



REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

## PROGRAMA DE APOIO A PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS



A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalurgia, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os Trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Editor Executivo da RBCM  
Secretaria da ABCM  
PUC/RJ –  
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea  
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

---

*The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.*

*Manuscripts for submission must contain unpublished material, i. e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.*

*The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.*

*Executive Editor of RBCM  
Secretary of ABCM  
PUC/RJ –  
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea  
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brazil*

*The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.*

**EDITOR**

Hans Ingo Weber

**EDITORES****ASSOCIADOS**

Álvaro Toubes Prata

Augusto Cesar Galeão

Carlos Alberto de Almeida

Hazim Ali Al-Qureshi

AS EQUAÇÕES DAS CAMADAS LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA EM ESCOAMENTO LAMINAR USANDO-SE A TRANSFORMAÇÃO DE CROCCO

198

Francisco Eduardo Mourão Saboya – Membro da ABCM  
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

ON THE POSSIBILITY OF DETERMINING THE TEMPERATURE OF A PLANE SURFACE THROUGH ITS EMERGENT THERMAL RADIATION

240

Rogério Martins Saldanha da Gama – Membro da ABCM  
LNCC/CNPq

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DOIS MODELOS PARA A TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA EM MEIOS POROSOS NÃO SATURADOS

250

Ligia Silva Damasceno Ferreira – Membro da ABCM  
Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM  
UFSC – Departamento de Engenharia Mecânica

REFINAMENTO DA SOLUÇÃO ALGÉBRICA DA MATRIZ DE RICCATI – UTILIZAÇÃO NO PROGRAMA LINQUAD (LQG)

272

José Sotelo Júnior – Membro da ABCM  
Luiz Antonio Lopes  
ENGESA S.A.



## editorial

A *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas* passará por várias modificações a partir deste número. Algumas são estruturais, como a instituição de uma Comissão de Divulgação e a indicação por esta de um Editor e quatro Editores Associados, assessorados por um corpo editorial. Outras são de finalidade e, embora não se pretenda introduzir alterações radicais, procuraremos dar prioridade a dois objetivos:

**Internacionalização:** a revista deverá reforçar sua imagem a nível internacional, transformando-se no veículo natural de troca de informações científicas entre grupos cooperantes;

**Aceitação Interna:** a revista deverá aumentar a sua penetração no meio técnico-científico brasileiro, transformando-se no veículo natural pelo qual as instituições brasileiras conversam e interagem.

São objetivos um tanto conflitantes e refletem tendências dentro da própria comunidade de mecânica. É possível que no futuro tenhamos que discutir a criação de revistas distintas para atender esses interesses. Por enquanto, procuraremos gerar mecanismos de estímulo e suporte ao autor para: publicação em língua inglesa; aumento do número de exemplares distribuídos no exterior; realização de uma campanha nas instituições brasileiras para conquistar grupos de autores a publicarem com regularidade; incentivo à publicação de comunicações breves e cartas ao Editor; inclusão de uma seção de informações; e, prioridades para trabalhos aplicados ou oriundos de um problema tecnológico.

A RBCM é uma revista que vive todos os problemas comuns às outras revistas científicas brasileiras: regularidade de aporte de recursos, amadorismo e boa vontade como ingrediente básico de operação, grande irregularidade na frequência com que os trabalhos são encaminhados, atrasos nos pareceres emitidos pelos revisores. Todavia a nova fase da Revista conta com suporte garantido pela FINEP (Programa de Apoio a Publicações Científicas MCT/CNPq/FINEP) pelos próximos 18 meses e, a bem dizer, a Revista deveria viver o orgulho da comunidade científica brasileira, ser estimulada e receber apoio de todos nós. Só assim, num efeito dominó, ela se tornará aquilo que todos gostariam que ela fosse.

A ABCM suporta e incentiva esta revista há 10 anos, garantindo a publicação de 4 (quatro) números anuais com relativa regularidade, para colocar a disposição dos pesquisadores brasileiros de um veículo de informação e intercâmbio onde, entre outros, devem ser encontrados:

- resultados de pesquisas financiadas por fontes governamentais brasileiras;
- resultados de pesquisas de programas de cooperação bi-lateral com o exterior (em inglês, por favor);
- versões completas de trabalhos apresentados em congressos onde os anais restringem as comunicações a poucas páginas;
- resultados de teses de mestrado;
- resultados de teses de doutorado (em inglês, por favor);

- trabalhos que antecedem uma publicação em revista internacional de ampla circulação;
- trabalhos que incluem ou derivem de pesquisas experimentais;
- resultados de trabalhos realizados em conjunto com empresas;
- resultados de trabalhos tecnológicos ou científicos desenvolvidos pelas empresas;
- comunicações que enfoquem aspectos parciais de uma pesquisa.

Em nome de todos os editores queremos externar a nossa intenção em conduzir esta tarefa de forma digna e eficiente. Para tanto esperamos contar com a ajuda de todos que vêm nesta revista o seu "filhote" e nos comprometemos a procurar atender as sugestões e recomendações que simplifiquem alcançar os objetivos propostos. É dos editores a responsabilidade de garantir a continuidade da qualidade científica da revista, aceitando ou recusando trabalhos encaminhados perante o parecer dos revisores. Neste sentido nos empenharemos ao máximo.

*Hans Ingo Weber*  
*Editor*

**X CONGRESSO  
BRASILEIRO DE  
ENGENHARIA  
MECÂNICA**



**10<sup>TH</sup> BRAZILIAN  
CONGRESS OF  
MECHANICAL  
ENGINEERING**

**Rio de Janeiro, 5-8 de dezembro de 1989**

**LOCAL: COPACABANA PALACE HOTEL**

**PRAZOS**

20.02.89 .....	Resumos
Março de 89 .....	Comunicação
05.05.89 .....	Manuscrito
Agosto de 89 .....	Comunicação de Aceitação Final
05.10.89 .....	Inscrição com Taxa Reduzida
05.12.89 .....	Início do Congresso

**ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA**

**COMITÊ ORGANIZADOR E COMISSÃO EDITORIAL**

**X COBEM**

**PEM – COPPE/UFRJ**

**CP 68503 – Rio de Janeiro – CEP 21945**

**Tels.: (021) 280.8832 / 412 – (021) 280.7043**

**Telex: 21 33817 UFCO BR**

## AS EQUAÇÕES DAS CAMADAS LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA EM ESCOAMENTO LAMINAR USANDO-SE A TRANSFORMAÇÃO DE CROCCO

Francisco Eduardo Mourão Saboya - Membro da ABCM  
PUC/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica

### RESUMO

Este trabalho trata de uma mudança de variáveis, proposta por L. Crocco, para transformar as equações das camadas limite hidrodinâmica e térmica. Embora tal transformação tenha sido idealizada para escoamento laminar compressível é mostrado que ela funciona muito bem no caso incompressível. As equações transformadas são mais simples do que aquelas obtidas por Blasius. Entre as vantagens do uso da transformação de Crocco está o fato de que o intervalo de integração é 0-1, enquanto no método clássico este intervalo é 0- $\infty$ . São apresentadas soluções para problemas similares e não similares e alguns resultados são comparados com aqueles encontrados na literatura. Quando tal comparação foi possível, a concordância foi exata.

### ABSTRACT

The present work is concerned with a change of variables, proposed by L. Crocco, used to transform the hydrodynamic and thermal boundary layer equations. Although such transformation has been idealized for laminar compressible flow, it is shown that it works very well for laminar incompressible flow. The transformed equations are simpler than those obtained by the classical Blasius transformation. Among the advantages of using Crocco's transformation is the fact that the interval of integration is 0-1, while in the classical method this interval is 0- $\infty$ . Solutions are presented for similar and non-similar problems and some results are compared with the ones found in the literature. In the cases that such comparison was possible, the agreement was exact.

## NOMENCLATURA

$c_p$	calor específico à pressão constante
$E$	número de Eckert
$f$	função corrente adimensional
$f_a$	coeficiente local de atrito
$\bar{f}_a$	coeficiente médio de atrito
$g_*$	tensão cisalhante adimensional
$h$	coeficiente de transferência de calor local
$\bar{h}$	coeficiente de transferência de calor médio
$\ell$	comprimento de superfície
$L$	comprimento característico
$m$	expoente da velocidade potencial
$n$	expoente da distribuição de temperatura na parede
$Nu_x$	número de Nusselt local
$\bar{Nu}$	número de Nusselt médio
$\tilde{Nu}_x$	número de Nusselt modificado local
$\bar{\tilde{Nu}}$	número de Nusselt modificado médio
$Pr$	número de Prandtl
$q_w$	fluxo de calor na parede
$Re_x$	número de Reynolds
$T$	temperatura
$T_w$	temperatura na parede
$T_\infty$	temperatura longe da parede
$u$	componente da velocidade na direção $x$
$u_*$	velocidade adimensional
$U$	velocidade do escoamento potencial
$v$	componente da velocidade na direção $y$
$x$	coordenada ao longo do escoamento
$y$	coordenada perpendicular à parede
$\beta$	parâmetro adimensional que define o ângulo da cunha $\pi\beta$
$\Gamma$	parâmetro adimensional definido por (16)
$\Omega$	parâmetro adimensional definido por (15)
$\tau$	tensão cisalhante
$\mu$	viscosidade dinâmica
$\rho$	densidade
$\Psi$	função corrente de Blasius
$\phi$	temperatura adimensional
$\phi_*$	temperatura adimensional
$\theta$	temperatura adimensional

$\theta_*$	temperatura adimensional
$\eta$	variável de similaridade de Blasius
$\xi$	coordenada adimensional

## INTRODUÇÃO

A solução dos problemas de camadas limite laminares, hidrodinâmica e térmica, em convecção forçada, tem sido usualmente feita através da transformação clássica de Blasius [1]. Tanto os problemas similares quanto os não similares são usualmente tratados através da introdução de uma função corrente  $\Psi$  e de uma variável adimensional  $\eta$  cujo intervalo de variação é  $0-\infty$ . Nos casos similares, as equações que governam os problemas hidrodinâmico e térmico (equações de convecção) são transformadas em equações diferenciais ordinárias, mais simples de serem resolvidas do que as equações diferenciais parciais da camada limite. Nas situações em que soluções similares não são possíveis obtém-se, através da transformação de Blasius, equações diferenciais ainda parciais. Nesse caso, um método de integração bastante atrativo e de boa precisão quando comparado com outros métodos, é o chamado método de não similaridade local [2], [3]. Por outro lado, admitam ou não soluções similares, a transformação de Blasius reduz as equações do problema a uma equação de terceira ordem (equação de quantidade de movimento) e a uma equação de segunda ordem (equação de energia). A equação da continuidade é automaticamente satisfeita pela introdução da função corrente  $\Psi$ . Na solução numérica das equações transformadas o intervalo de integração na direção  $\eta$  é sempre  $0-\infty$ . Sob o ponto de vista computacional, isso representa uma dificuldade a ser vencida.

O presente trabalho trata de uma mudança de variáveis, proposta por L. Crocco [4], [5], [6] com a finalidade de resolver as equações das camadas limite para escoamento laminar compressível. Mais tarde, Van Driest [7] e Mendes [8] usaram o método de Crocco na investigação do escoamento laminar compressível ao longo de uma placa plana isotérmica. Embora o método de Crocco tenha sido idealizado para escoamentos compressíveis, será mostrado que ele funciona muito bem para escoamentos incompressíveis. A idéia básica do método consiste em se considerar como variáveis dependentes os campos de atrito viscoso e de temperatura. As variáveis independentes são a velocidade e a distância, ambas na direção do escoamento. Após a transformação das equações de conservação obtém-se uma equação dife

rencial de segunda ordem para o atrito viscoso e uma outra equação, também de segunda ordem, para o campo de temperaturas. Uma das vantagens é que não se chega a uma equação de terceira ordem como na transformação de Blasius. Outra vantagem é que, na forma adimensional, o intervalo de integração é 0-1 e não 0-∞ como na transformação clássica.

Na apresentação que se segue, consideração será dada a problemas similares e não similares. Várias soluções serão apresentadas e, sempre que possível, comparações serão feitas com resultados obtidos da literatura. Os resultados mais importantes são os coeficientes de transporte que serão apresentados sob as formas de coeficientes de atrito e números de Nusselt.

#### ANÁLISE TEÓRICA

As equações que governam os problemas hidrodinâmico e térmico do escoamento laminar forçado, regime permanente, da camada limite bi-dimensional com propriedades constantes podem ser escritas, de acordo com [9], da seguinte maneira

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{continuidade}) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{quantidade de movimento}) \quad (2)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + u \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{energia}) \quad (3)$$

onde  $x$  é a coordenada na direção da corrente,  $y$  é a coordenada transversal,  $u$  e  $v$  são as componentes da velocidade na direção  $x$  e  $y$  respectivamente,  $T$  é a temperatura e  $U$  é a velocidade na direção  $x$  do escoamento potencial fora da camada limite. As condições de contorno são

$$\text{para } y = 0: \quad u = v = 0 \quad ; \quad T = T_w(x) \quad (4)$$

$$\text{para } y \rightarrow \infty: \quad u = U(x) \quad ; \quad T = T_\infty = \text{cte.} \quad (5)$$

A transformação clássica de Blasius é feita pela introdução da função corrente  $\Psi$  definida por

$$\Psi = \sqrt{\nu x U} \quad f(\xi, \eta) \quad (6)$$

onde

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (7)$$

$L$  é um comprimento de referência que depende do problema específico a ser estudado. Define-se ainda uma temperatura adimensional  $\theta_*$  da seguinte maneira

$$\theta_*(\xi, \eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (8)$$

Na equação (6)  $f(\xi, \eta)$  é a função corrente adimensional. Lembrando a definição da função corrente, pode-se escrever

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9)$$

As equações (6), (7), (8) e (9) definem a chamada transformação clássica de Blasius. Dessa maneira as equações (1), (2) e (3) se transformam em

$$f''' + \frac{\Omega+1}{2} f f'' + \Omega(1-f'^2) = \xi \left( f' \frac{\partial f}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \theta_*'' + \frac{\Omega+1}{2} Pr f \theta_*' - \Gamma Pr f' \theta_* + E Pr f''^2 = \\ = Pr \xi \left( f' \frac{\partial \theta_*}{\partial \xi} - \theta_*' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

As condições de contorno (4) e (5) se transformam em

$$f'(\xi, 0) = \theta_*(\xi, \infty) = 0 \quad (12)$$

$$f'(\xi, \infty) = \theta_*(\xi, 0) = 1 \quad (13)$$

$$f(\xi, 0)(1+\Omega) + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \quad (14)$$

onde  $' = \frac{\partial}{\partial \eta}$  e os parâmetros  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $Pr$  e  $E$  são definidos por

$$\Omega = \frac{\xi}{U} \frac{dU}{d\xi} \quad (15)$$

$$\Gamma = \frac{\xi}{T_w - T_\infty} \frac{d(T_w - T_\infty)}{d\xi} \quad (16)$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{K} \quad (\text{número de Prandtl}) \quad (17)$$

$$E = \frac{U^2}{c_p (T_w - T_\infty)} \quad (\text{número de Eckert}) \quad (18)$$

Como pode ser observado, a equação (10) é uma equação diferencial parcial de terceira ordem e o intervalo de integração na direção  $\eta$  é  $0-\infty$ .

A transformação de Crocco é definida da seguinte maneira

$$\tau = \tau(x, u) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (19)$$

$$T = T(x, u) \quad (20)$$

Usando-se a equação (1) da continuidade para eliminar  $v$  das equações (2) e (3) e ainda fazendo uso das equações (19) e (20) obtém-se

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + \rho \mu \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\tau} \right) + U \frac{dU}{dx} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\tau} \right) \right] = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tau^2 \left[ \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + \frac{\mu}{K} \right] + (1-Pr) \frac{\partial T}{\partial u} \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} - \\ - Pr \rho \mu \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + U \frac{dU}{dx} \frac{\partial T}{\partial u} \right] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

As condições de contorno são

$$\tau(x, U) = 0 \quad (23)$$

$$\tau(x, 0) \left( \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)_{u=0} = -U \frac{dU}{dx} \frac{\mu^2}{\nu} \quad (24)$$

$$T(x,0) = T_w(x) \quad (25)$$

$$T(x,U) = T_\infty = \text{cte.} \quad (26)$$

A condição de contorno expressa pela equação (24) é obtida da equação (1) aplicada em  $y=0$ , onde se tem  $u=v=0$ . As equações (21) e (22) com as condições de contorno (23), (24), (25) e (26) constituem as equações de Crocco para as camadas limite hidrodinâmica e térmica. Pode-se observar que as incógnitas do problema são a distribuição de atrito viscoso  $\tau=\tau(u,x)$  e a distribuição de temperatura  $T=T(u,x)$ . Nota-se ainda que as equações (21) e (22) são ambas de segunda ordem e que o intervalo de variação da variável independente  $u$  é  $0-U$  e não  $0-\infty$  como na transformação de Blasius.

O próximo passo é a adimensionalização das equações de Crocco. Das equações (6), (7), (9) e (19) resultam as seguintes expressões

$$u_* = \frac{u}{U} = f'(\xi, \eta) \quad (27)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}} f''(\xi, \eta) \quad (28)$$

A equação (27) mostra que  $\eta$  pode ser tomada como função de  $u_*$  e  $\xi$ . Dessa maneira a equação (28) pode ser escrita na seguinte forma

$$\tau = \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{4x}} g_*(\xi, u_*) \quad (29)$$

onde  $g_*(u_*, \xi)$  é uma função adimensional a ser determinada. Define-se ainda uma temperatura adimensional  $\theta_*(u_*, \xi)$  pela seguinte expressão

$$\theta_*(\xi, u_*) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (30)$$

Combinando-se as equações (29) e (30) com as equações (21), (22), (23), (24), (25) e (26) obtém-se

$$g_*'' g_*'^2 - 4\Omega(1-u_*^2)g_*' + 2(1-3\Omega)u_* g_* = 4u_* \xi \frac{\partial g_*}{\partial \xi} \quad (31)$$

$$g_*^2 \theta_*'' + [(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr \Omega (1-u_*^2)] \theta_*' - 4Pr u_* \Gamma \theta_* + Pr g_*^2 E = 4Pr u_* \xi \frac{\partial \theta_*}{\partial \xi} \tag{32}$$

$$g_*(\xi, 1) = 0 \tag{33}$$

$$g_*(\xi, 0)g_*'(\xi, 0) = -4\Omega \tag{34}$$

$$\theta_*(\xi, 0) = 1 \tag{35}$$

$$\theta_*(\xi, 1) = 0 \tag{36}$$

onde  $' = \frac{\partial}{\partial u_*}$  e os parâmetros  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $Pr$  e  $E$  já foram definidos pelas equações (15), (16), (17) e (18). Com a introdução da variável  $u_* = u/U$  pode-se observar que o intervalo de integração das equações adimensionais é 0-1. Nota-se ainda que não aparece uma equação de terceira ordem como no sistema formado pelas equações (10) e (11).

Não é do conhecimento do autor alguma publicação ou trabalho anterior nos quais as equações numeradas de (31) até (36) tenham sido usadas ou mesmo deduzidas. Assim essas equações constituem um novo modo de atacar os problemas relacionados com camadas limite bidimensionais em regime laminar e convecção forçada. Como já foi enfatizado, as principais vantagens residem na redução da ordem da equação diferencial de quantidade de movimento e na limitação do intervalo de integração que passou a ser de 0-1 ao invés de 0- $\infty$ .

**Problemas Similares.** Sob o ponto de vista matemático, um problema é dito similar quando as equações que governam o escoamento e a distribuição de temperatura podem ser transformadas em equações diferenciais parciais. Assim, devemos ter nas equações numeradas de (31) até (36),  $g_* = g_*(u_*)$ ,  $\theta_* = \theta_*(u_*)$ . Isso implica em que as derivadas em relação a  $\xi$  sejam todas nulas. Além disso os coeficientes dos vários termos das equações (31) a (36) não devem ser função de  $\xi = x/L$ . Pode-se pois escrever

$$\Omega = \text{cte.} = m \tag{37}$$

$$\Gamma = \text{cte.} = n \tag{38}$$

$$E = \text{cte.} \tag{39}$$

Das condições (37), (38) e (39) resultam as seguintes expressões

$$U = Ax^m \quad (40)$$

$$T_w - T_\infty = Bx^n \quad (41)$$

$$2m - n = 0 \quad (42)$$

onde A, B, m e n são constantes. O escoamento potencial expresso pela equação (40) representa o escoamento ao longo de cunhas de ângulo  $\pi\beta$  onde  $\beta = (2m)/(m+1)$  [9]. As equações de (31) até (36) são escritas da seguinte maneira

$$g_*'' g_*'^2 - 4m(1-u_*^2)g_*' + 2(1-3m)u_* g_* = 0 \quad (43)$$

$$g_*'' \theta_*'' + [(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr m(1-u_*^2)]\theta_*' - 4Pr u_* n\theta_* = -Pr g_*'^2 E \quad (44)$$

$$g_*(1) = 0 \quad (45)$$

$$g_*(0)g_*'(0) = -4m \quad (46)$$

$$\theta_*(0) = 1 \quad (47)$$

$$\theta_*(1) = 0 \quad (48)$$

As equações (43) e (44) são equações diferenciais ordinárias caracterizando problemas similares.

A equação (44) é uma equação não homogênea que pode ser transformada numa equação homogênea fazendo-se  $E=0$ . Isso implica em se desprezar a função dissipação na equação de energia (equação (3)). Nesse caso a condição (42) ( $2m-n=0$ ) não é mais necessária para a obtenção de soluções similares. Deve-se ainda observar que a equação (43) pode ser resolvida independentemente da equação (44) de energia. Isso é uma característica fundamental dos problemas de convecção forçada.

A Solução Similar da Equação de Energia. A equação de energia (equação (44)) é uma equação diferencial ordinária, linear e não homogênea. Sua solução pode ser achada através de uma combinação linear de duas soluções. Uma é a solução geral da homogênea e outra é uma solução particular da não homogênea.

Chamando de  $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$  a temperatura adimensional para o caso homogêneo, resulta de (44)

$$g_*^2 \theta'' + [(1 - Pr) g_* g_*' - 4Pr m(1 - u_*^2)] \theta' - 4Pr u_* n \theta = 0 \quad (49)$$

$$\theta(0) = 1 \quad ; \quad \theta(1) = 0 \quad (50)$$

Para a solução particular da não homogênea define-se uma temperatura adimensional  $\phi$  pela seguinte expressão

$$\phi = \frac{T - T_\infty}{U^2 / 2c_p} \quad (51)$$

Lembrando que  $\theta_* = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$  e usando-se a equação (18), (definição do número de Eckert), pode-se escrever

$$\theta_*(u_*) = \frac{E}{2} \phi(u_*) \quad (52)$$

Substituindo-se a equação (52) na equação (44) resulta

$$\begin{aligned} g_*^2 \phi'' + [(1 - Pr) g_* g_*' - 4Pr m(1 - u_*^2)] \phi' - 4Pr u_* n \phi &= \\ &= -2Pr g_*^2 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\phi(1) = 0 \quad (54)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (55)$$

As equações (53), (54) e (55) são as equações do problema não homogêneo e representam fisicamente o problema da parede adiabática, já que  $\phi'(0) = 0$ . Dessa maneira a solução de (44), (47) e (48) pode ser expressa como uma combinação linear de  $\theta$  e  $\phi$ . A expressão de  $\theta_*$  é a seguinte

$$\theta_*(u_*) = \left( 1 - \frac{E}{2} \phi(0) \right) \theta(u_*) + \frac{E}{2} \phi(u_*) \quad (56)$$

onde  $\theta(u_*)$  é a solução do problema homogêneo expresso pelas equações (49) e (50) e  $\phi(u_*)$  é a solução do problema não homogêneo expresso pelas equações (53), (54) e (55).

A equação (53) pode também representar outro problema particular caracterizado pela condição de contorno  $T_w = T_\infty$ . Chamando de  $\phi_* = (T - T_\infty) / (U^2 / 2c_p)$  a temperatura adimensional para esse caso, a equação (53) fornece

$$g_*^2 \phi_*'' + [(1 - \text{Pr})g_* g_*' - 4\text{Pr} m(1 - u_*^2)] \phi_*' - 4\text{Pr} u_* n \phi_* = -2\text{Pr} g_*^2 \quad (57)$$

$$\phi_*(0) = 0 \quad ; \quad \phi_*(1) = 0 \quad (58)$$

Em termos de  $\theta(u_*)$  e  $\phi_*(u_*)$  a solução geral  $\theta_*(u_*)$  pode ser descrita pela seguinte combinação linear

$$\theta_*(u_*) = \theta(u_*) + \frac{E}{2} \phi_*(u_*) \quad (59)$$

Na equação (59),  $\theta(u_*)$  é a solução das equações (49) e (50) (problema homogêneo) e  $\phi_*(u_*)$  é a solução das equações (57) e (58) (problema não homogêneo).

Igualando as equações (56) e (59) para a distribuição geral  $\theta_*(u_*)$  resulta

$$\phi_*(u_*) = \phi(u_*) - \phi(0)\theta(u_*) \quad (60)$$

As equações (56) e (60) mostram que basta resolver o problema homogêneo em  $\theta = \theta(u_*)$  (equação (49)) e o problema não homogêneo em  $\phi = \phi(u_*)$  (equação (53)) para termos também as soluções dos problemas em  $\theta_*(u_*)$  e em  $\phi_*(u_*)$ .

No caso do problema da parede adiabática em  $\phi(u_*)$  o interesse reside na determinação da temperatura de parede adiabática  $T_{wa}$ . O valor de  $T_{wa}$  pode ser calculado por

$$\phi(0) = \frac{T_{wa} - T_\infty}{U^2 / 2c_p} \quad (61)$$

ou

$$E_{ad} = \frac{2}{\phi(0)} \quad (62)$$

onde  $E_{ad} = U^2 / [c_p (T_{wa} - T_w^*)]$  é o número de Eckert adiabático.

Antes de fechar essa seção, deve-se notar que os problemas similares estudados tem como parâmetros  $m$ ,  $n$ ,  $Pr$  e  $E$ . Os parâmetros  $m$  e  $n$  não são independentes pois devem satisfazer a condição (42) expressa por  $2m-n=0$ . Essa condição surge quando se considera a função dissipação na equação de energia (equação (31)). Observa-se ainda que para  $n=0$  (cunhas isotérmicas) a condição (42) exige  $m=0$ , mostrando que apenas a placa plana tem solução similar quando a função dissipação não é desprezada. Por outro lado, se a função dissipação for desprezada, o problema das cunhas isotérmicas apresenta solução analítica. Nesse caso a condição  $2m-n=0$  não é necessária. Para  $n=0$ , as equações (49) e (50) fornecem

$$\theta(u_*) = \frac{\int_{u_*}^1 e^{-\lambda(u_*)} du_*}{\int_0^1 e^{-\lambda(u_*)} du_*} \quad (63)$$

onde

$$\lambda = \int_0^{u_*} \frac{(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr m(1-u_*^2)}{g_*^2} du_* \quad (64)$$

Na equação (64),  $g_*(u_*)$  é conhecida pois o problema hidrodinâmica é resolvido independentemente do problema térmico.  $Pr$  e  $m$  são parâmetros também conhecidos.

**Os Coeficientes de Transporte para Problemas Similares.** Sob o ponto de vista prático, os resultados mais importantes são os coeficientes de atrito locais e médios e também os números de Nusselt locais e médios. O coeficiente de atrito local  $f_a$  é definido por

$$f_a = \frac{\tau(x,0)}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (65)$$

Da equação (29), lembrando que para problemas similares  $g_* = g_*(u_*)$ ,

resulta

$$f_a = \frac{g_*(0)}{\sqrt{\frac{\rho U x}{\mu}}} = \frac{g_*(0)}{\sqrt{Re_x}} \quad (66)$$

Na equação (66),  $g_*(0)$  é uma função do parâmetro  $m$  e deve ser calculado através da solução numérica da equação (43).

O coeficiente de atrito médio  $\bar{f}_a$  é definido por

$$\bar{f}_a = \frac{\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \tau(x, 0) dx}{\frac{1}{2} \rho [U(\ell)]^2} \quad (67)$$

onde  $\ell$  é o comprimento da superfície ao longo da qual o fluido escoou. A integração da equação (67) fornece

$$\bar{f}_a = \frac{2g_*(0)}{(3m+1)\sqrt{Re_\ell}} \quad (68)$$

onde

$$Re_\ell = \frac{\rho U(\ell) \ell}{\mu} \quad (69)$$

Os números de Nusselt locais são calculados através da Lei de Fourier. Assim, para o problema em  $\theta_*(u_*)$ , resulta

$$\begin{aligned} q_w &= -K \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -K \theta_*'(0) \\ &= -K \theta_*'(0) (T_w - T_\infty) \frac{1}{\mu U} \left( \frac{\rho \mu U^3}{4x} \right)^{1/2} g_*(0) \end{aligned} \quad (70)$$

ou

$$Nu_x = \frac{q_w x}{(T_w - T_\infty) K} = \frac{hx}{K} = -\frac{1}{2} \theta_*'(0) g_*(0) \sqrt{Re_x} \quad (71)$$

Nas equações (70) e (71)  $q_w$  é o fluxo de calor local na parede e  $h$  é o coeficiente de filme local. Com base na equação (56), a equação (71) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E}{2} \phi(0) \right) \theta'(0) g_*(0) \quad (72)$$

Na equação (72),  $\theta'(0)$  é obtido da solução das equações (49) e (50) enquanto  $\phi(0)$  é obtido da solução das equações (53), (54) e (55). Para  $m$  e  $n$  fixos e tais que  $2m-n=0$ ,  $\phi(0)$  e  $\theta'(0)$  são funções do número de Prandtl Pr. Para o problema em  $\theta(u_*)$ , sem função dissipação, o número de Nusselt se escreve

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = -\frac{1}{2} \theta'(0) g_*(0) \quad (73)$$

No caso do problema em  $\phi(u_*)$ , representado pelas equações (53), (54) e (55), estamos interessados em  $\phi(0)$ . O conhecimento de  $\phi(0)$  nos permite calcular a temperatura da parede adiabática usando-se para isso a equação (61) ou (62). No caso do problema em  $\phi_*(u_*)$ , expresso pelas equações (57) e (58),  $T_w = T_\infty$  e a diferença  $T_w - T_\infty$  não pode ser usada na definição do número de Nusselt. Nesse caso definimos um número de Nusselt modificado da seguinte maneira

$$\tilde{Nu}_x = \frac{q_w x}{(u^2/2c_p)K} = \frac{\tilde{h}x}{K} \quad (74)$$

Assim, a aplicação da Lei de Fourier fornece

$$\tilde{Nu}_x = -\frac{1}{2} \phi'_*(0) g_*(0) \sqrt{Re_x} \quad (75)$$

Usando-se a equação (60), a equação (75) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{\tilde{Nu}_x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1}{2} \phi(0) \theta'(0) g_*(0) \quad (76)$$

Na equação (76),  $\phi(0)$  e  $\theta'(0)$  são obtidos da solução do problema da parede adiabática ( $\phi'(0)=0$ ) e da solução do problema homogêneo (sem função dissipação), respectivamente.

O número de Nusselt médio, para o problema em  $\theta_*(u_*)$ , é definido por

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}l}{K} = \frac{\int_0^l q_w dx}{[T_w(l) - T_\infty] K} \quad (77)$$

A integração da equação (77) fornece

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = \frac{-g_*(0)\theta'_*(0)}{m+2n+1} \quad (78)$$

A equação (56) permite substituir  $\theta'_*(0)$  na equação (78) resultando

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = -\frac{g_*(0)}{m+2n+1} \left(1 - \frac{E}{2} \phi(0)\right) \theta'(0) \quad (79)$$

Para o problema em  $\theta(u_*)$ , representado pelas equações (49) e (50),  $E=0$  e o número de Nusselt médio se escreve

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = -\frac{g_*(0)}{m+2n+1} \theta'(0) \quad (80)$$

No caso do problema em  $\phi_*(u_*)$ , expresso pelas equações (57) e (58), o número de Nusselt médio modificado é definido por

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}l}{K} = \frac{\int_0^l q_w dx}{\frac{[U(l)]}{2c_p} K} \quad (81)$$

A integração da equação (81) fornece

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = \frac{-g_*(0)\phi'_*(0)}{5m+1} \quad (82)$$

Usando-se a equação (60), a equação (82) torna-se

$$\frac{\bar{N}u}{\sqrt{Re_\xi}} = \frac{g_*(0)}{5m+1} \phi(0) \theta'(0) \quad (83)$$

Deve-se observar que a equação (67) só pode ser integrada se  $m > -1/3$ . Para  $m = -1/3$ , a equação (68) mostra que  $f_a \rightarrow \infty$ , isto é, a integral em (67) diverge. Nas equações (78), (79) e (80) deve-se ter  $m+2n > -1$  pois, do contrário, a integral em (77) diverge. A equação (81) também só pode ser integrada se  $m > -1/5$ . Para  $m = -1/5$ , as equações (82) e (83) mostram que  $\bar{N} \rightarrow \infty$ . A integral em (81) diverge. Além dessas restrições deve-se ter  $2m-n=0$ , para a existência de soluções similares quando a função dissipação não é desprezada ( $E \neq 0$ ).

**Problemas Não Similares.** Muitos problemas das camadas limite térmica e hidrodinâmica não apresentam soluções similares. No presente trabalho será considerada a não similaridade causada pela forma da velocidade potencial ( $U = Ax^m$ ) ou pela forma da temperatura na parede ( $T_w - T_\infty = Bx^n$ ). No caso da inclusão da função dissipação na equação de energia, pode-se ter não similaridade se  $2m-n \neq 0$ . Nesse caso o número de Eckert não será constante e dependerá da coordenada  $\xi$  ao longo do escoamento.

Um dos métodos frequentemente usado para a obtenção de soluções não similares é o chamado método de similaridade local [2], [3]. De acordo com esse método o lado direito das equações (31) e (32) é desprezado. As equações de (31) até (36) são escritas agora da seguinte maneira

$$g_*'' g_*'^2 - 4\Omega(1-u_*^2)g_*' + 2(1-3\Omega)u_* g_* = 0 \quad (84)$$

$$g_* \theta_*'' + \{(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr \Omega(1-u_*^2)\} \theta_*' - 4Pr u_* \Gamma \theta_* + Pr g_*'^2 E = 0 \quad (85)$$

$$g_*(\xi, 1) = 0 \quad (86)$$

$$g_*(\xi, 0) g_*'(\xi, 0) = -4\Omega \quad (87)$$

$$\theta_*(\xi, 0) = 1 \quad (88)$$

$$\theta_*(\xi, 1) = 0 \quad (89)$$

Nas equações de (84) até (89), os parâmetros  $\Omega$ ,  $\Gamma$  e  $E$  já foram definidos pelas equações (15), (16) e (18) respectivamente e são funções conhecidas de  $\xi = x/L$ . A variável  $\xi$  pode ser considerada como um parâmetro em posição  $x$  constante ao longo do escoamento. Embora as equações (84) e (85) sejam equações diferenciais parciais, elas podem ser tratadas como equações diferenciais ordinárias e resolvidas por técnicas numéricas próprias dos problemas similares.

Um método mais preciso que o método de similaridade local é o chamado método de não similaridade local [2], [3]. Para usar o método definimos as seguintes variáveis

$$j(\xi, u_*) = \frac{\partial g_*}{\partial \xi} \quad ; \quad s(\xi, u_*) = \frac{\partial \theta_*}{\partial \xi} \quad (90)$$

Depois da substituição das equações (90), as equações de (31) até (36) são escritas como

$$g_*'' g_*^2 - 4\Omega(1-u_*^2)g_*' + 2(1-3\Omega)u_* g_* = 4u_* \xi j \quad (91)$$

$$g_*^2 \theta_* + [(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr \Omega(1-u_*^2)]\theta_*' - 4Pr u_* \Gamma \theta_* + Pr g_*^2 E = 4Pr u_* \xi s \quad (92)$$

$$g_*(\xi, 1) = 0 \quad ; \quad g_*(\xi, 0) g_*'(\xi, 0) = -4\Omega \quad (93)$$

$$\theta_*(\xi, 0) = 1 \quad ; \quad \theta_*(\xi, 1) = 0 \quad (94)$$

O próximo passo é derivar as equações de (91) até (94) em relação a  $\xi$ .

$$g_*^2 j'' - 4\Omega(1-u_*^2)j' + 2[g_* g_*'' - 3u_*(1-\Omega)]j - 2 \frac{d\Omega}{d\xi} [2(1-u_*^2)g_*' + 3u_* g_*] = 0 \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
 g_*^2 s'' + [(1-Pr)g_* g_*' - 4Pr \Omega(1-u_*)] s_*' - 4Pr u_* (1+\Gamma) s + \\
 + 2g_* j \theta_*'' + [(1-Pr)(g_* j' + g_*' j) - 4Pr \frac{d\Omega}{d\xi} (1-u_*^2)] \theta_*' - \\
 - 4Pr u_* \frac{d\Gamma}{d\xi} \theta_* + Pr(2Eg_* j + \frac{dE}{d\xi} g_*^2) = 0
 \end{aligned} \quad (96)$$

$$j(\xi, 1) = 0 \quad (97)$$

$$g_*(\xi, 0) j_*'(\xi, 0) + g_*'(\xi, 0) j(\xi, 0) = -4 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \quad (98)$$

$$s(\xi, 0) = 0 \quad ; \quad s(\xi, 1) = 0 \quad (99)$$

Nas equações (95) e (96) foram desprezados os termos contendo  $\partial j / \partial \xi$  e  $\partial s / \partial \xi$ , respectivamente. As equações (95) e (96) são equações subsidiárias às equações (91) e (92), as quais foram integralmente preservadas, pois a aproximação foi feita nas equações (95) e (96). Tem-se um sistema de quatro equações para as incógnitas  $g_*(\xi, u_*)$ ,  $\theta_*(\xi, u_*)$ ,  $j(\xi, u_*)$  e  $s(\xi, u_*)$ . Para  $x$  constante,  $\xi$  será constante e o sistema das equações (91) e (99) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Deve-se notar que o problema hidrodinâmico está desacoplado do problema térmico. Vários outros métodos, como por exemplo diferenças finitas, existem para a solução de problemas não similares. Esses outros métodos não serão aqui discutidos visto que eles não foram usados. Deve-se ainda notar que poderíamos preservar integralmente as equações subsidiárias e derivá-las em relação a  $\xi$ . A aproximação seria feita nessas últimas equações. Por esse motivo pode-se dizer que o método de similaridade local é um modelo de uma equação, enquanto o método de não similaridade local é um modelo de duas equações e o método caracterizado por uma dupla derivação em relação a  $\xi$  seria um modelo de três equações.

Os coeficientes de transporte para os problemas não similares são calculados da mesma maneira que para os problemas similares. A única diferença é que nas equações (66) e (71) deve-se substituir  $g_*(0)$  por  $g_*(\xi, 0)$  e  $\theta_*'(0)$  por  $\theta_*'(\xi, 0)$ . Os valores médios são obtidos por integração dos valores locais levando-se em conta a dependência com a variável  $\xi$ .

## MÉTODO NUMÉRICO

A integração das equações das camadas limite hidrodinâmica e térmica foi feita usando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para a aplicação desse método, torna-se necessário o conhecimento do valor da função a ser integrada no ponto inicial e também da derivada da função nesse mesmo ponto inicial. Como as equações diferenciais são de segunda ordem (quantidade de movimento e energia) o conhecimento de dois valores iniciais permite que a integração seja feita passo a passo na direção perpendicular ao escoamento. Todavia não são conhecidos todos os valores iniciais necessários à integração pelo método de Runge-Kutta. Não se conhece  $g'_*(\xi, 0)$  e  $\theta'_*(\xi, 0)$ . O que se faz é arbitrar valores para as condições iniciais desconhecidas e refinar esses valores usando-se para isso o método de Newton-Raphson e as condições conhecidas no final do intervalo. Quando se usa o modelo de duas equações, devem ser arbitrados os valores  $g'_*(\xi, 0)$ ,  $\theta'_*(\xi, 0)$ ,  $j'(\xi, 0)$  e  $s'(\xi, 0)$ . Os valores  $g_*(\xi, 1) = 0$ ,  $\theta_*(\xi, 1) = 0$ ,  $j(\xi, 1) = 0$  e  $s(\xi, 1) = 0$  são usados para refinar as condições iniciais que foram arbitradas. Trata-se de uma técnica numérica bem conhecida chamada Método do Tiro.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Cunhas Isotérmicas ( $n=0$ ) Sem Função Dissipação ( $E=0$ ). A seguir são apresentadas as Tabelas 1 e 2 que dão os valores de  $f_a \sqrt{Re_x}$  e  $Nu_x / \sqrt{Re_x}$  para vários valores de  $m$  e  $Pr = 0,7$ . Esses resultados são comparados com aqueles de Noronha [10] e Evans [11]. Pode-se observar que a concordância é muito boa. Nesse caso o problema é similar e não há a dependência com  $\xi = x/L$ .

Tabela 1. Valores de  $f_a \sqrt{Re_x}$  para  $n=0$  e  $E=0$ 

$m$	$f_a \sqrt{Re_x}$	$f_a \sqrt{Re_x}$ [10]	$f_a \sqrt{Re_x}$ [11]
0	0,664115	0,664115	0,6641145
1/3	1,514895	1,514894	1,5148951
2/3	2,045320	2,045319	2,0453194
1	2,465175	2,465175	2,4651752
3	4,178221	4,178220	—
5	5,370560	5,370560	5,3705599
10	7,570261	7,570260	—
1000	75,457203	75,457153	—

Tabela 2. Valores de  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  para  $Pr=0,7$ ,  $n=0$  e  $E=0$ 

m	$Nu_x/\sqrt{Re_x}$	$Nu_x/\sqrt{Re_x}$ [10]	$Nu_x/\sqrt{Re_x}$ [11]
0	0,292682	0,292680	0,292678
1/3	0,384162	0,384156	0,384156
2/3	0,444864	0,444858	0,444859
1	0,495831	0,495866	0,495865
3	0,724021	0,723996	—
5	0,894155	0,894051	0,894047
10	1,218926	1,218771	—
1000	11,712130	11,711330	—

Deve-se ainda notar que os resultados de [10] e [11] foram obtidos pela transformação clássica de Blasius enquanto os presentes resultados foram obtidos através da transformação de Crocco (equações (43) e (49) com as condições de contorno (45), (46), (50) e  $n=0$ ).

As Figuras 1 e 2 apresentam as distribuições  $g_*(u_*)$  e  $\theta(u_*)$  para vários valores de  $\beta = (2m)/(m+1)$  e para  $Pr = 0,7$ .

Placa Plana Isotérmica ( $n=0$ ) com Função Dissipação. Nesse caso tem-se um problema similar pois a condição  $2m-n=0$  é satisfeita ( $m=0$  e  $n=0$ ). O número de Eckert  $E$  não depende da variável  $\xi$ . A solução da equação (43) com as condições de contorno (45) e (46) e com  $m=0$  fornece o seguinte valor para  $g_*(0)$

$$g_*(0) = 0,664 \quad (100)$$

Da equação (66) resulta

$$f_a \sqrt{Re_x} = 0,664 \quad (101)$$

O coeficiente de atrito médio  $\bar{F}_a$  é obtido da equação (68) fazendo-se  $m=0$ .

$$\bar{F}_a = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}} \quad (102)$$

Os resultados expressos pelas equações (101) e (102) estão em perfeita concordância com aqueles encontrados em [9].

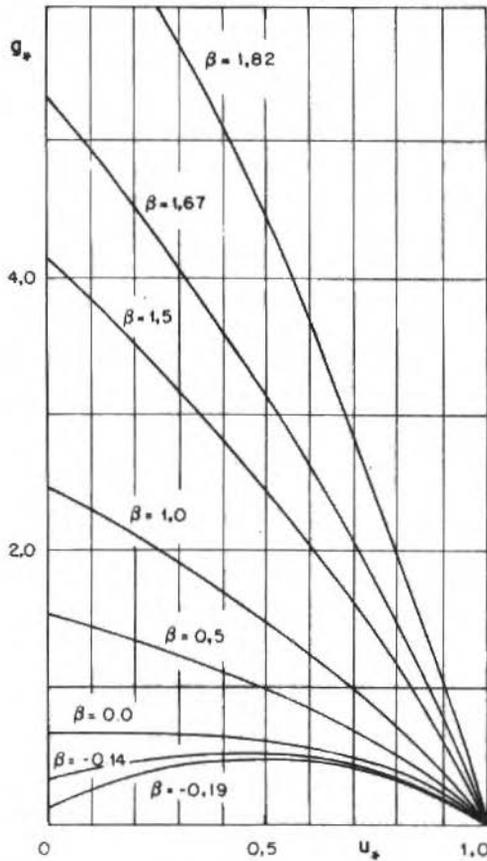


Figura 1. Distribuição  $g_*(u_*)$  para vários ângulos da cunha.  
 $n = 0$ ,  $Pr = 0,7$

A Tabela 3 apresenta os valores de  $- \theta'(0)$  e  $\theta(0)$  para vários números de Prandtl. Esses valores foram obtidos das soluções das equações (49) e (53) com  $m=0$  e  $n=0$ .

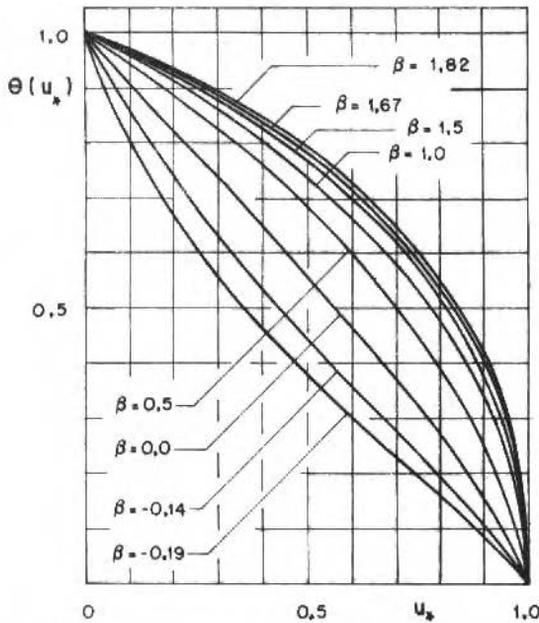


Figura 2. Distribuição  $\theta(u_*)$  para vários ângulos da cunha.  $n=0, E=0, Pr=0,7$

Tabela 3. Valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  para vários valores do número de Prandtl.  $m=0, n=0$

Pr	$-\theta'(0)$	$\phi(0)$
0,6	0,831	0,770
0,7	0,883	0,835
0,8	0,925	0,895
0,9	0,964	0,950
1,0	1,000	1,000
1,1	1,036	1,050
7,0	1,943	2,515
10,0	2,199	2,965

Os valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  podem ser ajustados com boa precisão através das seguintes fórmulas

$$-\theta'(0) = \sqrt[3]{Pr} \quad 0,6 \leq Pr \leq 10 \quad (103)$$

$$\phi(0) = \sqrt{\text{Pr}} \quad 0,6 \leq r \leq 10 \quad (104)$$

Substituindo-se nas equações (72), (73) e (76) os valores de  $g_*(0)$ ,  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  dados por (100), (103) e (104) respectivamente, obtem-se

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \left( 1 - \frac{E}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) \quad (105)$$

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (E=0) \quad (106)$$

$$\frac{\tilde{\text{Nu}}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = -0,332 \text{Pr}^{5/6} \quad (107)$$

A equação (61) fornece a temperatura de parede adiabática  $T_{wa}$

$$T_{wa} = T_\infty + \sqrt{\text{Pr}} \frac{U^2}{2c_p} \quad (108)$$

Para os valores médios dos números de Nusselt as equações (79), (80) e (83) dão

$$\frac{\bar{\text{Nu}}}{\sqrt{\text{Re}_\lambda}} = 0,664 \sqrt[3]{\text{Pr}} \left( 1 - \frac{E}{2} \sqrt{\text{Pr}} \right) \quad (109)$$

$$\frac{\bar{\text{Nu}}}{\sqrt{\text{Re}_\lambda}} = 0,664 \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (E=0) \quad (110)$$

$$\frac{\bar{\tilde{\text{Nu}}}}{\sqrt{\text{Re}_\lambda}} = -0,664 \text{Pr}^{5/6} \quad (111)$$

Ressalta-se que os valores dados pelas equações (103) até (111) estão de acordo com os resultados apresentados em [9], mostrando que a transformação de Crocco reproduz com boa precisão soluções clássicas encontradas na literatura.

A Figura 3 mostra a temperatura adimensional  $\theta_*$  como função de  $u_*$  para a placa plana isotérmica ( $m=0$  e  $n=0$ ) e número de Prandtl igual a 0,7. As curvas são parametrizadas pelo número de Eckert E. A temperatura  $\theta_*(u_*)$  foi calculada usando-se a combinação linear expressa pela equação (56).

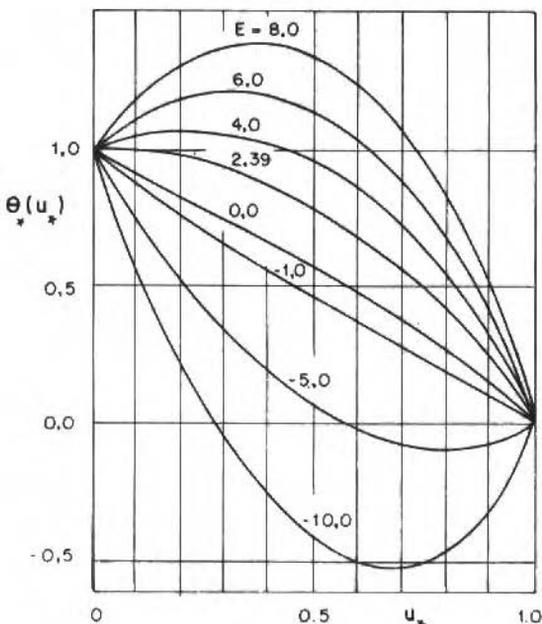


Figura 3. Distribuição  $\theta_*(u_*)$  para placa isotérmica e número de Prandtl igual a 0,7.  $h=0$ ,  $m=0$

**Canal Convergente ( $m=-1$ ) com Parede Não Isotérmica ( $n=-2$ ).** Trata-se de um problema similar no qual  $U=Ax^{-1}$  ( $A<0$ ) e  $T_w-T_\infty=Bx^{-2}$ . A condição  $2m-n=0$  é satisfeita mostrando que o número de Eckert não depende da variável  $\xi$ . A Figura 4 mostra o tipo de escoamento em estudo.

Nesse problema a velocidade potencial  $U(x)$  é negativa e  $m=-1$ . A equação (29) deve ser substituída pela seguinte equação

$$\tau = - \sqrt{-\frac{\rho \mu U^3}{4x}} g_*(u_*) \tag{112}$$

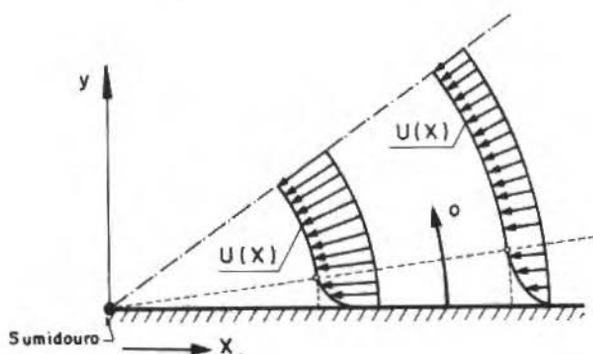


Figura 4. Escoamento num canal convergente

As equações do problema hidrodinâmico se escrevem

$$g_*^2 g_*'' - 4(1-u_*^2)g_*' - 8u_*g_* = 0 \quad (113)$$

$$g_*(1) = 0 \quad g_*(0)g_*'(0) = -4 \quad (114)$$

A equação (113) pode ser reescrita como

$$\frac{dg_*'}{du_*} = - \frac{d}{du_*} \left( \frac{4(1-u_*^2)}{g_*} \right) \quad (115)$$

Integrando-se (115) uma vez, obtém-se

$$g_*' = - \frac{4(1-u_*^2)}{g_*} \quad (116)$$

Onde a segunda das condições (114) foi satisfeita. Integrando-se (116) resulta

$$g_* = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} (1-u_*)(u_*+2)^{1/2} \quad (117)$$

onde a primeira das condições (114) foi satisfeita. A equação (117)

representa um dos raros problemas da camada limite hidrodinâmica para o qual se tem uma solução analítica. Da equação (117) resulta

$$g_*(0) = 2,309401 \quad (118)$$

e ainda

$$f_a \sqrt{\text{Re}_x} = -2,309401 \quad (119)$$

onde

$$\text{Re}_x = (-\rho Ux) / \mu .$$

O valor do produto  $f_a \sqrt{\text{Re}_x}$  dado pela equação (119) concorda exatamente com o valor apresentado em [9]. Deve-se notar que o coeficiente de atrito médio  $\bar{f}_a$  não pode ser calculado. Para  $m=-1$  a equação (67) diverge.

Na Tabela 4 são encontrados os valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  para vários números de Prandtl. Esses valores foram obtidos pela integração das equações da camada limite térmica com  $m=-1$  e  $n=-2$  e também levando-se em conta (112), já que a velocidade potencial  $U$  é negativa.

Tabela 4. Valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  para vários valores do número de Prandtl.  $m=-1$ ,  $n=-2$

Pr	$-\theta'(0)$	$\phi(0)$
0,7	0,656	0,836
1,0	0,750	1,000
2,5	1,049	1,567
5,0	1,345	2,170
7,5	1,552	2,610
10,0	1,717	2,967

Os valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  podem ser aproximados, com uma precisão típica de 1%, através das seguintes equações

$$-\theta'(0) = 0,749 \text{ Pr}^{0,362} \quad (120)$$

$$\phi(0) = 0,999 \text{ Pr}^{0,477} \quad (121)$$

Para se calcular os números de Nusselt locais basta substituir nas equações (72), (73) e (76) os valores de  $g_*(0)$ ,  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  dados por (118), (120) e (121) respectivamente.

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,865 \text{ Pr}^{0,362} \left( 1 - \frac{E}{2} 0,999 \text{ Pr}^{0,477} \right) \quad (122)$$

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,865 \text{ Pr}^{0,362} \quad (E=0) \quad (123)$$

$$\frac{\bar{\text{Nu}}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = -0,864 \text{ Pr}^{0,839} \quad (124)$$

Da equação (61) calcula-se a temperatura da parede adiabática

$$T_{w_a} = T_\infty + 0,999 \text{ Pr}^{0,477} \frac{U^2}{2c_p} \quad (125)$$

Os valores médios dos vários números de Nusselt não podem ser calculados. Com  $m+2n=-5$  e  $m=-1$  as integrais em (77) e (81) divergem.

Os resultados para a temperatura adimensional  $\theta(u_*)$  são mostrados na Figura 5 para números de Prandtl variando de 0,7 a 10.

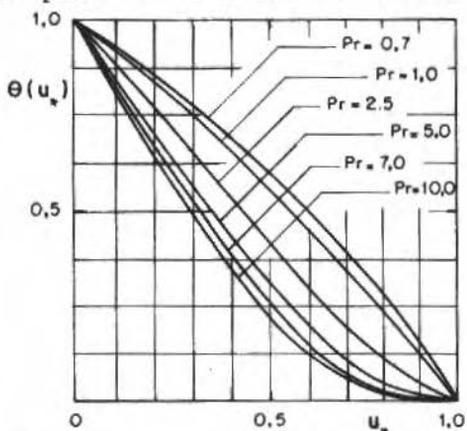


Figura 5. Distribuição  $\theta(u_*)$  para o canal convergente.  $m=-1$ ,  $n=-2$ ,  $E=0$

Na Figura 6 é mostrada a distribuição  $\phi(u_*)$  (canal com parede adiabática) para vários números de Prandtl.

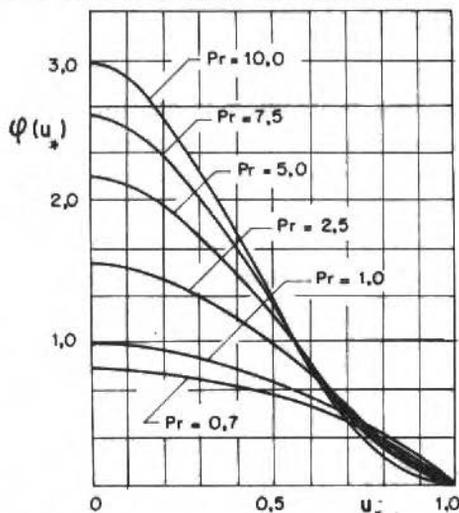


Figura 6. Distribuição  $\phi(u_*)$  para o canal convergente.  
 $m = -1$ ,  $n = -2$

Na Figura 7 tem-se a distribuição  $\phi_*(u_*)$  para o canal convergente com  $T_w = T_\infty$ . As curvas são parametrizadas pelo número de Prandtl.

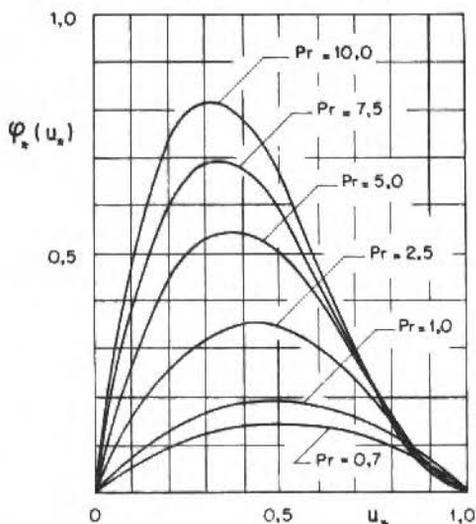


Figura 7. Distribuição  $\phi_*(u_*)$  para o canal convergente.  
 $m = -1$ ,  $n = -2$

A função  $\phi_*(u_*)$  foi calculada a partir da equação (60) já que  $\phi(u_*)$  e  $\theta(u_*)$  são conhecidas. Deve-se ainda notar que a distribuição  $\theta_*(u_*)$  pode ser calculada através da equação (56).

**Escoamento Plano com Ponto de Estagnação.** Nesse caso tem-se  $m=1$ . Se a função dissipação é incluída na equação de energia, a condição de similaridade  $2m-n=0$  obriga que  $n$  seja igual a dois. A parede não será portanto isotérmica. Se a função dissipação não é incluída na equação de energia então a condição  $2m-n$  não é necessária para se obter soluções similares. Esse último caso equivale a fazer  $E=0$  na equação da camada limite térmica. A Figura 8 mostra o escoamento plano com ponto de estagnação.

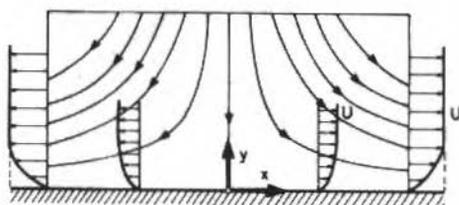


Figura 8. Escoamento plano com ponto de estagnação

A solução da equação (43) com  $m=1$  e com as condições de contorno (45) e (46) fornece

$$g_*(0) = 2,4652 \quad (126)$$

O coeficiente de atrito local  $f_a$  é obtido da equação (66)

$$f_a = \frac{2,4652}{\sqrt{Re_x}} \quad (127)$$

Para o coeficiente de atrito médio  $\bar{f}_a$ , a equação (68) fornece ( $m=1$ )

$$\bar{f}_a = \frac{1,2326}{\sqrt{Re_\ell}} \quad (128)$$

As equações (127) e (128) estão em perfeita concordância com os re-

sultados de [10] e [11]. Na Figura 1 está apresentada a distribuição  $g_*(u_*)$  para  $\beta=1$ . Como  $\beta=(2m)/(m+1)$ , essa curva corresponde ao presente problema onde  $m=1$ .

Na Tabela 5 são mostrados os valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  para alguns valores do número de Prandtl. Esses resultados foram obtidos pela integração das equações (49) e (53) com suas respectivas condições de contorno e ainda fazendo-se  $m=1$  e  $n=2$ .

Tabela 5. Valores de  $-\theta'(0)$  e  $\phi(0)$  para vários valores do número de Prandtl.  $m=1$ ,  $n=2$

Pr	$-\theta'(0)$	$\phi(0)$
0,7	0,691	0,835
1,0	0,789	1,000
2,5	1,100	1,567
5,0	1,406	2,170
7,5	1,621	2,610
10	1,791	2,968

Na Tabela 6 são apresentados os valores de  $-\theta'(0)$  para  $m=1$ ,  $n=0$  e  $E=0$  em função do número de Prandtl. Nesse caso a parede é iso térmica.

Tabela 6. Valores de  $-\theta'(0)$  para vários números de Prandtl.  $m=1$ ,  $n=0$ ,  $E=0$

Pr	0,7	1,0	2,5	5,0	7,5	10
$-\theta'(0)$	0,406	0,463	0,655	0,846	0,979	1,085

Os resultados das Tabelas 5 e 6 podem ser aproximados, com uma precisão menor que 1%, pelas seguintes equações

$$-\theta'(0) = 0,788 \text{ Pr}^{0,358} \quad (n=2) \quad (129)$$

$$\phi(0) = 0,999 \text{ Pr}^{0,477} \quad (130)$$

$$-\theta'(0) = 0,464 \text{ Pr}^{0,371} \quad (n=0) \quad (131)$$

Os números de Nusselt locais são calculados com as equações (72), (73) e (76).

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,971 Pr^{0,358} \left( 1 - \frac{E}{2} 0,999 Pr^{0,477} \right) \quad (132)$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,971 Pr^{0,358} \quad (n=2) \quad (E=0) \quad (133)$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = 0,572 Pr^{0,371} \quad (n=0) \quad (E=0) \quad (134)$$

$$\frac{\bar{Nu}_x}{\sqrt{Re_x}} = -0,970 Pr^{0,835} \quad (135)$$

A equação (61) fornece a temperatura da parede adiabática.

$$T_w = T_\infty + 0,999 Pr^{0,477} \frac{U^2}{2c_p} \quad (136)$$

Comparando-se a equação (136) com a equação (125) conclui-se que o canal convergente e o escoamento plano com ponto de estagnação apresentam a mesma expressão para a temperatura de parede adiabática. Os números de Nusselt médios são calculados com o auxílio das equações (79), (80) e (83).

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = 0,324 Pr^{0,358} \left( 1 - \frac{E}{2} 0,999 Pr^{0,477} \right) \quad (137)$$

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = 0,324 Pr^{0,358} \quad (n=2) \quad (E=0) \quad (138)$$

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = 0,572 Pr^{0,371} \quad (n=0) \quad (E=0) \quad (139)$$

$$\frac{\bar{Nu}}{\sqrt{Re}_l} = -0,323 Pr^{0,835} \quad (140)$$

Comparando-se a equação (139) com a equação (134) conclui-se que pa

ra a parede isotérmica ( $n=0$ ) o número de Nusselt local para  $x=l$  é igual ao número de Nusselt médio. Isso acontece porque o fluxo de calor é constante ao longo da parede e a diferença  $T_w - T_\infty$  também é constante, acarretando dessa maneira um coeficiente de troca de calor constante.

A Figura 9 mostra a variação da temperatura adimensional  $\theta$  com  $u_*$  para números de Prandtl variando de 0,7 a 10,  $m=1$ ,  $n=2$  e sem função dissipação ( $E=0$ ). Na Figura 10 tem-se  $\theta = \theta(u_*)$  para  $m=1$ ,  $n=0$ ,  $E=0$  e números de Prandtl variando também entre 0,7 a 10.

A Figura 11 apresenta a distribuição  $\phi(u_*)$  (parede adiabática). As curvas são parametrizadas pelo número de Prandtl. As distribuições de  $\theta_*(u_*)$  e  $\phi_*(u_*)$  podem ser calculadas através das equações (56) e (60) respectivamente.

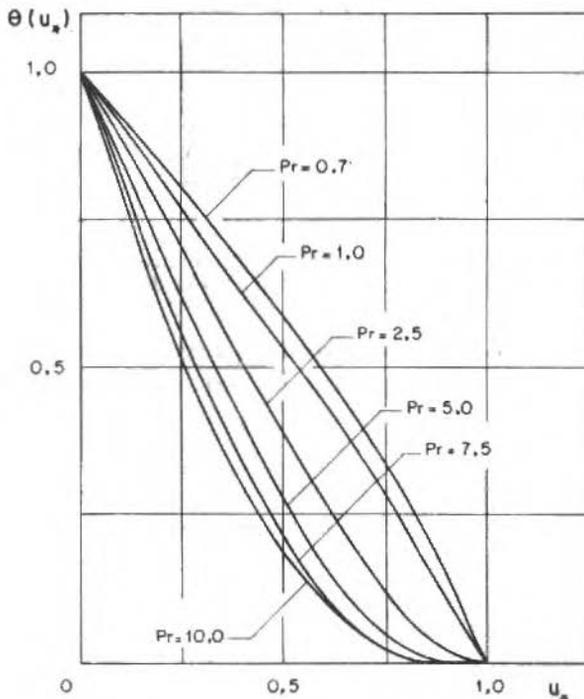


Figura 9. Distribuição  $\theta(u_*)$  para o escoamento plano com ponto de estagnação.  $m=1$ ,  $n=2$ ,  $E=0$

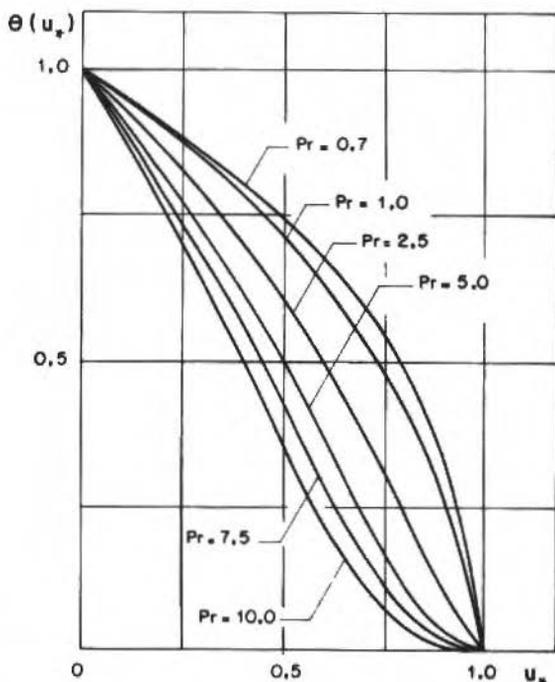


Figura 10. Distribuição  $\theta(u_*)$  para o escoamento plano com ponto de estagnação.  $m=1$ ,  $n=0$ ,  $E=0$

**Cilindro em Escoamento Transversal.** Trata-se de um problema não similar devido à forma da velocidade  $U(x)$ . A forma da velocidade de potencial é a seguinte

$$U(x) = 2U_{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{R} \right) = 2U_{\infty} \operatorname{sen}(\xi) \quad (141)$$

onde  $U_{\infty}$  é a velocidade do fluido não perturbado,  $R$  é o raio do cilindro e  $x$  é a distância circunferencial medida a partir do ponto de estagnação. Consideração será dada ao caso de superfície isotérmica. Da equação (16) resulta  $\Gamma=0$ . Substituindo a equação (141) nas equações (15) e (18) resulta

$$\Omega = \xi \cot g(\xi) \quad (142)$$

$$E = 4E_{\infty} \operatorname{sen}^2(\xi) \quad (143)$$

onde

$$E_{\infty} = \frac{U_{\infty}^2}{c_p (T_w - T_{\infty})} \quad (144)$$

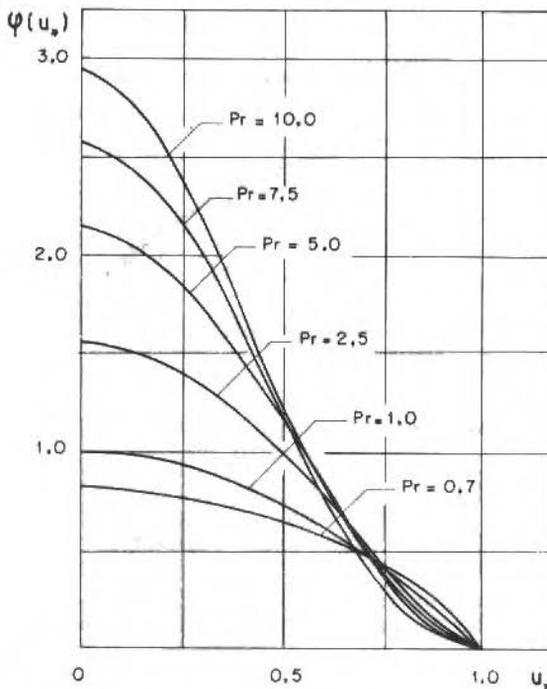


Figura 11. Distribuição  $\psi(u_*)$  para o escoamento plano com ponto de estagnação.  $m=1$ ,  $n=2$

Para a solução por similaridade local (modelo de uma equação) as equações (142) e (143) são substituídas nas equações (84) e (85) com as condições de contorno de (86) até (89). Para a solução pelo método de não similaridade local as equações (142) e (143) são usadas em conjunto com as equações de (91) até (99). Para  $\xi$  constante, esse sistema é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser resolvido pelos métodos clássicos.

Na Figura 12 são apresentados os resultados para o produto  $f_a \sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi = x/R$ . Nessa mesma figura são mostrados os resultados obtidos por Sparrow [2] usando modelos de duas e três equações e os resultados obtidos por Schönauer [12] e Terril [13] usando os métodos de diferenças finitas e diferencial diferenças finitas, respectivamente.

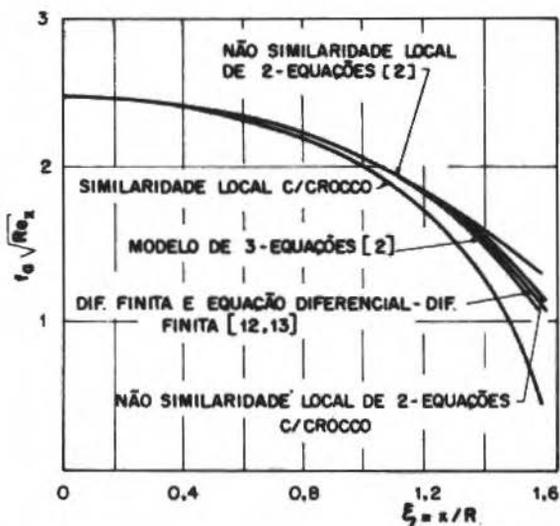


Figura 12. Variação do produto  $f_a \sqrt{Re_x}$  ao longo da superfície de um cilindro em escoamento transversal

Os resultados de [12] e [13] coincidem totalmente no domínio da Figura 12 e são considerados exatos. Observa-se que o modelo de duas equações (não similaridade local), com o uso da transformação de Crocco, apresenta resultados mais próximos aos considerados exatos de que o seu correspondente de Sparrow [2]. Por outro lado, observa-se que o método de similaridade local (modelo de uma equação) só apresenta bons resultados para baixos valores de  $\xi$ .

Nas Figuras 13, 14 e 15 são mostrados resultados típicos do quociente  $Nu_x / \sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi$ . Nessas figuras  $\Gamma=0$  (cilindro isotérmico) e  $Pr=0,7$ . A Figura 13 é para  $E_\infty=-4$  enquanto as Figuras 14 e 15 são para  $E_\infty=0$  e  $E_\infty=4$ , respectivamente.

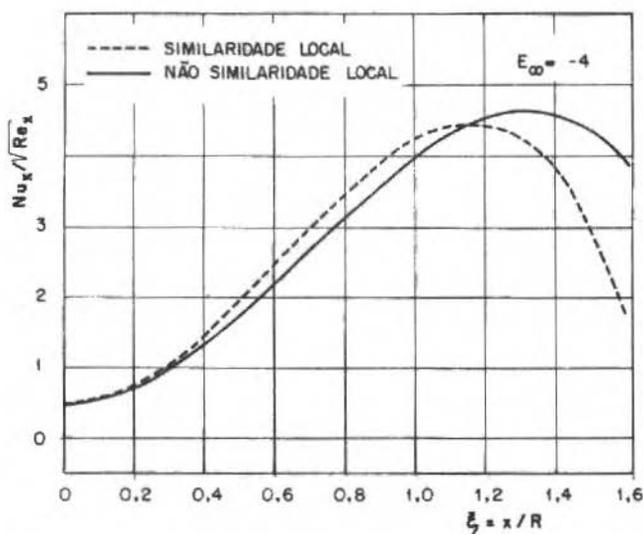


Figura 13.  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi$  para o cilindro em escoamento transversal.  $E_\infty = -4$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\Gamma = 0$

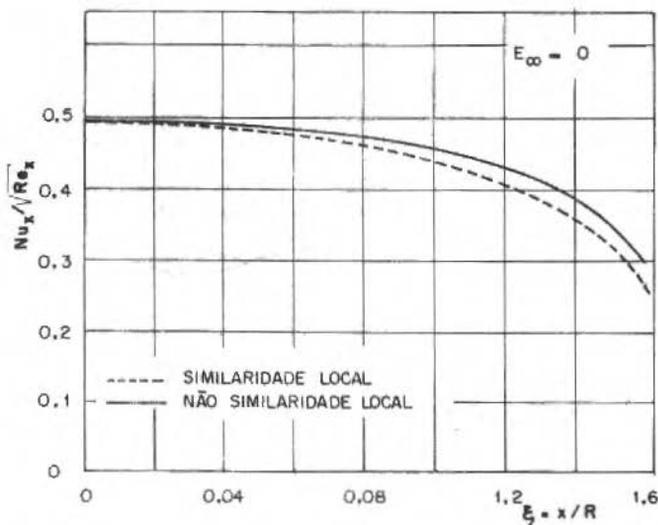


Figura 14.  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi$  para o cilindro em escoamento transversal.  $E_\infty = 0$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\Gamma = 0$

**Escoamento Desacelerado de Howarth.** Outro conhecido exemplo de escoamento não similar devido à forma da velocidade potencial é o escoamento desacelerado de Howarth, para o qual

$$U(x) = U_\infty \left(1 - \frac{x}{L}\right) = U_\infty (1 - \xi) \quad (145)$$

Essa distribuição de velocidade potencial pode ser interpretada como a que ocorre numa placa plana que começa em  $x=0$  e termina numa parede infinita, perpendicular à primeira em  $x=L$ . A substituição da equação (145) nas equações (15) e (18) fornece

$$\Omega = \frac{\xi}{\xi - 1} \quad (146)$$

$$E = E_\infty (1 - \xi)^2 \quad (147)$$

onde  $E_\infty$  é dado pela equação (144). Como no caso de cilindro em escoamento transversal, será considerada a situação em que a temperatura da placa é constante ( $\Gamma=0$ ).

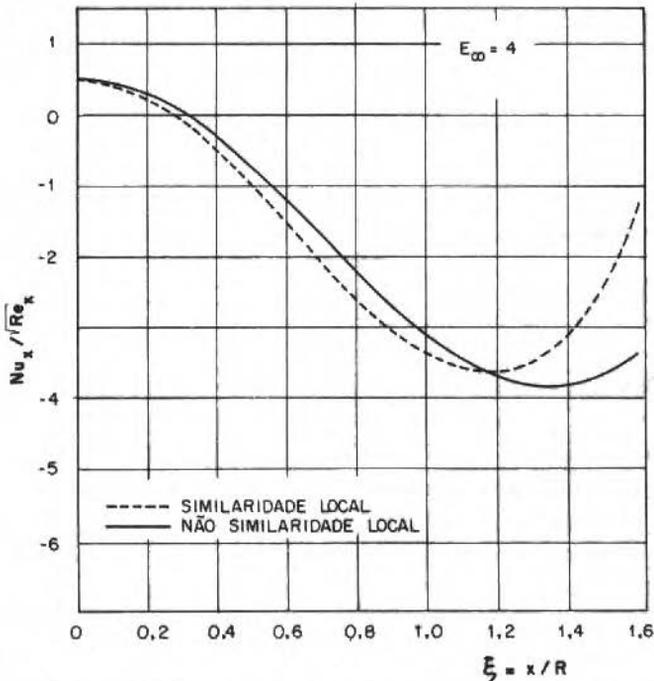


Figura 15.  $Nu_x / \sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi$  para o cilindro em escoamento transversal.  $E_\infty=4$ ,  $Pr=0,7$ ,  $\Gamma=0$

Na solução por similaridade local as equações (146) e (147) são usadas em conjunto com as equações numeradas de (84) e (89). Para a solução por não similaridade local deve-se usar (146) e (147) em conjunto com as equações de (91) até (99). Como foi feito anteriormente (cilindro em escoamento transversal) o número de Prandtl será mantido constante e igual a 0,7.

A Figura 16 apresenta os resultados para o produto  $f_a \sqrt{Re_x}$  como função de  $\xi = x/L$ . Na Figura 16 são mostrados ainda os resultados obtidos por Sparrow [2] usando modelos de duas e três equações e aqueles obtidos por Schönauer [12] e Smith e Clutter [14] usando os métodos de diferenças finitas e diferencial diferenças finitas, respectivamente.

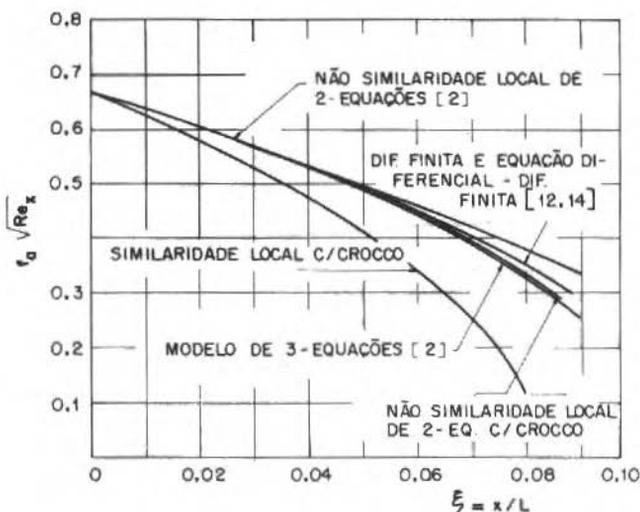


Figura 16. Variação do produto  $f_a \sqrt{Re_x}$  em função de  $\xi$  para o escoamento desacelerado de Howarth

Aqui também os resultados de [12] e [14] coincidem totalmente e podem ser considerados exatos. Na Figura 16 pode-se observar que o modelo de duas equações, usando-se a transformação de Crocco, se aproxima mais da solução exata do que o modelo de três equações de [2]. O modelo de similaridade local (modelo de uma equação) apresenta resultados bastante discrepantes em relação aos outros.

Nas Figuras 17, 18 e 19 são mostrados resultados típicos para  $Nu_x / \sqrt{Re_x}$  em função de  $\xi$ .

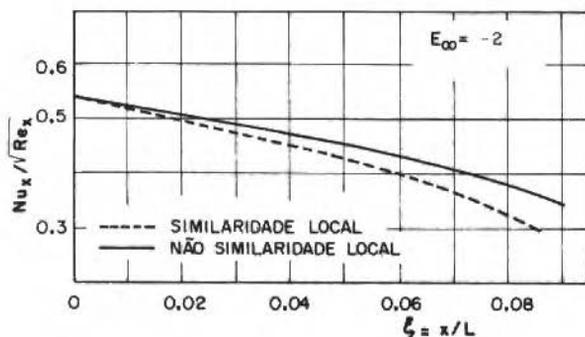


Figura 17.  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  em função de  $\xi$  para o escoamento desa celerado de Howarth.  $E_{\infty} = -2$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\Gamma = 0$

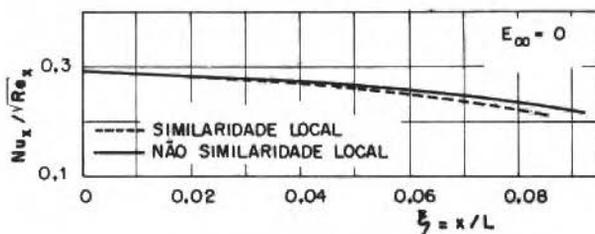


Figura 18.  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  em função de  $\xi$  para o escoamento desa celerado de Howarth.  $E_{\infty} = 0$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\Gamma = 0$

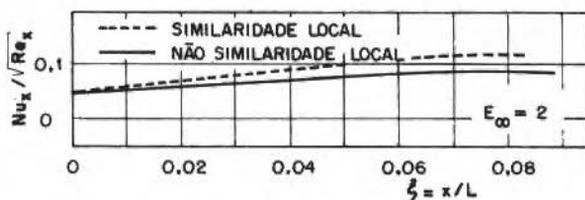


Figura 19.  $Nu_x/\sqrt{Re_x}$  em função de  $\xi$  para o escoamento desa celerado de Howarth.  $E_{\infty} = 2$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\Gamma = 0$

**COMENTÁRIOS FINAIS**

Foi mostrado que a transformação de Crocco pode ser usada, com vantagem sobre a transformação clássica de Blasius, na solução de problemas das camadas limite hidrodinâmica e térmica. Foram obtidas soluções similares e não similares e em ambos os casos a comparação com resultados disponíveis na literatura mostrou a boa precisão do método de Crocco.

O fato de se trabalhar no intervalo de 0-1, ao invés de  $0-\infty$ , constitui-se numa das principais vantagens da presente transformação. Acrescenta-se ainda o fato de que a equação de quantidade de movimento é de segunda ordem enquanto na transformação tradicional obtém-se uma equação de terceira ordem.

Finalmente, cabe salientar, que os benefícios obtidos com o uso deste novo procedimento podem ser estendidos a outros tipos de escoamentos não similares que não são provenientes da forma da velocidade potencial  $U(x)$ .

**REFERÊNCIAS**

- [ 1 ] BLASIUS, H., *The boundary-layers in fluids with little friction*, Trad. NACA T.M. 1256, Washington, pp. 6-18.
- [ 2 ] SPARROW, E.M., QUACK, H. and BOERNER, C.J., Local nonsimilarity boundary-layer solutions. *AIAA Journal*, 8: 1936-1942 (1970).
- [ 3 ] SPARROW, E.M. and YU, H.S., Local nonsimilarity thermal boundary-layer solutions. *Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Series C*. v. 93, pp. 328-334 (1971).
- [ 4 ] CROCCO, L., Sulla trasmissione del calore de una lamina plana a un fluido scorrente ad alta velocità. *L'Aerotechnica*, XII (2): 181-197 (1932).
- [ 5 ] CROCCO, L., Sullo strato limite laminaire nei gas lungo una lamina plana. *Rend. Mat. Univ. Roma*, 2, p. 138 (1941)
- [ 6 ] CROCCO, L., Lo strato laminare nei gas. *Monografie Scientifiche di Aeronautica*, nº 3, Ministero Della Difesa Aeronautica, Roma (1946). Trad. North American Aviation Aerophysics Lab., Rep. AL-684 (1948).
- [ 7 ] VAN DRIEST, E.R., Investigation of laminar boundary-layer in compressible fluids using the Crocco method. NACA T.N. 2597, Washington (1952).

- [ 8 ] MENDES, P.R.S. and SABOYA, F.E.M., Analysis of forced convection along flat plates with variable properties. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, VI (3): 229-241 (1984).
- [ 9 ] SCHLICHTING, H., *Boundary layer theory*. McGraw-Hill Book Co., New York (1968).
- [10] NORONHA, R.F., Estudo da camada limite laminar no escoamento longitudinal a um cilindro. Tese de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (1983).
- [11] EVANS, H.L., *Laminar boundary-layer theory*. Addison-Wesley (1968).
- [12] SCHÖNAUER, W., Ein differenzenverfahren zur lösung der grenzschichtgleichung für stationäre, laminare, inkompressible strömung. *Ingenieur Archiv*, 33 (3): 173-189 (1964).
- [13] TERRIL, R.M., Laminar boundary layer flow near separation with and without suction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, series A*, v. 253, nº 1022, pp. 55-100 (1960).
- [14] SMITH, A.M.O. and CLUTTER, D.W., Solutions of incompressible laminar boundary layer equations. *AIAA Journal*, 1 (9). 2062-2071 (1963).

## ON THE POSSIBILITY OF DETERMINING THE TEMPERATURE OF A PLANE SURFACE THROUGH ITS EMERGENT THERMAL RADIATION

Rogério Martins Saldanha da Gama - Membro da ABCM  
LNCC/CNPq

### ABSTRACT

In this paper it is discussed an ill-posed Thermal Radiation Problem which is mathematically represented by a Fredholm Integral Equation of first kind. We consider two parallel plane surfaces that exchange energy through thermal radiation (only) being separated by a radiatively nonparticipating medium. It is demonstrated that the knowledge of the temperature and heat flux fields over one of the surfaces determines, in a unique way, the temperature field over the other surface. This theoretical result shows that it is possible to employ one surface as a sensor for measuring (indirectly) the temperature of the other.

### RESUMO

Neste trabalho é discutido um problema mal-posto de Radiação Térmica o qual é matematicamente representado por uma Equação Integral de Fredholm de Primeira Espécie. Consideram-se duas superfícies planas paralelas que trocam calor por radiação térmica (apenas) estando separadas por um meio que não participa do processo de transferência de energia. É demonstrado que o conhecimento dos campos de temperatura e de fluxo de calor sobre uma das superfícies determina de forma única o campo de temperatura sobre a outra superfície. Este resultado teórico mostra que é possível a utilização de uma das superfícies como sensor para a medida indireta da temperatura da outra.

## INTRODUCTION

Let us suppose that there exists a heat transfer by thermal radiation between two diffusely emitting and diffusely reflecting, surfaces, exclusively due to the fact that these two surfaces are at temperature levels different from zero. Assuming that the surfaces are separated by a radiatively nonparticipating medium and, that the temperature field and the heat flux field are known over the surface 1, we ask: Is it possible to determine the temperature field over the other surface (surface 2)?

The answer to this question will be "yes" if, and only if, the thermal radiation that reaches surface 1 (coming from surface 2) characterizes in a unique way the temperature field over surface 2 and, in this case, surface 1 may be used as a sensor for measuring (indirectly) the temperature of surface 2.

There exists many situations in engineering in which it is necessary to know the temperature of a given surface that is not accessible as, for instance, when surface's temperature is higher than the maximum allowable for usual thermometers. Such situations require an alternative way for measuring the temperature as, in particular, the indirect way that consists of measuring the temperature from the thermal radiation that emerges from the considered surface [1].

Before considering such procedure it is necessary to assure that it is theoretically possible.

In this paper it will be discussed the possibility of measuring the temperature of a plane surface through the thermal radiation that, leaving this surface, reaches another, parallel to the first one, that is regarded as a sensor.

A scheme of the considered problem is shown in figure 1, in which are represented two plane, parallel and elongated (infinite in the direction that is perpendicular to the figure 1) surfaces.

In this paper it will be shown that it is theoretically possible to employ surface 1 as a sensor for determining the temperature field over surface 2, assuming that all radiant energy that reaches surface 1 comes from surface 2 and, conversely, all radiant energy that reaches surface 2 comes from surface 1, being this energy interchange due to the temperatures of the two considered surfaces. It will be also assumed that the surfaces are gray and all their physical properties are known.

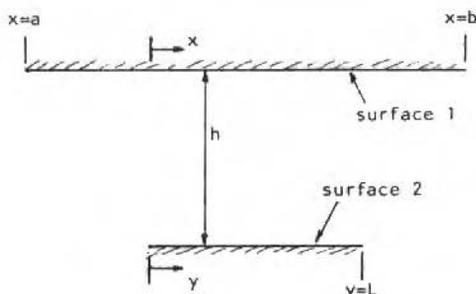


Figure 1. Scheme of the Problem

Mathematically the problem consists in proving that to each pair  $\{T_1(x), q_1(x)\}$  (temperature and heat flux fields over the surface 1) corresponds one, and only one, field  $T_2(y)$  (temperature field over surface 2).

#### THE EMPLOYED MODEL

In this section it will be presented some definitions and the balance equations that govern the thermal radiant energy interchange between diffusely emitting and diffusely reflecting surfaces. A detailed discussion can be found in reference [2].

The local radiosity  $B$  ( $B_1(x)$  for surface 1 and  $B_2(y)$  for surface 2) is defined as the sum of emitted and reflected radiant energy that leaves the surface per unit time and unit area. The radiosity is given by

$$B = \epsilon \sigma T^4 + \rho H \quad (1)$$

in which  $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $H$  and  $\sigma$  are respectively the emittance, the reflectance, the absolute temperature, the incident radiant energy (arriving at the surface per unit time and unit area) and the Stefan-Boltzmann constant.

The incident radiant energy arriving at surface 1 is given by

$$H_1(x) = \int_0^L B_2(y) K(x,y) dy, \quad x \in [a,b] \quad (2)$$

and the incident radiant energy arriving at surface 2 is given by

$$H_2(y) = \int_a^b B_1(x)K(y,x)dx \quad , \quad y \in [0,L] \quad (3)$$

being  $a$ ,  $b$  and  $L$  defined in the figure 1.

The differential quantities  $K(x,y)dy$  and  $K(y,x)dx$  are respectively the differential angle factor from surface 1 to surface 2 and the differential angle factor from surface 2 to surface 1. The kernel  $K(x,y)$  is symmetric ( $K(x,y)=K(y,x)$ ) and, for two parallel surfaces, it is given as follows

$$K(x,y) = K(y,x) = \frac{h^2}{2((x-y)^2 + h^2)^{3/2}} ; \quad \begin{array}{l} x \in [a,b], \\ y \in [0,L] \end{array} \quad (4)$$

in which  $h$  is the distance between the two surfaces.

The local heat flux, per unit time and unit area, is given by the difference between the local radiosity and the local incident energy as follows

$$q = B - H \quad (5)$$

Considering now that (from Kirchhoff's Law), for opaque surfaces

$$\rho = 1 - \epsilon \quad (6)$$

and combining the equations (5), (1) and (6), the local heat flux may be expressed by

$$q = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} (\sigma T^4 - B) \quad (7)$$

for non-black surfaces.

Once established a local relation between the pair  $\{T,q\}$  (temperature and heat flux fields) and the pair  $\{T,B\}$  (temperature and radiosity fields) the problem will be formulated in terms of radiosity instead of heat flux.

Combining the equations (1), (2), (3) and (6), the energy balance may be written as follows

$$B_1(x) = \epsilon_1(x) \sigma T_1(x)^4 + (1 - \epsilon_1(x)) \int_0^L B_2(y) K(x,y) dy, \quad x \in [a,b] \quad (8)$$

$$B_2(y) = \epsilon_2(y) \sigma T_2(y)^4 + (1 - \epsilon_2(y)) \int_a^b B_1(x) K(y,x) dx, \quad y \in [0,L] \quad (9)$$

in which the subscripts "1" and "2" indicate the corresponding surface, being the variable  $x$  defined along surface 1 and the variable  $y$  defined along surface 2 (as it is shown in figure 1).

It is to be noticed that in a real problem of thermal radiant interchange the following inequalities must be satisfied

$$1 > \epsilon_1(x) > 0, \quad T_1(x) > 0, \quad B_1(x) > 0, \quad x \in [a,b] \quad (10)$$

$$1 > \epsilon_2(y) > 0, \quad T_2(y) > 0, \quad B_2(y) > 0, \quad y \in [0,L] \quad (11)$$

#### THE PROBLEM

The procedure for obtaining the temperature field  $T_2(y)$  may be divided into two parts:

- 1st) Being prescribed  $T_1(x)$ ,  $q_1(x)$  and  $\epsilon_1(x)$  (temperature, heat flux and emittance fields over the surface 1), search for the field  $B_2(y)$  (radiosity over the surface 2) through equation (7) and (8). The insertion of equation (7) into equation (8) leads to the following equation

$$f(x) = \sigma T_1^4(x) - \frac{q_1(x)}{\epsilon_1(x)} = \int_0^L B_2(y) K(x,y) dy, \quad x \in [a,b] \quad (12)$$

which is a Fredholm Integral Equation of the First Kind whose unknown field is  $B_2(y)$ . It will be shown that  $B_2(y)$  is the unique solution of equation (12) (if this solution exists).

- 2nd) Once known the field  $B_2(y)$  and being prescribed the field  $\epsilon_2(y)$ , the temperature field  $T_2(y)$  may be determined through equation (9) as follows

$$\begin{aligned}
 (T_2(y))^4 &= \frac{1}{\sigma \epsilon_2(y)} \{ B_2(y) - (1 - \epsilon_2(y)) \int_a^b B_1(x) K(y,x) dx \} = \\
 &= F(y) \quad , \quad y \in [0, L]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

The field  $T_2(y)$  is the unique real positive root of the equation  $T_2^4 = F$ . Thus, if  $B_2(y)$  is the unique solution of (12) then  $T_2(y)$  is the unique field that satisfy (8) and (9).

Therefore the main problem is to prove that the solution of (12), in a real problem of thermal radiation interchange, is unique.

In a real problem of thermal radiation interchange the following inequalities hold [3]

$$\max_{\substack{y \in [0, L] \\ x \in [a, b]}} \{ \sigma T_1(x)^4, \sigma T_2(y)^4 \} \geq \max_{\substack{y \in [0, L] \\ x \in [a, b]}} \{ B_1(x), B_2(y) \}
 \tag{14}$$

$$0 \leq \min_{\substack{y \in [0, L] \\ x \in [a, b]}} \{ B_1(x), B_2(y) \}
 \tag{15}$$

These inequalities will restrict the field  $B_2(y)$  to a space of piecewise continuous functions on the interval  $[0, L]$  because, in real problems, the fields  $T_1(x)$ ,  $q_1(x)$ ,  $\epsilon_1(x)$  and  $\epsilon_2(y)$  must be piecewise continuous.

In the next section it will be proved that the equation (12) has only one solution assuming that this solution exists and belongs to the space  $L^2[0, L]$ , that means [5]

$$\int_0^L (B_2(y))^2 dy < \infty
 \tag{16}$$

#### UNIQUENESS OF THE SOLUTION $B_2(y)$

It will now be proved that if  $B_2(y)$  is a solution of equation (12) then this solution is unique. The solution of (12) will be unique if and only if

$$\int_0^L g(y) K(x, y) dy = 0 \iff g(y) = 0 \quad , \quad g(y) \in L^2[0, L] \quad , \\
 x \in [a, b]
 \tag{17}$$

in which ( $\iff$ ) is obvious.

The function  $K(z,y)$  defined as follows

$$K(z,y) = \frac{h^2}{2((z-y)^2 + h^2)^{3/2}}, \quad y \in [0,L] \quad (18)$$

is analytic in the complex variable  $z$  for all  $z$  such that

$$z = x + iv; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad v \in (-h, h), \quad h > 0 \quad (19)$$

Therefore  $f(z)$  (obtained by replacing  $x$  by  $z$  in the equation (12)) is also analytic on the region of the complex plane defined in (19).

Hence, in order to prove uniqueness, it is sufficient to prove (17) considering  $x \in (-\infty, \infty)$  [4].

The kernel  $K(x,y)$  may be expressed in Taylor's Series (in the variable  $y$ ), around the point of expansion  $y_0 = L/2$ , as follows

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial y^n} K(x,y) \right)_{y=L/2} \frac{(y - \frac{L}{2})^n}{n!}, \quad y \in [0,L] \quad (20)$$

for all  $x$  such that the following inequality holds

$$\max_{y \in [0,L]} |y - \frac{L}{2}| < |(x+ih) - \frac{L}{2}| = \sqrt{(x - \frac{L}{2})^2 + h^2} \quad (21)$$

This inequality is valid (because  $h > 0$ ) for all  $x \in [L, \infty)$ . Thus the Series in equation (20) converges uniformly for all  $y \in [0,L]$  and  $x \in [L, \infty)$ .

Hence the condition (17) may be replaced by the following condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial y^n} K(x,y) \right)_{y=L/2} \frac{1}{n!} \int_0^L g(y) (y - \frac{L}{2})^n dy = 0 \iff g(y) = 0; \quad g(y) \in L^2[0,L]; \quad x \in [L, \infty) \quad (22)$$

In order to prove (22) it is necessary and sufficient to prove that the left side of (22) holds if, and only if,  $g(y)$  is orthogonal to all polynomials on the interval  $[0, L]$ . The left side of (22) is equivalent to

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left( \frac{\partial}{\partial y^n} K(x, y) \right)_{y=\frac{L}{2}} = 0, \quad x \in [L, \infty) \quad (23)$$

in which  $C_n$  is defined as follows

$$C_n = \frac{1}{n!} \int_0^L g(y) \left(y - \frac{L}{2}\right)^n dy, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (24)$$

Once that (see Appendix I)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial y^{n+1}} [K(x, y)]}{\frac{\partial}{\partial y^n} [K(x, y)]} = 0, \quad y = \frac{L}{2}, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

it is necessary, in order to satisfy (23) for every  $x \in [L, \infty)$ , that (see Appendix II)

$$C_n = 0, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (26)$$

because  $C_n$  do not depend on  $x$  and (23) must hold for all  $x \in [L, \infty)$ .

Hence it is proved that  $g(y)$  is orthogonal to all polynomials on the interval  $[0, L]$ . Thus  $g(y)=0$  and the solution of the equation (12) is unique.

## CONCLUSIONS

Once proved that the solution of the equation (12) is unique it can be concluded that surface 1 may be employed as a sensor for measuring (indirectly) the temperature of surface 2. Mathematically it can be concluded that for each pair  $\{T_1(x), q_1(x)\}$  it is associated one, and only one, field  $T_2(y)$ .

It is to be noticed that in this paper it was assumed that

the thermal radiation interchange between surfaces 1 and 2 occurs only due to the fact that the temperatures of these two surfaces are different from zero. This assures the existence of, at least, one field  $B_2(y)$  [3].

#### REFERENCES

- [1] COLLE, S., "Um Problema Mal-Condicionado de Radiação Térmica entre Superfícies Cinzentas Difusas"; I ENCIT, pp. 91-94, Rio de Janeiro, (1986).
- [2] SPARROW, E.M. and CESS, R.D., "Radiation Heat Transfer"; McGraw-Hill, Washington, (1978).
- [3] GAMA, R.M.S., "Sobre as Soluções de Problemas de Troca de Energia Radiante Térmica"; Rev.Bras. Ciências Mecânicas, vol. VIII, nº 2, pp. 121-130, (1986).
- [4] WYLIE, C.R., "Advanced Engineering Mathematics"; McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, (1975).
- [5] KREYSZIG, E., "Introductory Functional Analysis with Applications"; John Wiley & Sons, New York, (1978).

#### APPENDIX I. ON THE RELATION (25)

After some calculations we obtain that, at the point  $y = \frac{L}{2}$ , the partial derivatives of  $K(x,y)$  with respect to  $y$  are given as follows

$$\frac{\partial}{\partial y} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}} = \frac{h^2}{2} \frac{3(x-\frac{L}{2})}{((x-\frac{L}{2})^2+h^2)^{5/2}} \quad (\text{AI.1})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}} = \frac{h^2}{2} \frac{12(x-\frac{L}{2})^2 - 3h^2}{((x-\frac{L}{2})^2+h^2)^{7/2}} \quad (\text{AI.2})$$

⋮

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}} = \frac{h^2}{2} \frac{(n+2)! (x-\frac{L}{2})^n + (\text{polynomial of degree } n-2)}{2((x-\frac{L}{2})^2+h^2)^{(3/2)+n}} \quad (\text{AI.3})$$

With these relations we may conclude, when  $x$  becomes very large ( $x \gg \frac{L}{2}$  and  $x \gg h$ ), the following

$$\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^n} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}} = \frac{h^2}{2} \frac{(n+2)!}{2} \frac{1}{x^{3+n}} \tag{AI.4}$$

Thus the limit in (25) is given by

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial y^{n+1}} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}}}{\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^n} [K(x,y)]_{y=\frac{L}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\frac{(n+3)!}{x^{4+n}})}{x^{3+n}}}{\frac{(\frac{(n+2)!}{x^{3+n}})}{x^{3+n}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+3}{x} = 0 \end{aligned} \tag{AI.5}$$

**APPENDIX II. ON THE SERIES (23)**

The series that appears in (23) may be expressed as

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(x) = 0 \quad , \quad x \in [L, \infty) \tag{AII.1}$$

We may express  $C_0$  as follows

$$C_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n f_n(x)}{f_0(x)} \quad , \quad x \in [L, \infty) \tag{AII.2}$$

Once that the ratio  $f_n(x)/f_0(x)$  approaches zero as  $x$  becomes large we can conclude that  $C_0=0$ .

The same idea may be employed for proving that  $C_1, C_2, C_3, \dots$  are equal to zero. Aiming to this we may write the following

$$C_m = - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C_n f_n(x)}{f_m(x)} \quad , \quad x \in (x_m, \infty) \tag{AII.3}$$

in which  $x_m$  is such that all the real roots of  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  are in the interval  $(-\infty, x_m]$ .

## ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DOIS MODELOS PARA A TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA EM MEIOS POROSOS NÃO SATURADOS

Ligia Silva Damasceno Ferreira – Membro da ABCM

Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM

UFSC – Departamento de Engenharia Mecânica

### RESUMO

A migração de umidade em um meio poroso não saturado causada por gradientes térmicos é analisada à luz de dois modelos. Um modelo incorpora a dependência das propriedades termofísicas e de transporte com a temperatura e umidade, enquanto que o outro, dito paramétrico, assume todas as propriedades constantes. Uma comparação entre os dois modelos permite que se recomende, como primeira aproximação, o modelo paramétrico para a classe de problemas em consideração.

### ABSTRACT

A transient analysis of the simultaneous transference of heat and mass in unsaturated porous medium has been performed. Two models were employed in the investigation of the problem. One model incorporated the variations with temperature and umidity of the thermophysical and the transport properties of the medium. For the other model the properties were assumed to be constant and the results were governed by two dimensionless numbers, the Posnov and the Luikov numbers. The main focus of the work is to compare the solution obtained from these two models. From the results it was allowed to recommend the constant property model as a first approximation for the type of problem considered here.

## NOMENCLATURA

C	capacidade calorífica volumétrica do meio poroso
$D_{TL}$	difusividade do líquido associada ao gradiente de temperatura
$D_{TV}$	difusividade do vapor associada ao gradiente de temperatura
$D_{\theta}$	= $D_{\theta L} + D_{\theta V}$
$D_{\theta L}$	difusividade do líquido associada ao gradiente de umidade
$D_{\theta V}$	difusividade do vapor associada ao gradiente de umidade
$h_L$	entalpia do líquido
$h_{2L}$	entalpia de vaporização
$j_L$	fluxo de líquido
$j_V$	fluxo de vapor
$K_{rL}$	permeabilidade relativa do líquido
$K_s$	permeabilidade de saturação
$K_*$	condutividade térmica do solo na ausência de migração de umidade
Lu	número de Luikov, Eq. (22)
Pn	número de Posnov, Eq. (19)
T	temperatura
$T_i$	temperatura inicial
$T_0$	temperatura em $X=0$
t	tempo
X	coordenada espacial adimensional, Eq. (18)
$X_T, X_{\theta}$	distâncias adimensionais conforme indicado na Figura 8
x	coordenada especial de acordo com a Figura 1
$\alpha$	temperatura adimensional, Eq. (18)
$\theta$	conteúdo volumétrico de umidade
$\theta_i$	conteúdo volumétrico de umidade, inicial
$\mu_L$	viscosidade dinâmica do líquido
$\rho_G$	massa específica da mistura gasosa
$\rho_L$	massa específica do líquido
$\rho_V$	massa específica do vapor
$\tau$	tempo adimensional, Eq. (18)
$\Omega$	conteúdo volumétrico de umidade adimensional, Eq. (18)

## INTRODUÇÃO

A transferência simultânea de calor e massa em meios porosos não saturados tem sido extensivamente analisada devido à grande importância de tal fenômeno em diversas áreas da engenharia. Exemplos incluem processos de secagem e umidificação, migração de umidade em isolantes porosos, dimensionamento de cabos elétricos e tubulações aterradas.

A análise detalhada deste fenômeno é extremamente difícil tanto pela complexidade do meio, constituído por uma matriz sólida com poros preenchidos com misturas cujos componentes podem estar em diferentes fases, como pela grande interdependência entre os processos de transporte de massa e calor.

No presente estudo a atenção será dirigida para a migração de umidade em solos não saturados. No interstício dos poros coexistem ar, vapor d'água e água líquida. O transporte de vapor d'água dá-se por difusão molecular no ar contido nos poros e é função da pressão parcial do vapor. O transporte de líquido ocorre, predominantemente, devido a gradientes de umidade e está associado ao potencial de sucção do solo.

Um dos modelos mais utilizados para descrever a migração de umidade em solos não saturados na presença de gradientes térmicos é o devido a PHILIP e DE VRIES [1,2]. Neste modelo os fluxos de calor e umidade estão relacionados com os gradientes de temperatura e umidade através de difusividades. Tais difusividades dependem fortemente do conteúdo de umidade do solo, bem como da temperatura e pressão. Embora existam teorias para a determinação analítica destas difusividades [1-5], as expressões analíticas requerem parâmetros e constantes que só podem ser obtidos experimentalmente. Desta forma, antecedendo o estudo da transferência de umidade e calor em meios porosos não saturados, é necessário que faça a determinação das propriedades do meio.

Trabalhos recentes mostram que o modelo de PHILIP e DE VRIES fornece resultados satisfatórios quando comparados com experimentos [6-9]. Todavia, os resultados apresentados nestes trabalhos se limitam às situações específicas lá investigadas, em virtude da forte dependência das difusividades com o meio em consideração.

Motivados pela necessidade de se obter informações gerais que pudessem ser aplicadas a diferentes situações, ECKERT e FAGHRI [10] propuseram uma formulação paramétrica da migração de umidade em meios porosos não saturados. Esta formulação vem sendo aplicada pelos autores para situações diversas [11,12] e devido a sua simplicidade é recomendada como uma primeira aproximação para o problema em questão, embora nenhum estudo tenha sido realizado a fim de verificar a precisão do modelo paramétrico. Na formulação paramétrica, as propriedades do meio poroso são assumidas constantes e os resultados são apresentados em termos de números adimensionais que governam o problema.

A análise paramétrica aplicada à transferência de calor e massa em meios porosos é uma extensão da formulação sugerida por Nusselt no início deste século para problemas de transferência de calor. Tal formulação é hoje universalmente aceita.

O objetivo deste trabalho é comparar, para uma dada situação, resultados obtidos através de uma formulação paramétrica com aqueles determinados por um modelo que incorpore a dependência das propriedades termofísicas e difusividades com a temperatura e umidade do meio.

Tendo em vista o objetivo do presente estudo, a comparação será feita para uma geometria plana unidimensional. A migração de umidade é causada por gradientes térmicos e o meio poroso está confinado entre duas paredes impermeáveis. Tal geometria é a mesma utilizada na análise paramétrica de [10].

#### EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

As equações de transporte de calor e umidade no meio poroso são escritas com base no modelo de PHILIP e DE VRIES [1,2]. Neste modelo, sob um ponto de vista macroscópico, as leis fenomenológicas da difusão de massa (lei de Darcy para a fase líquida e lei de Fick para a fase vapor) e calor (lei de Fourier) são utilizadas nas equações de balanço de massa e energia. Como resultado obtém-se equações diferenciais para a temperatura e o conteúdo de umidade. Tais equações representam médias volumétricas no meio poroso e incorporam informações tanto sobre a complexa geometria dos poros como sobre a interação entre as diversas fases.

O meio poroso é tomado como um meio contínuo, ou seja, os balanços de calor e massa são feitos sobre um elemento infinitesimal, que é pequeno comparado à dimensão do corpo em estudo, mas grande o bastante para conter uma amostra representativa do meio, contendo as três fases. Para a presente análise as seguintes hipóteses simplificativas são adotadas: a) o meio é homogêneo e a matriz sólida é fixa; b) a massa de vapor é negligenciável comparada à massa do líquido; c) o vapor e o ar se comportam como gás perfeito; d) não há efeitos associados à ação da gravidade; e) os efeitos de histerese são desconsiderados.

A equação para o transporte de massa é obtida partindo-se da expressão da conservação de umidade. A conservação de umidade requer que,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \frac{j_v + j_l}{\rho_l} \right) \quad (1)$$

onde  $j_v$  é o fluxo de vapor,  $j_l$  é o fluxo de líquido,  $\rho_l$  é a massa específica do líquido e  $\theta$  é o conteúdo volumétrico de líquido, ou seja, a razão entre o volume ocupado pelo líquido e o volume total (volume de vazio e volume sólido). O lado esquerdo da equação (1) representa a variação de umidade com o tempo em um volume infinitesimal do meio poroso. A parcela referente ao acúmulo de vapor foi desconsiderada neste termo por ser muito menor que o acúmulo de líquido (hipótese b).

O fluxo de líquido  $j_l$  pode ser obtido utilizando-se a lei de Darcy, modificada para ser aplicável a fluxos viscosos em sistemas porosos não saturados [13],

$$\frac{j_l}{\rho_l} = -\frac{K_s}{\mu_l} K_{rl} \nabla(\Psi) \quad (2)$$

onde  $K_s$  é a permeabilidade de saturação,  $K_{rl}$  é a permeabilidade relativa do líquido [7],  $\mu_l$  é a viscosidade dinâmica do líquido e  $\Psi$  é o potencial de sucção do solo.

O potencial de sucção do solo  $\Psi$  depende do conteúdo de umidade  $\theta$  e da temperatura  $T$ . Assim, o gradiente de  $\Psi$  pode ser expresso por:

$$\nabla(\Psi) = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \nabla T \quad (3)$$

Substituindo a equação (3) na equação (2) e introduzindo a nomenclatura utilizada por PHILIP e DE VRIES [1], obtêm-se,

$$\frac{j_l}{\rho_l} = -(D_{\theta L} \nabla \theta + D_{TL} \nabla T) \quad (4)$$

onde  $D_{\theta L}$  é a difusividade do líquido devido ao gradiente de umidade, dada por,

$$D_{\theta L} = \frac{K_s}{\mu_l} K_{rl} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (5)$$

e  $D_{TL}$  é a difusividade do líquido devido ao gradiente de temperatura, expressa por

$$D_{TL} = \frac{K_s}{\mu_l} K_{rl} \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (6)$$

A expressão para o fluxo de vapor  $j_v$  é obtida através da lei de Fick aplicada à difusão do vapor d'água no ar, e inclusão do efeito de tortuosidade do meio [1]. Considerando ainda, que a massa específica do vapor depende tanto da temperatura como do conteúdo de umidade, pode-se escrever [7],

$$\frac{j_v}{\rho_l} = -D_{13} \frac{\rho_g}{\rho_l} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \nabla \theta + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \nabla T \right] \quad (7)$$

onde  $D_{13}$  é a difusividade molecular modificada do vapor d'água no ar [7], e  $\rho_g$  e  $\rho_v$  são, respectivamente, a massa específica da fase gasosa e do vapor.

A equação anterior colocada em termos da nomenclatura de PHILIP e DE VRIES [1], torna-se,

$$\frac{j_v}{\rho_l} = -(D_{\theta V} \nabla \theta + D_{TV} \nabla T) \quad (8)$$

onde  $D_{\theta V}$  é a difusividade do vapor devido ao gradiente de umidade, dada por

$$D_{\theta V} = D_{13} \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \quad (9)$$

e  $D_{TV}$  é a difusividade do vapor devido ao gradiente de temperatura, expressa por,

$$D_{TV} = D_{13} \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \quad (10)$$

Em problemas do tipo analisado no presente trabalho [14], a difusividade do líquido devido ao gradiente térmico,  $D_{TL}$ , pode ser desconsiderada. Desta forma, substituindo as expressões (4) e (8) em (1) obtem-se a seguinte expressão para o transporte de umidade,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [(D_{\theta L} + D_{\theta V}) \nabla \theta + D_{TV} \nabla T] \quad (11)$$

O transporte de calor em meios porosos ocorre, essencialmente, por difusão térmica através do meio poroso e pelo movimento do líquido e vapor através dos poros. Um balanço entre estes mecanismos de transferência de energia pode ser expresso por,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \nabla \cdot [K_* \nabla T - (h_{\ell} + h_{2\ell}) j_v - h_{\ell} j_{\ell}] \quad (12)$$

onde C é a capacidade calorífica do solo, que contém uma contribuição ponderada da capacidade calorífica das várias fases [15],  $K_*$  é a condutividade térmica efetiva do meio poroso para o caso hipotético de não existir fluxo de líquido e vapor,  $h_{\ell}$  é a entalpia do líquido e  $h_{2\ell}$  é a entalpia de vaporização.

O lado esquerdo da equação (12) representa o acúmulo de energia em um volume infinitesimal do meio poroso. No lado direito, o primeiro termo expressa o fluxo de calor transportado por condução, o segundo termo representa a energia na forma de entalpia de líquido  $h_{\ell}$  e de vaporização  $h_{2\ell}$  transportada com o vapor, e o terceiro termo representa a energia transportada com o líquido.

A energia de vaporização  $h_{2\ell}$  é muito grande comparada à entalpia do líquido  $h_{\ell}$ . Ainda, os fluxos de vapor  $j_v$ , e líquido  $j_{\ell}$  têm sentidos opostos. Portanto, é correto afirmar que  $h_{2\ell} j_v \gg h_{\ell} (j_v + j_{\ell})$ . Desta forma, a equação (12) torna-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \nabla \cdot (K_* \nabla T - h_{2\ell} j_v) \quad (13)$$

Substituindo, a expressão para o fluxo de vapor  $j_v$ , equação (8), na equação (13) e desprezando a influência do transporte de vapor associado ao gradiente de umidade, a exemplo do que foi feito em [16], a expressão para a conservação de energia torna-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \nabla \cdot (K_* + \rho_{\ell} h_{2\ell} D_{TV}) \nabla T \quad (14)$$

As duas equações gerais para o transporte de calor e umidade utilizadas neste trabalho, equações (11) e (14), serão agora escri -

tas para a geometria do problema específico a ser investigado. Tal problema será detalhado a seguir.

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A geometria do problema a ser analisado é apresentada na Fig. 1. Esta figura mostra esquematicamente duas paredes planas paralelas e infinitas separadas por uma distância  $L$ . Entre as paredes é colocado um meio poroso não saturado cuja temperatura e conteúdo de umidade são, respectivamente,  $T_i$  e  $\theta_i$ . As duas paredes são impermeáveis à passagem de umidade.

As equações de transporte umidade calor aplicadas agora à situação da Figura 1, tornam-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \frac{\partial}{\partial x} \left( (K_* + \rho_{\ell} h_{2\ell} D_{TV}) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (16)$$

onde  $D_{\theta} = D_{\theta L} + D_{\theta V}$ .

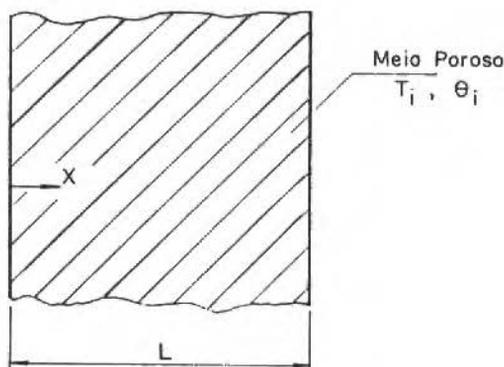


Figura 1. Domínio de Solução

As condições iniciais e de contorno associadas às equações (15) e (16) serão apresentadas a seguir.

Inicialmente o meio poroso está a uma temperatura  $T_i$  e umidade de  $\theta_i$ . No instante  $t=0$  a face esquerda ( $x=0$ ) é submetida a uma temperatura  $T_0 > T_i$  enquanto que a face direita ( $x=L$ ) é mantida a  $T_i$ . Para o problema da umidade, a condição de impermeabilidade das faces

requer que

$$(D_{\theta L} + D_{\theta V}) \frac{\partial \theta}{\partial x} + D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{em } x=0 \text{ e } L \quad (17)$$

A formulação do problema está agora completada. Conhecendo-se as propriedades do meio pode-se determinar  $\theta(x,t)$  e  $T(x,t)$ .

#### MODELO PARAMÉTRICO

O primeiro passo na construção do modelo paramétrico é considerar que as propriedades de transporte e termofísicas são constantes, ou seja, não variam com  $\theta$  e  $T$ . Na situação em estudo no presente trabalho, as variações de umidade no meio poroso são causadas pela diferença de temperatura ( $T_0 - T_i$ ) entre as paredes. À medida que esta diferença de temperatura diminui, as variações das propriedades tornam-se menores e os resultados obtidos com o modelo paramétrico, onde as propriedades são consideradas constantes, tendem assintoticamente àqueles obtidos com a formulação mais rigorosa. Desta forma, para situações onde não se conhece com detalhes as propriedades do meio, o modelo paramétrico fornece uma primeira aproximação do problema.

As equações do modelo paramétrico serão escritas em termos das seguintes variáveis adimensionais,

$$\alpha = (T - T_i) / (T_0 - T_i) \quad , \quad \Omega = (\theta / \theta_i - 1) / Pn \quad (18)$$

$$X = x/L \quad , \quad \tau = D_\theta t / L^2$$

onde  $Pn$  é o número de Posnov dado por

$$Pn = D_{TV} (T_0 - T_i) / D_\theta \theta_i \quad (19)$$

Substituindo as variáveis adimensionais das expressões (18) nas equações (15) e (16), tem-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \quad (20)$$

$$Lu \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \quad (21)$$

onde  $Lu$  é o número de Luikov dado por

$$Lu = D_\theta / \lambda \quad (22)$$

no qual  $\lambda = [K_* + \rho_g h_{2g} D_{TV}] / C$ .

As condições iniciais e de contorno associadas ao modelo para métrico são

$$\tau = 0, \quad \alpha = \Omega = 0$$

$$\tau > 0 \text{ e } X = 0, \quad \alpha = 1 \text{ e } \partial\Omega/\partial x + \partial\alpha/\partial x = 0 \quad (23)$$

$$\tau > 0 \text{ e } X = 1, \quad \alpha = 0 \text{ e } \partial\Omega/\partial x + \partial\alpha/\partial x = 0$$

Conforme pode ser observado nas equações (20) e (21), bem como nas condições de contorno (23) a serem satisfeitas, o modelo para métrico é governado por um único parâmetro adimensional, Lu. O número de Luikov, Lu, é a razão entre a difusividade de umidade associada ao gradiente de umidade,  $D_\theta$ , e a difusividade térmica  $\lambda$ . O número de Lu está associado ao desenvolvimento dos perfis de umidade e temperatura. Para baixos valores de Lu o perfil de temperatura se desenvolve muito antes do perfil de umidade, e o problema da transferência de massa pode ser desacoplado do problema térmico.

Um outro número adimensional que aparece embutido na definição da umidade  $\Omega$ , equação (18), é o número de Posnov, Pn. O número de Posnov indica a importância relativa entre os gradientes de temperatura e umidade no transporte de umidade no meio poroso. Para Pn altos, a migração de umidade está associada primordialmente ao gradiente térmico. Por outro lado, para Pn baixos é o gradiente de umidade o principal responsável pela migração global da umidade. O conhecimento de Lu e Pn permite que se determine a distribuição de  $\theta/\theta_1$  como função de X e  $\tau$ .

#### METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A solução das equações diferenciais apresentadas anteriormente foi obtida numericamente através do método dos volumes finitos. Neste método o domínio de solução é dividido em pequenos volumes de controle que não se sobrepõem, e as equações diferenciais são integradas em relação ao tempo e ao espaço. Desta integração resulta uma equação algébrica para cada volume de controle que no presente trabalho foram resolvidas pelo algoritmo de THOMAS [17]. Este método numérico é bastante conhecido e tem sido amplamente utilizado na resolução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor e

massa. Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados em [18]. Para o presente trabalho, a grande vantagem desta metodologia está no fato de que a dependência das propriedades com a temperatura e umidade podem ser incorporadas no programa computacional sem qualquer complicação adicional.

Na escolha do número de volumes de controles utilizados na discretização do domínio de solução diversos testes foram conduzidos [19]. Para todos os resultados aqui apresentados foram utilizados 80 volumes de controle. Testes adicionais foram realizados a fim de se escolher os incrementos de tempo. Dependendo do conteúdo de umidade inicial e da diferença de temperatura, utilizou-se um incremento de tempo. Valores representativos para  $\Delta t$  e  $\Delta \tau$  são, respectivamente,  $5 \times 10^{-3}$  s e  $5 \times 10^{-5}$ .

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

O solo escolhido para a comparação foi um cascalho arenoso com porosidade 0,517, e massa específica, quando seco, igual a  $1280 \text{ kg/m}^3$ . A principal razão de se escolher tal solo se deve ao fato de que todas as propriedades necessárias para a presente análise se encontram disponíveis em [8] na forma de expressões analíticas. Detalhes sobre a determinação destas propriedades também podem ser encontradas em [8].

A comparação entre o modelo que incorpora a dependência das propriedades do meio com a temperatura e umidade, e o modelo paramétrico, foi feita para dois conteúdos de umidade inicial,  $\theta_i = 0,026$  e  $0,21$ . A umidade  $\theta_i = 0,026$  corresponde a uma situação onde as pontes de líquido nos interstícios do meio poroso estão desconectadas umas das outras, ao passo que para  $\theta_i = 0,21$  estas pontes estão conectadas entre si permitindo a continuidade da fase líquida. Para todos os casos a temperatura inicial do meio foi mantida em  $35^\circ\text{C}$ ; três diferenças de temperatura entre as paredes foram investigadas,  $\Delta T = 1, 5$  e  $10^\circ\text{C}$ .

Os valores de  $Lu$  e  $Pn$  correspondentes a cada caso foram calculados utilizando-se a umidade inicial  $\theta_i$  e uma temperatura de referência. Dois valores da temperatura de referência foram empregados,  $(T_o + T_i)/2$  e  $T_i$ . Conforme será observado posteriormente, a concordância entre os modelos é melhor quando se utiliza  $(T_o + T_i)/2$  como referência.

As Figuras 2 e 3 apresentam, para o caso  $\theta_i = 0,026$  valores da

umidade adimensional  $(\theta/\theta_1 - 1)/P_n$  em função da coordenada  $x/L$  tendo o tempo como parâmetro de curva. A Figura 2 corresponde a  $T=1^\circ\text{C}$  enquanto que a Figura 3 corresponde a  $\Delta T=10^\circ\text{C}$ . Curvas semelhantes são apresentadas nas Figuras 4 e 5 para a situação onde  $\theta_1=0,21$ . As linhas cheias representam as soluções que incorporam as variações das propriedades com a temperatura e umidade, e as linhas tracejadas representam as soluções obtidas com o modelo paramétrico.

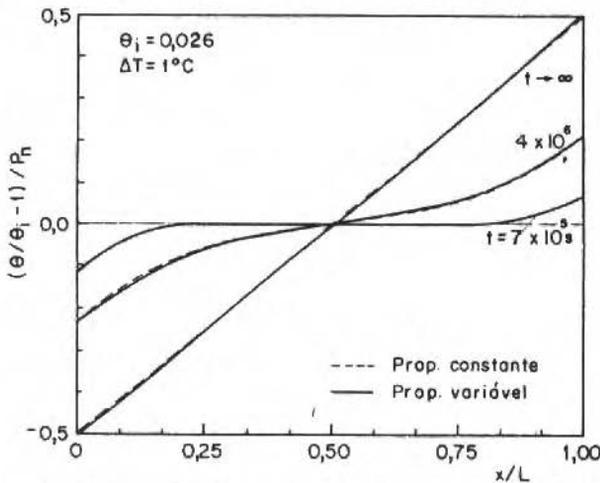


Figura 2. Distribuição de umidade no meio como função de  $X$  tendo o tempo como parâmetro de curva;  $\theta_1=0,026$  e  $\Delta T=1^\circ\text{C}$

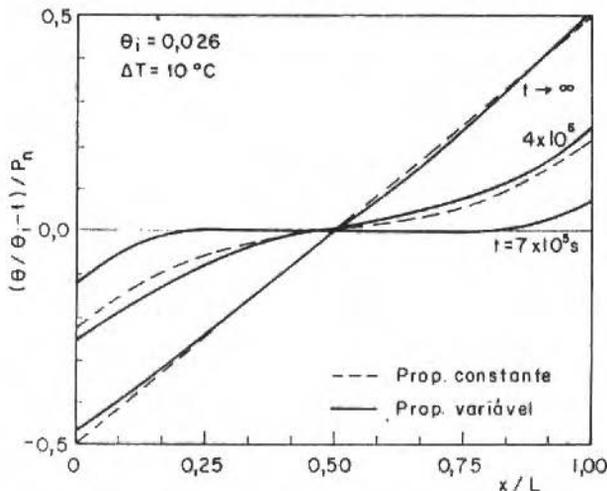


Figura 3. Distribuição de umidade no meio como função de  $X$  tendo o tempo como parâmetro de curva;  $\theta_1=0,026$  e  $\Delta T=10^\circ\text{C}$

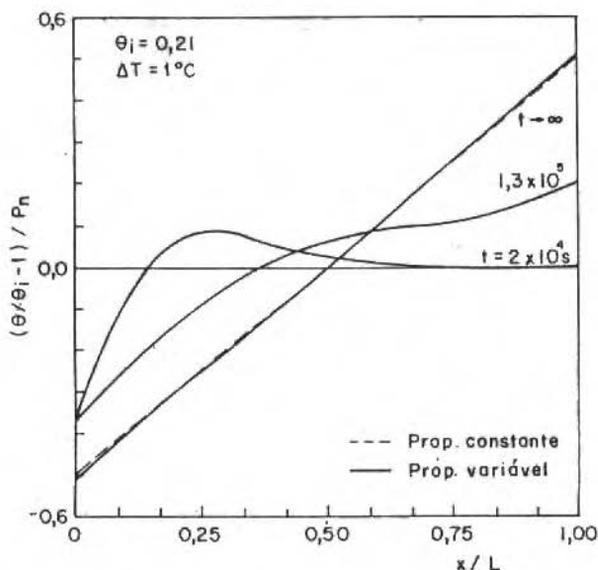


Figura 4. Distribuição de umidade no meio como função de  $x$  tendo o tempo como parâmetro de curva;  $\theta_i = 0,21$  e  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

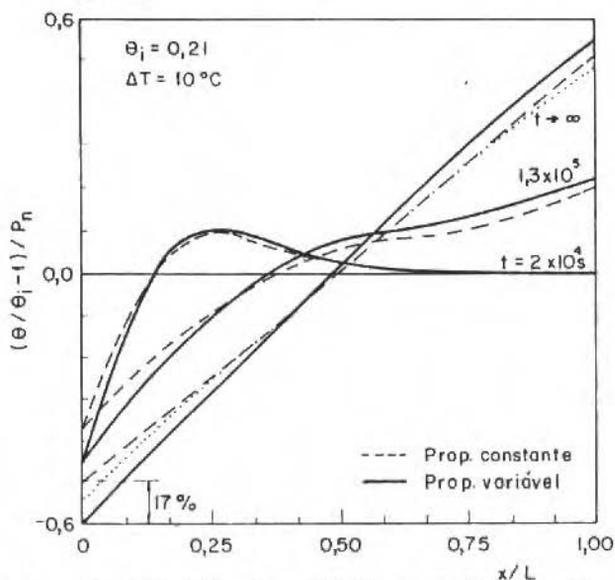


Figura 5. Distribuição de umidade no meio como função de  $x$  tendo o tempo como parâmetro de curva;  $\theta_i = 0,21$  e  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

Para  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ , verifica-se que os dois modelos fornecem resultados virtualmente idênticos. Os desvios em  $(\theta/\theta_1 - 1)/Pn$  associados ao modelo paramétrico são maiores quando  $\theta_1 = 0,21$  do que quando  $\theta_1 = 0,026$ . Indicado na Figura 5 está o máximo desvio em  $(\theta/\theta_1 - 1)/Pn$  observado entre os dois modelos para os casos analisados no presente trabalho. Tal desvio é de 17% e ocorre na face esquerda do domínio (parede aquecida) para a condição de regime permanente, ou seja,  $t \rightarrow \infty$ . Convém observar que este desvio na unidade adimensional aparece amplificado na Figura 5 pelo fato do número de Posenov para a condição de  $\theta_1 = 0,21$  e  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  ser igual a 0,0026, o que é um valor baixo. Se o mesmo desvio é computado no conteúdo volumétrico de umidade  $\theta$ , e não em  $(\theta/\theta_1 - 1)/Pn$  onde  $Pn$  aparece no denominador da fração, a discrepância passa a ser de apenas 0,03%. Esta pequena discrepância é explicada pelo fato de que quando  $\theta_1 = 0,21$ , os fluxos de umidade de no solo são tão pequenos que praticamente não há migração de umidade. Na face esquerda por exemplo, onde  $\theta$  atinge seu valor mais baixo, tem-se, para regime permanente,  $\theta = 0,2059$  quando  $\theta_1 = 0,2060$  e  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ .

O máximo desvio associado à condição de  $\theta_1 = 0,026$  é 6% para a umidade  $(\theta/\theta_1 - 1)/Pn$ , o que equivale a um desvio em  $\theta$  de 0,7%. Tal desvio também ocorre na face esquerda do domínio para  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  e na condição de regime permanente.

Nos resultados apresentados nas Figuras 2-5, os valores de  $Lu$  e  $Pn$  para cada par  $\theta_1, \Delta T$  foram determinados a partir da temperatura de referência  $T_1$ . Para o caso  $\theta_1 = 0,21$  e  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  mostrado na Figura 5, a linha pontilhada corresponde à temperatura de referência  $(T_0 + T_1)/2$ . Comparando-se a curva tracejada com a curva pontilhada verifica-se que a utilização de  $(T_0 + T_1)/2$  melhora sensivelmente a concordância entre os dois modelos.

A seguir as Figuras 2-5 serão utilizadas para explorar aspectos físicos relacionados com a migração de umidade no problema em questão. Observando-se as Figuras 2 e 3 verifica-se que as distribuições de umidade possuem, aproximadamente, uma simetria invertida em relação a uma reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa pelo ponto  $x/L = 0,5$ . A existência de tal simetria pode ser racionalizada observando-se que para estas figuras  $Lu$  é da ordem de  $10^{-2}$ . Conforme observado anteriormente, para baixos valores de  $Lu$ , como estes das Figuras 2 e 3, o perfil de temperatura se desenvolve muito antes do perfil de umidade. Nestes casos o problema de migração de

umidade se desacopla do problema térmico. Estando o perfil de temperatura plenamente desenvolvido, o segundo termo do lado direito da equação (20) se anula fazendo com que o termo fonte do problema da transferência de massa desapareça. Adicionalmente, conforme observado nas equações (23), o problema da umidade passa a experimentar condições de fluxo de umidade constantes nas faces  $X=0$  e  $1$  uma vez que para temperatura plenamente desenvolvida  $\partial\alpha/\partial x$  é constante ao longo do meio. Desta forma, conforme mostrado nas Figuras 2 e 3, para pontos equidistantes à esquerda e à direita do ponto  $x/L=0,5$  o fluxo de umidade (dado pela inclinação da curva  $\Omega$  versus  $x/L$ ) é praticamente o mesmo. Nota-se ainda que as distribuições de umidade apresentam um comportamento monotônico, com  $(\theta/\theta_i - 1)/Pn$  crescendo do ponto  $x/L=0$  ao ponto  $x/L=1$ .

Focalizando a atenção agora nas Figuras 4 e 5, observa-se que a simetria discutida anteriormente não existe. Adicionalmente, para  $t=2 \times 10^{-5}$  s a distribuição de umidade não apresenta um crescimento monotônico. A racionalização de tais fatos será apresentada a seguir.

O número de Luikov associado às Figuras 4 e 5 é relativamente elevado ( $\approx 0,3$ ), significando que para baixos valores de  $t$  o perfil de temperatura ainda não se desenvolveu. Desta forma, o fluxo de vapor, que é governado pelo gradiente térmico e está associado à evaporação do líquido na parede esquerda diminui à medida que  $x/L$  aumenta. Esta diminuição no fluxo de vapor indica que o mesmo está se condensando no interior do meio o que ocasiona um aumento no conteúdo de umidade. Tal efeito é responsável pelos valores de  $(\theta/\theta_i - 1)/Pn$  maiores que zero em torno da posição  $x/L=0,25$  na curva  $t=2 \times 10^{-5}$  s. À medida que se progride além de  $x/L=0,25$ , o conteúdo de umidade diminui e tende à umidade inicial tendo em vista que na presença da condensação o aquecimento da parede esquerda não se faz sentir perto da parede direita.

Um último fato a ser observado em relação às Figuras 2-5 é que no regime permanente o modelo paramétrico fornece como distribuição de umidade uma reta cujos valores nas paredes esquerda e direita do domínio são, respectivamente,  $(\theta/\theta_i - 1)/Pn = -0,5$  e  $0,5$ .

Uma vez que os maiores desvios entre o modelo e propriedades variáveis e o modelo paramétrico ocorrem em  $x/L=0$ , a Figura 6 foi preparada. Esta figura mostra, para  $\theta_i = 0,026$ , como  $(\theta/\theta_i)_{x=0}$  varia com  $t$  tendo  $\Delta T$  como parâmetro de curva. Observa-se na Figura 6 que para  $t < 10^{-5}$  s não há diferença entre os dois modelos. Conforme observa

do anteriormente esta diferença aumenta com o aumento de  $T$ . Nos três casos indicados na Figura 6 o regime permanente é atingido um  $t=10^7$  s.

Para  $t < 10^5$  s as curvas da Figura 6 fornecem valores de umidade que não variam com o tempo. Tal fato é melhor observado através da Figura 7. Nesta figura o número de Posnov foi incorporado na unidade adimensional. Os casos indicados na Figura 6 correspondem aproximadamente, à curva de  $Lu = 0.01$  na Figura 7. Observa-se na Figura 7 a existência de patamares na distribuição de umidade para pequenos valores de  $\tau$ ; quanto menor o número de Luikov maior a região do patamar. A Figura 7 é idêntica à Figura 2 apresentada por Eckert e Faghri em [10], que, entretanto, não se detiveram na análise dos patamares de umidade. Em parágrafos subsequentes o desenvolvimento dos perfis de temperatura e umidade no meio será investigado através de uma análise da ordem de grandeza das equações governantes, a fim de se explorar tais patamares.

Outro fato a ser notado na Figura 7 é que a partir de um certo tempo ( $\tau=0,1$ s), as curvas convergem para uma única curva indicando que a distribuição de umidade no meio não mais depende do número de Luikov, ou seja, o perfil de temperatura atingiu a condição de regime permanente.

Considere-se agora a Figura 8 a fim de avaliar a ordem de grandeza dos termos nas equações (20) e (21). A avaliação destes termos permitirá uma racionalização dos patamares existentes na Figura 7.

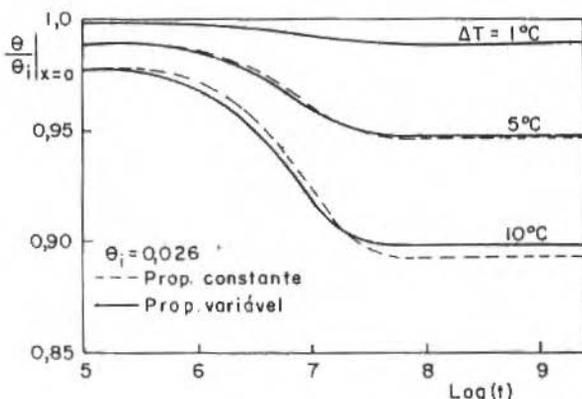


Figura 6. Variação com o tempo da umidade junto à face aquecida para  $\theta_i=0,026$

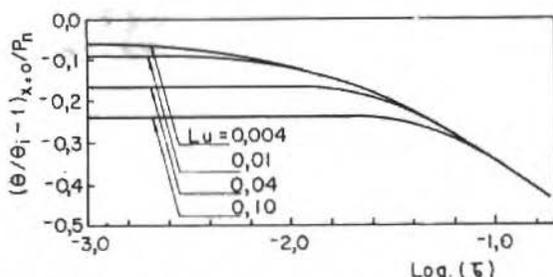


Figura 7. Variação com o tempo da umidade junto à face aquecida tendo como parâmetro de curva o número de Luikov,  $Lu$

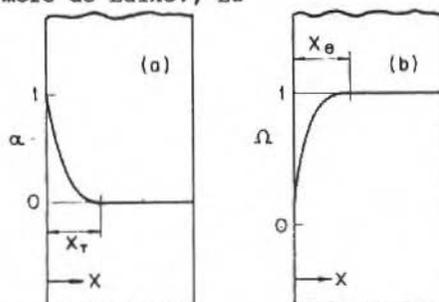


Figura 8. Desenvolvimento esquemático da distribuição de temperatura (a) e umidade (b) no meio para baixos valores de  $\tau$

A Figura 8a mostra o desenvolvimento da distribuição de temperatura logo após a condição de contorno  $\alpha=1$  ter sido imposta na face  $X=0$ . Com o passar do tempo o perfil de temperatura se desenvolve no interior do meio e a distância  $X_T$  representa o avanço do perfil em um dado tempo  $\tau$ . Similarmente, a Figura 8b mostra o desenvolvimento do perfil de umidade no meio, e  $X_\theta$  representa o avanço deste perfil para um dado  $\tau$ . Enquanto que em  $X=0$  o valor da temperatura é constante e igual a 1, o valor da umidade varia com  $\tau$ . Deve-se notar que os valores de  $X_\theta$  e  $X_T$  são, em geral, diferentes.

Considerando as Figuras 8a e b é possível estimar a ordem de grandeza dos termos nas equações (20) e (21).

Para a equação (20) tem-se,

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)/Pn}{\tau} - \frac{(1-\theta/\theta_i)/Pn}{X_\theta^2} + \frac{1}{X_T^2} \quad (24)$$

onde o símbolo  $-$  denota que o termo do lado esquerdo é da mesma or-

dem de grandeza dos termos do lado direito. Analogamente, para a equação (21) e condição de contorno em  $X=0$ , tem-se, respectivamente,

$$Lu/\tau \sim 1/X_T^2 \quad (25)$$

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)/Pn}{X_\theta} + \frac{1}{X_T} \sim 0, \quad \text{em } X=0 \quad (26)$$

Lembrando que  $Lu=D_\theta/\lambda$ , para baixos valores de  $Lu$  o perfil de temperatura se desenvolve bem mais rapidamente do que o perfil de umidade. Desta forma, para  $Lu$  baixo,  $X_T \gg X_\theta$ . Combinando tal fato com a condição em  $X=0$  dada pela equação (26) tem-se,

$$\frac{1}{X_\theta} \frac{(1-\theta/\theta_i)/Pn}{X_\theta} \gg \frac{1}{X_T} \frac{1}{X_T} \quad (27)$$

A relação anterior mostra que o primeiro termo do lado direito da equação (24) é dominante sobre o segundo e, assim, pode-se escrever que,

$$(1-\theta/\theta_i)/\tau \sim (1-\theta/\theta_i)/X_\theta^2 \implies \tau \sim X_\theta^2 \quad (28)$$

ou, combinando as relações (25) e (28),

$$X_\theta \sim Lu^{1/2} X_T \quad (29)$$

Para se determinar a ordem de grandeza da umidade na face esquerda do meio,  $\theta(X=0)$ , a relação (29) é substituída na condição de contorno (26) obtendo-se

$$(\theta/\theta_i - 1)/Pn \sim -Lu^{1/2}, \quad \text{em } X=0 \quad (30)$$

A relação anterior fornece o valor da umidade adimensional em  $X=0$ . Esta relação é tanto mais precisa quanto menor for o valor do número de Luikov. Para  $Lu = 0,004$ , por exemplo, tem-se, da relação (30)  $(\theta/\theta_i - 1)/Pn \sim -0,06$ . A Figura 7 fornece, para  $Lu = 0,004$   $(\theta/\theta_i - 1)/Pn \sim -0,06$ . À medida que o número de Luikov aumenta, a relação (16) torna-se menos precisa. Como exemplo, para  $Lu = 0,1$ , tem-se  $-0,32$  da relação (30) e  $-0,24$  da Figura 7.

Para valores do número de Luikov próximos de um, as distâncias de penetração  $X_\theta$  e  $X_T$  ficam da mesma ordem de grandeza, o que pode ser verificado pela relação (29). Assim, considerando  $X_\theta \sim X_T$ , tem-se, a partir da relação (26),

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)/Pn}{X_\theta^2} + \frac{1}{X_T^2} \sim 0, \quad \text{em } X = 0 \quad (31)$$

que quando substituída na relação (24) fornece  $\partial\theta/\partial\tau \sim 0$  em  $X=0$ . Fisicamente o que se mostrou é que para baixos valores de  $\tau$ , quando  $Lu$  se aproxima de um o fluxo de vapor associado ao gradiente de temperatura é equilibrado pelo fluxo de líquido associado ao gradiente de umidade, fazendo com que a umidade na face esquerda não varie com o tempo. Tal afirmação é tanto mais correta quanto mais próximo de um for o número de Luikov, conforme mostra os patamares da Figura 7.

## CONCLUSÕES

O presente trabalho é uma análise transiente da transferência simultânea de calor e massa em meios porosos não saturados. O principal objetivo do trabalho foi comparar os resultados obtidos através de uma formulação que incorpora a dependência das propriedades termofísicas e difusividades com a temperatura e umidade, com os resultados obtidos via uma formulação paramétrica do problema. O modelo das propriedades variáveis utilizado aqui é o devido a PHILIP e DE VRIES [1-2], enquanto que o modelo paramétrico é o sugerido por ECKERT e FAGHRI [10]. Para a comparação entre os dois modelos considerou-se a migração de umidade causada por gradientes térmicos em uma geometria plana unidimensional. O meio em consideração é um cascalho arenoso com porosidade 0,517, e a comparação foi feita para dois conteúdos de umidade inicial,  $\theta_i = 0,026$  e 0,21 e para três diferenças de temperatura,  $\Delta T = 1, 5$  e  $10^\circ\text{C}$ . A umidade inicial 0,026 corresponde a uma situação onde as pontes de umidade existentes nos interstícios estão desconectadas umas das outras, enquanto que para  $\theta_i = 0,21$ , as pontes de umidade estão conectadas entre si existindo continuidade da fase líquida.

Para  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ , os dois modelos forneceram resultados virtualmente idênticos. Os desvios associados ao modelo paramétrico são maiores para maiores valores de  $\Delta T$ . O máximo desvio em  $\theta$  ocorreu

na face aquecida do meio e foi de 0,03 e 0,7% para  $\theta_1=0,026$  e 0,21, respectivamente. Tais resultados permitem que se recomende o uso do modelo paramétrico como uma primeira aproximação para a classe de problemas em questão, à luz do que é hoje universalmente feito em transferência de calor. Certamente que, quanto maiores forem as diferenças de temperatura envolvidas no problema, maiores os erros introduzidos pela análise paramétrica.

O modelo paramétrico analisado na presente investigação é governado por dois números adimensionais, o número de Posenov,  $P_n$  e o número de Luikov,  $Lu$ . Através de uma análise de ordem de grandeza foi mostrado que, para  $Lu = 1$ , o fluxo de vapor no meio é equilibrado pelo fluxo de líquido, fazendo com que nos instantes iniciais de secagem do meio, a umidade próxima da face aquecida, depois de se ajustar à condição de contorno imposta na temperatura, não varie com o tempo.

Uma versão compactada deste trabalho foi apresentada em [20]; a discussão física associada à existência dos patamares de umidade, bem como a análise de ordem de grandeza dos termos das equações governantes não foi incluída em [20].

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Divisão de Cabos da PIRELLI S.A. o suporte financeiro para a realização do trabalho. Esta investigação é parte da dissertação de mestrado do primeiro autor, bolsista da CAPES durante sua pós-graduação.

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] PHILIP, J.R. and DE VRIES, D.A., "Moisture Movement in Porous Media under Temperatura Gradients", Trans.Am.Geophys. Union, vol. 38, pp. 222-232, 1957.
- [ 2 ] DE VRIES, D.A., "Simultaneous Transfer of Heat and Moisture in Porous Media", Trans.Am.Geophys. Union, vol. 39, pp. 909-916, 1958.
- [ 3 ] LUIKOV, A.V., "Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies", Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [ 4 ] CARY, J.W. and TAYLOR, S.A., "Thermally Driven Liquid and Vapor Phase Transfer of Water and Energy in Soil", Soil Sci.Soc. of Am.Proc., vol. 26, pp. 417-420, 1962.

- [ 5 ] WHITAKER, S., "Simultaneous Heat, Mass and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying", *Advances in Heat Transfer*, vol. 13, Academic Press, New York, 1977.
- [ 6 ] CRAUSSE, P.; BACON, G. and BORIES, S., "Etude Fontamentale des Transferts Couples Chaleur-Masse in Mileu Poreux", *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol. 24, pp. 991-1004, 1981.
- [ 7 ] COUVILLION, R.J. and HARTLEY, J.G., "Drying Front Movement Near Low-Intensity, Impermeable Underground Heat Sources", *J. Heat Transfer*, vol. 108, pp. 182-189, 1986.
- [ 8 ] BLACK, W.; HARTLEY, J.G.; BUSH, R.A. and MARTIN JR., M.A., "Thermal Stability of Soils Adjacent to Underground Transmission Power Cables", *Technical Report of Georgia Institute of Technology for EPRI*, 1982.
- [ 9 ] PREECE, R.J. and HITCHCOCK, J.A., "Simultaneous Diffusion of Heat and Moisture Through Isotropic Porous Media with Varying Physical Properties", *6th International Heat Transfer Conference, Toronto*, pp. 2348-2353, 1978.
- [10] ECKERT, E.R.G. and FAGHRI, M., "A General Analysis of Moisture Migration Caused by Temperature Differences in an Unsaturated Porous Medium", *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol. 23, pp. 1613-1623, 1980.
- [11] FAGHRI, M. and ECKERT, E.R.G., "Moisture Migration Caused by Periodic Temperature Fluctuations in an Unsaturated Porous Medium", *Wärme-Stoffübertrag*, vol. 14, pp. 217-223, 1980.
- [12] ECKERT, E.R.G. and FAGHRI, M., "A Parametric Analysis of Moisture Migration in an Unsaturated Porous Slab Caused by Convective Heat and Mass Transfer", *"Wärme-Stoffübertrag."*, vol. 20, pp. 77-87, 1986.
- [13] CHILDS, E.C. and GEORGE-COLLIS, N., "The Permeability of Porous Materials", *Proc.Roy.Soc.*; vol. 201A, pp. 392-405, 1950.
- [14] HILLEL, D., "Fundamentals of Soils Physics", Academic Press, New York, 1980.
- [15] DE VRIES, D.A., "Heat Transfer in Soils", in *Heat and Mass Transfer in Biosphere*, pp. 1-28, Scripta, Washington, 1975.
- [16] HARTLEY, J.G., "An Analysis of the Thermal Stability of the Soil Environment of Underground Electrical Cables", Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1977.

- [17] FERZIGER, J.H., "Numerical Methods for Engineering Application", John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [18] PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer", Hemisphere, Washington, 1980.
- [19] DAMASCENO FERREIRA, L.S., "Migração de Umidade Causada por Gradientes Térmicos entre Duas Fronteiras Impermeáveis Contendo um Meio Poroso Não Saturado", Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [20] DAMASCENO FERREIRA, L.S. e PRATA, A.T., "Transferência de Calor e Massa em Meios Porosos Não Saturados. Um Estudo Comparativo entre Dois Modelos", Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 1987.

## REFINAMENTO DA SOLUÇÃO ALGÉBRICA DA MATRIZ DE RICCATI - UTILIZAÇÃO NO PROGRAMA LINQUAD (LQG)

José Sotelo Júnior - Membro da ABCM  
Luiz Antonio Lopes  
ENGESA S.A.

### RESUMO

O presente trabalho apresenta os resultados do refinamento aplicado à solução da equação algébrica de Riccati a partir do método de decomposição espectral. Os resultados mostram que o resíduo na solução é consideravelmente menor e recupera a simetria nas matrizes de covariância.

### ABSTRACT

This paper shows the results through the application of a refinement in the algebraic solution of the Riccati matrix equation based on the eigenvectors decomposition of the Hamiltonian matrix. The main results show a considerable improvement in the solution residues and recovery of the symmetric property of covariance matrices.

### NOMENCLATURA

N	dimensão do espaço de estado
NC	número de variáveis de controle
NOB	número de variáveis observadas
A	matriz de malha aberta do sistema
B	matriz de distribuição do controle
F	matriz de distribuição de perturbação do processo
Q	matriz de peso do estado
R	matriz de peso do controle

$\bar{Q}$	matriz de potência espectral de ruído de processo
M	matriz de medida
$V_m$	matriz de potência espectral de ruído de medida
I	matriz identidade
$\underline{x}$	vetor de estado
$\underline{w}$	vetor de perturbação
J	índice de performance
tf	tempo final
E[]	valor esperado
$\lambda^*$	variáveis adjuntas de $\underline{x}$
$\lambda_j$	j-ésimo autovalor de A (valor exato)
$P_j$	j-ésimo autovalor de A (valor aproximado)
W	autovetor de A
Z	autovetor de A normalizado

## INTRODUÇÃO

O controle multivariável na forma de equações de estado com critério quadrático e gaussiano (LQG) pode ser implementado num ambiente de projeto auxiliado por computador (CAD), possibilitando a solução de síntese do controlador e observador e análise do desempenho do sistema controlado. O princípio da separabilidade permite que os projetos do controlador e o do observador sejam realizados de maneira independente, porém ambos têm em comum a necessidade de solução da equação matricial algébrica de Riccati.

No programa LINQUAD a solução da equação de Riccati se apoia no método da decomposição espectral de autovetores [1], utilizando o algoritmo QR embutido em programas como o EISPACK [2]. Apesar desses pacotes apresentarem elevado grau de confiabilidade para serem utilizados num programa como o LINQUAD, a precisão obtida nos autovetores pode ser insuficiente para garantir resíduos nulos na solução da equação de Riccati com a precisão desejada. Como resultado as matrizes de covariância do estado e controle apresentam anomalias na sua solução.

Neste trabalho é apresentado o resultado da aplicação de um refinamento na solução dos autovetores, proposto por Van Ness [3], baseado em algoritmo da decomposição L-U da matriz Hamiltoniana. Em todos os casos testados as soluções obtidas com o refinamento levam a resíduos considerados desprezíveis, recuperando a simetria e a forma definida positiva das matrizes de covariância.

CONTROLE MULTIVARIÁVEL COM ÍNDICE DE DESEMPENHO QUADRÁTICO GAUSSIANO

Na sua forma mais simples, o problema contínuo de síntese do controlador (regulador) com índice quadrático pode ser colocado da seguinte maneira:

determinar  $\underline{u} \in U$  tal que:

$$J = E \left[ \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}] dt \right] \quad (1)$$

seja mínimo.

sujeito a:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + F \underline{w} \quad (2)$$

onde

- $\underline{u}$  - vetor de controle
- $\underline{x}$  - vetor de estado
- $Q, R$  - matrizes de peso do estado e do controle
- $A, B$  - matrizes de distribuição do estado e do controle
- $F$  - matriz de distribuição do ruído de processo
- $\underline{w}$  - ruído branco de processo

A solução do problema do regulador estacionário é expressa por:

$$\underline{u}^* = -C \underline{x} \quad (3)$$

onde

$C$  - matriz de ganhos de realimentação

e

$$C = R^{-1} B^T S, \quad (4)$$

onde

$$\dot{S} = -SA - A^T S + SBR^{-1}B^T S + Q \quad (5)$$

com  $\dot{S} = 0$ .

A equação (5) representa a equação matricial algébrica de Riccati para este problema.

#### SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI POR DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

A equação (5) em regime estacionário pode ser obtida formando-se a equação dinâmica de Euler-Lagrange:

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\lambda}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda}^* \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde

$\underline{\lambda}^*$  : variáveis adjuntas de  $\underline{x}$ .

POTTER [1] mostra que formando-se a matriz Hamiltoniana de autovetores T associada à matriz de (6) a solução de (5) pode ser obtida por:

$$S = \Lambda_- (X_-^{-1}) \quad (7)$$

onde

$\Lambda_-$  : corresponde aos autovetores da partição inferior de T cujos autovalores têm parte real negativa

$X_-$  : corresponde aos autovetores da partição superior de T cujos autovalores têm parte real negativa.

De modo similar o problema associado ao projeto do observador estocástico pode ser reduzido à forma de uma equação matricial de Riccati cuja solução é análoga a (7).

A solução do problema recai, portanto, na formação da matriz T de autovetores através de um programa confiável de autovalores/autovetores.

#### REFINAMENTO NA SOLUÇÃO DOS AUTOVETORES

O programa LINQUAD utiliza rotinas do EISPACK [6], para montar a matriz T, utilizando o algoritmo QR para este fim.

A precisão exigida para esta finalidade, contudo, é de tal ordem a garantir a simetria de S em (7) além de definida positiva. Conforme mostramos em alguns resultados, a sensibilidade no cálculo

lo dos autovetores impõe dificuldades nesse sentido, introduzindo resíduos não desprezíveis na equação algébrica.

O refinamento proposto por VAN NESS [3] permite melhorar a precisão dos autovetores, de modo iterativo, partindo da solução já obtida pelo EISPACK, resolvendo as dificuldades anteriores.

O processo de refinamento se baseia no método da iteração inversa de Wilkinson [4].

Este método pode ser descrito por duas equações:

$$(A - Ip_j)W_{s+1} = Z_s + W_{s+1} \quad (8)$$

$$Z_{s+1} = \frac{W_{s+1}}{\max(W_{s+1})} + Z_{s+1} \quad (9)$$

onde

- A : matriz real quadrada
- $p_j$  : aproximação de  $\lambda_j$  (autovalores de A)
- $\max(W_{s+1})$  : elemento de maior valor absoluto de  $W_{s+1}$
- $Z_0$  : valor inicial do autovetor.

As iterações continuam até que a mudança em Z seja menor que determinado valor fixado. Se  $p_j$  está próximo do autovalor, o  $j$ -ésimo autovetor predominará em Z. O critério básico para convergência é que o fator  $(p_j - \lambda_j)$  para o autovalor desejado seja menor que este fator para qualquer outro autovalor.

#### Algoritmo de Solução

O primeiro passo é a decomposição L-U da matriz  $(A - Ip_j)$  usando a eliminação de Gauss (rotina ZGEFA do LINPACK [5]), temos então:

$$P(A - Ip_j) = L U \quad (10)$$

onde

- L : matriz triangular inferior, com diagonal igual a 1
- U : matriz triangular superior, com último elemento da diagonal muito pequeno ou possivelmente zero
- P : matriz que representa as trocas de linhas efetuadas na decomposição.

Para um exemplo de quarta ordem, teremos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ L & 1 & & \\ L & L & 1 & \\ L & L & L & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} u & u & u & u \\ & u & u & u \\ & & u & u \\ & & & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Se "e" é diferente de zero, seguem-se os seguintes passos:

- 1) Faz-se, inicialmente, os elementos de Z iguais aos já obtidos pelo algoritmo QR do programa EISPACK
- 2) Reordena-se Z do mesmo modo que  $(A-Ip_j)$  foi reordenada durante a decomposição
- 3) Resolve-se (11) por substituição para o vetor B
- 4) Resolve-se (12) por substituição inversa para o vetor W
- 5) Normaliza-se W, fornecendo novo Z
- 6) Compara-se o novo Z com o Z antigo, se a diferença é suficientemente pequena ( $1.0E-30$  nos casos testados) este é o autovetor desejado, caso contrário, repetem-se os passos 2 a 6.

Quanto mais próximo "e" está de zero, tanto mais correto é o valor  $p_j$ . Se "e" é zero, faz-se o último elemento de W igual a 1,  $B=0$  e resolve-se (12) para determinar o autovetor.

## RESULTADOS OBTIDOS

O efeito do refinamento na solução numérica da equação algébrica de Riccati é ilustrado neste trabalho com dois exemplos disponíveis na literatura. O primeiro é apresentado em [6] e trata da síntese de um sistema de posicionamento de segunda ordem, cuja solução é obtida analiticamente. O segundo caso, apresentado por BRYSON em [7] refere-se ao posicionamento horizontal de um helicóptero com sis

tema de quinta ordem.

### Caso I. Sistema de Posicionamento (K & S)

$$\begin{array}{lll}
 N = 2 & NC = 1 & NOB = 1 \\
 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -46 \end{pmatrix} & B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.787 \end{pmatrix} & \\
 R = 2.0E-05 & M = [1 \ 0] & \\
 F = 0.1 & V_m = 1.0E-07 & \\
 \bar{Q} = 10 & & 
 \end{array}$$

Os resultados são apresentados na Tabela I mostrando os ganhos do controlador, ganhos do observador, valores eficazes (rms) do erro de estimação e de controle e os autovalores do sistema estendido.

Nota-se a perfeita concordância entre os valores obtidos por via analítica e os apresentados pelo LINQUAD com refinamento.

Embora os ganhos do controlador sejam iguais nos três casos, os ganhos do observador diferem consideravelmente no caso sem refinamento. A mesma situação se verifica para os pólos da matriz do sistema estendido, referentes ao observador:

$$\begin{array}{ll}
 -13.8 & 5.39j \quad (\text{sem refinamento}) \\
 -22.5 & 22.24j \quad (\text{com refinamento})
 \end{array}$$

### Resíduos na Solução Algébrica

#### 1. Controlador

$$\begin{pmatrix} -6.94E-17 & 5.20E-18 \\ 1.73E-18 & 2.17E-19 \end{pmatrix}$$

#### 2. Observador

##### I. Sem refinamento

$$\begin{pmatrix} -2.45E-05 & -2.01E-03 \\ -2.26E-03 & -7.50E-02 \end{pmatrix}$$

TABELA I. Resultados do Caso I - Sistema de posicionamento

	GANHOS CONTROLADOR	GANHOS OBSERVADOR	RMS EPRO ESTIMACAO	RMS CONTROLE	AUTOVALORES DO SISTEMA ESTENDIDO
PROGRAMA SEM REFINAMENTO	223.6	23.0	1.5E-03	0.415	$-9.65 \pm 9.09j$
	18.7	113.9	5.1E-02		$-13.80 \pm 5.39j$
PROGRAMA COM REFINAMENTO	223.6	40.4	2.0E-03	1.503	$-9.65 \pm 9.09j$
	18.7	814.4	6.1E-02		$-22.47 \pm 22.24j$
K & S	223.6	40.4	2.0E-03	1.503	$-9.69 \pm 9.09j$
	18.7	814.3	6.1E-02		$-22.48 \pm 22.24j$

II. Com refinamento após quatro iterações

$$\begin{pmatrix} -3.56E-20 & -1.63E-19 \\ -1.22E-19 & 4.34E-18 \end{pmatrix}$$

### Matriz de Covariância do Erro Estimado

I . Sem refinamento

$$\begin{pmatrix} 2.30E-06 & 6.61E-05 \\ 1.14E-05 & 2.57E-03 \end{pmatrix}$$

II. Com refinamento após quatro iterações

$$\begin{pmatrix} 4.04E-06 & 8.14E-05 \\ 8.14E-05 & 3.66E-03 \end{pmatrix}$$

Os resíduos obtidos por substituição da solução na equação algébrica de Riccati do observador são praticamente nulos com o refinamento nos autovetores (item 2.II), enquanto que no caso sem refinamento persistem valores não desprezíveis (-7.5E-02).

A matriz de covariância do erro estimado recupera a simetria quando o refinamento é aplicado à solução conforme pode-se observar nos resultados apresentados.

### Caso II. Controle Horizontal do Helicóptero (Bryson)

N = 5

NC = 1

NOB = 2

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.415 & -0.0111 & 0.0 & -0.0111 \\ 9.8 & -1.43 & -0.0198 & 0.0 & -0.0198 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 6.27 \\ 9.8 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = 1000$$

$$\bar{Q} = 490$$

$$Q_{\text{diag}} = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 2.0 \quad 0.0]$$

$$V_{\text{m diag}} = [1.53E-05 \quad 0.272]$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os resultados são mostrados na Tabela II para o sistema de quinta ordem.

Os ganhos do controlador são os mesmos para os três casos, havendo diferenças nos ganhos do observador. Já os valores eficazes do erro de estimação e controle apresentam diferenças, não muito acentuadas neste caso.

Pode-se verificar que o conjunto de autovalores do sistema estendido no caso sem refinamento apresenta um pólo real positivo  $8.38E-02$ , e quatro pólos reais ao invés de apenas dois no caso com refinamento. Neste caso a solução sem refinamento altera qualitativamente a estabilidade do sistema estendido.

## Resíduos na Solução Algébrica

### 1. Controlador

#### I. Sem refinamento

$$\begin{pmatrix} 6.4E-14 & 5.7E-14 & 1.2E-14 & -1.8E-14 & 1.4E-16 \\ 5.3E-14 & 1.8E-14 & 6.0E-15 & -1.8E-15 & 2.8E-17 \\ 4.4E-15 & 7.1E-15 & 6.7E-16 & -3.1E-15 & -3.5E-18 \\ -2.7E-14 & -6.0E-15 & -2.9E-15 & -4.2E-15 & 5.7E-17 \\ -1.3E+01 & -3.1E+01 & -1.2E+00 & 4.2E-01 & 3.5E-01 \end{pmatrix}$$

TABELA II. Resultados do Caso II - Posicionamento do helicóptero

	GANHOS CONTROLADOR	GANHOS OBSERVADOR		FMS ERRO ESTIMACÃO	FMS CONTROLE	AUTOVALORES DO SISTEMA ESTENDIDO
PROGRAMA SEM REFINAMENTO	8.6E-01 3.3E-01 8.7E-02 4.5E-02 -1.9E-03	4.1E+00 9.0E+00 2.3E+01 5.6E+00 -1.2E-03	4.6E-04 -4.9E-05 -5.1E-02 5.2E-01 -6.7E-01	7.9E-03 2.0E-02 7.6E-02 3.8E-01 4.0E+00	3.0E-02	-0.421 + 1.14j -1.24 + 5.59j -1.15 + 2.18j -2.46 0.0838 -0.61 -0.20
PROGRAMA COM REFINAMENTO	8.6E-01 3.3E-01 8.7E-02 4.5E-02 -1.9E-03	4.0E+00 8.2E+00 2.1E+01 5.6E+00 -9.5E+01	3.3E-04 2.5E-04 7.4E-02 3.6E-01 -1.3E-01	7.9E-03 2.0E-02 9.2E-02 3.2E-01 3.8E+00	2.7E-02	-0.421 + 1.14j -1.24 + 5.59j -1.17 + 2.00j -0.190 + 0.193j -2.34 -0.20
BRYSON 1972	8.6E-01 3.3E-01 8.7E-02 4.5E-02 -1.9E-03	4.0E+00 8.2E+00 2.1E+01 5.9E+00 -9.5E+01	3.3E-04 2.5E-04 7.4E-02 3.8E-01 -1.3E-01	7.9E-03 2.0E-02 9.2E-01 3.2E-01 3.6E+00	2.7E-02	-0.420 + 1.14j -1.24 + 5.60j -1.17 + 2.00j -0.190 + 0.190j -2.34 -0.20

## II. Com refinamento após duas iterações

$$\begin{pmatrix} -9.3E-13 & -1.7E-14 & -1.7E-13 & -1.2E-13 & -7.1E-14 \\ 2.9E-13 & 1.9E-13 & 9.4E-15 & -6.0E-15 & -4.1E-14 \\ -2.0E-13 & -3.6E-14 & -3.0E-14 & 2.0E-14 & -4.1E-15 \\ -1.3E-13 & -2.3E-14 & -1.9E-14 & -1.3E-14 & -6.0E-16 \\ -2.4E-14 & -6.5E-15 & -2.6E-15 & -1.5E-15 & 3.0E-16 \end{pmatrix}$$

## 2. Observador

## I . Sem refinamento

$$\begin{pmatrix} 2.2E-06 & 7.2E-05 & 1.8E-04 & 1.2E-04 & -1.7E-02 \\ 2.8E-05 & 8.8E-05 & -2.7E-04 & -1.9E-03 & -1.5E-02 \\ 4.9E-05 & 3.0E-04 & -1.0E-03 & -1.7E-02 & -5.0E-02 \\ 2.1E-05 & 5.9E-05 & -1.2E-02 & 5.3E-02 & -1.1E-01 \\ 1.9E-03 & -2.8E-02 & -4.8E-02 & -6.5E-02 & 7.3E+00 \end{pmatrix}$$

## II. Com refinamento após duas iterações

$$\begin{pmatrix} -9.3E-13 & -1.8E-14 & -1.7E-13 & -1.3E-13 & -7.1E-14 \\ 2.9E-13 & 1.9E-13 & 9.4E-15 & -6.0E-15 & -4.2E-14 \\ -2.0E-13 & -3.5E-14 & -3.0E-14 & -2.0E-14 & -4.1E-15 \\ -1.3E-13 & -2.3E-14 & -1.9E-14 & -1.2E-14 & -6.0E-16 \\ -2.4E-14 & -6.5E-15 & -2.6E-15 & -1.4E-15 & -3.0E-16 \end{pmatrix}$$

Nota-se que o refinamento balanceia todos os elementos da matriz residual anulando-a praticamente. No caso sem refinamento persistem valores apreciavelmente não nulos.

**Matrizes de Covariança da Estimação do Erro**

## I . Sem refinamento

$$\begin{pmatrix} 6.3E-05 & 1.2E-04 & 3.1E-04 & 1.3E-04 & -1.2E-02 \\ 1.3E-04 & 4.0E-04 & 5.6E-04 & -1.3E-05 & -5.7E-02 \\ 3.5E-04 & 6.2E-04 & 6.0E-03 & -1.4E-02 & -9.8E-02 \\ 8.5E-05 & 4.8E-05 & 3.6E-02 & 1.4E-01 & -4.5E-02 \\ -1.7E-02 & -7.8E-02 & -1.6E-01 & -1.8E-01 & 1.6E+01 \end{pmatrix}$$

## II. Com refinamento após duas iterações

$$\begin{pmatrix} 6.2E-05 & 1.3E-04 & 3.2E-04 & 8.9E-05 & -1.5E-02 \\ 1.2E-04 & 4.0E-04 & 6.2E-04 & 6.8E-05 & -6.2E-02 \\ 3.3E-04 & 6.2E-04 & 8.5E-03 & 2.0E-02 & -1.0E-01 \\ 8.9E-05 & 6.8E-05 & 2.0E-02 & 1.0E-01 & -3.5E-02 \\ -1.5E-02 & -6.2E-02 & -1.0E-01 & -3.5E-02 & 1.4E+01 \end{pmatrix}$$

Novamente, como no caso I, a simetria da solução da matriz de Riccati é recuperada pelo refinamento.

### CONCLUSÕES

Os resultados apontam que o refinamento apresentado melhora a precisão e confiabilidade da solução algébrica de Riccati pelo método da decomposição espectral, tem o mérito de recuperar a simetria da matriz de covariância do erro e de controle e em alguns casos a qualidade da resposta do sistema autônomo estendido.

Além disto, o refinamento apresentado não acrescenta carga computacional apreciável à solução dos problemas testados com rápida convergência para a solução do problema.

O método foi também comparada com o proposto em [8] apresentando resultados comparáveis em termos de precisão.

### REFERÊNCIAS

- [1] POTTER, J.E., "Matrix Quadratic Solutions", SIAM, Journal of Applied Mathematics, vol. 14, nº 3, May 1966.
- [2] SMITH, B.T. et al., "Matrix Eigensystems Routines - EISPACK Guide", 2nd ed. (Lecture Notes in Computer Science), vol. 6, N.Y. Springer Verlag, 1976.
- [3] VAN NESS, J.E., "Inverse Iteration Method for Finding Eigenvectors", IEEE Trans. A.C., Feb. 1969.
- [4] WILKINSON, J.H., "The Algebraic Eigenvalue Problem", London: Oxford University Press, 1965, pp. 619-637.
- [5] DONGARRA, BUNCH, MOLER & STEWART, "LINPACK User's Guide", Philadelphia, PA, SIAM, 1979.
- [6] KWAKERNAAK & SIVAN, "Linear Optimal Control Systems", Wiley Interscience, 1972.

- [7] BRYSON, A.E., "Control Theory for Random Systems", Proceedings of 13th Int. Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Moscow, USSR, Aug. 1972.
- [8] LAUB, A.J., "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations" IEEE Trans. A.C., vol. 24, nº 6, Dec. 1979.

# PERGAMON JOURNALS

HEADINGTON HILL HALL, OXFORD OX3 0BW, UK • MAXWELL HOUSE, FAIRVIEW PARK, ELMSFORD, NY 10523, USA

International Journal of

## MACHINE TOOLS & MANUFACTURE

Design, Research and Application

*Editors-in-Chief: R DAVIES and T DEAN, Department of Mechanical Engineering, The University of Birmingham, PO Box 363, Birmingham, B15 2 TT, UK*

Formerly the International Journal of Machine Tool Design and Research, this journal is concerned primarily with design, research and development of machine tools and associated manufacture. Special emphasis is given to industrial relevance and potential. Results and conclusions are presented in a manner which is appreciated by practising engineers as well as by research workers and educationalists.

The journal's scope is broad, blending both the development of traditional methods with novel processes and techniques, and encompasses cutting and forming technologies for metals and non-metals in the context of the mechanics of the processes, the design and development of machines, tooling and the development of complete manufacturing systems. Full coverage is given to relevant plasticity, tool wear, tool design, machine design, process development and the economics of production. In addition, papers on machine tool control, novel manufacturing systems, CAD/CAM, materials handling, and computer integrated manufacture are included.

### Recently published papers include

A study on the superplasticity of brass and its applications, L FA-YU *et al.*

Prediction and detection of cutting tool failure by modified group method of data handling, T UEMATSU & N MOHRI.

An analysis of the forging of spur gear forms, N A ABDUL & A DEAN.

Product models as basis for integrated design and manufacturing, G SPUR *et al.*

Construction and design of self adjusting hydrodynamic bearings for precision machine tool spindles.

T S R MURTHY.

Geometry of drill elements, A R WATSON.

A study on the corner wear in cylindrical plunge grinding, B T ACHYUTHA & V RADHAKRISHNAN.

Observations on the mean values of forces, torque and specific power in the peripheral milling process, I YELLOWLEY.

**New Patents Section** - The journal now contains abstracts and illustrations of recently issued United States Patents and published patent applications filed from over 30 countries under the Patent Co-operation Treaty.

### Subscription Information

Published quarterly (Volume 27)

Annual subscription (1987)

Two-year rate (1987/88)

£95.00

£180.50

FREE SAMPLE COPIES AVAILABLE ON REQUEST



PERGAMON JOURNALS LIMITED  
A MEMBER OF THE BPCC PLC GROUP OF COMPANIES



**REVISTA  
BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS**

Associação Brasileira de Ciências Mecânicas

**CHAMADA DE TRABALHOS**

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas está lhe convocando a submeter trabalhos técnicos e/ou científicos que prestigiem sua nova fase. Nos seus nove anos passados de existência, com quatro números anuais, foram publicados 140 artigos, dos quais 40 em inglês e 5 em espanhol, apresentando os resultados de pesquisas de 152 autores pertencentes a 29 instituições nacionais e 24 estrangeiras. A Revista, que conta com o auxílio da FINEP no Programa de Apoio às Revistas Científicas, pretende agora simultaneamente atingir dois objetivos: maior divulgação internacional e incrementar seu aceite internamente ao país.

Para tanto conto consigo!

Além de alterações visuais que simplificam e tornam mais agradável o manuseio da Revista estamos dando início a uma verdadeira "cata" de produção técnico-científica brasileira: não deixe seu trabalho escondido e resumido em anais de Congressos Nacionais e Internacionais. Publique-o na RBCM.

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas atende a um amplo espectro de interesses. Entende-se que esta área abrange os fundamentos e métodos básicos em mecânica teórica e aplicada, dinâmica e vibrações, controle e otimização, materiais, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, termo-ciências, geociências, energia e meio ambiente, biociências. As aplicações destas técnicas são encontradas em muitas ramificações da engenharia conforme um estudo preparado pela ABCM.

Estamos também incentivando a publicação em inglês. Cada trabalho onde um dos autores seja residente no Brasil poderá fornecer ao Editor uma lista de 20 nomes de pesquisadores no exterior que receberão um exemplar de cortesia da RBCM. Trabalhos em Português por sua vez deverão ter um sumário estendido em inglês (aproximadamente uma página) que permita o acompanhamento das fórmulas e figuras do texto. A RBCM dará o apoio necessário ao autor na revisão do texto em inglês.

Por outro lado pretendemos dar especial atenção a trabalhos derivados de aplicações tecnológicas, realizados pela indústria ou em cooperação com ela. A RBCM deve se tornar um veículo de estímulo do diálogo entre a empresa e o meio acadêmico. Vamos iniciar na Revista três seções novas: Comunicações, Cartas ao Editor e Notícias:

Comunicações são trabalhos Científicos ou tecnológicos, curtos, ou, aspectos parciais de um trabalho mais extenso. Podem também ser informações sobre trabalhos do autor publicados em Congressos ou

em revistas internacionais. Sua publicação é rápida e de decisão do Editor ou de um dos Editores Associados da Revista.

Cartas ao Editor pretende abrir um espaço para a discussão dos temas relevantes que interessam a nossa comunidade. Os temas podem ter caráter científico ou não. Sua publicação é de decisão do Editor.

Notícias deve apresentar em forma de resenha as novidades nacionais e internacionais relativas ao mundo de Ciências Mecânicas, difundindo informações sobre a participação brasileira em eventos, estrangeiros, cooperação de instituições, quem está onde fazendo o que etc.

Os trabalhos científicos continuarão a ter o tratamento habitual. Devem ser originais, se possível com parte experimental e serão analisados por 2 ou 3 revisores de escolha dos Editores. A decisão de publicação é do Editor ou dos Editores Associados, ante o parecer dos revisores.

A RBCM espera se tornar o meio natural de publicação de:

- resultados de pesquisas financiadas por fontes governamentais brasileiras;
- resultados de pesquisas de programas de cooperação bi-lateral com o exterior (em inglês, por favor...);
- versões completas de trabalhos apresentados em congressos onde os anais restringem as comunicações a poucas páginas;
- resultados de teses de mestrado;
- resultados de teses de doutorado (em inglês, por favor...);
- trabalhos que antecedem uma publicação em revista internacional de ampla circulação
- trabalhos que incluem ou derivam de pesquisas experimentais;
- resultados de trabalhos realizados em conjunto com empresas;
- resultados de trabalhos tecnológicos ou científicos desenvolvidos pelas empresas
- comunicações que enfoquem aspectos parciais de uma pesquisa.

A ABCM pretende que sua Revista seja um excelente instrumento de intercâmbio de informações entre instituições brasileiras, instituições brasileiras e estrangeiras, universidades, centros de pesquisa e indústrias ou empresas. Toda a sua renovação está sendo feita visando esta função.

Encaminhe seu trabalho, em 3 cópias, nos padrões habituais de datilografia e apresentação a um dos nomes abaixo. Se estiver enviando um trabalho científico em português inclua título em inglês, sumário estendido em inglês, resumo em português, palavras chave em português e inglês. Se o trabalho científico for em inglês inclua o resumo em português, o abstract em inglês, o título em português e as palavras chave em português e inglês. Comunicações, Cartas ao Editor ou Notícias podem ser enviadas em português ou inglês livres de qualquer norma.

Editor :

Editores Associados :

Hans Ingo Weber  
Geprom/DPH/FEC/UNICAMP  
Cx. Postal 6051  
13081 Campinas - SP

Alvaro Toubes Prata (UFSC)  
Cx. Postal 476 - 88049 Florianópolis - SC  
Carlos Alberto de Almeida (PUC/RJ)  
R. Marques de São Vicente, 225 - 22453 - RJ/RJ

Augusto C. Noronha Galeão (LNCC)  
Rua Lauro Müller, 455 - 22290 - RJ/RJ  
Haziem Ali Ad-Dureshi (ITA/CTA)  
R. Paraibuna, s/n - 12200 - S.J. dos Campos/SP

