Através da dualização do princípio em dois campos  $(\Delta T, \Delta \lambda)$  apresentado na seção anterior

$$\max_{\Delta T, \Delta \lambda} \left[ -\frac{1}{2} D^{-1} \Delta T \cdot \Delta T - \Delta \bar{E} \cdot \Delta T - \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda \right] \quad (45)$$

$$\left| \begin{array}{l} B^T \Delta T = \Delta F + \Delta \bar{F}_a + \Delta \bar{F}_b \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left| \begin{array}{l} f_t + N^T \Delta T - H \Delta \lambda - \Delta \bar{R} \leq 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

onde as variáveis duais são interpretadas como as variáveis cinemáticas  $\Delta u$  e  $\Delta \lambda$ , chega-se a

$$\min_{\Delta u, \Delta \lambda} \left[ \frac{1}{2} K \Delta u \cdot \Delta u - K_{u \lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta u + \frac{1}{2} K_{\lambda \lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - \right. \\ \left. - (f_t - \Delta \bar{R} - N^T D \Delta \bar{E}) \cdot \Delta \lambda - (\Delta F + \Delta \bar{F}_a + \Delta \bar{F}_b + B^T D \Delta \bar{E}) \cdot \Delta u \right] \quad (79)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (81)$$

onde

$$K = B^T D B \quad K_{u\lambda} = B^T D N \quad K_{\lambda\lambda} = H + N^T D N . \quad (80)$$

O cálculo destas matrizes pode ser efetuado a nível de elemento[10], porque

$$L_T^{iT} L_T^j = 1 , \text{ se } i=j ; \quad L_T^{iT} L_T^j = 0 , \text{ se } i \neq j \quad (81)$$

resultando portanto

$$K = \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} K^i L_F^i \quad ; \quad K^i = B^{iT} D^i B^i \quad (82)$$

$$K_{u\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} K_{u\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{u\lambda}^i = B^{iT} D^i N^i \quad (83)$$

$$K_{\lambda\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^{iT} K_{\lambda\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{\lambda\lambda}^i = H^i + N^{iT} D^i N^i \quad (84)$$

$$f_t - \Delta \bar{R} - N^T D \Delta \bar{E} = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^{iT} (N^{iT} T^i - H^i \lambda^i - R^i - \Delta \bar{R}^i - N^i D^i \Delta \bar{E}^i) \quad (85)$$

$$\Delta F + \Delta \bar{F}_a + \Delta \bar{F}_b + B^T D \Delta \bar{E} = \sum_{i=1}^{n_e} L_F^{iT} (F^i + B^{iT} L_a^i T_a^i + S_b^i + B^{iT} D^i \Delta \bar{E}^i) \quad (86)$$

recaindo-se em um problema análogo ao encontrado na formulação cinemática (equação (30)), pode então ser utilizado o mesmo procedimento iterativo para resolvê-lo.

**Formulação Mista**

Reconhece-se no seguinte princípio de três campos

$$\max_{\Delta T} \min_{\Delta u, \Delta \lambda} \left[ -\frac{1}{2} D \Delta T \cdot \Delta T - \frac{1}{2} H \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - N^T \Delta T \cdot \Delta \lambda + B \Delta u \cdot \Delta T - f_t \cdot \Delta \lambda - \Delta F \cdot \Delta u \right] \quad (87)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

um problema de ponto de sela associado ao problema de mínimo

$$\min_{\Delta u, \Delta \lambda} [K \Delta u \cdot \Delta u - K_{u\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta u + \frac{1}{2} K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - f_t \cdot \Delta \lambda - \Delta F \cdot \Delta u] \quad (88)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

onde

$$K = B^T \mathbb{D} B \quad ; \quad K_{u\lambda} = B^T \mathbb{D} N \quad ; \quad K_{\lambda\lambda} = H + N^T \mathbb{D} N . \quad (89)$$

Os mesmos argumentos da seção anterior podem ser usados para justificar o cálculo destas matrizes a nível de elemento. Desta forma:

$$K = \sum_{i=1}^{n_e} L_u^{iT} K^i L_u^i \quad ; \quad K^i = B^{iT} \mathbb{D}^i B^i \quad (90)$$

$$K_{u\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_u^{iT} K_{u\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{u\lambda}^i = B^{iT} \mathbb{D}^i N^i \quad (91)$$

$$K_{\lambda\lambda} = \sum_{i=1}^{n_e} L_\lambda^{iT} K_{\lambda\lambda}^i L_\lambda^i \quad ; \quad K_{\lambda\lambda}^i = H^i + N^{iT} \mathbb{D}^i N^i . \quad (92)$$

Portanto, novamente recai-se em um problema análogo ao da formulação cinemática (equação (30)), utilizando-se para resolvê-lo o mesmo procedimento já descrito.

#### ELEMENTOS UTILIZADOS

Nesta seção serão apresentados os elementos mais simples para cada formulação e alguns derivados destes. Todos satisfazem a admissibilidade plástica correspondente, em tensão ou em deformação, identicamente em cada elemento.

#### Triângulo de Tensão Constante e Parâmetros Internos

Este elemento possui campo de tensões constante, impondo-se continuidade nas tensões normal e tangencial nas fronteiras entre elementos e externa. Os parâmetros de interpolação de tensão utili-

zados são as componentes nas direções globais. Para os fatores de plastificação, a interpolação adotada é constante no elemento e des contínua entre elementos. Desta forma

$$T^i = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T \tag{93}$$

$$Y_T = \mathbf{1} \tag{94}$$

$$S^i = [\sigma_1 \quad \tau_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_3]^T \tag{95}$$

$$B^i = \begin{pmatrix} c_1^2 & -c_1s_1 & c_2^2 & -c_2s_2 & c_3^2 & -c_3s_3 \\ s_1^2 & c_1s_1 & s_2^2 & c_2s_2 & s_3^2 & c_3s_3 \\ 2c_1s_1 & c_1^2-s_1^2 & 2c_2s_2 & c_2^2-s_2^2 & 2c_3s_3 & c_3^2-s_3^2 \end{pmatrix} \tag{96}$$

$$\lambda^i = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{n_f}]^T \tag{97}$$

$$Y_\lambda = \mathbf{1} \tag{98}$$

onde  $c_i = \cos \beta_i$ ,  $s_i = \sin \beta_i$ ,  $n_f$  é o número de modos de escoamento e  $\mathbf{1}$  é a identidade  $[3 \times 3]$ .

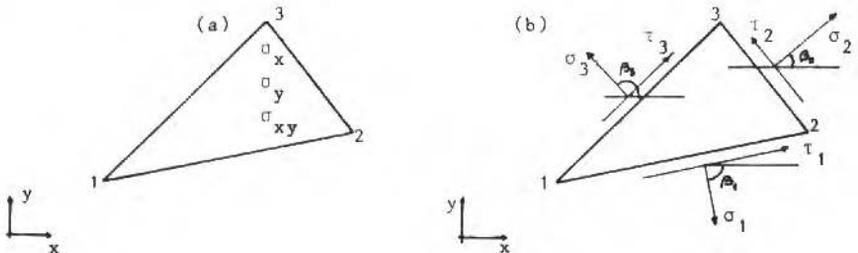


Figura 3. Triângulo de tensão constante e parâmetros internos  
 (a) Parâmetros de interpolação de Tensões  
 (b) Direções de imposição explícita do equilíbrio

Com as matrizes  $\hat{N}$ ,  $\hat{R}$  e  $\hat{D}$  adotadas (por exemplo, as apresentadas nas equações (16), (17) e (14), e as aproximações acima, obtém-se

as matrizes elementares  $N^i$ ;  $R^i$  e  $D^i$ , pelas relações (52), (53) e (49) que serão utilizadas na construção das matrizes elementares  $K^i$ ,  $K_{u\lambda}^i$ ,  $K_{\lambda\lambda}^i$ ,  $f_t^i$  e  $\Delta F^i$ , como mostram as expressões (82), (83), (84), (89) e (86).

Cabe salientar que as tensões normais e tangenciais prescritas na fronteira fornecem valores para as componentes do vetor  $F$  introduzido na equação (56).

### Triângulo de Tensão Constante e Parâmetros de Fronteira

Este elemento repete a interpolação anterior, porém, utiliza para parâmetros de interpolação de tensões, as tensões normais nas faces do triângulo. Comparado com o elemento introduzido no capítulo anterior, fornece idêntica aproximação com um número menor de parâmetros e equações. Assim:

$$T^i = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T \quad (99)$$

$$Y_T^i = (M^i)^{-1} \quad (100)$$

$$S^i = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^T \quad (101)$$

$$B^{iT} = G^i (M^i)^{-1} \quad (102)$$

onde

$$M^i = \begin{pmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2c_1s_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2c_2s_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2c_3s_3 \end{pmatrix} \quad (103)$$

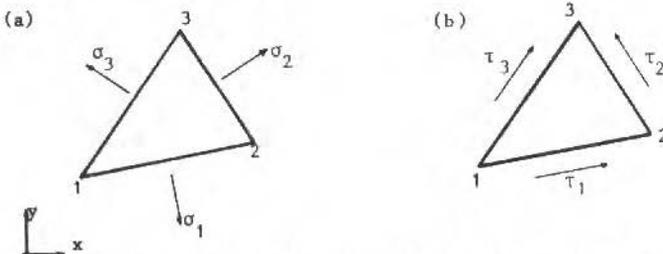


Figura 4. Triângulo de Tensão Constante e Parâmetros de Fronteira  
(a) Parâmetros de Interpolação de Tensões  
(b) Direções de imposição explícita do equilíbrio

$$G^i = \begin{pmatrix} -s_1 c_1 & s_1 c_1 & (c_1^2 - s_1^2) \\ -s_2 c_2 & s_2 c_2 & (c_2^2 - s_2^2) \\ -s_3 c_3 & s_3 c_3 & (c_3^2 - s_3^2) \end{pmatrix} \quad (104)$$

Salienta-se que as tensões normais prescritas formam o vetor  $T_a$  introduzido na equação (40), enquanto as tensões tangenciais contribuem no vetor  $F$  (equação (56)).

#### Quadrilátero Formado por Quatro Triângulos de Tensão Constante

Este elemento é composto por quatro triângulos de tensão constante e portanto, a aproximação é a mesma dos elementos anteriores. Através de uma condensação, reduz-se os oito parâmetros de interpolação de tensões e as oito equações de equilíbrio para cinco parâmetros e quatro equações, tornando assim esta implementação mais eficiente. Os parâmetros de tensão escolhidos são

$$T^i = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5]^T \quad (105)$$

e as direções de imposição de equilíbrio

$$S^i = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T \quad (106)$$

conforme figura 5a e 5b.

O campo de tensões no elemento pode ser dado por

$$\bar{T} = [\bar{T}^a \quad \bar{T}^b \quad \bar{T}^c \quad \bar{T}^d] \quad (107)$$

onde  $\bar{T}^a$ ,  $\bar{T}^b$ ,  $\bar{T}^c$  e  $\bar{T}^d$  são os campos nos triângulos a, b, c e d.

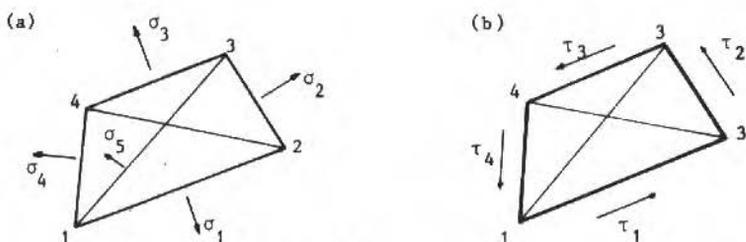


Figura 5. Quadrilátero formado por Quatro Triângulos de Tensão Constante. (a) Parâmetros de interpolação de tensões. (b) Direções de imposição explícita do equilíbrio

Precisa-se encontrar o operador  $Y_T^i$  tal que

$$\hat{T} = Y_T^i T^i \quad (108)$$

e a matriz de equilíbrio  $B^{iT}$  da relação

$$B^{iT} T^i = S^i . \quad (109)$$

Para tal, a partir das matrizes dos quatro elementos de tensão constante, parâmetros de fronteira (Capítulo anterior)

$$\hat{T}^\alpha = Y_T^\alpha T^\alpha ; \quad B^{\alpha T} T^\alpha = S^\alpha , \quad \text{com } \alpha=b,c,d,a \quad (110)$$

dadas pelas equações (100) e (102), pode-se obter o equilíbrio para o quadrilátero, ou seja

$$B^{QT} T = S \quad (111)$$

onde

$$B^{QT} = \sum_{\alpha=a}^d L_F^{\alpha T} B^{\alpha T} L_T^\alpha \quad (112)$$

$$T = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \quad \sigma_7 \quad \sigma_8]^T \quad (113)$$

$$S = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8]^T . \quad (114)$$

É importante observar aqui que dentre as quatro equações internas, isto é, continuidade da tensão tangencial nas diagonais, existem apenas três independentes. Em consequência, a condensação elimina quatro equações e três incógnitas.

Dentre as componentes de  $T$  e  $S$ , reconhecem-se elementos de  $T^i$  e  $S^i$ , e componentes que serão condensados ou eliminados, que agrupam-se nos vetores  $T^O$  e  $S^O$ . Assim

$$T = [T^i \quad T^O]^T ; \quad S = [S^i \quad S^O \quad \tau_8]^T \quad (115)$$

sendo

$$T^O = [\sigma_6 \quad \sigma_7 \quad \sigma_8]^T ; \quad S^O = [\tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7] \quad (116)$$

A equação (109) fica então

$$\begin{pmatrix} S^i \\ S^O \\ \tau_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_V^T & B_{VO}^T \\ B_{OV}^T & B_O^T \\ B_{8V}^T & B_{8O}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^i \\ T^O \end{pmatrix} \quad (117)$$

A imposição de equilíbrio interno,  $S^O=0$ , possibilita a condensação, resultando em

$$B^{iT} = B_V^T - B_{VO}^T (B_O^T)^{-1} B_{OV}^T \quad (118)$$

$$Y_T^i = Y_T^V - Y_T^C (B_O^T)^{-1} B_{OV}^T \quad (119)$$

onde  $Y_T^V$  e  $Y_T^C$  resultam de agrupamento similar ao anterior em  $Y_T^Q$ , ou seja,

$$Y_T^Q = \sum_{\alpha=a}^d L_T^{\alpha T} Y_T^\alpha = [Y_T^V \quad Y_T^C] \quad (120)$$

O tratamento das condições de fronteiras é idêntico ao do elemento anterior.

Um elemento análogo, utilizado por Dang Hung, foi proposto por De Veubeke [7].

### Triângulo de Deformação Constante

Este elemento possui campo de deslocamentos linear contínuo entre elementos e campo de multiplicadores plásticos constante e descontínuo entre elementos. A única restrição do princípio cinemático, a não negatividade de  $\Delta\lambda$ , é satisfeita em todo o elemento, pela restrição sobre os parâmetros de interpolação para  $\Delta\lambda$ . Os parâmetros de interpolação utilizados são os deslocamentos nodais nas direções globais. Desta forma

$$u^i = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]^T \quad (121)$$

$$DY_u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -Y_{3,2} & 0 & Y_{3,1} & 0 & -Y_{2,1} & 0 \\ 0 & X_{3,2} & 0 & -X_{3,1} & 0 & X_{2,1} \\ X_{3,2} & -Y_{3,2} & -X_{3,1} & Y_{3,1} & X_{2,1} & -Y_{2,1} \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$\lambda^i = [\lambda_1 \dots \lambda_{nf}]^T \quad (97)$$

$$Y_\lambda = 1 \quad (98)$$

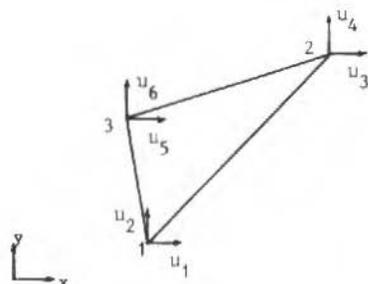


Figura 6. Triângulo de Deformação Constante

onde

$$X_{ij} = x_i - x_j \quad ; \quad Y_{ij} = y_i - y_j \quad (123)$$

Com as matrizes  $\hat{N}$ ,  $\hat{R}$  e  $\hat{D}$ , introduzidas anteriormente, e a aproximação (122), pode-se obter as matrizes  $K^i$ ,  $K_{u\lambda}^i$ ,  $K_{\lambda\lambda}^i$  e  $R^i$  pelas relações (32), (33), (34) e (36), necessárias para a solução do princípio de mínimo (30).

#### Quadrilátero Misto, com Tensão Constante e Deslocamento Bilinear

Adota-se para tensões e multiplicadores plásticos, aproximações seccionalmente constantes e descontínuas entre elementos, e para deslocamentos, seccionalmente bilineares e contínuas entre elementos.

Os parâmetros de interpolação são as componentes de tensão e os deslocamentos nodais nas direções globais e o valor do fator de plastificação no elemento. Desta forma

$$T^i = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T \quad (124)$$

$$Y_T = 1 \quad (125)$$

$$u^i = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8]^T \quad (126)$$

$$Y_u = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \quad (127)$$

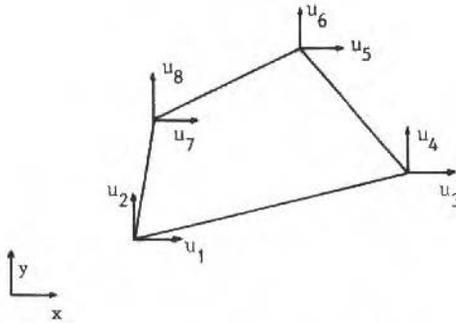


Figura 7. Quadrilátero Misto

onde

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.25(1+r)(1+s) & ; & & h_2 &= 0.25(1-r)(1+s) \\ h_3 &= 0.25(1-r)(1-s) & ; & & h_4 &= 0.25(1+r)(1-s) \end{aligned} \quad (130)$$

$r, s$ : as coordenadas naturais no intervalo  $[-1, 1]$ . Assim

$$\partial Y_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (131)$$

$$\lambda^i = [\lambda_1 \dots \lambda_{n_f}]^T \quad (97)$$

$$Y_\lambda = 1 \quad (98)$$

Substituindo-se as aproximações acima e as matrizes  $\bar{D}$ ;  $\hat{N}$  e  $\hat{R}$  nas relações (49), (52) e (72) possibilita a construção das matri-

zes elementares  $K^i$ ,  $K_{u\lambda}^i$  e  $K_{\lambda\lambda}^i$  em (90), (91) e (92) e assim pode-se resolver o princípio de mínimo (88).

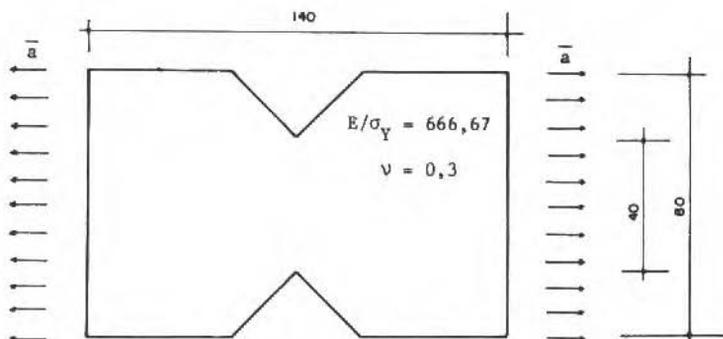


Figura 8. Placa com entalhe em V tracionada  
(medidas em milímetros)

#### APLICAÇÕES

Uma placa com entalhe em V é submetida a uma tração uniformemente crescente até o colapso. A equação constitutiva utilizada corresponde à linearização da função de escoamento de Tresca com 12 modos. Os resultados são apresentados nas Figuras 9 a 12.

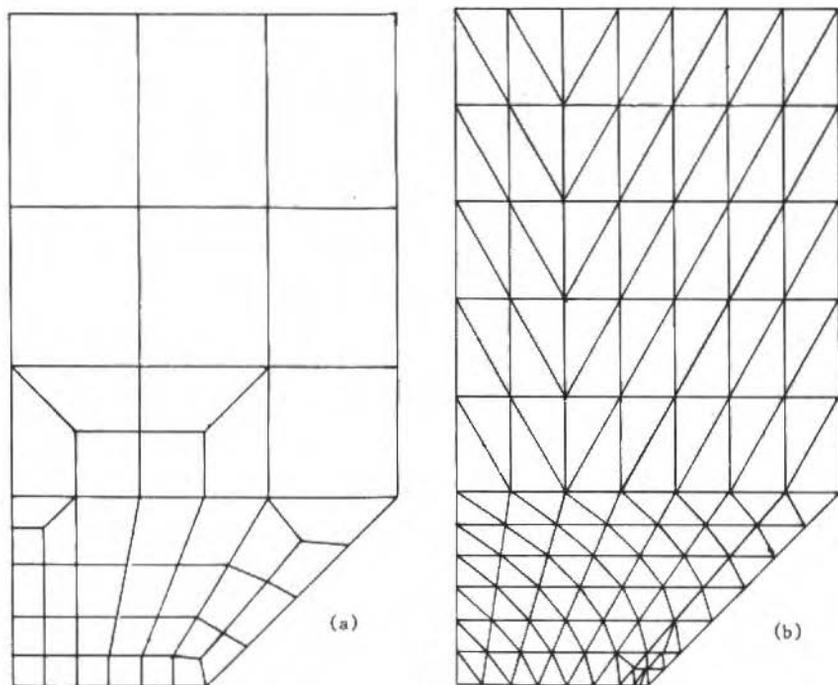


Figura 9. Malhas de Elementos Finitos utilizadas. (a) 42 quadriláteros formado por quatro triângulos de tensão constante (125 graus de liberdade). (b) 163 triângulos de deformação constante (182 graus de liberdade)

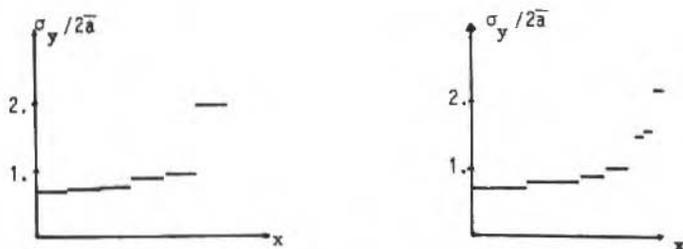


Figura 10. Distribuição das tensões axiais na seção do entalhe para as discretizações de equilíbrio e cinemática

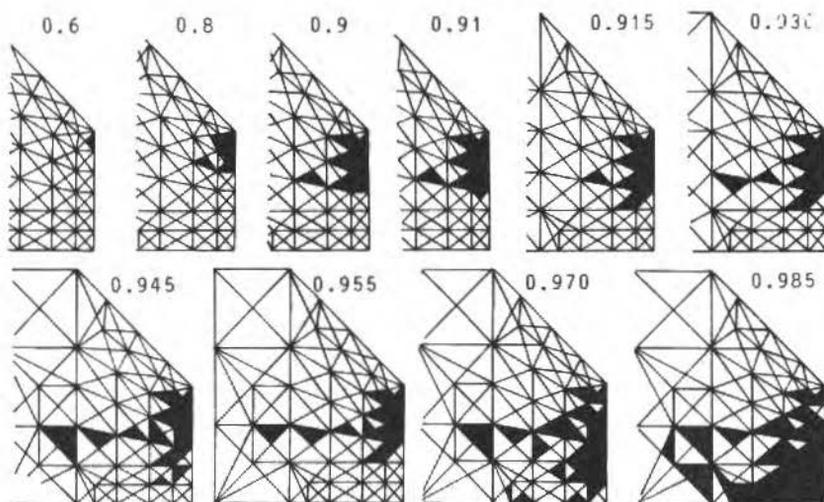


Figura 11. Evolução da plastificação para níveis crescentes de carga com a discretização de quadriláteros de equilíbrio. (Tresca-12 modos)

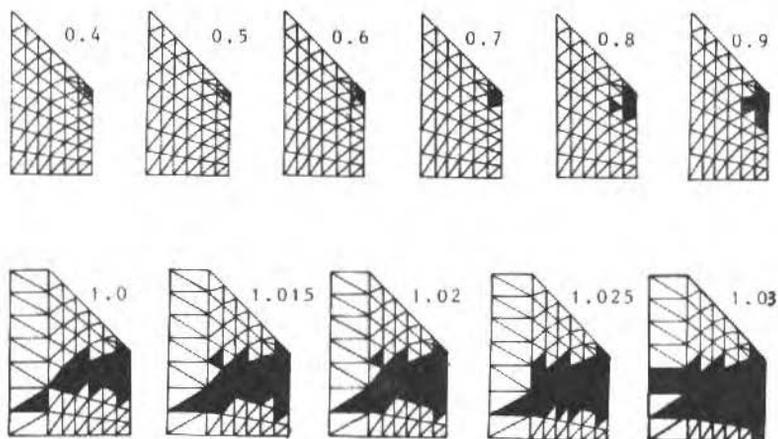


Figura 12. Evolução da plastificação para níveis crescentes de carga com a discretização de triângulos de deformação constante. (Tresca-linearização com 12 modos de escoamento)

## CONCLUSÕES

O desenvolvimento apresentado tem como justificativa principal mostrar, em uma forma compacta, os métodos de resolução, salientando-se passo a passo as aproximações introduzidas. Em particular, foram discutidas as discretizações do processo de carga e do contínuo e as aproximações na relação constitutiva. Note-se que cada uma destas contribuições foi apresentada isoladamente, permitindo-se uma melhor avaliação da sua influência. Os algoritmos numéricos surgem naturalmente quando identificada a estrutura do problema discreto. Um ponto que deve ser salientado, é que a formulação apresentada inclui a consideração de admissibilidade plástica e descarregamento elástico local, não necessitando para tal de correções adicionais. Além disso, no processo de solução não aparece a necessidade da utilização de alguma "matriz tangente", que no caso de elasto-plasticidade não existe já que a formulação em deslocamentos envolve um funcional não diferenciável. Os três enfoques formulados, a saber, o de equilíbrio, o cinemático e o misto, tem particularidades que podem ser aproveitadas em problemas específicos.

O modelo de equilíbrio, pouco usual na literatura, apresentou, no exemplo mostrado, melhores resultados com uma malha menos refinada. Na fase elástica, a concentração de tensões foi melhor detectada. A utilização conjunta com uma descrição cinemática, permitiu obter-se um intervalo seguro para a carga de colapso. Limites teóricos para a carga limite associada a função de escoamento seccionalmente linear utilizada, podem ser calculados a partir da solução analítica para a função de Mises [7,9].

É importante observar que, para calcular cargas limites, o método correto e mais eficiente consiste na aplicação da Teoria de Análise Limite, utilizando-se as mesmas aproximações. Este procedimento já foi implementado e está descrito na referência [1].

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Borges, L.; Zouain, N.; "Métodos de análise limite para modelos de conformação de metais", a ser publicado.
- [ 2 ] Feijóo, R.; Zouain, N.; "Formulations for rates and increments for elastic-plastic analysis", aceito para publicação no Int. J. for Numerical Methods in Engineering.

- [ 3 ] Feijóo, R.; Zouain, N.; "Variational formulations for rates and increments in plasticity"; Proc.Int.Conf. Computational plasticity;Eds. D.R.J. Owen, E. Onate, Barcelona, 1987.
- [ 4 ] Gouvea, J.; "SDP: Um sistema computacional para desenvolvimento de programas baseados no MEF", Tese de doutorado, Deptº Eng. Mecânica, PUC/RJ, 1986.
- [ 5 ] Kaneko, I.; Lauro, M.; Thierauf, G.; "On computational procedures for the force method", Int.J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, 1982.
- [ 6 ] Maier, G.; "Quadratic programming and theory of elastic perfectly-plastic structures", Mecanica nº 4, 1968.
- [ 7 ] Massonet, Ch., "Fundamentals and some civil engineering applications of the theory of plasticity", CISM Courses and Lectures nº 241, Springer Verlag, 1979.
- [ 8 ] Panagiotopoulos, P.D., "Inequality problems in mechanics and applications", Birkhäuser, Boston, 1985.
- [ 9 ] Nayak, G.C.; Zienkiewicz, O.C., "Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening", Int.J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 5, 1972.
- [ 10 ] Zouain, N.; Borges, L.; Hecke, M., "A force method for elastic-plastic analysis of frames by quadratic optimization, Int.J. of Solids and Structures, vol. 24, nº 2, pp. 211-230, 1988.

## A PARAMETRIC ANALYSIS OF MOISTURE MIGRATION IN POLYMERS

Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM

Sergio Colle – Membro da ABCM

Rinaldo Puff

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Engenharia Mecânica

### ABSTRACT

Migration of moisture in polymers subjected to concentration and temperature gradients was investigated numerically. This work was motivated by the moistening problem which may occur in junctions of electrical cables operating submerged. Conservation equations describing heat and moisture migration were simplified considering the properties to be constant, and were written in dimensionless form. The results were presented as a function of a geometrical parameter, and the Posnov number. The Posnov number compares the importance of the concentration gradient to that of the temperature gradient in driving the water movement within the resin. From the results the variation with time of the moisture profile in the resin could be obtained. For the PIRELLI-382 polyurethane resin it was shown that the steady state is reached after a period of approximately 3.5 years. Furthermore, during steady state, the moisture content at the surface of the cable in operation is around 8%.

### RESUMO

A migração de umidade em polímeros submetidos a gradientes de temperatura e concentração é investigada numericamente. O presente trabalho foi motivado pelo problema de umedecimento que pode ocorrer em junções de cabos elétricos que operam submersos. As equações de balanço associadas a migração de calor e umidade foram simplificadas considerando propriedades constantes, e foram escritas em forma adimensional. Os resultados são apresentados como função de um parâmetro geométrico, e do número de Posnov. O número de Posnov compara a importância entre os gradientes de concentração e temperatura no movimento da água no interior da resina. A partir dos resultados a variação com o tempo do perfil de umidade na resina pode ser obtida. Para a resina poliuretana PIRELLI-382 foi mostrado que o regime permanente é alcançado depois de um período de aproximadamente 3,5 anos. Em regime permanente, o conteúdo de umidade na superfície do cabo quando o mesmo estiver em operação é em torno de 8%.

**NOMENCLATURE**

|            |   |
|------------|---|
| $D_T$      | Diffusion coefficient associated with temperatura gradient  |
| $D_W$      | Difusion coefficient associated with moisture gradient  |
| $J$        | Total flux, equation (A.8)  |
| $j$        | Moisture flux, equation (1)   |
| $k$        | Thermal conductivity  |
| $\dot{M}$  | Velocity of moisture front, equation (A.7)  |
| $Pn$       | Posnov number, equation (15)  |
| $R$        | Dimensionless radial coordinate, $r/R_1$  |
| $R_1$      | Radius of cable, Fig. 1   |
| $R_2$      | External radius of resin, Fig. 1  |
| $r$        | Radial coordinate   |
| $S$        | Dimensionless moisture content, $W/W_S$   |
| $\bar{S}$  | Dimensionless moisture accumulated in region bounded by $\xi_{\zeta+\Delta\zeta}$ and $\xi_{\zeta}$ |
| $T$        | Temperature   |
| $T_C$      | Cable temperature   |
| $T_W$      | Temperature of water that surrounds resin   |
| $t$        | Time  |
| $\Delta t$ | Time interval   |
| $W$        | Mass of water per mass of dry polymer   |
| $W_S$      | Mass of water at saturation per mass of dry polymer   |
| $\bar{W}$  | Moisture accumulated in region bounded by $\xi_{t+\Delta t}^*$ and $\xi_t^*$                        |

**Greek Symbols**

|              |  |
|--------------|--|
| $\eta$       | Transformed radial coordinate, equation (20)               |
| $\Delta\eta$ | Dimensionless width of control volume, Fig. A.1            |
| $\theta$     | Dimensionless temperature, equation (14)                   |
| $\xi$        | Dimensionless radial location of moisture front, $\xi^*/R$ |
| $\xi^*$      | Radial location of moisture front                          |

|               |                                  |
|---------------|----------------------------------|
| $\rho_d$      | Density of dry polymer           |
| $\zeta$       | Dimensionless time, equation (8) |
| $\Delta\zeta$ | Dimensionless time interval      |

### Subscripts

|                     |                                     |
|---------------------|-------------------------------------|
| E                   | At location E according to Fig. A.1 |
| e                   | At location e according to Fig. A.1 |
| P                   | At location P according to Fig. A.2 |
| t                   | At time t                           |
| t+ $\Delta t$       | At time t+ $\Delta t$               |
| W                   | At location W according to Fig. A.1 |
| w                   | At location w according to Fig. A.1 |
| $\xi, \xi^*$        | At moisture front                   |
| $\zeta$             | At time $\zeta$                     |
| $\zeta+\Delta\zeta$ | At time $\zeta+\Delta\zeta$         |

### Superscript

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| * | At time $\zeta$ , in Appendix A |
|---|---------------------------------|

### Special Symbol

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| $\  A, B \ $ | Largest of A and B |
|--------------|--------------------|

### INTRODUCTION

The present work deals with the migration of moisture in polymers subjected to concentration and temperature gradients. This investigation was motivated by a better understanding of the absorption of water that, under certain circumstances, may occur in polymers used to envelop junctions of electrical cables that operate immersed in water.

Water absorption of polymer cause substantial change on its

electrical and mechanical properties, and considerable attention has been given to this problem. For a review of some relevant work on polymer permeability one may refer to [1-7].

Polymers in contact to a humid environment adsorb water. Initially the water molecules are adsorbed on its surface and, subsequently, the molecules migrate through the material. The penetration of water into a polymer is facilitated by the fact that water molecules are  $10^2$  to  $10^4$  times smaller than polymer molecules. The transport of water in polymers occur by diffusion, and in the present work, it is assumed to be governed by Fick's fundamental law of diffusion.

In the presence of a temperature gradient opposing to the concentration gradient, the tendence of water to move from regions of high moisture content to regions of low moisture content is counteracted by the tendence of water to move in the direction of the heat flow. In the analyais that follows, the diffusion of moisture in the direction of the heat flow is taken to be proportional to the temperature gradient.

In view of the previous discussion, the net flow of water in polymers subjected to concentration and temperature gradients is obtained by superimposing the two aforementioned driving potentials, that is, temperature and moisture content. Mathematically, this can be written as

$$j = -\rho_d (D_W \nabla W + D_T \nabla T) \quad (1)$$

where  $j$  is the moisture flux,  $\rho_d$  is the density of the dry polymer,  $W$  is the mass of water per mass of dry polymer,  $T$  is temperature, and  $D_W$  and  $D_T$  are, respectively, the diffusion coefficients related to the gradient of  $W$  and  $T$ .

In the sections that follow, the constitutive expression for diffusion of water in polymers given by equation (1) will be applied to a specific problem. Even though the case under consideration is intended to model the migration of water in the insulation of submerged electrical cables, the solution methodology to be presented can also be applied to other branches of polymer permeability.

The analysis to be presented is to be understood as an engineering approach of the problem, and should only be employed as

a first approximation of moisture migration in polymers in the presence of temperature and concentration gradients.

#### FORMULATION OF THE PROBLEM

A schematic representation of the problem to be investigated here is presented in Fig. 1. This figure shows a cross sectional view of an electrical cable surrounded by a thick layer of a thermoplastic material (shown speckled). The cable and the resin are immersed in water at temperature  $T_w$ . The cable temperature is  $T_c$ .

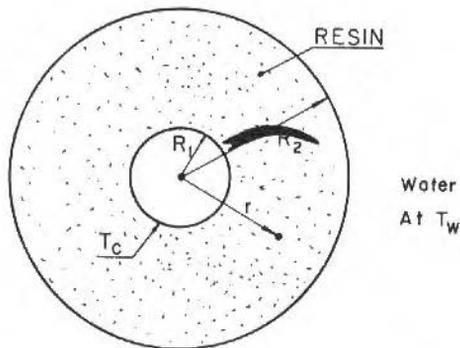


Figure 1. Schematic representation of the problem

At the beginning of the simulation the resin is completely dry, and its temperature has a initial value of  $T_1$ . As time passes, the moisture starts to migrate in the direction of the cable. Simultaneously, the temperature field starts to accommodate to the boundary conditions.

The moisture content in the resin is governed by the mass conservation requirement which is given by

$$\rho_d \frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \cdot j \quad (2)$$

or, substituting equation (1) into equations (2),

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \cdot (D_w \nabla W + D_T \nabla T) \quad (3)$$

For the temperature distribution in the resin, the energy conservation law requires that

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4)$$

where  $\rho$ ,  $c$ , and  $k$  are, respectively, the density, specific heat, and thermal conductivity of the resin.

In this simulation it is assumed that the development of the moisture field in the resin lags well behind the development of the temperature field, and that the thermal conductivity  $k$  does not vary with  $W$  or  $T$ . Therefore, for the calculation of  $W$ , the temperature field is taken to be developed and equation (4) becomes simply

$$\nabla^2 \cdot T = 0 \quad (5)$$

With this equation for  $T$ , equation (3) can be simplified to

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \cdot (D_W \nabla W) \quad (6)$$

Now, considering that the problem is one dimensional in the radial direction, equation (6) can be written as

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (D_W r \frac{\partial W}{\partial r}) \quad (7)$$

The diffusion coefficient  $D_W$  depends on  $T$  and  $W$  according to particular laws for each material. Therefore, solutions, that consider the variation of  $D_W$  with  $T$  and  $W$  are restricted to specific situations. The present analysis seeks a general understanding of the problem which can be used as a first approximation to practical situations. To this extent, the solution here will be obtained using dimensional analysis, and  $D_W$  will be held constant.

Equation (7) will be made dimensionless by the following change of variables

$$\zeta = \frac{D_W t}{R_2^2} \quad , \quad R = \frac{r}{R_2} \quad , \quad S = \frac{W}{W_S} \quad (8)$$

where  $W_s$  is the value of  $W$  corresponding to saturation.

The moisture conservation equation now takes on the form

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial S}{\partial R} \right) \tag{9}$$

Attention is next turned to the boundary conditions for equation (9). At  $R=1$ ,

$$S = 1 \tag{10}$$

For the other boundary condition it should be noted that, initially, the resin is completely dry, and as time passes, the moisture moves towards the center of the cable. To facilitate the description of the boundary condition at the location of the moisture front, Fig. 2 was prepared. The figure shows the location  $\xi^*$  of the moisture front at time  $t$  and  $t+\Delta t$ . At the moisture front the moisture content is zero and the moisture flux is given by equation (1). The moisture  $\bar{W}$  accumulated in the region bounded by the lines  $\xi_t^*$  and  $\xi_{t+\Delta t}^*$  is equal to the moisture that crosses the solid line in Fig. 2 during the interval  $\Delta t$ . Therefore, it can be written that, at  $r = \xi_t^*$ ,

$$j = \rho_d \bar{W} \frac{d\xi^*}{dt} \tag{11}$$

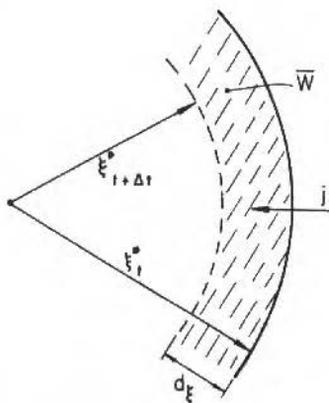


Figure 2. Moisture front location at two different times for boundary condition evaluation at the moisture front

Equation (11) is an approximate expression for the boundary condition at the moisture front which is suitable for the numerical solution employed in the present work. As will be explained later, equation (11) will be used to determine  $\xi^*$ . It can be shown that the exact expression for the calculation of  $\xi^*$  is given by,

$$j \Big|_{r=R_2} = \int_{\xi^*(t)}^{R_2} \rho_d \frac{\partial W}{\partial t} dr \quad (11a)$$

Even though equation (11a) is exact, its use is made difficult by the fact that the unknown  $\xi^*$  appears implicitly in the integration limit.

Now, making use of equation (1), equation (11) can be written as,

$$\bar{W} \frac{d\xi^*}{dt} = -D_W \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{\xi^*} - D_T \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\xi^*} \quad (12)$$

In terms of dimensionless variables, equation (12) becomes

$$\bar{S} \frac{d\xi}{d\zeta} = - \left( \frac{\partial S}{\partial R} \right)_{\xi} - Pn \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{\xi} \quad (13)$$

in which the following dimensionless variables were introduced,

$$\xi = \frac{\xi^*}{R_2} \quad \theta = \frac{T - T_W}{T_C - T_W} \quad (14)$$

and  $Pn$  is the Posnov number [8] defined as

$$Pn = \frac{D_T (T_C - T_W)}{D_W W_S} \quad (15)$$

Since the temperature field is assumed to be developed, the derivative  $(\partial \theta / \partial R)_{\xi}$  can be obtained from equation (5). A direct integration of this equation together with the appropriate boundary conditions yields

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{\xi} = \frac{1}{\xi \ln(R_1/R_2)} \quad (16)$$

Substituting equation (16) into equation (13) results,

$$\bar{S} \frac{d\xi}{d\zeta} = - \frac{Pn}{\xi \ln(R_1/R_2)} - \left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)_{\xi} \quad (17)$$

In addition to equation (17), the other boundary condition at  $R=\xi$  is

$$S = 0 \quad (18)$$

The prescription of two conditions at the interior boundary of the solution domain is a requirement in the formulation just presented. The reason for this is the existence of two dependent variables,  $\xi$  and  $S$ , both functions of  $\zeta$  and  $R$ . Equation (17) will be used to determine  $\xi$ , the inner boundary of the solution domain. The moisture content  $S$  will be determined from equation (9) and the boundary conditions given in equation (10) and (18). The calculation of  $\bar{S}$  which appears in equation (17) is explained in the Appendix A of the present work.

The formulation just described loses their validity beyond the time when the humidity front has reached the inner radius  $R_1$ . From then on moisture accumulates in the whole resin. During this period the boundary condition at  $R=R_1/R_2$  is no longer given by equation (17). Instead, the impermeability of the cable surface requires that  $j=0$ , that is

$$- \frac{Pn}{(R_1/R_2) \ln(R_1/R_2)} - \left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)_{R_1/R_2} = 0 \quad (19)$$

Equation (19) together with equation (10) are the two boundary conditions for equation (9), for times beyond that when  $\xi$  reaches the value  $R_1/R_2$ .

At this point the formulation of the problem has been completed. In addition to the geometric parameter  $R_1/R_2$ , there is only one parameter to be prescribed, the Posnov number  $Pn$ .

Attention will now be focused on the solution methodology employed to determine the moisture content  $S$  and the location  $\xi$  of moisture front.

**SOLUTION METHODOLOGY**

The solution domain of the present problem is the region bounded by the circles of radius 1 and  $\xi$ , where 1 is the dimensionless external radius of the resin, and  $\xi$  is the dimensionless location of the moisture front as shown in Fig. 3. As time passes the moisture front moves towards the center of the cable changing the solution domain. To avoid working with a solution domain that varies with time, the following coordinate is introduced,

$$\eta = \frac{R - \xi(\zeta)}{1 - \xi(\zeta)} \tag{20}$$

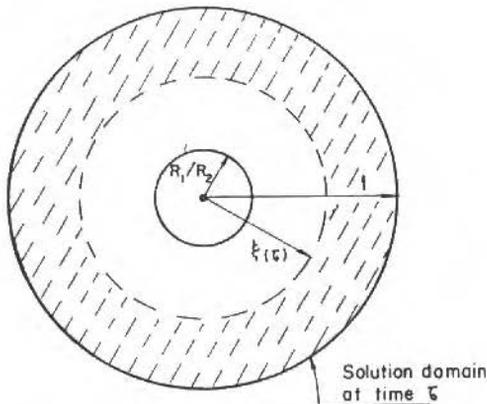


Figure 3. Solution domain of the problem at time  $\zeta$

It should be noted that  $\eta$  is a function of  $R$  and  $\zeta$ , and varies from 0 to 1. The use of  $\eta$  maps the physical domain into a new domain; the length of the transformed domain remains equal to 1, that is, unchanged with time.

To write equation (9), in terms of the new coordinate  $\eta$ , the following relations are needed

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right|_R = \left. \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right|_{\eta} + \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Big|_{\zeta} \frac{d\xi}{d\zeta} = \left. \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right|_{\eta} + \left( \frac{\eta - 1}{1 - \xi} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\zeta} \tag{21}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial S}{\partial R} \right)_{\xi} = \frac{1}{(1-\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_{\xi} \quad (22)$$

Substituting equations (21) and (22) into equation (9) results in

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} + \left( \frac{\eta-1}{1-\xi} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{1}{R(1-\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \quad (23)$$

The second term on the left hand side of equation (23) represents a pseudo convection associated with the movement of the moisture front. This term has no counterpart in equation (9). When the moisture front reaches the inner radius of the cable,  $d\xi/d\zeta$  becomes zero and the aforementioned convection term vanish.

The boundary conditions for equation (23) are  $S=0$  and  $1$  at  $\eta=0$  and  $1$ , respectively. The velocity of the moisture front  $d\xi/d\zeta$  is calculated using equation (13) written in terms of  $\eta$ ,

$$\bar{S} \frac{d\xi}{d\zeta} = - \frac{1}{(1-\xi)} \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} - \frac{Pn}{\xi \ln(R_1/R_2)} \quad (24)$$

As discussed earlier, for times beyond that when  $\xi$  reaches the radius of the cable  $R_1$ , the boundary condition at  $R=R_1/R_2$ , i.e.,  $\eta=0$ , is given by equation (19); in terms of  $\eta$  equation (19) becomes

$$- \frac{Pn}{(R_1/R_2) \ln(R_1/R_2)} - \frac{1}{(1-\xi)} \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0 \quad (25)$$

At this point the differential equation of the problem is ready to be integrated. This integration will be performed numerically and the method employed here is the finite volume approximation. Some highlights of this method will now be presented. For more details reference should be made to [9].

Initially the solution domain is subdivided in small non-overlapping control volumes. Next, equation (23) is integrated over each one of the control volumes. Details of this integration is presented in Appendix A of this work. Equation (23) is parabolic with respect to the variable  $\zeta$ , and a fully implicit scheme was adopted for the integration on  $\zeta$ .

From the integration of the differential equation results an

algebraic equation for each control volume in the solution domain. The set of all algebraic equations together with the boundary conditions were solved using the Tri-Diagonal Matrix Algorithm (see Appendix B).

The solution is obtained by starting with known values of  $S$  at  $\zeta=0$ . With this  $S$  field, the velocity of the moisture front,  $d\xi/d\zeta$ , is calculated using equation (24). The discretization form of equation (24) is also presented in Appendix A (equation (A.27)). Knowing  $d\xi/d\zeta$ , the location of the moisture front at  $\zeta+\Delta\zeta$  can be determined from

$$\xi_{\zeta+\Delta\zeta} = \xi_{\zeta} + \left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)\Delta\zeta \quad (26)$$

where  $\Delta\zeta$  is the time increment. With the new value of  $\zeta$ , and the value of  $d\xi/d\zeta$ , the discretization equations for the moisture  $S$  are solved to obtain the  $S$  field for time  $\zeta+\Delta\zeta$ . Next, this  $S$  field is used to calculate a new value of  $d\xi/d\zeta$ , and the procedure repeats, marching with time, until the steady state has been reached.

For the numerical computation, the moisture content equation was solved using 20 grid points in the region  $0 \leq \eta \leq 1$ . In the  $\zeta$  direction, the grid encompassed about 10000 points until steady condition was reached. Aside from the accuracy test involved with step size studies, comparison were made for the steady state condition with the analytical results. The computed steady moisture profiles agreed to within 0.1% with the analytical results.

The solution methodology described here, have recently been applied to a problem of moisture migration in an unsaturated porous medium [10].

## RESULTS AND DISCUSSION

The presentation of the results will be divided in two parts. In the first part, general results for the moisture migration will be shown and discussed seeking an overall understanding of the phenomenon. Next, will follow the presentation of the results for the specific problem that motivated the present work, that is, the migration of moisture in the PIRELLI - 382 polyurethane resin.

The first result to be presented is the variation of the moisture front location with time for various Posnov numbers. To this extent, Fig. 4 and 5 were prepared; Fig. 4 is for  $R_2/R_1=2$  and

Fig. 5 for  $R_2/R_1=4$ .

As seen from the figures, as time passes, the moisture front moves towards the center of the cable until steady condition is reached and  $\xi$  no longer varies. The depth to which moisture penetrates into the resin increases with decreasing values of  $P_n$ . This result can be rationalized by observing that the temperature gradient drives the water outward, whereas the moisture content gradient drives the water inward and that the Posnov number is a measure of how these two driving potentials compare to each other. For large values of  $P_n$  most of the resin remains dry, and for small  $P_n$  the hole resin gets wet.

Another feature of Fig. 4 and 5 is that, for  $P_n=1$ , the steady state is reached with  $\xi=R_1/R_2$ . This is an expected result, and will now be demonstrated.

The solution of equation (9) for steady state is

$$S = 1 - \frac{P_n}{\ln \xi} \ln R \quad (27)$$

From equation (27) it can be seen that the value of  $P_n$  that yields  $S=0$  at  $R=\xi=R_1/R_2$  is  $P_n=1$ . This results is independent of  $R_1/R_2$ .

For  $P_n < 1$  the moisture front hits the cable before steady state has been reached. The value of  $P_n=0$  corresponds to the situation in which there is no temperature gradient in the resin. From the figures it is seen that, as expected, the curve for  $P_n=0$  presents the steepest variation with time.

Figure 6 was prepared to show the variation with time of the dimensionless moisture content  $S$  at the cable surface. Results for five Posnov numbers are plotted in the figure. For  $P_n=0$  the steady state is reached when the whole resin is saturated, that is,  $S=1$ . This is so due to the absence of the temperature gradient to oppose the tendency of water to move from regions of high moisture content to regions of low moisture content.

For the steady state, the moisture content at  $r=R_1$  is related to the Posnov number through the following expression,

$$S \Big|_{r=R_1} = 1 - P_n \quad (28)$$

The previous expression is easily obtained from the steady state solution of equation (9).

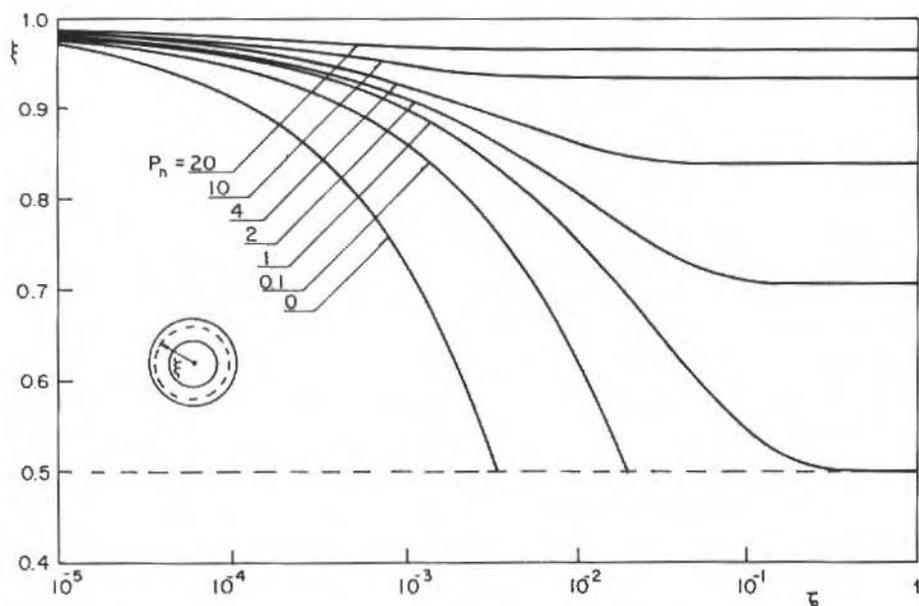


Figure 4. Variation of moisture front location with time for various Posnov numbers and for  $R_2/R_1=2$

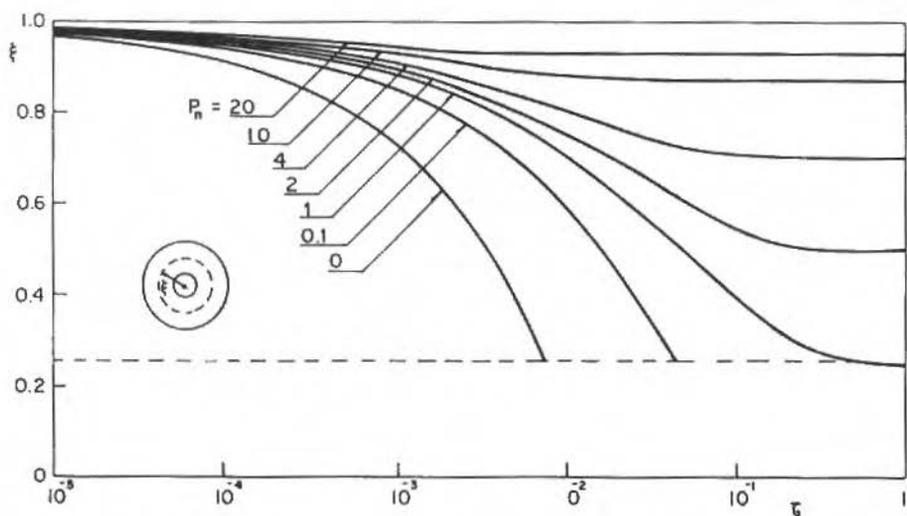


Figure 5. Variation of moisture front location with time for various Posnov numbers and for  $R_2/R_1=4$

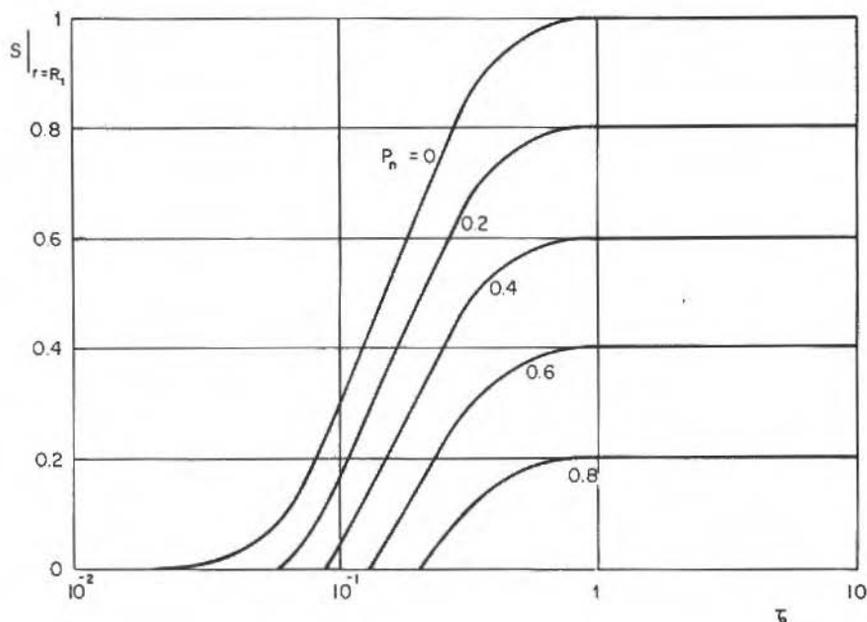


Figure 6. Moisture content at the cable surface plotted versus the dimensionless time for various Posnov number and  $R_2/R_1=4$

Profiles of the moisture content in the resin are presented in Figures 7 and 8. The parameter on the curve is the dimensionless time  $\zeta$ . Both figures are for  $R_2/R_1=4$ . Figure 7 is for  $P_n=0$ , and Figure 8 for  $P_n=0.5$ .

On overall examination of Figures 7 and 8 shows that, for times beyond that when the humidity front has reached the cable surface, the curves for  $P_n=0$  present different concavity than those for  $P_n=0.5$ . This feature of the moisture content profiles can be understood by returning to equation (19). From equation (19), the impermeability condition at the cable surface can be written as

$$\left. \frac{\partial S}{\partial R} \right|_{R_1/R_2} = \frac{P_n}{(R_1/R_2) \ln(R_2/R_1)} \quad (29)$$

In the absence of a temperature gradient,  $P_n=0$ , and  $\partial S/\partial R=0$  as seen in Figure 7. For  $P_n>0$ ,  $\partial S/\partial R>0$  which yields the profiles with negative concavity of Figure 8.

Attention will now be focused on the results for the migration of moisture in the PIRELLI-382 polyurethane resin. To apply the present analysis to a specific material, the transport coefficients  $D_W$  and  $D_T$  must be known. In what follows, these transport coefficients were obtained indirectly, using the results of the design-oriented experiment of Sanches [11].

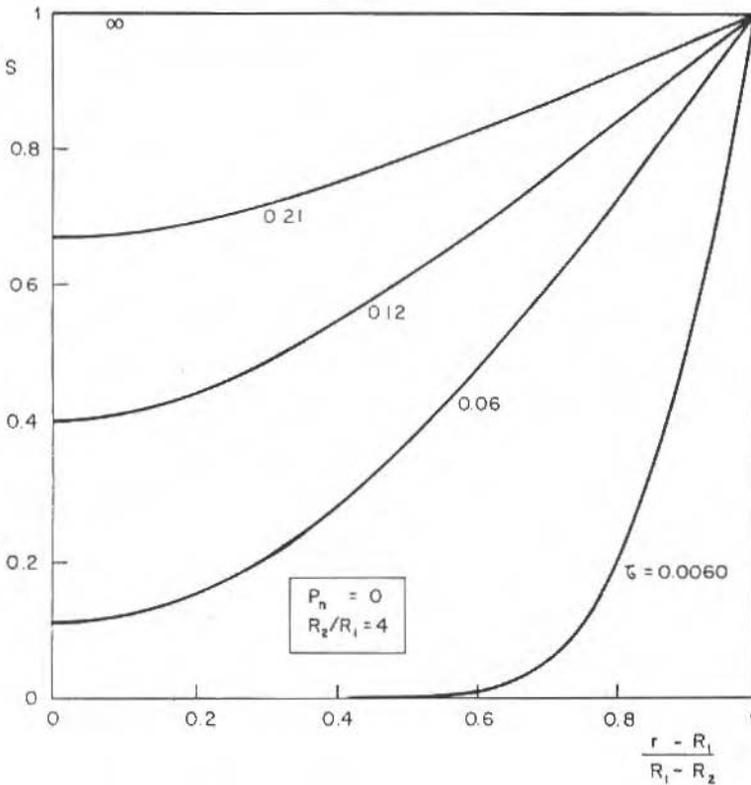


Figure 7. Local moisture content in the resin with time as parameter;  $P_n=0$  and  $R_2/R_1=4$

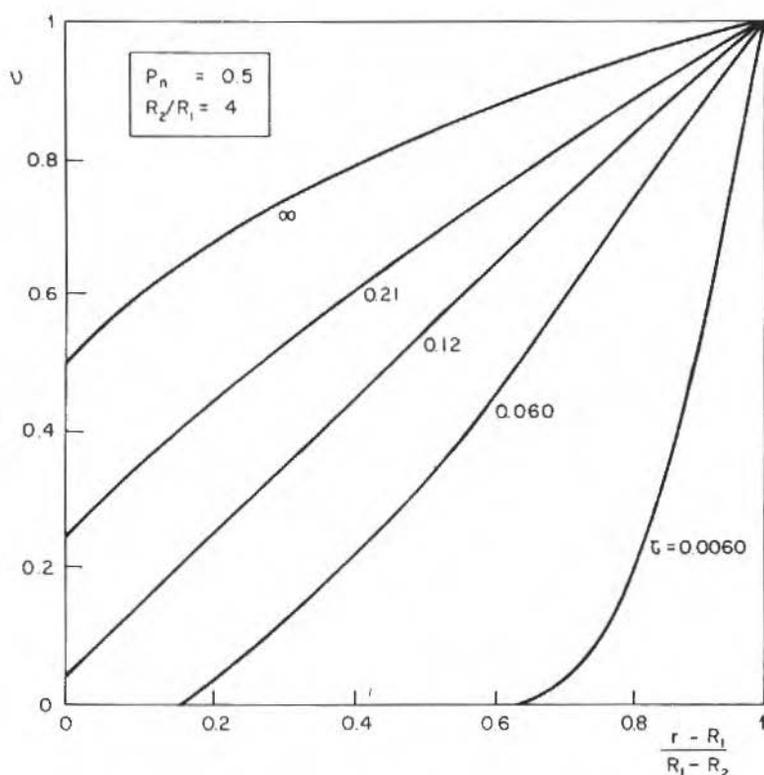


Figure 8. Local moisture content in the resin with time as parameter;  $P_n=0.5$  and  $R_2/R_1=4$

In his experiment, Sanches had two cables of the same dimension, and covered with the PIRELLI - 382 resin. Both cables were immersed in water at 25°C. One of the cables was heated and kept at constant temperature of 70°C. The other cable was not heated, and its temperature was the same of the water, that is, 25°C.

At the beginning of the experimental run, the cables with no water in the resins were immersed into water, and the run was started. After a period of 3100 hours, the moisture profile for both cables were measured. At  $R=R_1$ , it was found that the S value for the isothermal cable and the heated cable was, respectively, 0.28 and 0.11. From this, the transport coefficients could be obtained.

To determine  $D_W$  and  $P_n$  for the PIRELLI - 382 resin under consideration, the value of the Posnov number was set equal to zero (isothermal situation) and the numerical solution was performed, marching with time, until the  $S$  value at the cable surface reached 0.28, which happened for  $\zeta=0.0981$ . Next, from the values of  $\zeta$ ,  $R_2$ , and  $t$ ,  $D_W$  was calculated from equation (8) yielding

$$D_W = 1.2 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s} \quad (30)$$

For completeness it should be noted that the value of  $D_W$ , measured for a sample of the PIRELLI - 382 resin, ranged from  $10^{-11}$  to  $10^{-10}$  m<sup>2</sup>/s depending on temperature [11].

The next step was to determine the Posnov number. Knowing that for  $\zeta=0.0981$  the  $S$  value at the surface of the heated cable was 0.11, a try and error procedure furnished  $P_n=0.26$ .

In order to illustrate the variation with time of the moisture content at the surface of the cable for the PIRELLI - 382 resin, Fig. 9 was prepared. As seen from the figure it takes about 100 days for the moisture front to reach the surface of the cable, when the cable is in operation. The steady state for both

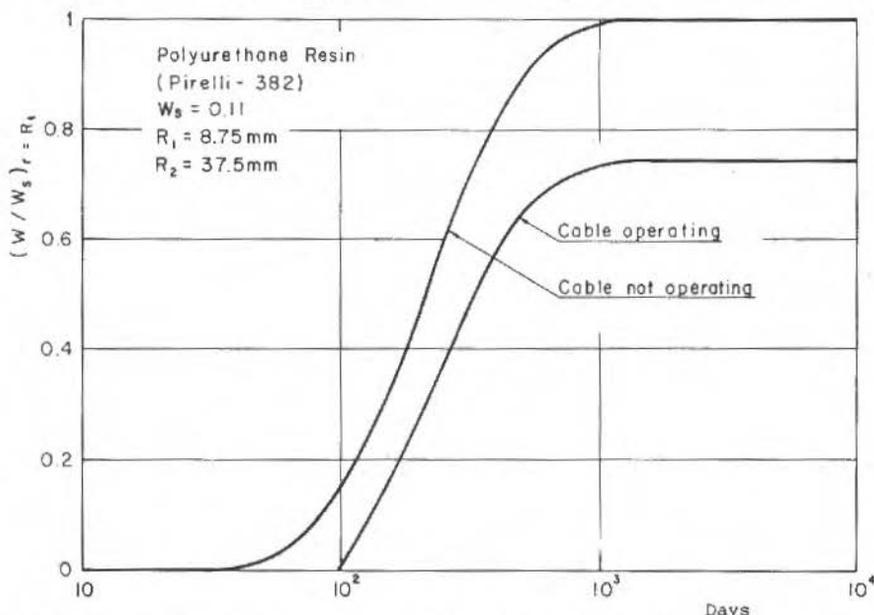


Figure 9. Moisture content at the cable surface as a function of time for the PIRELLI - 382 resin

situations shown in Fig. 9 is reached after a period of approximately 3.5 years. Furthermore, during steady state operation, the moisture content  $W$  at the surface of the heated cable is around 8%.

#### CONCLUSION

The present work has dealt with a parametric analysis of moisture migration in polymers, in presence of temperature and moisture content gradients. For the investigation, the solution domain was fitted in cylindrical coordinates, simulating the moistening problem which occurs in junctions of electrical cables operating immersed in water.

The governing equations were written in dimensionless form, and the solution were obtained assuming the properties to be constant. This method were adopted in order to obtain a general understanding of the problem, and can be used to provide approximate solutions for resins of different types. In this sense, the present analysis is an engineering approach of the problem, and should only be employed as a first approximation of moisture migration in polymers.

For the numerical solution use was made of an implicit finite difference procedure tailored to take account of the water movement in the resin. Results were obtained as a function of two parameters, the ratio  $R_2/R_1$  and the Posnov number  $Pn$ .

The depth to which moisture penetrates into the resin depends on the Posnov number. For high values of  $Pn$ , the presence of the temperature gradient dominates the migration of water, and most of the resin remains dry. On the contrary, for low values of  $Pn$  the influence of the moisture content becomes stronger and the whole resin gets wet.

When the present methodology was applied to the PIRELLI-382 polyurethane resin, it was found that it takes about 100 days for the moisture front to reach the surface of the cable, when the cable is transporting electrical current. During steady state, the moisture content at the surface of the heated cable is around 8%. This value is obtained after a period of approximately 3.5 years.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge gratefully the financial support provided by PIRELLI S.A. Cable Division, São Paulo, Brazil.

## REFERENCES

- [ 1 ] V. Maslov, Moisture and Water Resistance of Electrical Insulation, Mir Publishers, Moscow, 1979.
- [ 2 ] J. Crank and G.S. Park, Diffusion in Polymers, Academic Press, New York, 1968.
- [ 3 ] R. McGregor, Diffusion and Sorption in Fibers and Films, vol. 1, Academic Press, New York, 1974.
- [ 4 ] C.E. Rogers, Permeation of Gases and Vapors in Polymers, Chapter 2 of Polymer Permeability by J. Comyn, Elsevier Applied Science Publishers, London, 1985.
- [ 5 ] R.M. Felder and G.S. Huvar, Methods of Experimental Physics, Academic Press, New York, pp. 315-377, 1980.
- [ 6 ] S.A. Stern and H.L. Frisch, Annual Reviews of Material Science, vol. 11, pp. 223-250, 1981.
- [ 7 ] J. Mijovic, Polym. Composites, vol. 4, p. 73-80, 1983.
- [ 8 ] A.V. Luikov, Heat and Mass Transfer, MIR Publishers, Moscow, 1980.
- [ 9 ] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980.
- [10] L.S.D. Ferreira, Heat and Moisture Transfer in Unsaturated Porous Media (in Portuguese), M.ME. dissertation, Department of Mechanical Engineering, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 1987.
- [11] M.A.B. Sanches, Water Percolation in Polyurethane Resins (in Portuguese), Internal Report GLP/353/86, PIRELLI S.A., São Paulo.
- [12] D.B. Spalding, Int.J.Num. Methods Eng., vol. 4, pp. 551, 1972.

## APPENDIX A

## DISCRETIZATION OF THE MOISTURE EQUATION

In this appendix attention will be focused on the discretization of the moisture equation. As previously derived, the moisture conservation equation is given by

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} + \left(\frac{n-1}{1-\xi}\right) \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{1}{R(1-\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \quad (23)$$

The first step is to write equation (23) in a more appropriate form for the integration. To this extent it should be observed that

$$\left(\frac{n-1}{1-\xi}\right) \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left(\frac{n-1}{1-\xi}\right) \frac{d\xi}{d\zeta} S \right] - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{d\xi}{d\zeta} S \quad (A.1)$$

Substituting equation (A.1) into equation (23), and noticing that

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{d\xi}{d\zeta} S = \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} [(1-\xi)S] \quad (A.2)$$

it follows that

$$R \frac{\partial}{\partial \zeta} [(1-\xi)S] + R \frac{\partial}{\partial \eta} [(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} S] = \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \quad (A.3)$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} R \frac{\partial}{\partial \eta} [(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} S] &= \frac{\partial}{\partial \eta} [R(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} S] + \\ &+ (\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} S (1-\xi) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Utilizing equation (A.4), equation (A.3) can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} [R(1-\xi)S] + \frac{\partial}{\partial \eta} \{ R [(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} S - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial S}{\partial \eta}] \} = \\ = (\eta-1)(1-\xi) \frac{d\xi}{d\zeta} S \end{aligned} \quad (A.5)$$

or,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [R(1-\xi)S] + \frac{\partial}{\partial \eta} (RJ) = (1-\xi)\dot{M} S \quad (\text{A.6})$$

where

$$\dot{M} = (\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \quad (\text{A.7})$$

$$J = \dot{M} S - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial S}{\partial \eta} \quad (\text{A.8})$$

It should be noted that  $J$  is the total flux of  $S$  which is made up of the pseudo convection flux  $\dot{M} S$ , and the diffusion flux  $[-1/(1-\xi)](\partial S/\partial \eta)$ . As discussed in the main part of this work, the convection flux  $e$  related to the movement of the moisture front in the resin.

The moisture equation (A.6) is now ready to be integrated. This integration will follow the finite volume practice as described in [9]. To facilitate the discussion, reference will be made to the control volume depicted in Fig. A.1. This figure shows a typical control volume in the solution domain.

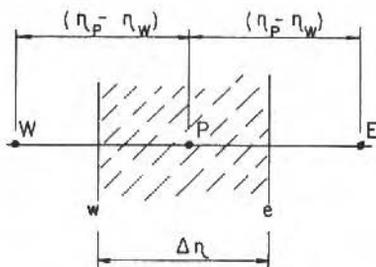


Figure A.1. Typical control volume for integration of the differential equation

The point  $P$  is located on the center of the control volume (shown shaded) and has width  $\Delta \eta$ . Also shown in Fig. are points  $W$  and  $E$ , the left (West) and right (East) neighbors of point  $P$ , respectively.

Equation (A.6) is now integrated over the control volume

shown in Fig. A.1, yielding

$$\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \zeta} [R(1-\xi)S] d\eta d\zeta + \int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} (RJ) d\eta d\zeta =$$

$$= \int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} \int_w^e (1-\xi)\dot{M}S d\eta d\zeta \quad (\text{A.9})$$

Performing the integrals, and adopting a fully implicit scheme for the integration on  $\zeta$ , it follows,

$$\{ [R_p(1-\xi)S_p] - [R_p(1-\xi)S_p]^* \} \Delta\eta + (R_e J_e - R_w J_w) \Delta\zeta =$$

$$= (1-\xi)\dot{M}_p S_p \Delta\eta \Delta\zeta \quad (\text{A.10})$$

Except for the term with superscript \*, which refers to time  $\zeta$ , all quantities in equation (A.10) refer to time  $\zeta+\Delta\zeta$ . The value of  $J_e$  and  $J_w$  are not known at this moment, and the next step is to estimate these quantities.

To estimate  $J_e$  it will be assumed that its value is constant between points P and E [12], that is

$$J = \dot{M} S - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial S}{\partial \eta} = \text{constant} \quad (\text{A.11})$$

Equation (A.11) will now be solved using the following boundary conditions,

$$\text{At } \eta = \eta_p + S = S_p \quad (\text{A.12})$$

$$\text{At } \eta = \eta_E + S = S_E$$

A direct integration of equation (A.11) together with the boundary conditions (A.12) yields

$$\frac{S - S_p}{S_E - S_p} = \frac{\exp[\dot{M}(1-\xi)(\eta - \eta_p)] - 1}{\exp[\dot{M}(1-\xi)(\eta_E - \eta_p)] - 1} \quad (\text{A.13})$$

Equation (A.13) can now be used to determine  $S_e$  and  $(\partial S / \partial \eta)_e$ ,

$$S_e = \left( \frac{\exp[\dot{M}_e (1-\xi) (\eta_e - \eta_P)] - 1}{\exp[\dot{M}_e (1-\xi) (\eta_E - \eta_P)] - 1} \right) (S_E - S_P) + S_P \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{(1-\xi)} \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_e = \left( \frac{\exp[\dot{M}_e (1-\xi) (\eta_e - \eta_P)]}{\exp[\dot{M}_e (1-\xi) (\eta_E - \eta_P)] - 1} \right) (S_E - S_P) \quad (\text{A.15})$$

The flux  $J_e$  can now be obtained by substituting equations (A.14) and (A.15) into equation (A.11). Similar procedure yields the flux  $J_w$ . From the values of  $J_e$  and  $J_w$  it follows that, after rearrangements,

$$R_e J_e - R_w J_w = (a_E + a_W + R_e \dot{M}_e - R_w \dot{M}_w) S_P + R_e \dot{M}_e - R_w \dot{M}_w \quad (\text{A.16})$$

Substituting equation (A.16) into equation (A.10), and noticing that

$$\begin{aligned} R_P (1-\xi) \Delta \eta - (1-\xi) \dot{M}_P \Delta \eta \Delta \zeta + (R_e \dot{M}_e - R_w \dot{M}_w) \Delta \zeta &= \\ &= R_P (1-\xi) * \Delta \eta \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

the following equation is obtained,

$$a_P S_P = a_E S_E + a_W S_W + a_P^* S_P^* \quad (\text{A.18})$$

where

$$a_E = \frac{R_e \dot{M}_e}{\exp[\dot{M}_e (1-\xi) (\eta_E - \eta_P)] - 1} \quad (\text{A.19})$$

$$a_W = \frac{R_w \dot{M}_w \exp[\dot{M}_w (1-\xi) (\eta_P - \eta_W)]}{\exp[\dot{M}_w (1-\xi) (\eta_P - \eta_W)] - 1} \quad (\text{A.20})$$

$$a_P^* = \frac{R_P (1-\xi) * (\eta_e - \eta_w)}{\Delta \zeta} \quad (\text{A.21})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^*$$

Since exponentials are expensive to compute, instead of working with the expressions of  $a_E$  and  $a_W$  as given by equations (A.19) and (A.20), the following approximations will be adopted,

$$a_E = \frac{R_E}{(1-\xi)(\eta_E - \eta_P)} \left\| \left\| 0, [1-0.1(1-\xi)(\eta_E - \eta_P) |\dot{M}_E|]^5 \right\| - \dot{M}_E \right\| \quad (\text{A.23})$$

$$a_W = \frac{R_W}{(1-\xi)(\eta_P - \eta_W)} \left\| \left\| 0, [1-0.1(1-\xi)(\eta_P - \eta_W) |\dot{M}_W|]^5 \right\| \right\| \quad (\text{A.24})$$

where the symbol  $\left\| \left\| \right\| \right\|$  stands for the largest of the quantities contained within it. The previous equations for the coefficients  $a_E$  and  $a_W$  yield results that are very close to the exact exponential scheme. These approximations are known as the power law scheme and were introduced by Patankar [9]. The power law scheme has been widely used in the numerical solution of problems involving convection and diffusion in fluid flow.

Equation (A.18) is the discretization form of the differential equation (23). The coefficients that appear in equation (A.18) depend on geometrical parameters and on the quantity  $\dot{M}$ . To calculate  $\dot{M}$  it is needed the velocity of the moisture front  $d\xi/d\zeta$ , which is obtained from equation (24). Attention now will be focused on the discretization form of equation (24).

Firstly it should be observed that equation (24) applies to the control volume adjacent to the moisture front. A representation of this control volume is shown in Fig. A.2.

The grid points shown in Fig. A.2 correspond to those at time  $\zeta + \Delta\zeta$ . Also shown in the figure is the location of the moisture front at time  $\zeta$ . The moisture accumulated in the region bounded by the lines  $\xi_{\zeta + \Delta\zeta}$  and  $\xi_{\zeta}$  is  $S_P$ , therefore,

$$\bar{S} = S_P \quad (\text{A.25})$$

By the definition of the moisture front,  $S_B = 0$ . Now the derivative  $(\partial S / \partial \eta)_{\eta=0}$  that appears in equation (24) can be written as

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{S_P}{(\Delta\eta/2)} \quad (\text{A.26})$$

Substituting equations (A.25) and (A.26) into equation (24), it follows

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -\frac{1}{S_p} \left( \frac{S_p}{(1-\xi)(\Delta\eta/2)} + \frac{P_n}{\xi \ln(R_1/R_2)} \right) \quad (\text{A.27})$$

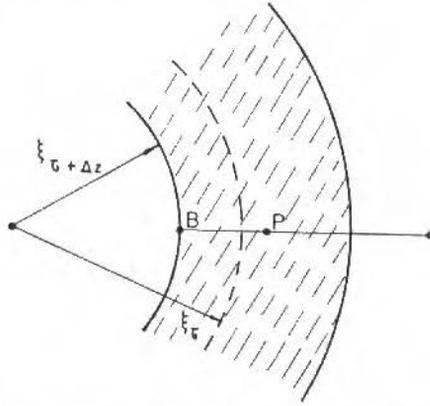


Figure A.2. Control volume adjacent to the moisture front

Equation (A.27) is the discretization form of equation (24) and is employed to calculate the velocity of the moisture front  $d\xi/d\zeta$ .

## APPENDIX B

## TRI-DIAGONAL MATRIX ALGORITHM

In this appendix it is summarized the algorithm used to solve the algebraic equations found in the present work. These equations are of the type of equation (A.18). For a detailed description of the TDMA reference should be made to [9].

1. For the first grid point  $i=1$ , calculate  $P(1)$  and  $Q(1)$  according to

$$P(1) = \frac{a_E(1)}{a_P(1)} \quad ; \quad Q(1) = \frac{a_P^*(1)S_P^*(1)}{a_P(1)} \quad (\text{B.1})$$

2. Calculate  $P(i)$  and  $Q(i)$  for  $i=2,3,\dots,N$  from

$$P(i) = \frac{a_E(i)}{a_P(i) - a_W(i)P(i-1)} \quad (\text{B.2})$$

$$Q(i) = \frac{a_P^*(i)S_P^*(i) + a_W(i)Q(i-1)}{a_P(i) - a_W(i)P(i-1)} \quad (\text{B.3})$$

3. Set  $S(N) = Q(N)$

4. Calculate  $S(N-1), S(N-2), \dots, S(2), S(1)$  from

$$S(N-i) = P(i-1)S(i) + Q(i-1) \quad (\text{B.4})$$

## **SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CALOR TRANSIENTE EM REGIÕES INFINITAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM DUPLA RECIPROCIDADE**

**Carlos Friedrich Loeffler**

IME - Seção de Engenharia Mecânica

**Webe João Mansur**

COPPE/UFRJ

Programa de Engenharia Civil

### **RESUMO**

O emprego da formulação de Elementos de Contorno com dupla reciprocidade é recente. Seus resultados mostraram-se satisfatórios nas aplicações realizadas para problemas transientes (propagação de ondas elásticas e de calor), de autovalor e com cargas de domínio. Neste trabalho apresenta-se uma extensão da técnica para abranger a solução de problemas transientes em meios infinitos. Com este propósito foi adotada uma função de interpolação com decaimento particular que limita a discretização apenas à região de interesse.

### **ABSTRACT**

The application of Boundary Element formulation that uses time-independent fundamental solutions to closed domains gives good results to several kinds of scalar potential problems, such as: eigenvalue, domain forces, transient heat conduction and wave propagation. In this paper is presented an extension of this formulation to infinite domains, analysing transient heat transfer.

## INTRODUÇÃO

Uma das características mais vantajosas do Método dos Elementos de Contorno em comparação com outros métodos numéricos consiste na simplicidade que oferece no tratamento de problemas de regiões in finitas. Nestes casos, devido à relação entre o decaimento da função de ponderação e o potencial envolvido, é possível estabelecer as denominadas condições de regularidade, permitindo limitar a discretização apenas ao contorno da região de interesse, que pode ser uma cavidade ou o bordo de um corpo imerso em meio infinito.

Com relação aos problemas transientes, o emprego do soluções fundamentais dependentes do tempo na formulação do Método dos Elementos de Contorno permite que sejam mantidas as mesmas vantagens observadas nas aplicações junto aos problemas estacionários. Dependendo do esquema de avanço escolhido, pode apenas ser necessário calcular integrais de domínio relativas a valores conhecidos [1,2].

Embora seja verificada a precisão e eficiência da formulação com solução fundamental dependente do tempo, a extensão da formulação que usa função de ponderação independente do tempo - dupla reciprocidade - para essa categoria de problemas, apresenta-se como opção interessante, em razão da sua extrema simplicidade, universalidade e baixo custo computacional.

Entretanto, essa abrangência requer condições especiais que não são exigidas na formulação quando da sua aplicação as diversas classes de problemas onde o domínio é limitado, cujos resultados foram satisfatórios [3]. Isto porque ao contrário da formulação com ponderação dependente do tempo, onde a solução fundamental, em razão do princípio de causalidade, acompanha o avanço da frente de onda rumo ao infinito, na técnica da dupla reciprocidade o sistema interage como um todo, requerendo o emprego de artifícios apropriados para limitação da discretização a um determinado setor do domínio.

Esses procedimentos incluem a adoção de funções de interpolação especiais, com elevado decaimento, que tornem desprezível a contribuição da integração ao longo do contorno infinitamente distante e simultaneamente representem bem as propriedades do sistema dentro da região de interesse, durante o intervalo de tempo necessário.

Para demonstrar a viabilidade da formulação, um exemplo representativo da condução de calor em um meio bidimensional infinito foi resolvido e seu resultado comparado com a respectiva solução analítica.

## O PROBLEMA ESTACIONÁRIO

A equação diferencial que governa uma ampla gama de problemas físicos escalares estacionários, incluindo-se a condução de calor em meios isotrópicos, é denominada equação de Laplace, cuja expressão é dada por:

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad (1)$$

onde  $u$  é o potencial, que representa a temperatura nesse trabalho.

De acordo com o procedimento do Método dos Elementos de Contorno a equação (1) é ponderada por uma função  $u^*(\xi; x)$ , denominada solução fundamental, e integrada sobre o domínio  $\Omega(x)$ , passando a ser expressa na forma:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(x) u^*(\xi; x) d\Omega(x) = 0 \quad (2)$$

A solução fundamental  $u^*(\xi; x)$  corresponde à solução de um problema correlato onde uma fonte concentrada  $\delta(\xi; x)$  é aplicada num domínio infinito, ou seja:

$$\nabla^2 u^*(x) = -\delta(\xi; x) \quad (3)$$

A resolução deste problema fornece:

$$u^*(\xi; x) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; x) \quad , \quad r = |\xi - x| \quad (4)$$

Procedendo-se a duas integrações por partes na equação (2) e utilizando-se o teorema de Green, pode-se escrever a equação integral do problema unicamente em termos de integrais de contorno [3]. A expressão resultante fica:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q(x) u^*(\xi; x) d\Gamma(x) = 0 \quad (5)$$

onde  $q^*(\xi; x)$  chamado fluxo fundamental, é dado por:

$$q^*(\xi; x) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; x)} \cdot \frac{\partial r(\xi; x)}{\partial n} \quad (6)$$

Admitindo-se  $\rho$  ser o raio de um círculo de contorno  $\Gamma_{\infty}(x)$ ,

centrado em  $\xi$  e infinitamente distante deste, envolvendo a região (ou regiões) de interesse, como mostra a figura 1, a equação (5) pode ser escrita para os contornos  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_\infty$ , na forma:

$$\begin{aligned} u(\xi) + \int_{\Gamma_0} u(x)q^*(\xi;x)d\Gamma_0(x) - \int_{\Gamma_0} q(x)u^*(\xi;x)d\Gamma_0(x) = \\ = \int_{\Gamma_\infty} q(x)u^*(\xi;x)d\Gamma_\infty(x) - \int_{\Gamma_\infty} u(x)q^*(\xi;x)d\Gamma_\infty(x) \end{aligned} \quad (7)$$

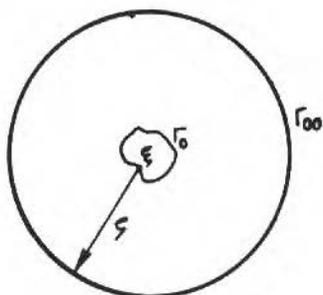


Figura 1. Região delimitada pelo círculo de raio  $\rho$  envolvendo uma cavidade

A equação do problema poderá restringir-se apenas ao contorno  $\Gamma_0$ , se a seguinte condição for satisfeita:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} [u^*(\xi;x)q(x) - q^*(\xi;x)u(x)]d\Gamma_\infty = 0 \quad (8)$$

Essa condição é obtida através do princípio de Saint-Venant, que afirma que para regiões suficientemente distantes do ponto de aplicação das sollicitações,  $u(x)$  e  $q(x)$  tomarão o mesmo comportamento da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada e à sua derivada, respectivamente. Pode-se, então, verificar que a equação (8) é satisfeita, pois as duas parcelas envolvidas se cancelam mutuamente quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Uma única exceção a esse comportamento surge quando a sollicitação aplicada for auto-equilibrada.

### O PROBLEMA TRANSIENTE

A equação que governa a transferência de calor transiente em um meio isotrópico e homogêneo é expressa por:

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (9)$$

onde  $u$  é a temperatura,  $t$  é o tempo e  $k$  é a condutividade térmica, considerada independente das demais grandezas. Em função do caráter transiente do problema, além das condições de contorno normalmente estabelecidas para regime estacionário, são definidas também condições iniciais tais que:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (10)$$

em todo o domínio  $\Omega(x)$ .

A formulação integral da equação (9), de acordo com o Método dos Elementos de Contorno, expressa-se por:

$$u(\xi, t) + \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi; x) d\Gamma(x) + \\ - \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi; x) d\Gamma(x) = \frac{1}{k} \int_{\Omega} \dot{u}(x, t) u^*(\xi; x) d\Omega(x) \quad (11)$$

onde o lado direito da equação (11) se compõe de uma integral de domínio. O método da dupla reciprocidade objetiva substituir essa integração no domínio por integrações no contorno. Para tanto representam-se as taxas de potencial por um somatório de funções na forma [3, 4, 5]:

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\alpha}^j(t) F^j(x) \quad (12)$$

Introduzindo-se uma função  $\psi^j(x)$ , que é uma primitiva de  $F^j(x)$ , tal que:

$$\psi^j_{,ii}(x) = F^j(x) \quad (13)$$

A expressão resultante fica sendo dada por (4):

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t) + \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi; x) d\Gamma(x) = \\
 = \frac{\dot{a}^j(t)}{k} \left[ \psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} \psi^j(x) q^*(\xi; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \eta^j(x) u^*(\xi; x) d\Gamma(x) \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\eta^j(x) = \frac{\partial \psi^j(x)}{\partial n} \quad (15)$$

Com relação ao lado esquerdo da equação (14), desde que sejam atendidas as condições de regularidade, as integrações ficam restritas ao contorno  $\Gamma_0$ ; tais condições, todavia, não atingem a parcela transiente da equação, que em princípio contém a contribuição do contorno infinitamente distante  $\Gamma_{\infty}$ .

A escolha da função  $F^j(x)$  poderia ser feita arbitrariamente. Entretanto, no caso do regiões infinitas, é através do estabelecimento adequado da função  $F^j(x)$  e suas derivadas que pode se tornar desprezível a contribuição das integrais relacionadas ao contorno  $\Gamma_{\infty}$ .

Adotando-se uma função  $F^j(x)$  na forma:

$$F^j(x) = \frac{2C_1 - r(A^j, x)}{(r(A^j, x) + C_1)^4} \quad (16)$$

onde  $C_1$  é uma constante arbitrária cujas implicações serão discutidas mais à frente;  $r(A^j, x)$  quantifica a distância euclidiana entre os pontos  $A^j$ , que determinam as funções de interpolação, e o contorno  $x$ .

A obtenção das demais funções é feita mediante a solução da equação (13), escrita a seguir em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 \psi^j(x)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^j(x)}{\partial r} = \frac{2C_1 - r(A^j, x)}{(r(A^j, x) + C_1)^4} \quad (17)$$

Foi considerada a independência de  $\psi^j(x)$  com relação a  $\theta$ . Soluções particulares da equação (17) fornecem:

$$\psi^j(x) = - \frac{(C_1 + 2r(A^j, x))}{2(r(A^j, x) + C_1)^2} \quad (18)$$

$$\eta^j(x) = \frac{r(A^j; x)}{(r(A^j; x) + C_1)^3} \frac{\partial r(A^j; x)}{\partial n} \quad (19)$$

O problema, então, resume-se a verificar se é possível que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} [\psi^j(x) q^*(\xi; x) - \eta^j(x) u^*(\xi; x)] d\Gamma_\infty(x) = 0 \quad (20)$$

Para problemas bidimensionais, tem-se que:

$$d\Gamma(x) = |J| d\phi, |J| = 0(R) \quad (21)$$

onde  $J$  é o Jacobiano. A ordem das demais funções envolvidas é:

$$u^*(\xi; x) = 0(R^0) \quad (22)$$

$$q^*(\xi; x) = 0(R^{-1}) \quad (23)$$

$$\psi^j(x) = 0(R^{-1}) \quad (24)$$

$$\eta^j(x) = 0(R^{-2}) \quad (25)$$

Observa-se, portanto, que as parcelas da equação (20) podem se anular separadamente, pois a ordem de cada uma delas é  $R^{-1}$ . Isto é conseguido desde que os pontos  $A^j$  e  $\xi$  sejam estabelecidos suficientemente distantes do contorno  $\Gamma_\infty$ , de modo a garantir que:

$$r(A^j; x) = |A^j - x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Gamma_\infty \quad (26)$$

$$r(\xi; x) = |\xi - x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Gamma_\infty \quad (27)$$

A obediência as equações (26) e (27) é plenamente possível, pois tanto os pontos  $A^j$  quanto os pontos  $\xi$  podem ser escolhidos arbitrariamente, de modo a ficarem próximos apenas da região de interesse  $\Gamma_0$ . Dessa forma, o limite posto pela equação (20) pode ser atendido e, da mesma forma que foi estabelecido para a parte estacionária da equação de equilíbrio (11), a parcela transiente fica representada apenas em termos de integrais no contorno  $\Gamma_0$ .

#### DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Para discretização da equação integral, considera-se o contorno  $\Gamma(x)$  dividido em elementos retos sobre os quais admite-se uma va-

riação dos parâmetros envolvidos no problema. Neste trabalho adotou-se um comportamento constante do potencial e sua derivada em cada elemento. Também considerou-se constantes os valores de  $\psi^j(x)$  e  $\eta^j(x)$ , embora tais funções possam ser calculadas exatamente; todavia, esse procedimento reduz consideravelmente o esforço computacional sem trazer qualquer prejuízo significativo à solução.

Dessa forma, após as operações necessárias [4], a eq. (14) pode ser matricialmente escrita como:

$$\underline{H} \underline{u} - \underline{G} \underline{q} = \frac{1}{k} [\underline{H} \underline{\psi} - \underline{G} \underline{\eta}] \underline{\dot{\alpha}} \quad (28)$$

O valor da função  $\dot{\alpha}$  pode ser obtido facilmente a partir da seguinte relação:

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{F}^{-1} \underline{\dot{u}} \quad (29)$$

Isto é possível desde que o número de pontos base para a função de interpolação ( $A^j$ ) seja igual ao número de pontos nodais. É bastante atraente computacionalmente que os pontos  $A^j$  coincidam com os próprios pontos nodais, embora não haja nenhuma obrigatoriedade nisto.

Cabe observar que a matriz  $\underline{F}$  é função apenas dos pontos nodais e  $A^j$ ; nenhum problema relacionado ao decaimento das funções está aí envolvido.

Definindo-se

$$\underline{C} = \frac{1}{k} [\underline{G} \underline{\eta} - \underline{H} \underline{\psi}] \underline{F}^{-1} \quad (30)$$

Chega-se à expressão matricial definitiva:

$$\underline{C} \underline{\dot{u}} + \underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{q} \quad (31)$$

### CARACTERÍSTICAS DA INTERPOLAÇÃO

A ordem das funções utilizadas para interpolação determina um forte decaimento à medida que o valor de  $r$  aumenta. Como tais funções interpolam as propriedades "inerciais" do sistema entre os pontos nodais e, principalmente, entre estes e todo o domínio, caso não sejam empregados valores adequados para a constante  $C_1$ , apenas um pequeno setor terá suas propriedades representadas adequadamente, ha

vendo forte redução nos valores das regiões restantes.

Um bom acompanhamento do processo transiente durante o tempo desejado pode ser feito adotando-se valores de  $C_1$  da seguinte ordem:

$$C_1 \geq 50 [k \cdot \Delta L \cdot T_t]^{1/3} \quad (32)$$

onde  $\Delta L$  é o comprimento do elemento de contorno utilizado e  $T_t$  é o tempo total de análise.

A figura 2 ilustra esquematicamente a representação das propriedades inerciais em função da constante  $C_1$ :

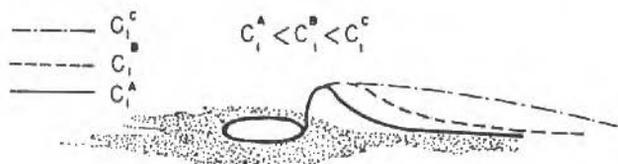


Figura 2. Decaimento das propriedades em função da constante  $C_1$

Um recurso adicional para melhoria da representação destas propriedades consiste no estabelecimento de pontos de interpolação adicionais no domínio, próximos à região de interesse. Em razão do domínio aumentar proporcionalmente com a distância  $r$  de afastamento da cavidade, no caso de regiões infinitas a utilização deste recurso é extremamente necessária. Também a técnica de sub-regiões pode ser empregada com essa finalidade obtendo-se resultados satisfatórios.

#### EXEMPLO

Com o propósito de avaliar o desempenho da formulação, foi analisada uma cavidade situada em meio infinito com fluxo de calor uniformemente aplicado em toda a sua borda. A figura 3 mostra as características físicas e geométricas do sistema bem como a discretização empregada.

Foram empregados 24 elementos de contorno e 24 pontos de interpolação adicionais. Os valores de temperatura ao longo do tempo na borda da cavidade foram comparados com a solução analítica correspondente, obtida por Carslaw e Jagger [6]. Os resultados são mostrados no gráfico da figura 4.

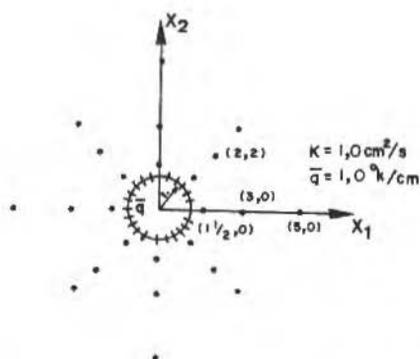


Figura 3. Características do problema

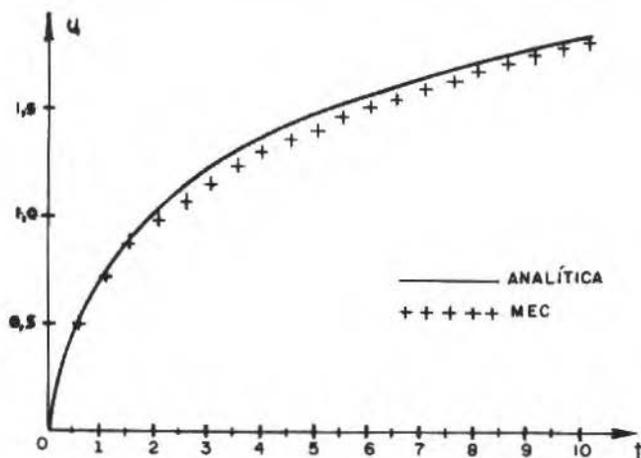


Figura 4. Valores de temperatura na borda ao longo do tempo

Nota-se a boa concordância entre os resultados obtidos com a formulação desenvolvida e a solução analítica. O valor de  $C_1$  foi tomado igual a 50, sendo que para valores maiores a curva altera-se muito pouco dentro do intervalo de tempo requerido.

## CONCLUSÕES

A possibilidade de se estender a formulação de dupla reciprocidade aos problemas de regiões infinitas estava além da sua expectativa inicial de utilização. Isto porque diferentemente dos problemas com domínio finito, são necessárias características especiais nas funções de interpolação para limitar a discretização unicamente ao contorno interno. Tais características introduzem aproximações que, entretanto, não prejudicam sensivelmente os resultados na região de interesse durante o período requerido para análise do transiente de resposta.

Para tempos de análise razoavelmente grandes, é provável surjam discrepâncias significantes que façam os resultados numéricos convergirem, de maneira artificial, mais rapidamente para o estado estacionário. Pouco precisos tornam-se, também, os valores do potencial em pontos afastados da cavidade.

Uma outra limitação da formulação refere-se aos casos em que as condições de regularidade não são obedecidas. Tal restrição não existe no caso da formulação que usa solução fundamental dependente do tempo.

De modo geral, todavia, a dupla reciprocidade mostra-se aplicável também aos problemas de regiões infinitas, oferecendo resultados com boa precisão, além de outras características relevantes, que credenciam-na como opção interessante e competitiva com outras formulações.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Mansur, W.J. & Brebbia, C.A., Further Development on the Solution of the Transient Scalar Wave Equation. Topics in Boundary Element Research, pp. 87-123, 1985.
- [ 2 ] Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques, Berlim, Springer-Verlag, 1984.
- [ 3 ] Loeffler, C.F. & Mansur, W.J., Uma Formulação Alternativa de Elementos de Contorno aplicada a Problemas de Campo, XXIV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, vol. 4, pp. 97-114, Porto Alegre, Julho 1987.

- [ 4 ] Loeffler, C.F. & Mansur, W.J., Aplicação do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Calor Transiente com Sub-Regiões utilizando Soluções Fundamentais Independentes do Tempo, VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, São Carlos, Novembro 1986.
- [ 5 ] Wrobel, L.C., The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Transient Heat Conduction, VI International Conference on Finite Elements in Water Resources, Lisbon, Portugal, June 1986.
- [ 6 ] Carslaw, H.S. & Jaegger, J.C., Conduction of Heat in Solids, London, Oxford University Press.

## MODELAGEM DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO DE CABOS SUBMARINOS

Heraldo Silva da Costa Mattos – Membro da ABCM

Rubens Sampaio – Membro da ABCM

PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

### RESUMO

Neste trabalho estuda-se o equilíbrio de cabos submarinos submetidos à ação de correntes, considerando-se o peso próprio e o empuxo de Arquimedes. A teoria mecânica utilizada permite o estudo de problemas envolvendo grandes deformações, considerando ou não a extensibilidade da estrutura. Os exemplos apresentados são resolvidos pelo método do tiro, que é bastante simples e eficiente para este tipo de problema.

### ABSTRACT

This paper deals with the equilibrium of undersea cable structures submitted to the action of currents, taking into account the buoyant force and the weight. The mechanical theory does not make restriction on the size of the deformations and on the extensibility of the structure. The examples analysed are solved numerically by a shooting technique which is very simple and effective for this kind of problem.

## INTRODUÇÃO

Cabos umbilicais, que são tubulações flexíveis conectando uma plataforma submarina a um poço de petróleo, desempenham um papel importante em explorações submarinas de petróleo. Existe grande interesse no estudo do comportamento estático e dinâmico dessas estruturas sujeitas a carregamentos devido à ação de correntes marinhas, ondas, marés, à contatos com o fundo do mar ou outros obstáculos, etc.

Neste trabalho estuda-se o problema de equilíbrio no plano dessas tubulações sujeitas à ação de correntes, levando em conta o peso próprio, o empuxo, e considerando grandes deformações. A extensibilidade pode ser considerada ou não, sem um aumento na dificuldade de obtenção da solução numérica. A situação modelada é a seguinte:

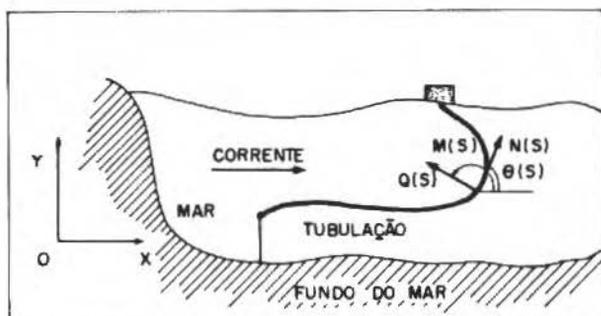


Figura 1

O modelo aqui descrito, apesar de não considerar efeitos de torção, parece descrever bem o problema de determinar a configuração de trabalho de cabos umbilicais.

Em [1], [2] o mesmo problema é abordado considerando um modelo bastante simplificado; o problema é reduzido à minimização de um funcional.

O presente trabalho descreve a estrutura como um sistema de sete equações diferenciais ordinárias não-lineares que é resolvido, para condições de contorno apropriadas, pelo método do tiro. Este método é simples de ser utilizado e eficiente em problemas deste tipo.

Em [3], [4] discute-se, com detalhes, a modelagem do problema. Aqui serão descritas sumariamente as equações pertinentes.

## EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$$\frac{dM}{ds} + Q \frac{dc}{ds} = 0$$

$$\frac{dN}{ds} - Q \frac{d\theta}{ds} + \frac{dc}{ds} (t - p \operatorname{sen} \theta) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{ds} + N \frac{d\theta}{ds} + \frac{dc}{ds} (-n - p \operatorname{cos} \theta) = 0$$

onde  $s \in [0, L]$  é o comprimento de arco na configuração de referência,  $c$  o comprimento de arco na configuração deformada,  $\theta$  o ângulo que a tangente a configuração deformada no ponto material  $s$  faz com a horizontal,  $N$  é o esforço normal,  $Q$  o esforço cortante e  $M$  o momento fletor.

As forças, distribuídas por unidade de comprimento, exercidas na tubulação devido à ação de correntes são modeladas pelas fórmulas de Morinson;  $t$  e  $n$  são as forças na direção da tangente e normal à configuração deformada, respectivamente.

$$t = (\pi/2) \rho C_t D v^2 \operatorname{cos} \alpha$$

$$n = (1/2) \rho C_n D v^2 \operatorname{sen} \alpha$$

$v$  é o módulo da velocidade da corrente,  $\alpha$  o ângulo entre a tangente à configuração deformada e a velocidade,  $\rho$  a densidade da água,  $C_t$  e  $C_n$  coeficientes de atrito,  $D$  o diâmetro externo da tubulação. Aqui serão usados  $C_t = 0.003$ ,  $C_n = 1.2$  e  $\rho = 1.026 \text{ Kg/m}^3$ .

A força distribuída ao longo da tubulação devido ao peso próprio é dada por  $p = (\rho_c - \rho) g$ , onde  $\rho_c$  é a densidade linear da tubulação na configuração deformada,  $A$  a área de seção transversal da tubulação e  $g$  a aceleração da gravidade.

Usando-se a lei de conservação de massa apresentada em [4], obtém-se que

$$\frac{dc}{ds} p = [\rho_r - \frac{dc}{ds} A \rho] g$$

pois  $\frac{dc}{ds} \rho_c = \rho_r$ , onde  $\rho_r$  é a densidade linear da tubulação na configuração de referência. Dessa maneira elimina-se a incógnita  $\rho_c$  do problema.

## MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO E RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

As medidas de deformação são:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{dc}{ds} - 1 \\ k &= \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\phi}{ds}\end{aligned}\tag{2}$$

onde  $\phi$  é o ângulo que a tangente a configuração de referência faz com a horizontal.

Para o cálculo da configuração deformada é conveniente a introdução de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{dc}{ds} \cos \theta \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dc}{ds} \sin \theta\end{aligned}\tag{3}$$

## RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Os materiais serão considerados hiperelásticos, isto é, supõe-se a existência de uma função energia de deformação  $\psi: (-1, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , regular e tal que:  $\psi = \psi(\varepsilon, k)$  e

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} (\varepsilon(s), k(s)) \\ M(s) &= \frac{\partial \psi}{\partial k} (\varepsilon(s), k(s))\end{aligned}\tag{4}$$

O potencial caracteriza o comportamento elástico do material e é possível determiná-lo através de testes de tração e flexão. Neste trabalho será adotado a forma clássica:  $\psi(\varepsilon, k) = (E/2)(A\varepsilon^2 + Ik^2)$  onde  $E$ ,  $A$ ,  $I$  são o módulo de Young do material, a área da seção transversal da tubulação e o momento de inércia da seção, respectivamente. Neste caso tem-se  $N = EA\varepsilon$ ,  $M = EI k$ .

Convém frisar que é possível introduzir, sem problemas, outros tipos de energia de deformação. A escolha deste potencial quadrático é devida ao desejo de comparar os resultados obtidos com [2].

**INEXTENSIBILIDADE**

Se o sistema for adimensionalizado conforme [4], chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{dU}{ds^*} = f(C, U)$$

$$U = (M^*, N^*, Q^*, \theta, c^*, x^*, y^*)$$

$$f = [-Q^*(1-CN^*), M^*Q^* - (1-CN^*)(t^* - p^* \cos \theta), \quad (5)$$

$$-M^*N^* + (1-CN^*)(t^* + p^* \cos \theta), M^*, 1-CN^*,$$

$$(1-CN^*) \cos \theta, (1-CN^*) \sin \theta]$$

onde  $M^* = (ML/EI)$ ,  $N^* = (NL^2/EI)$ ,  $Q^* = (QL^2/EI)$ ,  $p^* = (pL^3/EI)$ ,  $n^* = (nL^3/EI)$ ,  $t^* = (tL^3/EI)$ ,  $c^* = (c/L)$ ,  $x^* = (x/L)$ ,  $y^* = (y/L)$  e  $s^* = (s/L)$ .  $C = (I/AL^2)$  é um parâmetro que mede a esbeltez e extensibilidade da estrutura.

A inextensibilidade é introduzida na teoria simplesmente considerando-se o parâmetro  $C$  igual a zero ( $C=0$ ) [4]. Portanto, ao contrário de [2], nesta formulação a introdução da condição de inextensibilidade não acrescenta nenhuma dificuldade ao tratamento do problema.

**PRIMEIRA APLICAÇÃO: CABO ENGASTADO SEM AÇÃO DE CORRENTES**

Nesta seção serão mostrados alguns resultados para um cabo com os seguintes parâmetros mecânicos:  $EI=7000$  Nm,  $(\rho_r - A\rho)=7.67$  Kg/m,  $L=32.6$  m,  $D=0.112$  m.

Em todos os casos considera-se a estrutura inextensível, submersa no oceano, engastada nas extremidades, sujeita ao peso próprio e ao empuxo.

Inicialmente serão usadas as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \text{ m} & + & & x^*(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \text{ m} & + & & y^*(0) &= 0 \\ \theta(0) & & + & & \theta(0) &= 0 \\ x(L) &= xLm & + & & x^*(1) &= xL/L \\ y(L) &= 0 \text{ m} & + & & y^*(1) &= 0 \\ \theta(L) &= 0 & + & & \theta(1) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Uma solução para o caso  $xL=6$  m está mostrada na figura 2.

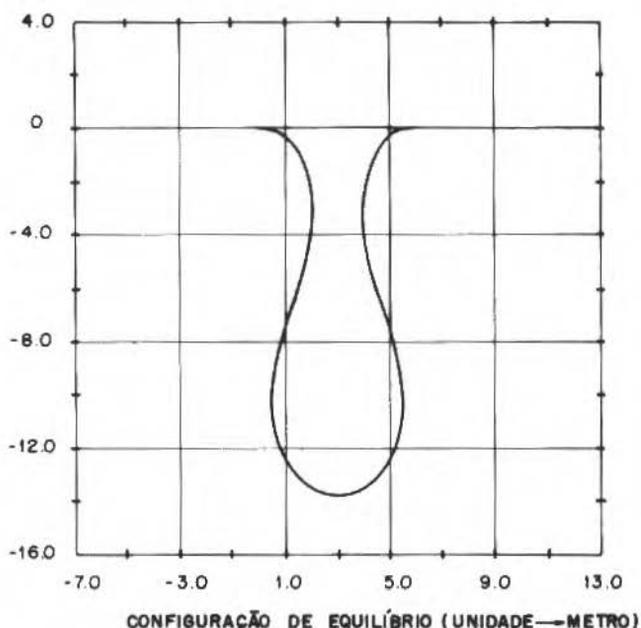


Figura 2

Este resultado foi obtido usando-se o método do tiro simples [4], [5], [6], [7]. Detalhes sobre a implementação, convergência e viabilidade do método estão nessas referências e não serão discutidos detalhadamente nesse trabalho. O resultado foi comparado com o obtido em [2]. Nesse caso as configurações obtidas são praticamente coincidentes e as diferenças são indiscerníveis dentro da precisão do desenho apresentado.

Uma vantagem da formulação apresentada neste trabalho é que ela possibilita a obtenção simultânea da configuração e dos esforços internos.

Nas Figuras 3, 4 e 5 estão mostrados os esforços internos as sociados a configuração da Figura 2. Esses resultados não foram obtidos em [2], no entanto é possível avaliar a sua correção: verifica-se a simetria do problema (que não foi imposta nas condições de contorno) e que os esforços externos estão equilibrados.

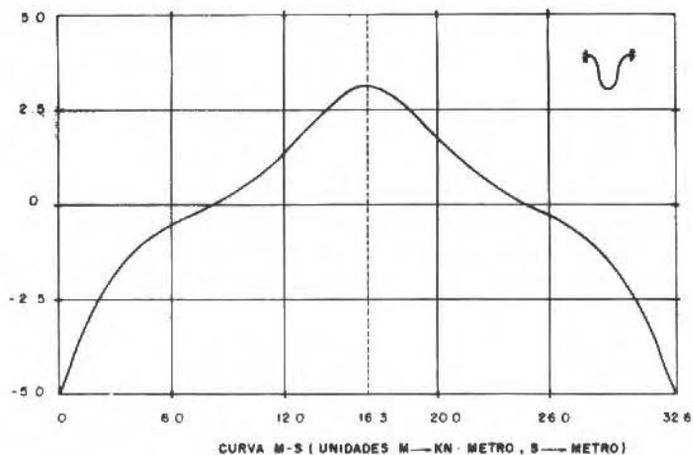


Figura 3

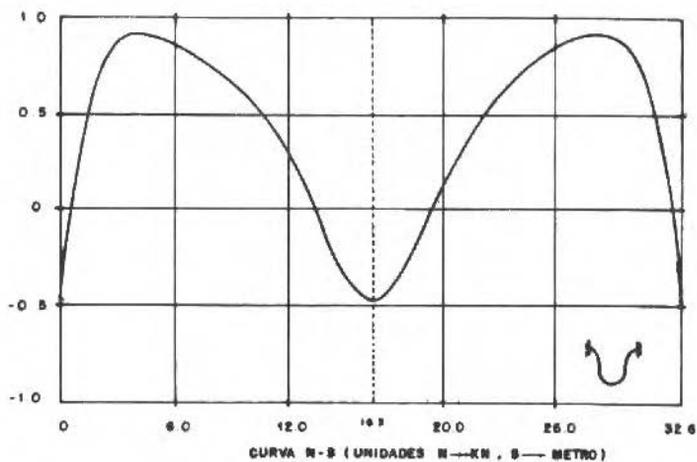


Figura 4

174

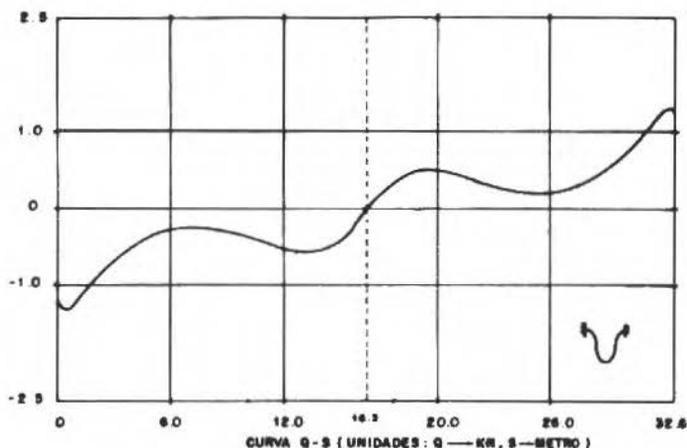


Figura 5

Ao se resolver o problema formado por (5), (6) considerando-se a extensibilidade, verifica-se que os resultados obtidos são muito próximos dos encontrados no caso inextensível.

Os erros obtidos são menores que 0,1%. Isto se deve a lei de comportamento linear utilizada e ao fato dos parâmetros mecânicos fornecidos implicarem num parâmetro de extensibilidade  $C$  bastante próximo de zero.

Portanto, usando-se uma lei de comportamento linear, se o parâmetro  $C$  for pequeno (o que acontece na maioria dos casos práticos), os resultados obtidos serão praticamente idênticos aos do caso inextensível.

Apesar dos bons resultados apresentados pelo modelo formado por (5), (7), existem importantes limitações para sua utilização.

Um problema teórico ainda não resolvido é o de como colocar no modelo informações que impeçam a existência de configurações de equilíbrio onde a estrutura se interpenetra. Por exemplo, para o caso  $xL = 15m$  uma das soluções está mostrada na Figura 6.

Uma maneira de evitar esse problema sem alterar a teoria mecânica é através da modificação das condições de contorno. O objetivo é restringir ainda mais as possíveis soluções do sistema de equações (5) eliminando, desta forma, os resultados indesejáveis.

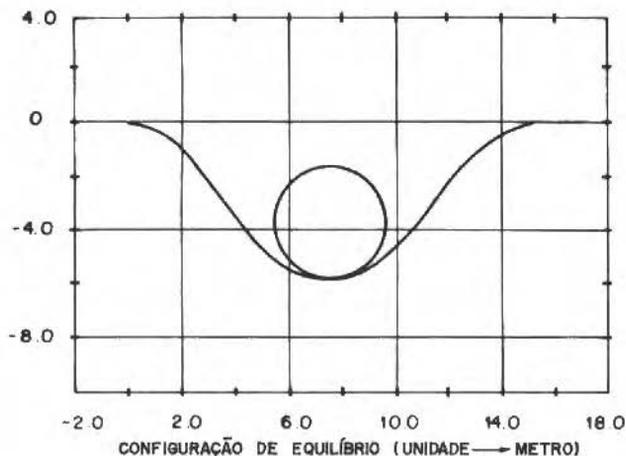


Figura 6

As seguintes condições de contorno podem ser usadas no lugar de (6):

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0 \text{ m} & + & \quad x^*(0) = 0 \\
 y(0) &= 0 \text{ m} & + & \quad y^*(0) = 0 \\
 \theta(0) &= 0 & + & \quad \theta(0) = 0 \\
 Q(0) &= -[\rho_T - \bar{A}\rho]Lg/2 \text{ N} & + & \quad Q^*(0) = Q(0)L^2/EI \\
 x(L/2) &= xL/2 \text{ m} & \rightarrow & \quad x^*(.5) = xL/2L \\
 \theta(L/2) &= 0 & + & \quad \theta(.5) = 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Verifica-se facilmente que a solução mostrada na Figura 2 satisfaz (7) o que não acontece com configuração na Figura 6. As condições (7) eliminam, portanto, soluções como a da Figura 6.

Antes de concluir essa seção, devem ser feitas algumas observações sobre a técnica numérica de solução.

O método do tiro, aplicada nos problemas formados por (5), (6) ou (5), (7), pode não convergir se a estimativa inicial não estiver dentro de uma determinada região de convergência [7]. Este processo de solução não é, portanto, incondicionalmente convergente.

Isto pode causar dificuldade para quem não tenha familiaridade com o problema. Um procedimento alternativo para superar essa dificuldade será descrito à seguir. Ele permitirá, dentro de certos limites, a obtenção da solução de (5), (7) através de um processo incondicionalmente convergente.

Este procedimento se divide em duas partes básicas:

### 1ª Parte

a) Resolver numericamente, através do método do tiro, o problema formado pelas equações (5) e as seguintes condições de contorno:

$$\begin{array}{ll}
 x(0) = 0 \text{ m} & x^*(0) = 0 \\
 y(0) = 0 \text{ m} & y^*(0) = 0 \\
 \theta(0) = 0 & \theta(0) = 0 \\
 Q(0) = -[(\rho_r - A\rho)Lg/2] \text{ N} & Q^*(0) = Q(0)L^2/EI \\
 N(0) = 0 \text{ N} & N^*(0) = 0 \\
 \theta(L/2) = 0 & \theta(.5) = 0
 \end{array} \tag{8}$$

Essas condições permitem calcular a posição  $x(L) = xL^0$  a qual a estrutura fica em equilíbrio sem a ação de forças externas horizontais nas extremidades.

Neste caso o método do tiro se resume a procurar o zero de uma função real. De [4], [5] pode se verificar que isso pode ser feito através de um processo incondicionalmente convergente.

Para os parâmetros mecânicos fornecidos, o valor  $xL^0$  obtido é  $xL^0 = 19.162 \text{ m}$ .

### 2ª Parte

A solução de (5), (7) pode ser obtida a partir da solução conhecida de (5), (8) através do seguinte processo:

a) Dado um número natural  $n$  diferente de zero, define-se:

$$\Delta xL = (xL - xL^0)/n$$

b)  $i = 1$

c)  $xL^i = xL^{i-1} + \Delta xL$

d) Resolver numericamente, através do método do tiro, o problema formado por (5) e (7) considerando-se  $x(L) = xL^i$  e usando-se como estimativa inicial os valores  $M^*(0)$ ,  $N^*(0)$  calculados na iteração anterior. Na primeira iteração utiliza-se como estimativa inicial  $M^*(0)$  e  $N^*(0)$  calculados em (5), (8).

e)  $i = i + 1$

f)  $i > n$  ?

. Sim + Para

. Não + Volta a (c).

Para valores  $\Delta xL$  suficientemente pequenos garante-se que as estimativas iniciais adotadas na etapa (d) estarão sempre dentro da região de convergência do método do tiro.

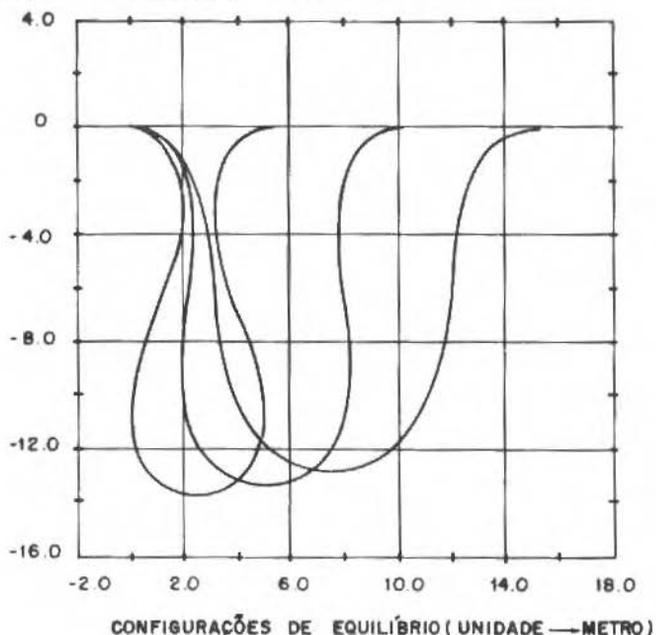


Figura 7

A figura 7 mostra as configurações obtidas através desse processo para  $xL=5, 10$  e  $15$  metros.

#### SEGUNDA APLICAÇÃO: CABO ENGASTADO SUBMETIDO À AÇÃO DE CORRENTES

Os parâmetros mecânicos utilizados serão os mesmos da seção anterior. Da mesma forma, em todos os casos considera-se o cabo inextensível, submerso no oceano, engastado nas extremidades, sujeito ao peso próprio e ao empuxo. Nesta seção, no entanto, será considerado o efeito da corrente, ou seja,  $v \neq 0$ .

Condições de contorno:

$$x(0) = 0 \text{ m} \quad + \quad x^*(0) = 0$$

$$y(0) = 0 \text{ m} \quad + \quad y^*(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0 \quad + \quad \theta(0) = 0$$

$$x(L) = xL \text{ m} \quad + \quad x^*(1) = xL/L$$

$$y(L) = yL \text{ m} \quad + \quad y^*(1) = yL/L$$

$$\theta(L) = 0 \quad + \quad \theta(1) = 0$$

(9)

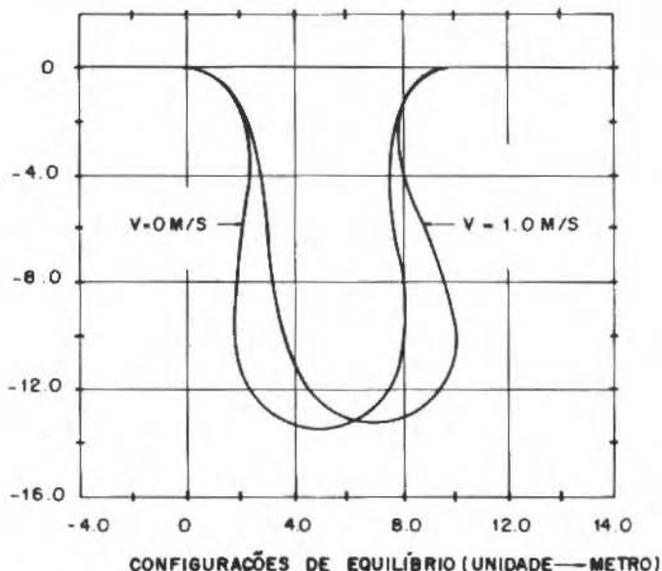


Figura 8

A figura 8 mostra o resultado obtido através do método do tiro para  $\underline{v} = \{1\text{m/s}, 0\}$ ,  $x_L = 10\text{m}$ ,  $y_L = 0\text{ m}$ .

Nesta situação o método do tiro também não é incondicionalmente convergente.

Caso haja dificuldade na convergência, uma solução de (5), (9) pode ser obtida a partir de uma solução conhecida de (5), (7) através do seguinte processo.

a) Dado um número natural  $n$  diferente de zero, define-se:

$$\Delta v = v/n$$

b)  $i = 1$ ;  $v^0 = 0$

c)  $v^i = v^{i-1} + \Delta v$

d) Resolver numericamente através do método do tiro o problema (5), (9) considerando  $v = v^i$ , e usando como estimativa inicial os valores  $M^*(0)$ ,  $N^*(0)$  e  $Q^*(0)$  calculados na iteração anterior. Na primeira iteração utiliza-se como estimativa inicial  $M^*(0)$ ,  $N^*(0)$  e  $Q^*(0)$  calculados em (5), (7).

e)  $i = i + 1$

f)  $i > n$  ?

. Sim → Para

. Não → Volta a (c).

Para valores  $\Delta v$  suficientemente pequenos garante-se que as estimativas iniciais adotadas na etapa (d) estarão sempre dentro da região de convergência do método.

A figura 9 mostra o resultado para  $x_L = 10\text{ m}$ ,  $y_L = -10\text{ m}$  e as seguintes velocidades da corrente:  $\underline{v} = \{1\text{m/s}, 0\}$ ;  $\{-1\text{m/s}, 0\}$ .

Caso haja dificuldade na convergência, uma solução desse problema pode ser obtida a partir da solução conhecida do caso anterior (onde  $y_L = 0\text{ m}$ ) através do seguinte processo:

a) Dado um número natural  $n$  diferente de zero, define-se:

$$\Delta y = y^*(1)/n$$

b)  $i = 1$ ;  $y^*(1)^0 = 0$

c)  $y^*(1)^i = y^*(1)^{i-1} + \Delta y$

d) Resolver numericamente, através do método do tiro, o problema (5), (9), considerando-se  $y^*(1) = y^*(1)^i$  e usando-se como estimativa inicial os valores  $M^*(0)$ ,  $N^*(0)$  e  $Q^*(0)$  calculados na iteração anterior. Na primeira iteração utiliza-se como estimativa inicial  $M^*(0)$ ,  $N^*(0)$  e  $Q^*(0)$  calculados em (5), (7), considerando-se  $y(L) = 0$

e)  $i = i + 1$

f)  $i > n$ ?

. Sim + Para

. Não + Volta a (c).

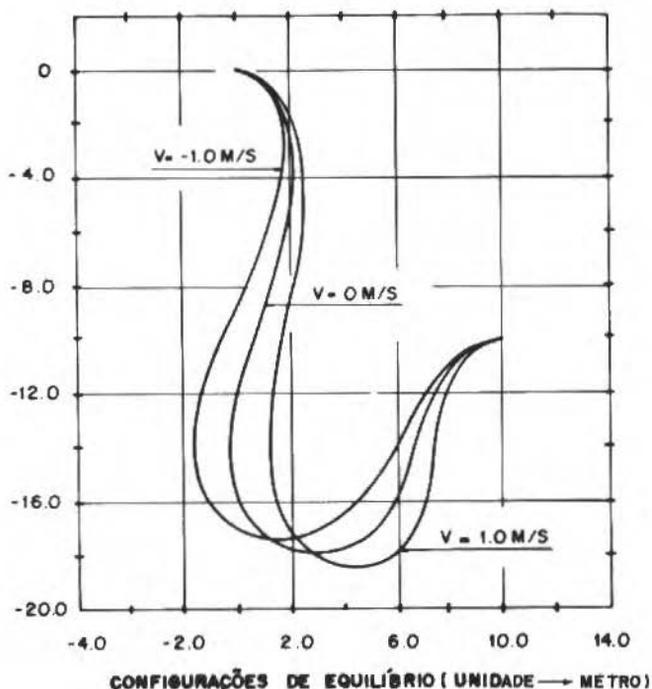


Figura 9

Para valores  $\Delta y$  suficientemente pequenos garante-se que as es

timativas iniciais adotadas na etapa (d) estarão sempre dentro da região de convergência do método.

## CONCLUSÕES

Os resultados demonstram que o modelo apresentado descreve muito bem o comportamento de cabos umbilicais em grandes deformações. Pode-se considerar, sem dificuldades, quaisquer tipos de apoios, de carregamentos, propriedades variáveis, etc. Calcula-se com precisão a configuração deformada e os esforços  $(M, N, Q)$  ao longo da estrutura e nos apoios. Nesta formulação, a inextensibilidade não acrescenta dificuldade alguma no problema, bastando considerar o parâmetro  $C$  igual a zero nas equações (5). Nos casos onde a estrutura é muito esbelta (isto é, onde  $C$  é próximo de zero) verifica-se que as soluções dos problemas extensível e inextensível são bastante próximas.

As técnicas numéricas apresentadas neste trabalho permitem a obtenção de soluções de forma simples. Os algoritmos, uma vez implementados no computador, podem ser utilizados com eficiência por qualquer pessoa, pois convergem com facilidade.

A extensão da formulação para o tratamento do caso dinâmico é imediata, a dificuldade sendo apenas de ordem computacional. Usando-se a mesma sistemática é possível tratar o caso tridimensional, levando em conta, inclusive, efeitos de torção.

Para uma modelagem mais adequada resta a apresentação de expressões mais realistas para a função energia de deformação  $\psi$ . Esta questão será abordada, com detalhes, num futuro trabalho.

O modelo aqui apresentado, quando comparado com os existentes na literatura, tem-se mostrado superior em termos de precisão, custo, facilidade de utilização e versatilidade.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Fortin, M. e Glowinsky, R., Methodes de Lagrangien Augmenté, Dunod, 1982.
- [ 2 ] Bougart, J.F.; Dumay, J.M. e Glowinsky, R., Large Displacement Calculations of Flexible Pipelines by Finite Element and Non-linear Programming Methods, SIAM J. Sc. Stat.Comp., 1 pp. 34-81, 1980.

- [ 3] Costa Mattos, H.S. e Sampaio, R., Modelagem de Estruturas Unidimensionais Planas em Equilíbrio, Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 425-428, 1985.
- [ 4] Costa Mattos, H.S. e Sampaio, R., Análise Não-Linear de Estruturas Unidimensionais Elásticas, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol. VIII, nº 2, pp. 131-149, 1986.
- [ 5] Costa Mattos, H.S. e Sampaio, R., Cálculo de Configurações de Equilíbrio de Estruturas Unidimensionais pelo Método do Tiro, Mecânica Computacional, vol. 1, pp. 1-10, Collección Informática Y Computación, Eudeba, 1985.
- [ 6] Costa Mattos, H.S. e Sampaio, R., Análise do Comportamento de Tubulações Submarinas Submetidas à Ação de Correntes, Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 527-530, 1987.
- [ 7] Stoer, J. e Bulirsh, R., Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.

# CALENDÁRIO DE EVENTOS

## 25-28 Outubro 1988

SIBRAT 88 - 5º Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão

Local: Salvador, Bahia

Contato: Prof. Augusto Cesar Galeão

LNCC/CNPq

Rua Lauro Muller, 455 - Botafogo

22290 - Rio de Janeiro, RJ

Tel.: (021) 541-2132 R: 148

## 06-08 Dezembro 1988

ENCIT 88 - II Encontro Nacional de Ciências Térmicas

Local: Águas de Lindóia, São Paulo

Contato: Prof. Demétrio Bastos Netto

INPE - Setor de Eventos

Caixa Postal 515

12201 - São José dos Campos, SP

Tel.: (0123) 22-9977 R: 539

## 03-06 Janeiro 1989

PACAM - Pan American Congress of Applied Mechanics

Local: PUC/RJ - Rio de Janeiro, RJ

Contato: Prof. Marco Antonio Souza

PUC/RJ

Departamento de Engenharia Civil

Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea

22453 - Rio de Janeiro, RJ

Tel.: (021) 529-9325

## Julho 1989

DINAME 89 - 3º Simpósio sobre Problemas Dinâmicos em Máquinas e Equipamentos

Local: a definir

Contato: Prof. Valder Steffen Júnior

Universidade Federal de Uberlândia

Departamento de Engenharia Mecânica

Campus Santa Mônica

Caixa Postal 593

38400 - Uberlândia, MG

Tel.: (034) 235-2888

## 05-08 Dezembro 1989

COBEM 89 - X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica

Local: Rio de Janeiro, RJ

Contato: Prof. Antonio MacDowell de Figueiredo

COPPE/UFRJ

Programa de Engenharia Mecânica

Cidade Universitária

Caixa Postal 68503

21910 - Rio de Janeiro, RJ

Tel.: (021) 280-8832 R: 412



## ANEXO A

### ÁREAS DE ESPECIALIDADE

- 1000 FUNDAMENTOS E MÉTODOS EM MECÂNICA TEÓRICA E APLICADA
- 1010 Mecânica do Contínuo
  - 1110 Método dos Elementos Finitos
  - 1120 Métodos dos Elementos do Contorno
  - 1130 Métodos assintóticos
  - 1140 Métodos das Diferenças Finitas
  - 1150 Outros Métodos em Mecânica Computacional
  - 1210 Métodos Estocásticos e Estatísticos
  - 1310 Modelagem
  - 1410 Fundamentos de Análise Experimental
  - 1510 Metrologia
  - 1610 Gerência de Projetos
- 2000 DINÂMICA E VIBRAÇÕES
- 2110 Cinemática e Dinâmica
  - 2210 Vibrações de Sólidos (Fundamentos)
  - 2310 Vibrações (Elementos de estruturas)
  - 2320 Vibrações (Estruturas)
  - 2330 Propagação de Ondas e Sólidos
  - 2340 Impactos em Sólidos
  - 2350 Identificação de parâmetros de sistemas Mecânicos
  - 2410 Propagação de ondas em fluidos incompressíveis
  - 2420 Propagação de ondas em fluidos compressíveis
  - 2510 Interação sólido-fluido
  - 2610 Astronáutica (mecânica celeste e orbital)
  - 2710 Explosões e Balística
  - 2810 Acústica
- 3000 CONTROLE E OTIMIZAÇÃO
- 3110 Projeto e Teoria de Sistemas Mecânicos
  - 3210 Sistemas de Controle Ótimo
  - 3220 Sistemas de Controle Adaptativo
  - 3230 Aplicações em Sistemas e Controle
  - 3310 Robótica
  - 3410 Otimização de Sistemas e Processos
- 4000 MATERIAIS
- 4110 Biomateriais
  - 4120 Materiais Metálicos
  - 4130 Materiais Cerâmicos
  - 4140 Materiais Poliméricos
  - 4150 Materiais Conjugados
  - 4210 Conformação Mecânica
  - 4300 Caracterização e Controle Microestrutural
  - 4410 Comportamento Mecânico de Materiais
  - 4420 Comportamento Mec. de Mat. em Baixas Temperaturas
  - 4430 Comportamento Mec. de Mat. em Altas Temperaturas
  - 4440 Comportamento Mec. de Mat. sob Carregamento Variável
  - 4450 Comportamento Mec. de Mat. sob Carregamento Dinâmico
  - 4500 Mecanismo de Fratura
  - 4600 Mecânica de Fratura
  - 4710 Ensaio Destrutivos
  - 4720 Ensaio Não Destrutivos
  - 4800 Corrosão
- 5000 MECÂNICA DOS SÓLIDOS
- 5010 Elasticidade linear
  - 5020 Elasticidade não-linear
  - 5030 Viscoelasticidade
  - 5040 Plasticidade
  - 5050 Visco-plasticidade
  - 5060 Mecânica de materiais conjugados
  - 5070 Mecânica de meios porosos
  - 5110 Reologia
  - 5210 Cabos, hastes e vigas
  - 5220 Membranas, placas e cascas
  - 5230 Estruturas (geral)
  - 5240 Estruturas em contato com o solo
  - 5250 Estruturas isobremes ou semi-submersas
  - 5260 Estruturas Imóveis
  - 5270 Estruturas (vasos e contenções)
  - 5310 Mecânica dos solos (básico)
- 6000 GEOCIÊNCIAS
- 6010 "Micromeritics"
  - 6110 Meios Porosos
  - 6210 Geomecânica
  - 6310 Mecânica dos Abalos sísmicos
  - 6410 Hidrologia, Oceanografia, Meteorologia
- 9000 ENERGIA E MEIO AMBIENTE
- 9110 Combustíveis fósseis
  - 9120 Sistemas nucleares (fissão)
  - 9125 Sistemas nucleares (fusão)
  - 9130 Sistemas geotérmicos
  - 9140 Sistemas Solares
  - 9150 Sistemas eólicos
  - 9160 Sistemas de energia oceânica
  - 9210 Armazenamento de energia
  - 9220 Distribuição de energia
  - 9310 Mecânica de fluidos ambiental
  - 9410 Mecânica de dispositivos de armazenamento de resíduos poluentes
- 10000 BIOCÊNCIAS
- 10110 Biomecânica
  - 10210 Ergonomia
  - 10310 Reabilitação
  - 10410 Mecânica nos esportes
- 5320 Mecânica dos solos (aplicações)
  - 5330 Mecânica das rochas
  - 5410 Efeitos eletro-magnéticos em mecânica dos sólidos
  - 5420 Efeitos térmicos em mecânica dos sólidos
  - 5510 Estabilidade de estruturas
  - 5520 Comportamento após a flambagem
  - 5530 Estados limites e cargas de colapso
  - 5540 Acomodação e acúmulo de dano
  - 5610 Mecânica da fratura
  - 5650 Tribologia
  - 5665 Atrito e desgaste
  - 5710 Componentes de máquinas
  - 5720 Acoplamentos e juntas não soldadas
  - 5800 Análise experimental de tensões
- 6000 MECÂNICA DOS FLUIDOS
- 6010 Reologia
  - 6110 Hidráulica
  - 6210 escoamento incompressível
  - 6220 escoamento compressível
  - 6230 escoamento rarefeito
  - 6240 escoamento em meios porosos
  - 6250 Magneto hidrodinâmico e plasmas
  - 6270 escoamento multifásico
  - 6310 Camadas limites com contorno sólido
  - 6320 Camadas limites com contorno livre
  - 6410 escoamento interno (tubos, canais, couette)
  - 6420 escoamento interno (bocais, difusores, ...)
  - 6430 escoamento com superfície livre
  - 6510 Estabilidade do escoamento
  - 6520 Turbulência
  - 6530 Hidrodinâmica de Veículos e estruturas navais
  - 6540 Aerodinâmica
  - 6610 Mecânica dos fluidos aplicada a máquinas
  - 6650 Lubrificação
  - 6710 Transientes Hidráulicos
  - 6810 Técnicas experimentais e visualização de escoamento
- 7000 TERMO-CIÊNCIAS
- 7010 Termodinâmica
  - 7110 Transporte de calor (convecção monofásica)
  - 7120 Transporte de calor (convecção bifásica)
  - 7130 Transporte de calor (condução)
  - 7140 Transporte de calor (radiação e modos combinados)
  - 7150 Transporte de calor (dispositivos e sistemas)
  - 7210 Termomecânica de sólidos
  - 7310 Transporte de massa (sem e com transporte de calor)
  - 7410 Combustão
  - 7420 Combustão em leito fluidizado
  - 7510 Acionadores e dispositivos de propulsão

## ANEXO B ÁREAS DE APLICAÇÃO

(Nota: Utilizando os códigos abaixo, especifique a Área de Aplicação de sua Especialidade. Por exemplo: Um especialista em Mecânica dos Fluidos (Família 6000 do Anexo A) atuando na área de Turbulência (6520) deverá escolher a Área de Aplicação 350 (Anexo B) se estiver aplicando seu conhecimento em Propulsão).

- 010 Acústica e Controle de Ruído
- 020 Aplicações em Biociências
- 030 CAD
- 040 CAM
- 050 Componentes de Máquinas
- 060 Controle Ambiental
- 070 Controle de Qualidade
- 080 Criogenia
- 090 Engenharia e Física de Reatores
- 100 Engenharia de Petróleo
- 110 Engenharia Oceanográfica
- 120 Equipamentos de Processos
- 130 Equipamentos Industriais
- 140 Fontes Alternativas de energia
- 150 Forjamento
- 160 Fundição
- 170 Garantia da Qualidade
- 180 Indústria Têxtil e Tecnologia Correlatas
- 190 Inspeção e Certificação
- 200 Instalações Industriais
- 210 Instrumentação
- 220 Lubrificação Industrial
- 230 Mancais e Rolamentos
- 240 Máquinas Ferramentas
- 250 Máquinas de Fluxo
- 260 Máquinas Motrizes
- 270 Mecânica Fina
- 280 Metalurgia Geral e Beneficiamento de Minério
- 290 Metrologia
- 300 Mineração e Metalurgia Extrativa
- 310 Ótica
- 320 Pontes e Barragens
- 330 Processos de Fabricação (estampagem, extrusão, trefilação)
- 340 Projeto de Estruturas
- 350 Propulsão
- 360 Prospeção + Perfuração
- 370 Servo-Mecanismos, Controle
- 380 Siderurgia
- 390 Sistemas Hidráulicos
- 400 Sistemas Pneumáticos
- 410 Soldagem
- 420 Solicitações Acidentais (Efeito de Vento, Sismo, Explosão, Fogo, Inundação)
- 430 Tecnologia de Alimentos
- 440 Tecnologia Mineral
- 450 Transporte (excluindo veículos)
- 460 Transmissão de Energia
- 470 Tratamento Térmico e Termoquímica
- 480 Tubulações Industriais + Nucleares
- 490 Usinas Hidroelétricas
- 500 Usinas Termoelétricas
- 510 Vácuo
- 520 Vasos de Pressão, Trocadores de Calor, Equipamentos Dinâmicos Pesados
- 530 Veículos (Terrestres, Espaciais, Marítimos)



## II ENCONTRO NACIONAL DE CIÊNCIAS TÉRMICAS

### OBJETIVOS

- Divulgar a produção científica nacional na área de Ciências Térmicas.
- Promover o intercâmbio entre pesquisadores.
- Incentivar o relacionamento das atividades de pesquisa com o setor produtivo nacional.
- Avaliar as perspectivas de evolução das Ciências Térmicas.

### CALENDÁRIO

*ATÉ O DIA 15 DE MAIO DE 1988*

Os autores deverão encaminhar seus RESUMOS, juntamente com 2 (duas) cópias xerox, seguindo fielmente as instruções.

*ATÉ O DIA 15 DE JUNHO DE 1988*

Os autores receberão da Comissão Editorial a confirmação de que seus resumos foram aceitos e as instruções para a datilografia do trabalho na forma final.

*ATÉ O DIA 01 DE SETEMBRO DE 1988*

Os autores deverão encaminhar seus trabalhos na versão final datilografada nos formulários próprios, fornecidos pelo INPE, para a Assessoria de Comunicação Social – Setor de Eventos.

*ATÉ O DIA 15 DE OUTUBRO DE 1988*

Os autores receberão da Comissão Editorial a confirmação de que seus trabalhos foram aceitos.

*Os prazos acima deverão ser cuidadosamente observados considerando que qualquer atraso implicará prejuízo do programa final de impressão dos Anais, que deverão ser distribuídos na ocasião do Encontro.*

*Todos os trabalhos são de responsabilidade de seus autores. A Comissão não se responsabilizará pela revisão ortográfica ou por nova datilografia dos textos para efeito de publicação.*

### INFORMAÇÕES E CORRESPONDÊNCIAS

O Instituto de Pesquisas Espaciais – INPE, Setor de Eventos – poderá fornecer quaisquer informações adicionais pelo telefone ou endereço abaixo:

Instituto de Pesquisas Espaciais – INPE – Setor de Eventos

Caixa Postal 515 – 12201 – São José dos Campos – SP

Telefone: (0123) 22 9977 – ramal 539 – Telex: 123 3530 INPE BR

### COMISSÃO ORGANIZADORA

|                         |   |                 |
|-------------------------|---|-----------------|
| Demétrio Bastos Netto   | – | Presidente      |
| Maurício Nogueira Frota | – | Vice-Presidente |
| Nehemias Lima Lacerda   | – | 1º Secretário   |
| Paulo Moraes Junior     | – | 2º Secretário   |
| Leon Sinay              | – | Tesoureiro      |
| Paulo A. de O. Soviero  | – | Editor          |

