

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica, da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalurgia, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os Trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês, datilografados, acompanhados dos desenhos em papel vegetal, em tamanho reduzido que permita ainda a redução para as dimensões da Revista e enviados para o Editor Executivo no endereço abaixo.

Editor Executivo da RBCM
Secretaria da ABCM
PUC/RJ –
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

A composição datilográfica será processada pela própria secretaria da RBCM de acordo com as normas existentes.

The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technical-scientific publication, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as a vehicle for the publication of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under heading of the Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished material, i. e., material that has not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology. The Editors and the Editorial Committee are responsible for the final approval.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English, typed and with graphics done on transparent white drawing paper in reduced size in such a way as to permit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor at the following address.

*Executive Editor of RBCM
Secretary of ABCM
PUC/RJ –
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro, RJ – Brazil*

The final typing will be done by the secretary of RBCM according to the journal norms.



**EDITOR
RESPONSÁVEL**
Rubens Sampaio

**EDITOR
EXECUTIVO**
J. M. Freire

**CONSELHO
EDITORIAL**
Abimael F. D. Loula
Arthur J. V. Porto
Berend Snoeijer
Bernardo Horowitz
C. S. Barcellos
D. E. Zempieri
Duraid Mahrus
E. O. Taroco Aliano
F. Venâncio Filho
F. E. Mourão Saboya
Giulio Massarani
Guilherme Creuss
Hans Ingo Weber
Henner A. Gomide
Jan Leon Scieszko
Jerzy T. Sielawa
J. J. Espíndola
Liu Hsú
Maurício N. Frota
Miguel H. Hirata
Nelson Back
Nestor Zouain
Nivaldo L. Cupini
O. Maizza Neto
Pedro Carajilescov
Sergio Colle

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR GÁS-SÓLIDO EM LEITO
DESLIZANTE E ESCOAMENTOS CONCORRENTES,
CONTRACORRENTES E CRUZADOS** 3

D.J.M. Sartori
UFSCar/DEQ

J.T. Freire
UFSCar/DEQ

G. Massarani – Membro da ABCM
COPPE/UFRJ – Programa de Engenharia Química

**ON THE EIGENVALUEUS BASIC TO FORCED ONVECTION
OF NON-NEWTONIAN FLUIDS INSIDE DUCTS** 25

Renato Machado Cotta – Membro da ABCM
Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA
Departamento de Energia

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONTATO
UNILATERAL COM ATRITO – APLICAÇÃO A UMA
PLACA APOIADA SOBRE SOLO RÍGIDO –** 45

Edgar Nobuo Mamiya – Membro da ABCM
Universidade Federal de São Carlos
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

Heraldo Silva da Costa Mattos – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

Michel Raous
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique Marseille – France

Rubens Sampaio – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

**DETERMINAÇÃO DE FATORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO PARA TRINCAS PRÓXIMAS A JUNTAS T EM
ESPÉCIMES PLANOS E TUBULARES SUBMETIDOS A
TRAÇÃO VIA FOTOELASTICIDADE** 71

José Luiz de França Freire – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

José Ricardo Rebello
Metal Leve S/A – Indústria e Comércio

**ANALOGY BETWEEN HEAT AND MASS TRANSFER FOR
DIFFUSION DRIVEN NONISOTHERMAL EVAPORATION** 87

Álvaro Toubes Prata – Membro da ABCM
UFSC – Departamento de Engenharia Mecânica





De acordo com a Ata dos trabalhos de apuração das eleições da ABCM, informamos a composição do Conselho Diretor e do Conselho Deliberativo para o biênio 88-89:

CONSELHO DIRETOR

Presidente	Sidney Stuckenbruck (CENPES/PETROBRAS)
Vice-Presidente	Luiz Bevilacqua (COPPE/UFRJ)
Secretário Geral	José Luiz de França Freire (PUC/RJ)
Secretário	Tito Luiz da Silveira (FESM-COPPE/UFRJ)
Diretor de Patrimônio	José Augusto Ramos do Amaral (NUCLEN)

CONSELHO DELIBERATIVO

Carlos Alberto de Almeida	PUC/RJ
Carlos Alberto Marques Couto	FINEP
Edgardo Taroco	LNCC/CNPq
Francisco Eduardo Mourão Saboya	PUC/RJ
José de Mendonça Freire	PUC/RJ
Leonardo Goldstein Júnior	UNICAMP
Maurício Nogueira Frota	PUC/RJ
Raul Antonino Feijão	LNCC/CNPq
Rubens Sampaio Filho	PUC/RJ
Valder Steffen Júnior	UFU
Suplentes:	
Mauro Sergio Pinto de Sampaio	NUCLEN
Orlando João A. Gonçalves Filho	CNEN

TRANSFERÊNCIA DE CALOR GÁS-SÓLIDO EM LEITO DESLIZANTE E ESCOAMENTOS CONCORRENTES, CONTRACORRENTES E CRUZADOS

D. J. M. Sartori

UFSCar/DEQ

J. T. Freire

UFSCar/DEQ

G. Massarani - Membro da ABCM

COPE/UFRJ - Programa de Engenharia Química

RESUMO

Foram conduzidas determinações experimentais do coeficiente de transferência de calor gás-sólido em leito deslizante e escoamentos contracorrentes, concorrentes e cruzados, nas condições de aquecimento ou resfriamento de sólidos. A fase sólida era constituída de partículas de areia e vidro com diferentes diâmetros e grãos de soja, milho e arroz. Os experimentos foram realizados no intervalo de número de Reynolds entre 10^2 e 10^3 e foi verificado que os resultados obtidos estão de acordo com os valores previstos pela literatura. Constatou-se que o coeficiente de troca térmica é crescente na ordem de escoamentos concorrentes, cruzados e contracorrentes, tendendo a um mesmo valor a elevados Re.

ABSTRACT

Experimental determination of the fluid-to-particle heat transfer coefficient in countercurrent, concurrent and crossflow moving beds under heating or cooling conditions has been carried out. Sand and glass with different diameters and corn, rice and soy beans were used as the solid phase, where as air was used as the fluid phase. The texts were carried out with particle Reynolds number ranging from 10^2 to 10^3 and the results were in fair agreement with those predicted by current literature. It has been shown that the heat transfer coefficient increases in the sequence of the concurrent crossflow and counter-current flow, tending to a common value at high Re.

NOMENCLATURA

- a constante definida na equação (18), adimensional
- A $\psi T_{fO} - T_{sO}$, $[\theta]$
- A' $-\psi T_{fO} - T_{sO}$, $[\theta]$
- b constante definida na equação (18), adimensional
- B $1 - \psi$, adimensional
- B' $1 + \psi$, adimensional
- C calor específico, $[L^2 T^{-2} \theta^{-1}]$
- D_{λ} diâmetro linear máximo da partícula, [L]
- D_p diâmetro médio de partícula definido na Tabela 1, [L]
- G densidade de fluxo de massa, $[ML^{-2} T^{-1}]$
- h coeficiente de transferência de calor entre o gás e o sólido, $[MT^{-3} \theta^{-1}]$
- k condutividade térmica, $[MLT^{-3} \theta^{-1}]$
- N_i número de partículas com diâmetro d_i
- Nu hD_p/k_f , número de Nusselt, adimensional
- Pr $\mu C_f/k_f$, número de Prandtl, adimensional
- r coordenada radial, [L]
- R $D_p/2$, [L]
- Re $G_f D_p/\mu$, número de Reynolds nos escoamentos cruzados, adimensional
- $\frac{\rho_f \epsilon D_p}{\mu} \left(\frac{G_f}{\rho_f \epsilon} + \frac{G_s}{\rho_s (1-\epsilon)} \right)$, número de Reynolds nos escoamentos con tracorrentes, adimensional
- $\frac{\rho_f \epsilon D_p}{\mu} \left(\frac{G_f}{\rho_f \epsilon} - \frac{G_s}{\rho_s (1-\epsilon)} \right)$, número de Reynolds nos escoamentos con correntes, adimensional
- S $6(1-\epsilon)/\phi D_p$ área da superfície das partículas por unidade de volume do leito, $[L^{-1}]$
- T temperatura, $[\theta]$

- x coordenada na direção de escoamento do gás nos escoamentos contracorrentes e concorrentes, e coordenada na direção de escoamento do sólido nos escoamentos cruzados, [L]
- X $\frac{hS}{C_s G_s} x$, cruzados; $\frac{hS}{C_f G_f} x$, adimensional
- y coordenada na direção de escoamento do gás nos escoamentos cruzados, [L]
- Y $\frac{hS}{C_f G_f} y$, adimensional
- z coordenada na direção normal aos escoamentos do gás e do sólido nos escoamentos cruzados, [L]

Símbolos Gregos

- ϵ porosidade, adimensional
- λ $-hS(1-\psi)/C_f G_f$, [L^{-1}]
- λ' $-hS(1+\psi)/C_f G_f$, [L^{-1}]
- μ viscosidade, [$ML^{-1}T^{-1}$]
- ξ $k_s/h_f R$, adimensional
- ρ massa específica, [ML^{-3}]
- ϕ D_p/D_λ , esfericidade, adimensional
- ψ $C_f G_f/C_s G_s$, adimensional

Índices

- f fluido
- s sólido
- o avaliado na região de alimentação do fluido no leito

INTRODUÇÃO

Entre as unidades industriais de secagem de produtos agrícolas, a técnica de leito deslizante tem sido uma das mais aplicadas. O secador ou resfriador nestas unidades podem operar em diferentes configurações de acordo com as direções de escoamentos do ar e do sólido. Os três tipos clássicos destes equipamentos apresentam escoamentos contracorrentes, escoamentos concorrentes e escoamentos cruzados. Nos escoamentos concorrentes, os escoamentos do ar e do sólido são na mesma direção e sentido, nos escoamentos contracorrentes são na mesma direção e sentidos opostos, e nos escoamentos cruzados as direções são perpendiculares.

O secador em escoamentos contracorrentes fornece um produto homogêneo em relação à umidade dos grãos [1]. A secagem em escoamentos concorrentes é relativamente uma nova técnica de secagem de grãos, a qual apenas recentemente tem se tornado comercial em alguns países. Segundo DALPASQUALE [1,2], neste tipo de secador a qualidade do produto é uniforme. A configuração de escoamentos cruzados é a mais comum entre os secadores. Este tipo de secador apresenta uma menor eficiência térmica com relação aos outros dois, e fornece um produto heterogêneo em relação à umidade dos grãos, porém, possui algumas vantagens operacionais como, por exemplo, uma menor diferença de pressão imposta ao escoamento do ar de secagem, permitindo o uso de sopradores de menor potência. Existem soluções conhecidas para reduzir as desvantagens do secador de escoamentos cruzados, como a reversão e o reciclo do escoamento de ar. Estas soluções foram estudadas através de simulação [3,4] e demonstraram um desempenho superior ao da configuração convencional.

Os estudos sobre a transferência de calor entre sólido e gás em leito deslizante encontram-se em um pequeno número de trabalhos considerados relevantes, tais como LOVELL e KARNOFSKY [5] que além da formulação do problema apresentam uma técnica de solução gráfica para a situação de escoamentos contracorrentes. Neste mesmo problema, MUNRO e AMUNDSON [6] determinam a solução analítica exata, obtendo assim os perfis de temperatura para o sólido e fluido. Mais recentemente, VIOLLAZ e SUAREZ [7] obtiveram a solução das equações diferenciais através de técnica numérica e compararam seus resultados com os de

MUNRO e AMUNDSON [6].

Neste trabalho, apresenta-se um modelo matemático e determina-se a solução analítica das equações diferenciais de conservação de energia de fluido e de sólido, com as condições dos perfis das temperaturas iniciais nos escoamentos de fluido e de sólido no trocador de calor em leito deslizante. Dá-se ênfase à determinação do coeficiente de transferência de calor gás-sólido, h , nas três configurações de escoamentos. Realizam-se estudos em unidades de laboratório em leito deslizante contínuo, operando nas situações de aquecimento ou resfriamento de grãos, visando determinar a relação entre o coeficiente de troca térmica gás-sólido e as condições de operação nas configurações de escoamentos contracorrentes, concorrentes e cruzados.

Cabe observar que os trabalhos existentes na literatura utilizam diferentes definições para o coeficiente de transferência de calor [8] nas diferentes situações de escoamentos, sendo que, neste trabalho é seguida uma única definição para o coeficiente h para as três configurações de escoamentos, permitindo assim uma comparação numérica entre eles.

DESENVOLVIMENTO E RESOLUÇÃO DO MODELO

O desenvolvimento do modelo matemático do processo nos diferentes trocadores de calor, nas três condições de escoamentos, considera a convecção através das superfícies das partículas sólidas como o mecanismo dominante na transferência de calor entre as fases.

Além desta suposição básica são adotadas as seguintes simplificações:

- i) perfis planos de velocidade em ambas as fases,
- ii) perda de calor através das paredes do sistema desprezível,
- iii) transferência de calor na direção normal aos escoamentos desprezível em relação à transferência de calor nas direções dos escoamentos,
- iv) leito com propriedades homogêneas,
- v) escoamento unidirecional de gás e de sólido, e
- vi) propriedades físico-químicas constantes ao longo do leito.

Levando em conta as condições de contorno na região de entrada do gás, nos escoamentos contracorrentes e concorrentes, as condições de contorno nas regiões de entrada do sólido e do gás, nos escoamentos cruzados, a geometria dos diferentes leitos, conforme as coordenadas indicadas na Figura 1, e adotando as suposições descritas anteriormente, as equações diferenciais que descrevem a transferência de calor em regime permanente no interior do sistema são:

a) Escoamentos contracorrentes

Nesta configuração, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\text{- Fase fluida: } C_f G_f \frac{dT_f}{dx} + hS(T_f - T_s) = 0 \quad (1)$$

$$\text{- Fase sólida: } C_s G_s \frac{dT_s}{dx} + hS(T_f - T_s) = 0 \quad (2)$$

sujeito às condições na região de entrada do fluido:

$$T_f(0) = T_{fo} \quad (3a)$$

$$T_s(0) = T_{so} \quad (3b)$$

FURNAS [9] obteve os perfis de temperaturas do fluido e do sólido nos seguintes casos:

i) para $\psi \neq 1$,

$$\frac{A+B T_f(x)}{A+B T_{fo}} = \exp(\lambda x) \quad (4)$$

$$\frac{A+B T_s(x)}{A+B T_{fo}} = \psi \exp(\lambda x) \quad (5)$$

ii) para $\psi = 1$,

$$\frac{T_{fo} - T_f(x)}{T_{fo} - T_{so}} = \frac{hS}{C_f G_f} x \quad (6)$$

$$\frac{T_{so} - T_s(x)}{T_{fo} - T_{so}} = \frac{hS}{C_f G_f} x \quad (7)$$

b) Escoamentos Concorrentes

Na situação de escoamentos concorrentes, as equações que descrevem a transferência de calor são:

$$\text{- Fase fluida: } C_f G_f \frac{dT_f}{dx} + hS(T_f - T_s) = 0 \quad (8)$$

$$\text{- Fase sólida: } C_s G_s \frac{dT_s}{dx} - hS(T_f - T_s) = 0 \quad (9)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$T_f(0) = T_{f0} \quad (10a)$$

$$T_s(0) = T_{s0} \quad (10b)$$

SARTORI et al [10], por meio de procedimento análogo ao desenvolvido na configuração de escoamentos contracorrentes, determinaram a seguinte solução:

- Perfil de temperatura do fluido,

$$\frac{A'+B' T_f(x)}{A'+B' T_{f0}} = \exp(\lambda'x) \quad (11)$$

- Perfil de temperatura do sólido,

$$\frac{A'+B' T_s(x)}{A'+B' T_{f0}} = -\psi \exp(\lambda'x) \quad (12)$$

c) Escoamentos Cruzados

O problema no leito deslizante e escoamentos cruzados consiste no seguinte sistema hiperbólico de equações diferenciais:

$$\text{- Fase fluida: } C_f G_f \frac{\partial T_f}{\partial y} + hS(T_f - T_s) = 0 \quad (13)$$

$$\text{- Fase sólida: } C_s G_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - hS(T_f - T_s) = 0 \quad (14)$$

sujeito às condições de contorno,

$$T_f(x, 0) = T_{fo} \quad (15a)$$

$$T_s(0, y) = T_{so} \quad (15b)$$

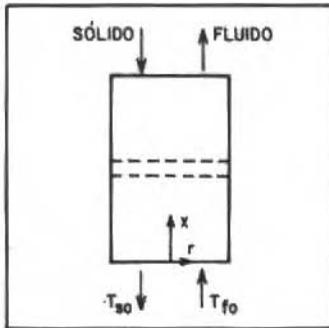


Figura 1a - Esquema para os escoamentos contracorrentes

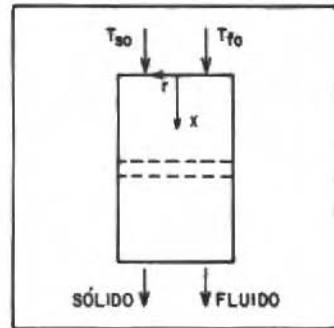


Figura 1b - Esquema para os escoamentos concorrentes

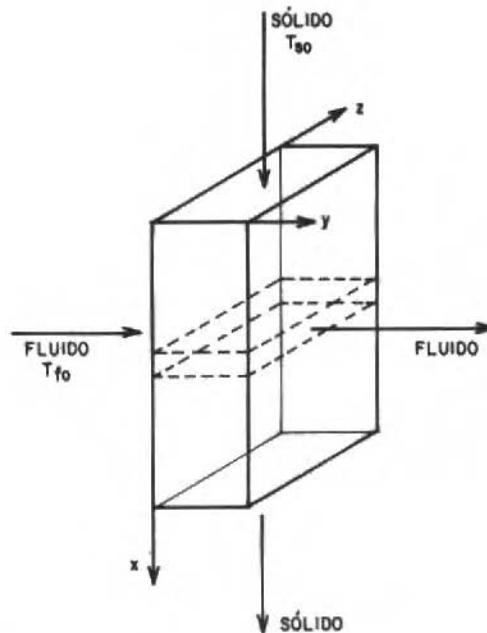


Figura 1c - Esquema para os escoamentos cruzados

A solução analítica deste problema foi obtida por SARTORI e BISCAIA JR. [11] que determinaram os seguintes perfis de temperatura para os dois constituintes:

$$\frac{T_f(X,Y)-T_{fo}}{T_{so}-T_{fo}} = e^{-X} \int_0^Y e^{-\xi} I_0(2\sqrt{X\xi}) d\xi \quad (16)$$

$$\frac{T_s(X,Y)-T_{fo}}{T_{so}-T_{fo}} = 1 - e^{-Y} \int_0^X e^{-\xi} I_0(2\sqrt{Y\xi}) d\xi \quad (17)$$

DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE h

A partir dos valores experimentais de vazões do gás e do sólido, T_{so} , a distribuição de temperatura do gás ao longo do leito e o perfil de temperatura do gás, equação (4), ou T_{fo} , a distribuição de temperatura do sólido ao longo do leito e o perfil de temperatura do sólido, equação (5), determina-se por meio da técnica de mínimos quadrados o coeficiente h nos escoamentos contracorrentes. Nos escoamentos concorrentes a determinação de h é baseada nos dados experimentais de vazões do gás e do sólido T_{so} , distribuição de temperatura do gás ao longo do leito e o perfil de temperatura do gás, equação (11), ou T_{fo} , a distribuição de temperatura do sólido ao longo do leito e o perfil de temperatura do sólido, equação (12). Nestas duas configurações o valor de h que melhor ajusta os dados experimentais de acordo com as soluções analíticas é obtido através de um programa computacional simples.

O valor do coeficiente h, nos escoamentos cruzados, é calculado mediante a aplicação de regressão não linear, fundamentada na minimização dos quadrados dos desvios entre os valores mensurados e os valores preditos pela solução analítica do problema, equações (16) e (17). Este procedimento é efetuado adotando como variável dependente as diferenças de temperaturas $(T_s - T_f) / (T_{so} - T_{fo})$, algoritmo-1, e outra forma de variável dependente baseada no perfil adimensional de temperatura do fluido $(T_f - T_{fo}) / (T_{so} - T_{fo})$, algoritmo-2.

Nos dois algoritmos é aplicado o Método de COGGINS de busca uni

variável (algoritmo de POWELL) [12,13]. Estes dois algoritmos originam dois programas computacionais, conforme as listagens apresentadas por SARTORI [8].

Estes programas computacionais implementados em um micro-computador NEXUS-1600 da SCOPUS-Tecnologia, permitem calcular valores do coeficiente h para diversas condições operacionais do leito e diferentes materiais.

ENSAIOS NAS UNIDADES DE LABORATÓRIO

Partículas Sólidas

As medidas são realizadas nos processos de aquecimento ou resfriamento de sete tipos de meios porosos percolados por ar. São usadas partículas de areia, vidro, grãos de soja, milho e arroz.

As principais propriedades destes materiais encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades dos Sólidos

Sólido	D_p^* (cm)	ϕ^+	ρ_s^* (g/cm ³)	C_s^x (cal/g.°C)
soja	0,60	0,90	1,17	0,53
milho	0,62	0,76	1,23	0,50
arroz	0,38	0,65	1,21	0,48
vidro-I	0,17	1	2,59	0,18
vidro-II	0,28	1	2,59	0,18
areia-II	0,12	0,68	2,65	0,19
areia-III	0,30	0,68	2,65	0,19

Método de medida:

* picnometria

$$D_p \text{ definido pela equação: } \sum_i N_i d_i = D_p \sum_i N_i$$

x calorimetria

$$^+ \phi = D_p / D_\xi$$

Método

a) Equipamentos

As unidades de leito deslizante e escoamentos contracorrentes, concorrentes e cruzados encontram-se esquematizadas nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente.

A unidade experimental é constituída por um conjunto de instalações típicas em equipamentos usados nos estudos sobre transferência de calor em sistemas particulados, ou seja,

- sistema de escoamento de sólido;
- sistema de escoamento de ar;
- sistema de aquecimento de ar e de sólido;
- circuito de medida de temperatura; e
- seção de testes (célula de medida).

A célula de medida do equipamento de leito deslizante e escoamentos contracorrentes é construída em tubo de cimento amianto de 50mm de diâmetro interno e 900mm de comprimento. A extremidade inferior possui um flange que permite o acoplamento com um distribuidor de ar de alimentação e um equalizador de pressão.

A célula de medida, nos escoamentos concorrentes, é construída em tubo de cimento amianto de 50mm de diâmetro interno e 900mm de comprimento. Na parte superior é instalado um distribuidor de ar, de 250mm de comprimento, acoplado ao sistema de alimentação de sólido.

Nos escoamentos cruzados, a célula de medida é construída em chapa de alumínio e tubo de ferro galvanizado, sem costura, de 50mm de diâmetro interno. As regiões de entrada e saída de ar no leito são protegidas com tela metálica, malha de 1,1mm de abertura. A célula tem 1m de comprimento possuindo uma seção retangular de 200mm de largura de 110mm de espessura, na direção do escoamento de ar. O distribuidor de ar é de geometria cônica, 590mm de comprimento, e seção retangular. Um conjunto de placas defletoras de ar é convenientemente instalado em seu interior a fim de facilitar a distribuição do ar no leito. As extremidades superior e inferior da célula são fixadas em equalizadores de pressão.

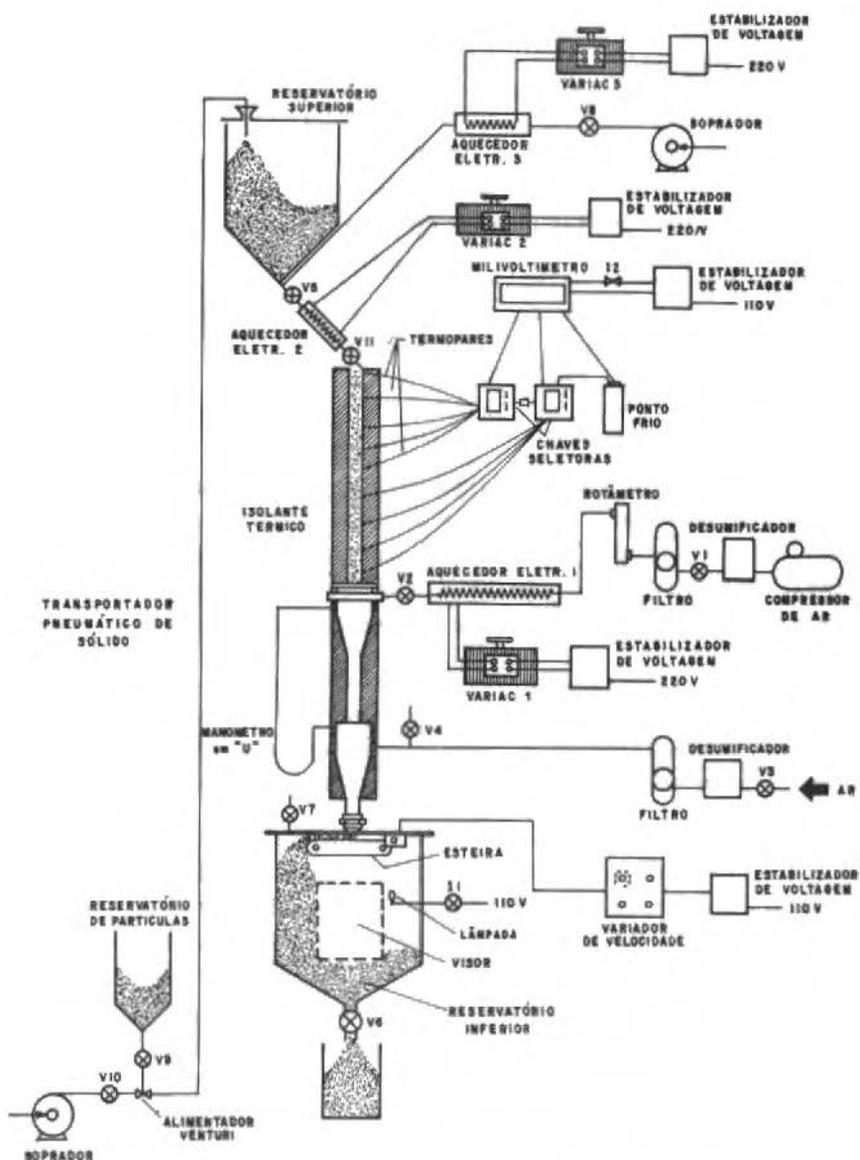


Figura 2 - Esquema da unidade de leito deslizante e escoamentos contracorrentes

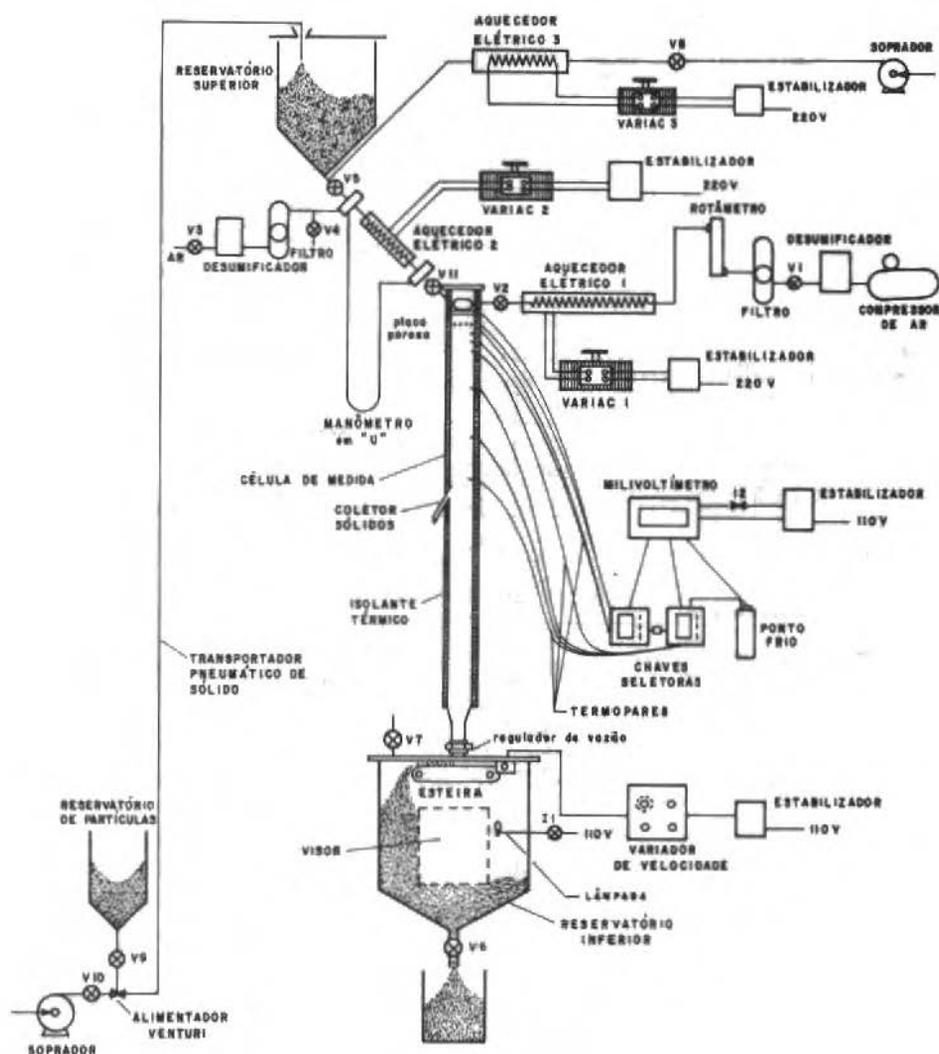


Figura 3 - Esquema da unidade de leito desliante e escoamentos concorrentes

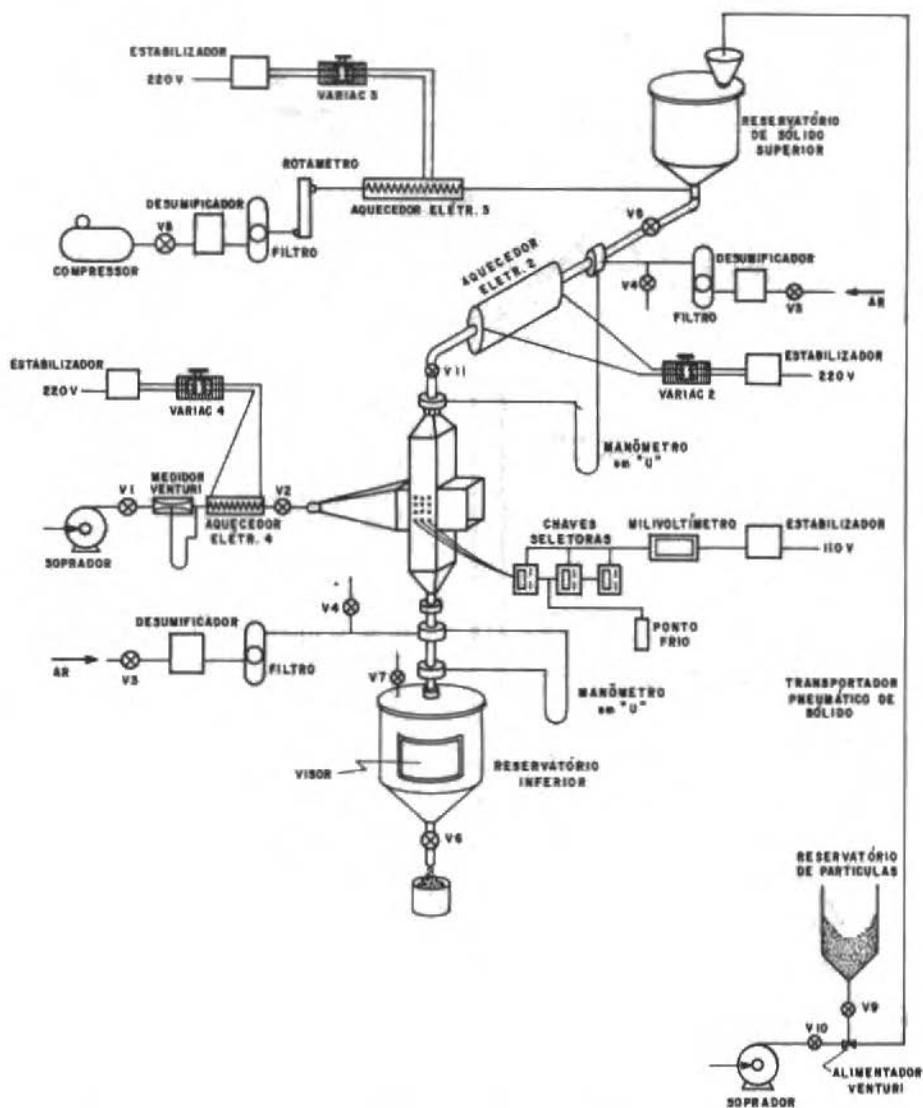


Figura 4 - Esquema da unidade de leito deslizando e escoamentos cruzados

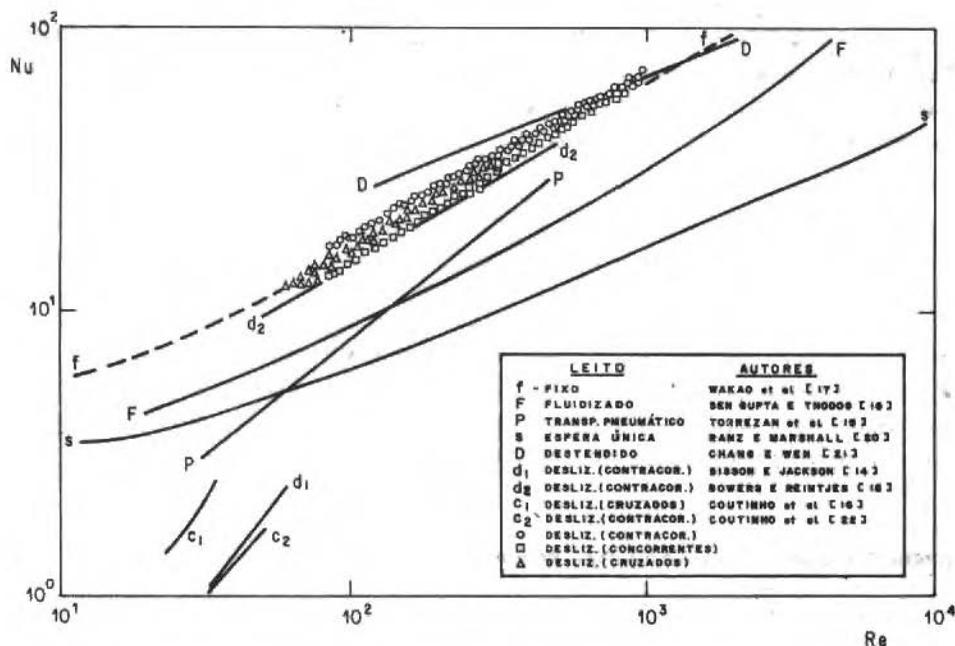


Figura 5 - Coeficiente de transferência de calor gás - sólido em leito deslizante

O equalizador de pressão permite direcionar o escoamento de ar no interior da célula de medida, possibilitando obter as diferentes configurações de escoamentos. Os detalhes referentes às outras instalações podem ser vistos em SARTORI [8].

As medidas de temperatura são realizadas com termopares de cobre-constantan, diâmetro de 1,5mm; aproximadamente, revestidos com uma pequena tela, formato "gaiola", para não permitir o impacto das partículas com os elementos sensores. Os termopares são ligados por meio de fios de compensação a um sistema composto de 2 chaves seletoras, um milivoltímetro digital e ponto frio.

b) Técnica de medida de temperatura

A medida de temperatura do ar é feita em regime permanente de troca térmica usando a técnica de termopar com revestimento, introduzida por LEVA ["in" 8].

A técnica de medida de temperatura do sólido é a mesma utilizada por SISSOM e JACKSON [14]. Os escoamentos do ar e do sólido são simultaneamente interrompidos enquanto que o valor registrado no milivoltímetro é imediatamente anotado e atribuído à temperatura do sólido.

c) Ensaios

Inicialmente, são realizados testes preliminares tendo em vista as calibrações dos termopares e dos medidores de vazão, a verificação da técnica de medida de temperatura e a determinação das medidas de porosidade. São determinadas as temperaturas dos constituintes em diferentes posições normais aos escoamentos de ar e de sólido e analisada a reprodutibilidade dos dados experimentais.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A quantidade de energia transferida na direção normal aos escoamentos é, aproximadamente, igual a 2,8% da quantidade de calor transferida entre os dois constituintes.

A incerteza no valor obtido para o coeficiente h é, aproximadamente, igual a 5%. Determinado a partir da análise da propagação do erro envolvido na obtenção das variáveis que compõem as equações de obtenção de h , partindo da calibração do termopar com desvio aproximado de $0,5^{\circ}\text{C}$.

O número de Nusselt, Nu , em função do número de Reynolds, Re , para os diversos sistemas analisados, nas diferentes situações de escoamentos encontram-se reunidos na Figura 5. O conjunto completo dos resultados experimentais encontram-se reunidos em SARTORI [8].

A troca térmica, nos escoamentos cruzados é predominante na região mais próxima das regiões de entrada de ar e de sólido, tanto no processo de aquecimento como no processo de resfriamento de sólido. Na direção do escoamento de ar nem sempre as temperaturas T_f e T_s se igualam na região de saída de ar. O mesmo comportamento não é verificado na direção do escoamento de sólido onde o equilíbrio entre as temperaturas T_f e T_s é atingido sempre antes do sólido deixar a célula

de medida, em todos os casos analisados. É constatado ainda que este equilíbrio térmico ocorre mais próximo às regiões de entrada de sólido no processo de aquecimento de sólido quando comparado ao processo de resfriamento de sólido nas mesmas condições de vazões de fluido e sólido.

A determinação do coeficiente de transferência de calor entre gás e sólido baseada no perfil de temperatura do fluido serviu para a comprovação da técnica de medida de temperatura de sólido. A partir do perfil de temperatura de gás é determinado o coeficiente de troca térmica que é usado na solução analítica do perfil de temperatura do sólido, equações (5), (12) e (17), visando à comparação entre os perfis experimental e estimado. Face à boa concordância entre os perfis, é constatado que as medidas das temperaturas de sólido são satisfatórias.

A quase totalidade dos resultados fornecidos pelos algoritmos 1 e 2 indicam uma convergência entre os valores de Nu estimados por ambos os algoritmos; levando em conta que no algoritmo 2 não são necessárias as medidas de temperatura do sólido ao longo do leito, mais passíveis de erros experimentais, optou-se por utilizá-lo na caracterização da dependência de Nu em função de Re.

Verificou-se, em todos os sistemas analisados, uma convergência entre os valores de Nu obtidos nos processos de aquecimento ou de resfriamento do sólido, para um mesmo valor de Re. Certamente, devido o processo estar ocorrendo a elevados Re, onde os efeitos de turbulência são predominantes.

Para as três configurações de escoamentos, foi possível um ajuste do tipo,

$$Nu = a Pr^{1/3} Re^b$$

como proposto por BOWERS e REINTJES [15]. As curvas referentes a cada situação de escoamentos encontram-se traçadas na Figura 5.

Considerando a Figura 5, observa-se a localização coerente da região dos dados obtidos em confronto com os dados e modelos da literatura que representam o comportamento em leito deslizante, fixo, dis

tendido, fluidizado, transporte penumático e partícula única. É constatado que o conjunto de curvas referente à correlação de BOWERS e REINTJES [15] encontra-se na mesma região dos dados obtidos nos escoamentos contracorrentes. Entretanto, estes valores estão distantes da curva apresentada por SISSOM e JACSON [14], pois os resultados destes autores correspondem aos dados obtidos em partículas de alumínio muito pequenas e baixos Re. Observação análoga é feita, nos escoamentos cruzados, em relação aos dados de COUTINHO et al [16], que determinaram h na secagem de soja em escoamentos cruzados a baixos Re. Nos escoamentos concorrentes não é possível a comparação em relação a outros trabalhos, pois não foi localizada referência na literatura sobre a determinação do coeficiente h nesta configuração.

Os valores de Nu, para Re próximo de 10^3 , são independentes das configurações de escoamentos. Para baixos Re, da ordem de 10^2 , os valores de Nu nos escoamentos cruzados são intermediários aos Nu nos escoamentos contracorrentes e concorrentes; os maiores valores correspondem aos escoamentos contracorrentes.

CONCLUSÕES

O coeficiente de transferência de calor gás-grão em leito deslizante operando na configuração de escoamentos contracorrentes, concorrentes ou cruzados independe da condição de operação de aquecimento ou resfriamento de grãos, para Re variando de 10^2 a 10^3 .

Os valores de Nu mostraram-se independentes da forma de partícula, para todos os sistemas analisados.

A dependência do coeficiente h em relação às condições de operação é representada pela correlação entre Nu e Re. Para cada configuração de escoamentos, nas condições de operação utilizadas, os resultados indicam,

- Escoamentos contracorrentes:

$$Nu = 1,54 Pr^{1/3} Re^{0,57} ; \quad (19)$$

- Escoamentos concorrentes:

$$Nu = 0,84 Pr^{1/3} Re^{0,65} ; \quad (20)$$

- Escoamentos cruzados:

$$Nu = 1,31 Pr^{1/3} Re^{0,55} . \quad (21)$$

Os valores de Nu nas três configurações de escoamentos são distintos, crescentes na ordem dos escoamentos concorrentes, cruzados e contracorrentes, tendendo assintoticamente para um mesmo valor a altos Re.

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e à DISOLO pela doação de grãos de soja e de milho.

REFERÊNCIAS

- [1] DALPASQUALE, V.A., Continuous-flow drying of soybeans, *M.Sc. Thesis*, Michigan State University, Michigan, USA, 1979.
- [2] DALPASQUALE, V.A., Drying of soybeans in continuous - flow dryers and fixed-bed drying systems, *Ph.D. Thesis*, Michigan State University, Michigan, USA, 1981.
- [3] MEDEIROS, J.L. & MASSARANI, G., Secagem de bagaço de cana IV, *Anais do IV Encontro Nacional de Secagem*, Viçosa, MG, 1983.
- [4] MEDEIROS, J.L.; MASSARANI, G.; ASSUMPÇÃO, G.B., Secagem de grãos em secador de fluxos cruzados II, *Anais do XI ENEMP*, I: 177-191, Rio de Janeiro, RJ, 1983.
- [5] LOVELL, C.L. & KARNOFSKY, G. Design of solid-fluid heat exchangers, *Ind.Eng.Chem.*, 35(4): 391-397, 1943.
- [6] MUNRO, W.D. & AMUNDSON, N.R., Solid-fluid heat exchangers in moving beds, *Ind.Eng.Chem.*, 42(8): 1481-1489, 1950.

- [7] VIOLLAZ, P.E. & SUAREZ, C., Transferência de calor sólido-gás em lecho movil: solución mediante el teorema de Duhamel, *Rev. Latinoam.Transf.Cal.Mat.*, 4: 47-54, 1980.
- [8] SARTORI, D.J.M., Transferência de calor em leito deslizante, *Tese de Doutorado*, COPPE/UFRJ, 1986.
- [9] FURNAS, C.C., Heat transfer from a gas stream to a bed of broken solids, *AIChE Journal*, 24: 142-193, 1930.
- [10] SARTORI, D.J.M.; PREIRE, J.T.; MASSARANI, G., Transferência calor gás-grão em leito deslizante. II. *Anais do V Encontro Nacional de Secagem*, Lavras, MG, 1985.
- [11] SARTORI, D.J.M. & BISCAIA JR., E.C., Transferência de calor gás-sólido em leito deslizante III: escoamentos cruzados, *Anais do XIII ENEMP*, São Paulo, SP, 1985.
- [12] KUESTER, J.L. & MIZE, J.H., *Optimization Techniques with Fortran*, McGraw Hill, New York, N.Y., 1ª ed., 1973.
- [13] POWELL, M.J.D., An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Computer J.*, 7: 155-162, 1964.
- [14] SISSOM, L.E. & JACKSON, T.W., Heat exchange in fluid-dense particle moving beds, *Trans. ASME: Journal of Heat Transfer*, 89: 1-6, 1967.
- [15] BOWERS, T.G. & REINTJES, H., A review of fluid-to-particle heat transfer in packed and moving beds, *Chem.Eng.Progr. Symposium Ser.*, 57(32): 69-74, 1961.
- [16] COUTINHO, P.L.A.; MEDEIROS, J.L.; MASSARANI, G., Secagem de grãos em fluxo cruzado, *Anais do X ENEMP*, 1: 206-221, São Carlos, SP, 1982.
- [17] WAKAO, N.; KAGUEI, S.; FUMAZKRI, T., Effect of fluid dispersion coefficients on particle-to-fluid heat transfer coefficients in packed beds, *Chem.Eng.Sci.*, 34: 325-336, 1979.
- [18] SEN GUPTA, A. & THODOS, G., Mass and heat transfer in the flow of fluids through fixed and fluidized beds of spherical particles, *AIChE Journal*, 8(5): 608-610, 1962.

- [19] TORREZAN, L.B.M.; SARTORI, D.J.M.; SANTANA, C.C., Coeficiente global de transferência de calor gás-sólido no transporte pneumático, *Anais do XI ENEMP*, I: 94-106, Rio de Janeiro, RJ, 1983.
- [20] RANZ, W.E. & MARSHALL, W.R., Evaporation from drops - part I, *Chem.Eng.Progr.*, 48(3): 141-146, 1952.
- [21] CHANG, T.M. & WEN, C.Y., Fluid-to-particle heat transfer in air-fluidized beds, *Chem.Eng.Progr.Symposium Ser.*, 62 (67): 111-117, 1966.
- [22] COUTINHO, P.L.A.; MEDEIROS, J.L.; MASSARANI, G., Resfriador de grãos em leito deslizante e fluxos contracorrentes, *Anais do IV Encontro Nacional de Secagem*, 129-137, Viçosa, MG, 1983.

ON THE EIGENVALUES BASIC TO FORCED CONVECTION OF NON-NEWTONIAN FLUIDS INSIDE DUCTS

Renato Machado Cotta - Membro da ABCM
Instituto Tecnológico da Aeronáutica - ITA
Departamento de Energia

ABSTRACT

The recently advanced sign-count method is used to automatically and accurately determine the eigenvalues basic to the solution of forced convection problems of non-newtonian fluids inside conduits. Special cases of laminar forced flow of power-law, Bingham, and Prandtl-Eyring fluids, inside ducts such as circular tube and parallel-plates channel, are considered for illustration. The first ten eigenvalues for each case are systematically tabulated for several values of the Biot number and representative values of the velocity fields parameters. These benchmark results are also used to critically examine results presented in previous works available in the open literature, which considered approximate methods of solution.

RESUMO

O método de "contagem do sinal" recentemente introduzido é usado na determinação precisa e automática dos autovalores básicos à solução de problemas de convecção forçada de fluidos não-newtonianos no interior de dutos. Casos especiais de escoamento laminar forçado de fluidos de lei de potência, Bingham e Prandtl-Eyring, no interior de dutos como tubo circular e canal de placas planas, são considerados para ilustração. Os primeiros dez autovalores para cada caso são sistematicamente tabelados para diversos valores do número de Biot e valores representativos dos parâmetros nos campos de velocidade. Esses resultados de "benchmark" são também utilizados para examinar criticamente os resultados apresentados em trabalhos anteriores disponíveis na literatura aberta, que consideram métodos aproximados de solução.

INTRODUCTION

Heat transfer problems in channel flow of non-newtonian fluids have been considered very frequently in recent years. The review works by Cho and Hartnett [1] and Winter [2] list most of the contributions in related fields and compile most problems of interest. Among these, forced convection problems of non-newtonian fluids inside conduits such as circular duct and parallel-plate channel have received special consideration. It is clearly noticeable, from the available literature, that difficulties were encountered for the proper analytical treatment of this class of problems, related to difficulties in the accurate solution of the associated eigenvalue problems. In recent works [3,15], Cotta & Özisik considered laminar forced convection problems of power-law fluids and reported results for a very wide range of the dimensionless axial coordinate, which allowed for a critical inspection of previously reported approximate solutions for the thermal entry region. To properly obtain these results, the authors made use of the recently advanced Sign-count method [4,5,6], to accurately and automatically solve the related eigenvalue problem, determining as many eigenvalues, eigenfunctions, and norms as needed, without any noticeable loss of accuracy for higher order eigenquantities.

In this work we want to briefly show how the Sign-count method can be applied to the solution of the eigenvalue problems basic to forced convection problems of non-newtonian fluids inside conduits such as a circular duct and parallel-plate channel. Then, we consider the special cases of power-law, Bingham, and Prandtl-Eyring fluids in laminar flow more closely. These choices are related to the interest demonstrated in the open literature, which also allows for a critical investigation on the accuracy of previously reported approximate results [7,13]. Furthermore, due to the apparent unavailability of benchmark results, opposed to the case of newtonian fluids [14], we systematically tabulate the first ten eigenvalues for each case considering several values of the Biot number, including first and second kind boundary conditions, and representative values for the parameters in each velocity field.

ANALYSIS

We consider the appropriate eigenvalue problem for forced convection in channel flow of non-newtonian fluids, given in dimensionless form as:

$$\frac{1}{R^P} \frac{d}{dR} \left[R^P \gamma(R) \frac{d\psi(\beta_i, R)}{dR} \right] + \beta_i^2 U(R) \psi(\beta_i, R) = 0, \text{ in } 0 < R < R_W \quad (1.a)$$

$$\frac{d\psi(\beta_i, R)}{dR} = 0, \quad \text{at } R=0 \quad (1.b)$$

$$\frac{d\psi(\beta_i, R)}{dR} + B_i \psi(\beta_i, R) = 0, \quad \text{at } R=R_W \quad (1.c)$$

where various quantities are defined as:

$$P = \begin{cases} 0 & , \text{ for parallel-plate channel} \\ 1 & , \text{ for circular duct} \end{cases}$$

$$\gamma(R) = 1 + \frac{\epsilon_H(R)}{\alpha}$$

$\epsilon_H(R)$: turbulent diffusivity of heat

$U(R)$: dimensionless flow velocity

R : dimensionless radial or normal distance

B_i : Biot number

R_W : dimensionless wall distance, i.e., dimensionless tube radius for a circular duct and half the spacing between plates for a parallel-plate channel

$\psi(\beta_i, R)$: eigenfunction

β_i : i^{th} eigenvalue

α : thermal diffusivity

and boundary condition (1.b) denotes symmetry condition at the channel centerline. Also, the boundary conditions of the first and second kind can be recovered in equation (1.c) by setting Bi equal to infinity or zero, respectively, corresponding to the physical situations of prescribed wall temperature and prescribed wall heat flux.

In order to apply the sign-count method [5,6,7], we consider a more general Sturm-Liouville problem given in the form

$$\frac{d}{dR} \left[K(R) \frac{d\psi(\beta_1, R)}{dR} \right] + \beta_1^2 W(R) \psi(\beta_1, R) = 0, \quad \text{in } 0 < R < R_w \quad (2.a)$$

$$\alpha_0 \psi(\beta_1, R) - \lambda_0 K(R) \frac{d\psi(\beta_1, R)}{dR} = 0, \quad \text{at } R=0 \quad (2.b)$$

$$\alpha_1 \psi(\beta_1, R) + \lambda_1 K(R) \frac{d\psi(\beta_1, R)}{dR} = 0, \quad \text{at } R=R_w \quad (2.c)$$

where α_j and λ_j ($j=0$ or 1) are real and independent of β , and can be chosen to match the boundary conditions (1.b,c). The correspondence between our specific system (1) and the more general system above is given by:

$$K(R) = R^P \gamma(R) \quad (3.a)$$

$$W(R) = R^P U(R) \quad (3.b)$$

$$\alpha_0 = 0; \quad \lambda_0 = 1 \quad (3.c,d)$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \lambda_1 = \frac{1}{Bi K(R_w)} \quad (3.e,f)$$

Following the formalism of the sign-count method, we let the coefficients $K(R)$ and $W(R)$ be approximated by stepwise functions as:

$$K(R) = K_k; \quad W(R) = W_k$$

for $R_k < R < R_{k+1}$; $k = 0, 1, \dots, N-1$

where N is the number of subdivisions in the spacial domain considered for problem (2).

The stepwise functions K_k and W_k are evaluated by some averaging process in each subinterval $R_{k+1} - R_k$, $k=0, 1, \dots, N-1$, in which equation (2) is replaced by:

$$\frac{d^2 \psi_k(\beta_i, R)}{dR^2} + \omega_k^2 \psi_k(\beta_i, R) = 0 \quad , \quad \text{in } R_k < R < R_{k+1} \quad (5.a)$$

where

$$\omega_k^2 = \beta_i^2 W_k / K_k \quad (5.b)$$

The function $\psi_k(\beta_i, R)$ and its first derivatives at the end points of each subinterval should satisfy continuity conditions:

$$\psi_k(\beta_i, R) = \psi_{k+1}(\beta_i, R) \quad , \quad \text{at } R=R_k \quad , \quad k=1, 2, \dots, N-1 \quad (5.c)$$

$$K_k \frac{d\psi_k(\beta_i, R)}{dR} = K_{k+1} \frac{d\psi_{k+1}(\beta_i, R)}{dR} \quad , \quad \text{at } R=R_k \quad , \quad k=1, 2, \dots, N-1 \quad (5.d)$$

The boundary conditions (2.b,c), respectively, take the form:

$$\alpha_0 \psi_1(\beta_i, R) - \lambda_0 K_1 \frac{d\psi_1(\beta_i, R)}{dR} = 0 \quad , \quad \text{at } R=0 \quad (5.e)$$

$$\alpha_N \psi_N(\beta_i, R) + \lambda_N K_N \frac{d\psi_N(\beta_i, R)}{dR} = 0 \quad , \quad \text{at } R=R_w \quad (5.f)$$

where in equation (5.d) α_1 and λ_1 are replaced by α_N and λ_N since this boundary condition now belongs to the end point of the last subinterval.

In this way, the eigenvalue problem defined by equations (2)

is replaced by the problem (5), and the eigenvalues of the latter will represent the eigenvalues of problem (2) if sufficiently small subintervals are chosen. From now on, we follow the rest of the procedure for the sign-count method, including the straightforward computation of eigenfunctions and norms, that has been described somewhere else [5,6,7] and will not be repeated here.

We now proceed to consider a few special cases, for which some approximate techniques were used for the solution of the related eigenvalue problem.

LAMINAR FORCED CONVECTION OF POWER-LAW FLUIDS INSIDE CIRCULAR DUCTS AND PARALLEL-PLATE CHANNELS

For this case, functions and coefficients in problem (1) are given by:

$$\gamma(R) = 1 \quad U(R) = 1 - R^{\frac{n+1}{n}} \quad ; \quad R_w = 1 \quad (6.a,b,c)$$

where n is the power-law flow index.

Among others, we should mention the work of Michiyoshi and Matsumoto [8], who considered the cases $B_i=0$ and $B_i=\infty$ in a circular tube, and the most recent works by Ybarra and Eckert [9], and Dinh and Armstrong [10], both for parallel-plates channel. In reference [8], a solution is tied by expanding the eigenfunction into a power series of the eigenvalue, followed by an iterative procedure. In [9], the differential equation was discretized by finite differences and required to satisfy a simultaneous system of algebraic equations. Finally, in reference [10], the approximate solution is obtained by using the WKB-J method to establish asymptotically valid solutions. Results obtained in these works shall be critically examined by comparison with the benchmark results here generated.

LAMINAR FORCED CONVECTION OF A BINGHAM PLASTIC INSIDE A CIRCULAR DUCT

For this case, the functions in problem (1) are given by [11]:

$$\gamma(R)=1; U(R) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } 0 \leq R \leq c \\ \frac{[(1-R^2)-2c(1-R)]}{(1-c)} & , \text{ for } c \leq R \leq R_w \end{cases} ; R_w=1$$

(7.a,b,c)

where c is the ratio of yield and wall stress.

The works by Schechter and Wissler [11], where the case of $B_1=0$ and circular duct geometry was considered, Wissler and Schechter [12], for $B_1=\infty$, and Michiyoshi et al [13], for both $B_1=0$ and $B_1=\infty$, seem to be the most frequently referenced works on Bingham fluids. In both [11] and [12] the eigenvalues were determined numerically by the Runge-Kutta method, coupled to an iterative procedure. In [13], once more, a power series representation of the eigenfunction was considered, with the appropriate iterative scheme to determine the eigenvalues. We shall also examine the accuracy of these works.

LAMINAR FORCED CONVECTION OF A PRANDTL-EYRING FLUID INSIDE A CIRCULAR DUCT

In this case, the functions in problem (1) are given by [14]:

$$\gamma(R) = 1 ; U(R) = \frac{1}{B} \left[1 - \frac{\cosh(2bR)}{\cosh b} \right] ; R_w = 0.5 \quad (8.a,b,c)$$

where,

$$B = 1 - \frac{2 \sinh b}{b \cosh b} + \frac{2}{b^2} - \frac{2}{b^2 \cosh b} \quad (8.d)$$

The work of Schenk and Van Laar [14] seems to be the most classical one for this type of fluids, where the case of $B_1=\infty$ was numerically considered, for flow inside a circular duct. The eigenvalue problem was solved numerically by representing the eigenfunctions as power series of R and finding the eigenvalues by trial and error.

RESULTS AND DISCUSSION

To present a few results, we have chosen to consider the three special cases defined above. The Sign-count method was used, in all these cases, with a number of subdivisions $N \leq 4000$. As usual, the results obtained and tabulated are expected to be accurate to ± 1 in the last digit given.

In Table I we consider the case of a power-law fluid in laminar flow inside a circular tube. Results are presented as a comparison between the exact results here obtained and the approximate ones from reference [7], for $B_1 = 0$ and ∞ . It seems that the approximation based on the power series expansion of the eigenvalues is in error, even for the first eigenvalue, in the first or second decimal places, being slightly better for the case of $B_1 = \infty$. Therefore, if the calculations in [7] have been carried out properly, this approximation technique should not be recommended for situations when accuracy is at a premium.

TABLE I. Comparison of exact and approximate eigenvalues for a power-law fluid in a circular duct

Bi	i	$n=1/3$		$n=0.5$		$n=1.0$		$n=2.0$	
		EXACT*	APPROX.**	EXACT*	APPROX.**	EXACT*	APPROX.**	EXACT*	APPROX.**
0	1	20.7534	20.7623	22.4275	22.4370	25.6796	25.6908	28.9058	28.9189
	2	67.6771	67.7523	73.1017	73.1842	83.8617	83.9600	94.5850	94.7004
	3	140.559	140.8654	151.781	152.1159	174.167	174.5720	196.538	197.0071
	4	239.340	240.1917	258.408	259.4213	296.536	297.5701	334.694	336.1762
	5	363.999	366.0957	392.963	393.3498	450.947	455.8727	509.025	509.0236
∞	1	6.2630	6.2637	6.5824	6.5832	7.3136	7.3146	8.1103	8.1115
	2	36.3596	36.3798	39.0934	39.1157	44.6095	44.6364	50.1649	50.1968
	3	92.3260	92.4514	99.4962	99.6356	113.921	114.0884	128.398	128.5962
	4	174.141	174.5812	187.795	188.2761	215.240	215.8417	242.776	243.4759
	5	281.798	282.9461	303.986	305.5325	348.564	349.9022	393.289	394.9749

(*) Present work

(**) Reference (7)

In Table II we look at a power-law fluid in laminar flow inside a parallel-plate channel. Two alternative solutions [8,9] are compared to the exact results. In reference [9], an asymptotic solution for the eigenvalue problem was obtained by using the WKB-J method and used to evaluate lower order eigenvalues, although the solution is valid only for asymptotically higher orders. These results, specially for the first eigenvalue, involve too much error to allow further accurate calculations, since the lowest eigenvalue determines the fundamental mode in the solution for the temperature profile. As expected, the results are improved for higher orders but, specially for the case of $Bi=0$, up to the sixth eigenvalue at least, they are not yet as accurate as the finite differences approximation

TABLE II. Comparison of exact and approximate eigenvalues for a power-law fluid in a parallel-plates channel

Bi	β_i^2 i	n=0.5			n=1.0		
		EXACT*	APPROX.**	APPROX.***	EXACT*	APPROX.**	APPROX.***
0	1	0.0000	0.0968	0.0000	0.0000	0.1111	0.0000
	2	15.8283	16.365	15.837	18.3803	18.778	18.388
	3	59.8186	60.521	59.856	68.9518	69.444	68.951
	4	131.753	132.57	131.84	151.551	152.11	151.63
	5	231.598	232.50	231.77	266.164	266.78	266.31
	6	359.346	360.32	359.62	412.784	413.44	413.03
∞	1	2.6466	2.4208	2.6466	2.8278	2.7778	2.8278
	2	28.1320	27.985	28.132	32.1473	32.111	32.147
	3	81.5671	81.437	81.566	93.4749	93.444	93.473
	4	162.900	162.78	162.89	186.805	186.78	186.80
	5	272.125	272.07	272.11	312.136	312.11	312.12
	6	409.239	409.12	409.20	469.468	469.44	469.42

(*) Present work

(**) Reference [9] (WKB-J)

(***) Reference [8] (Finite differences)

in [8]. Therefore, if we need to consider much higher order for an accurate evaluation by this asymptotic technique, it would be more

convenient to consider the much simpler asymptotic formulae for Sturm-Liouville problems. In [8], problem was discretized by a simple finite differences scheme and restricted to satisfy a system of algebraic equations. The results, although more accurate than those in reference [9], would still require a much finer mesh for a more accurate evaluation of the eigenvalues, specially for higher order eigenvalues, and the system of equations might become prohibitively large for practical purposes, since loss of accuracy occurs as the order is increased. Again, for both alternative solutions, the results for $Bi=\infty$ are in general better.

In Table III we consider a Bingham fluid in laminar flow inside a circular tube. Here, we compare the results of Michiyoshi [12] and Wissler & Schechter [10,11], for both $Bi=0$ and ∞ , with the exact results from the Sign-count method. Again, from this table, we notice that the results from the power series approximations [12] are in error even for the first eigenvalues, and sometimes inaccurate to the first decimal place. In references [10,11], the Runge-Kutta method was used for the numerical solution of the eigenvalue problem, coupled with the appropriate iterative procedure for the determination of eigenvalues. These results, at least up to the second decimal place in higher order eigenvalues, are in excellent agreement with the exact results. However, we know from previous experience [5], that the Runge-Kutta method involves a loss of accuracy for higher order eigenvalues, although it can be accurate enough for lower order eigenvalues; it also involves the risk of missing eigenvalues, specially the first one, and calculation has to proceed with care when there is no previous indication of the location of the roots.

Finally, in Tables IV to VII, we present the first ten eigenvalues of the four special cases here considered, for $Bi=0$, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0, 100.0, and ∞ , and representative values of the parameters in the dimensionless velocity fields. These tables correspond, respectively, to the cases of laminar flow of power-law fluids inside parallel-plate channel, laminar flow of power-law fluids inside circular duct, laminar flow of Bingham plastics inside circular duct, and laminar flow of Prandtl-Eyring fluids inside circular duct. These results are presented mainly for

TABLE III. Comparison of exact and approximate eigenvalues for a Bingham fluid in a circular duct

Bi	β_i i	c=0.25			c=0.50			c=0.75		
		EXACT *	APPROX. **	APPROX. ***	EXACT *	APPROX. **	APPROX. ***	EXACT *	APPROX. **	APPROX. ***
0	1	4.7645	4.7655	4.7645	4.4857	4.4866	4.4857	4.1643	4.1653	4.1644
	2	8.5811	8.5860	8.5811	8.0688	8.0732	8.0688	7.5971	7.6013	7.5971
	3	12.3568	12.371	12.357	11.6160	11.628	11.616	10.9664	10.978	10.966
	4	16.1231	16.155	16.123	15.1577	15.183	15.158	14.3005	14.326	14.301
	5	19.813	19.890	19.882	18.6858	18.783	18.686	17.6228	17.644	17.623
	6	23.6345	-	23.64	22.2166	-	22.22	20.9485	-	20.95
	7	27.3863	-	27.39	25.7409	-	25.74	24.2784	-	24.28
∞	1	2.5522	2.5524	2.552	2.4545	2.4547	2.455	2.4117	2.4119	2.412
	2	6.2689	6.2707	6.269	5.8827	5.8843	5.883	5.5901	5.5915	5.590
	3	9.9972	10.004	9.997	9.4073	9.4136	9.407	8.8610	8.8667	8.861
	4	13.7368	14.692	13.74	12.9127	12.929	12.91	12.1791	12.194	12.18
	5	17.4806	18.706	17.48	16.4336	16.462	16.43	15.5070	15.539	15.51
	6	21.2230	-	21.22	19.9488	-	19.95	18.8272	-	18.83
	7	24.9657	-	24.97	23.4676	-	23.47	22.1406	-	22.14

(*) Present work

(**) Reference [12]

(***) References [10,11]

TABLE IV. First ten eigenvalues for a power-law fluid inside a parallel-plate channel for several values of B_1 and n

n	B ₁	EIGENVALUES									
		β ₁	β ₂	β ₃	β ₄	β ₅	β ₆	β ₇	β ₈	β ₉	β ₁₀
1/3	0	0.0000	3.8057	7.4301	11.0374	14.6392	18.2386	21.8366	25.4337	29.0303	32.6265
	0.01	0.1116	3.8096	7.4325	11.0392	14.6407	18.2398	21.8377	25.4347	29.0312	32.6273
	0.1	0.3460	3.8441	7.4539	11.0554	14.6540	18.2513	21.8478	25.4438	29.0396	32.6350
	1.0	0.9279	4.1212	7.6421	11.2030	14.7776	18.3587	21.9435	25.5306	29.1191	32.7088
	10.0	1.4716	4.8307	8.3224	11.8439	15.3817	18.9301	22.4860	26.0474	29.6132	33.1825
	100.0	1.5889	5.0803	8.6514	12.2302	15.8120	19.3954	22.9799	26.5652	30.1511	33.7375
	∞	1.6035	5.1138	8.6988	12.2894	15.8818	19.4750	23.0686	26.6624	30.2563	33.8504
1/2	0	0.0000	3.9785	7.7342	11.4784	15.2184	18.9564	22.6934	26.4297	30.1656	33.9011
	0.01	0.1152	3.9827	7.7369	11.4804	15.2200	18.9578	22.6946	26.4308	30.1666	33.9021
	0.1	0.3571	4.0197	7.7602	11.4982	15.2347	18.9705	22.7058	26.4409	30.1758	33.9106
	1.0	0.9520	4.3125	7.9633	11.6587	15.3697	19.0882	22.8109	26.5363	30.2635	33.9919
	10.0	1.4964	5.0284	8.6632	12.3254	16.0030	19.6906	23.3854	27.0858	30.7904	34.4985
	100.0	1.6125	5.2716	8.9856	12.7058	16.4284	20.1524	23.8773	27.6028	31.3289	35.0553
	∞	1.6268	5.3040	9.0315	12.7632	16.4962	20.2296	23.9633	27.6971	31.4311	35.1650
1	0	0.0000	4.2872	8.3037	12.3106	16.3145	20.3171	24.3189	28.3203	32.3214	36.3223
	0.01	0.1222	4.2920	8.3067	12.3129	16.3164	20.3187	24.3204	28.3216	32.3226	36.3234
	0.1	0.3782	4.3336	8.3334	12.3333	16.3333	20.3333	24.3333	28.3333	32.3333	36.3333
	1.0	1.0000	4.6561	8.5620	12.5158	16.4876	20.4684	24.4542	28.4432	32.4345	36.4273
	10.0	1.5518	5.3978	9.3026	13.2308	17.1731	21.1250	25.0840	29.0484	33.0171	36.9892
	100.0	1.6673	5.6381	9.6233	13.6113	17.6009	21.5914	25.5825	29.5743	33.5665	37.5590
	∞	1.6816	5.6699	9.6682	13.6677	17.6674	21.6672	25.6671	29.6670	33.6670	37.6669
2	0	0.0000	4.5648	8.8317	13.0881	17.3416	21.5938	25.8453	30.0965	34.3475	38.5983
	0.01	0.1289	4.5700	8.8351	13.0907	17.3437	21.5956	25.8470	30.0980	34.3488	38.5995
	0.1	0.3983	4.6158	8.8646	13.1134	17.3625	21.6119	25.8614	30.1111	34.3608	38.6106
	1.0	1.0470	4.9654	9.1154	13.3147	17.5333	21.7616	25.9956	30.2333	34.4734	38.7152
	10.0	1.6106	5.7381	9.8964	14.0745	18.2658	22.4664	26.6739	30.8868	35.1041	39.3248
	100.0	1.7270	5.9811	10.2218	14.4619	18.7026	22.9437	27.1854	31.4274	35.6699	39.9126
	∞	1.7414	6.0130	10.2670	14.5186	18.7695	23.0201	27.2705	31.5208	35.7711	40.0214
3	0	0.0000	4.6955	9.0830	13.4594	17.8328	22.2049	26.5764	30.9475	35.3184	39.6890
	0.01	0.1319	4.7009	9.0865	13.4621	17.8350	22.2068	26.5781	30.9490	35.3198	39.6903
	0.1	0.4079	4.7486	9.1173	13.4859	17.8547	22.2239	26.5932	30.9627	35.3323	39.7019
	1.0	1.0700	5.1109	9.3784	13.6958	18.0330	22.3803	26.7335	31.0905	35.4500	39.8114
	10.0	1.6404	5.8997	10.1791	14.4771	18.7878	23.1076	27.4343	31.7665	36.1030	40.4430
	100.0	1.7576	6.1449	10.5080	14.8691	19.2301	23.5915	27.9533	32.3154	36.6779	41.0407
	∞	1.7721	6.1770	10.5535	14.9262	19.2976	23.6685	28.0391	32.4094	36.7799	41.1502

TABLE V. First ten eigenvalues for a power-law fluid inside a circular duct for several values of B_1 and n

n	B_1	EIGENVALUES									
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
1/3	0	0.0000	4.5556	8.2266	11.8558	15.4706	19.0788	22.6831	26.2851	29.8856	33.4849
	0.01	0.1729	4.5595	8.2291	11.8576	15.4722	19.0801	22.6843	26.2862	29.8865	33.4858
	0.1	0.5371	4.5942	8.2510	11.8743	15.4859	19.0918	22.6947	26.2955	29.8951	33.4937
	1.0	1.4544	4.8871	8.4481	12.0279	15.6139	19.2028	22.7933	26.3847	29.9768	33.5693
	10.0	2.3090	5.7054	9.1966	12.7185	16.2569	19.8059	23.3625	26.9246	30.4911	34.0609
	100.0	2.4817	5.9923	9.5578	13.1338	16.7140	20.2964	23.8802	27.4650	31.0505	34.6366
	=	2.5026	6.0299	9.6086	13.1962	16.7868	20.3789	23.9716	27.5648	31.1583	34.7520
1/2	0	0.0000	4.7358	8.5500	12.3199	16.0751	19.8233	23.5676	27.3095	31.0498	34.7890
	0.01	0.1822	4.7401	8.5527	12.3220	16.0768	19.8247	23.5689	27.3107	31.0509	34.7900
	0.1	0.5655	4.7783	8.5769	12.3405	16.0920	19.8378	23.5804	27.3211	31.0604	34.7988
	1.0	1.5186	5.0962	8.7924	12.5091	16.2329	19.9601	23.6893	27.4196	31.1508	34.8825
	10.0	2.3758	5.9353	9.5705	13.2333	16.9115	20.5998	24.2953	27.9963	31.7016	35.4102
	100.0	2.5452	6.2160	9.9254	13.6433	17.3645	21.0874	24.8119	28.5370	32.2627	35.9889
	=	2.5656	6.2525	9.9748	13.7038	17.4352	21.1676	24.9006	28.6339	32.3674	36.1010
1	0	0.0000	5.0675	9.1576	13.1972	17.2202	21.2355	25.2465	29.2549	33.2615	37.2669
	0.01	0.1995	5.0725	9.1608	13.1996	17.2222	21.2372	25.2480	29.2562	33.2627	37.2680
	0.1	0.6183	5.1169	9.1889	13.2211	17.2399	21.2524	25.2615	29.2683	33.2738	37.2782
	1.0	1.6412	5.4783	9.4360	13.4152	17.4026	21.3939	25.3875	29.3826	33.3787	37.3754
	10.0	2.5168	6.3646	10.2707	14.2002	18.1437	22.0966	26.0565	30.0218	33.9912	37.9641
	100.0	2.6843	6.6432	10.6249	14.6116	18.6004	22.5905	26.5815	30.5730	34.5651	38.5575
	=	2.7044	6.6790	10.6794	14.6711	18.6699	22.6691	26.6687	30.6683	34.6681	38.6679
2	0	0.0000	5.3764	9.7255	14.0192	18.2946	22.5616	26.8238	31.0831	35.3405	39.5965
	0.01	0.2155	5.3820	9.7290	14.0219	18.2969	22.5635	26.8255	31.0846	35.3419	39.5978
	0.1	0.6671	5.4317	9.7605	14.0459	18.3167	22.5805	26.8405	31.0982	35.3542	39.6092
	1.0	1.7566	5.8307	10.0346	14.2619	18.4979	22.7383	26.9812	31.2258	35.4714	39.7179
	10.0	2.6588	6.7644	10.9224	15.1018	19.2945	23.4963	27.7050	31.9189	36.1371	40.3587
	100.0	2.8277	7.0467	11.2825	15.5214	19.7616	24.0027	28.2443	32.4864	36.7289	40.9718
	=	2.8479	7.0827	11.3313	15.5813	19.8315	24.0818	28.3321	32.5824	36.8327	41.0829
3	0	0.0000	5.5246	9.9974	14.4129	18.8093	23.1970	27.5797	31.9593	36.3370	40.7132
	0.01	0.2231	5.5305	10.0011	14.4157	18.8117	23.1990	27.5814	31.9609	36.3384	40.7146
	0.1	0.6901	5.5825	10.0341	14.4409	18.8324	23.2168	27.5972	31.9751	36.3514	40.7266
	1.0	1.8118	5.9988	10.3206	14.6668	19.0222	23.3821	27.7446	32.1088	36.4742	40.8404
	10.0	2.7288	6.9557	11.2337	15.5326	19.8446	24.1657	28.4936	32.8269	37.1643	41.5052
	100.0	2.8990	7.2408	11.5979	15.9575	20.3181	24.6794	29.0412	33.4034	37.7660	42.1289
	=	2.9193	7.2771	11.6470	16.0178	20.3885	24.7592	29.1297	33.5002	37.8706	42.2409

TABLE VI. First ten eigenvalues for a Bingham fluid inside a circular duct for several values of B_1 and c

c	B_1	EIGENVALUES									
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
0.10	0	0.0000	4.9393	8.9188	12.8500	16.7650	20.6727	24.5764	28.4778	32.3777	36.2766
	0.01	0.1929	4.9421	8.9218	12.8523	16.7669	20.6743	24.5779	28.4791	32.3789	36.2776
	0.1	0.5980	4.9855	8.9487	12.8728	16.7838	20.6888	24.5907	28.4907	32.3895	36.2874
	1.0	1.5915	5.3325	9.1856	13.0589	16.9397	20.8244	24.7115	28.6002	32.4900	36.3805
	10.0	2.4520	6.1962	9.9967	13.8202	17.6576	21.5045	25.3584	29.2179	33.0816	36.9488
	100.0	2.6181	6.4715	10.3461	14.2256	18.1072	21.9903	25.8744	29.7594	33.6451	37.5312
∞	2.6380	6.5070	10.3941	14.2844	18.1759	22.0681	25.9607	29.8537	33.7470	37.6404	
0.25	0	0.0000	4.7645	8.5811	12.3568	16.1231	19.8813	23.6345	27.3863	31.1369	34.8857
	0.01	0.1831	4.7689	8.5839	12.3589	16.1249	19.8828	23.6358	27.3875	31.1380	34.8867
	0.1	0.5681	4.8081	8.6089	12.3780	16.1406	19.8964	23.6477	27.3983	31.1478	34.8957
	1.0	1.5204	5.1315	8.8294	12.5515	16.2859	20.0226	23.7602	27.5002	31.2413	34.9824
	10.0	2.3660	5.9616	9.6050	13.2786	16.9698	20.6687	24.3739	28.0855	31.8011	35.5195
	100.0	2.5322	6.2337	9.9496	13.6782	17.4122	21.1457	24.8799	28.6160	32.3523	36.0886
∞	2.5522	6.2689	9.9972	13.7368	17.4806	21.2230	24.9657	28.7097	32.4536	36.1971	
0.50	0	0.0000	4.4857	8.0688	11.6160	15.1577	18.6858	22.2166	25.7409	29.2665	32.7897
	0.01	0.1677	4.4894	8.0712	11.6178	15.1592	18.6871	22.2177	25.7419	29.2675	32.7906
	0.1	0.5212	4.5221	8.0928	11.6341	15.1727	18.6987	22.2280	25.7511	29.2759	32.7984
	1.0	1.4149	4.7977	8.2853	11.7836	15.2981	18.8075	22.3248	25.8389	29.3563	32.8729
	10.0	2.2599	5.5711	9.0096	12.4515	15.9225	19.3948	22.8793	26.3663	29.8587	33.3541
	100.0	2.4335	5.8464	9.3580	12.8523	16.3633	19.8691	23.3794	26.8896	30.4000	33.9120
∞	2.4545	5.8827	9.4073	12.9127	16.4336	19.9488	23.4676	26.9860	30.5040	34.0234	
0.75	0	0.0000	4.1643	7.5971	10.9664	14.3005	17.6228	20.9485	24.2784	27.6066	30.9300
	0.01	0.1537	4.1673	7.5989	10.9678	14.3017	17.6239	20.9494	24.2792	27.6073	30.9306
	0.1	0.4790	4.1939	7.6151	10.9804	14.3122	17.6330	20.9574	24.2864	27.6139	30.9367
	1.0	1.3272	4.4290	7.7635	11.0976	14.4121	17.7199	21.0340	24.3553	27.6771	30.9955
	10.0	2.2009	5.2186	8.4187	11.6868	14.9637	18.2372	21.5161	24.8065	28.1047	31.4040
	100.0	2.3889	5.5458	8.8034	12.1109	15.4278	18.7366	22.0398	25.3460	28.6579	31.9713
∞	2.4117	5.5901	8.8610	12.1791	15.5070	18.8272	22.1406	25.4555	28.7753	32.0970	
0.90	0	0.0000	3.9623	7.2530	10.5141	13.7636	17.0050	20.2395	23.4677	26.6902	29.9078
	0.01	0.1460	3.9650	7.2545	10.5152	13.7644	17.0057	20.2402	23.4683	26.6907	29.9083
	0.1	0.4561	3.9893	7.2681	10.5248	13.7721	17.0122	20.2459	23.4735	26.6955	29.9128
	1.0	1.2825	4.2130	7.3975	10.6176	13.8459	17.0747	20.3011	23.5236	26.7418	29.9561
	10.0	2.1846	5.0827	8.0974	11.1926	14.3367	17.5085	20.6954	23.8898	27.0872	30.2850
	100.0	2.3916	5.4734	8.5971	11.7419	14.9050	18.0834	21.2732	24.4711	27.6738	30.6788
∞	2.4053	5.5254	8.6732	11.8370	15.0149	18.2047	21.4043	24.6109	27.8221	31.0358	

TABLE VII. First ten eigenvalues for a Prandtl-Eyring fluid inside a circular duct for several values of B_1 and b

b	B_1	EIGENVALUES									
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
0.4	0	0.0000	7.1700	12.9575	18.6736	24.3661	30.0478	35.7234	41.3952	47.0645	52.7321
	0.01	0.1998	7.1735	12.9597	18.6753	24.3675	30.0490	35.7244	41.3961	47.0654	52.7330
	0.1	0.6253	7.2052	12.9797	18.6905	24.3801	30.0597	35.7339	41.4047	47.0732	52.7402
	1.0	1.7988	7.4914	13.1675	18.8355	24.5004	30.1637	35.8261	41.4880	47.1494	52.8106
	10.0	3.3357	8.6801	14.1675	19.7117	25.2868	30.8811	36.4883	42.1049	47.7283	53.3569
	∞	3.7722	9.3515	14.9686	20.5954	26.2269	31.8615	37.4983	43.1367	48.7766	54.4176
1.0	0	0.0000	7.1875	12.9914	18.7235	24.4321	30.1297	35.8212	41.5089	47.1942	52.8776
	0.01	0.1998	7.1911	12.9936	18.7253	24.4335	30.1309	35.8223	41.5099	47.1950	52.8784
	0.1	0.6254	7.2224	13.0134	18.7403	24.4459	30.1416	35.8317	41.5184	47.2027	52.8855
	1.0	1.8010	7.5068	13.1995	18.8839	24.5650	30.2444	35.9228	41.6007	47.2781	52.9522
	10.0	3.3503	8.6997	14.1997	19.7583	25.3486	30.9584	36.5814	42.2137	47.8530	53.4975
	∞	3.7929	9.3811	15.0115	20.6526	26.2990	31.9485	37.6005	43.2541	48.9093	54.5656
4.0	0	0.0000	7.3860	13.3671	19.2744	25.1571	31.0283	36.8930	42.7537	48.6118	54.4679
	0.01	0.1998	7.3892	13.3691	19.2759	25.1583	31.0293	36.8939	42.7546	48.6125	54.4686
	0.1	0.6263	7.4179	13.3870	19.2894	25.1694	31.0388	36.9023	42.7621	48.6194	54.4749
	1.0	1.8226	7.6825	13.5570	19.4195	25.2767	31.1312	36.9840	42.8357	48.6866	54.5370
	10.0	3.5025	8.9092	14.5507	20.2703	26.0284	31.8091	37.6043	43.4095	49.2220	55.0399
	∞	4.0133	9.6986	15.4754	21.2739	27.0819	32.8956	38.7129	44.5331	50.3553	56.1793
10.	0	0.0000	7.5994	13.8134	19.9435	26.0456	32.1346	38.2162	44.2932	50.3672	56.4389
	0.01	0.1998	7.6023	13.8151	19.9448	26.0466	32.1355	38.2170	44.2939	50.3678	56.4395
	0.1	0.6273	7.6278	13.8305	19.9563	26.0560	32.1435	38.2240	44.3003	50.3736	56.4448
	1.0	1.8485	7.8685	13.9794	20.0685	26.1478	32.2220	38.2932	44.3624	50.4302	56.4970
	10.0	3.7046	9.1440	14.9526	20.8740	26.8441	32.8403	38.8525	44.8751	50.9051	56.9404
	∞	4.3149	10.1124	16.0575	22.0436	28.0476	34.0615	40.0817	46.1066	52.1348	58.1658
20.	0	0.0000	7.6525	13.9786	20.2262	26.4422	32.6423	38.8334	45.0189	51.2006	57.3795
	0.01	0.1999	7.6552	13.9801	20.2273	26.4431	32.6431	38.8341	45.0195	51.2011	57.3800
	0.1	0.6278	7.6793	13.9941	20.2375	26.4513	32.6500	38.8402	45.0249	51.2060	57.3845
	1.0	1.8630	7.9102	14.1296	20.3370	26.5316	32.7182	38.8999	45.0783	51.2545	57.4291
	10.0	3.8246	9.2493	15.0965	21.1063	27.1803	33.2847	39.4062	45.5383	51.6776	57.8218
	∞	4.4935	10.3778	16.3763	22.4323	28.5176	34.6194	40.7313	46.8504	52.9747	59.1030
		4.5817	10.5628	16.6363	22.7525	28.8893	35.0364	41.1893	47.3457	53.5044	59.6647

benchmarking purposes, since to our knowledge none seem to be readily available in the open literature, as opposed to the special case of newtonian fluids [14].

We conclude that the Sign-count method [4,5,6] also allows a quite straightforward evaluation of other quantities such as eigenfunctions and normalization integrals. It should be preferred to other solution techniques, such as those here mentioned, since we are able to automatically and accurately determine as many eigenvalues as needed, without loss of accuracy for higher order eigenvalues and without the risk of missing eigenvalues. The accurate evaluation of a large number of eigenquantities, on the other hand, allows the establishment of reference quality results for heat transfer problems like those here considered [3], without the need to consider approximate solutions for the region close to the inlet.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to acknowledge the financial support of CNPq through grant nº 407319/86 - EM.

REFERENCES

- [1] CHO, Y.I. and HARTNETT, J.P., Non-newtonian fluids in circular pipe flow, *Advances in Heat Transfer*, vol. 15, 1982.
- [2] WINTER, H.H., Viscous dissipation in shear flows of molten polymers, *Advances in Heat Transfer*, 1977.
- [3] COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., Laminar forced convection of power-law non-newtonian fluids inside ducts, *Warme-und-Stoffg.*, vol. 20, pp. 211-218, 1986.
- [4] MIKHAILOV, M.D.; ÖZISIK, M.N. and VULCHANOV, N.L., Transient heat diffusion in one-dimensional composite media and automatic solution of the eigenvalue problem, *Int.J. Heat and Mass Transfer*, vol. 26, pp. 1131-1141, 1983.

- [5] MIKHAILOV, M.D. and ÖZISIK, M.N., *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [6] MIKHAILOV, M.D. and VULCHANOV, N.L., A Computational procedure for Sturm-Liouville problems, *J.Comp.Phys.*, vol. 50, pp. 323-336, 1983.
- [7] MICHİYOSHI, I. and MATSUMOTO, R., Heat transfer of slurry flow with internal heat generation, *Bulletin of JSME*, vol. 7, nº 26, pp. 376-384, 1964.
- [8] YBARRA, R.M. and ECKERT, R.E., Viscous heat generation in slit flow, *AIChE Journal*, vol. 26, nº 5, pp. 751-762, 1980.
- [9] DINH, S.M. and ARMSTRONG, R.C., Non-isothermal channel flow of non-newtonian fluids with viscous heating, *AIChE Journal*, vol. 28, nº 2, pp. 294-301, 1982.
- [10] SCHECHTER, R.S. and WISSLER, E.H., Heat transfer to Bingham plastics in laminar flow through circular tubes with internal heat generation, *Nucl. Science & Eng.*, vol. 6, pp. 371-375, 1959.
- [11] WISSLER, E.H. and SCHECHTER, R.S., The Graetz-Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic, *Chem.Eng.Progr.Symp. Series*, vol. 55, nº 29, pp. 203-208, 1959.
- [12] MICHİYOSHI, I.; MATSUMOTO, R. and HOZUMI, M., Heat transfer of slurry flow with internal heat generation, *Bulletin of JSME*, vol. 6, nº 23, pp. 496-504, 1963.
- [13] SCHENK, J. and VAN LAAR, J., Heat transfer in non-newtonian laminar flow in tubes, *Appl.Sci.Res.*, section A, vol. 7, pp. 449-462, 1958.
- [14] SHAH, R.K. and LONDON, A.L., Laminar flow forced convection in ducts, *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, 1978.
- [15] COTTA, R.M. and ÖZISIK, M.N., Laminar forced convection to non-newtonian fluids in ducts with prescribed wall heat flux, *Int.Comm. Heat & Mass Transf.*, vol. 13, nº 3, May-June, 1986.



Advanced Conference Information

The following Conferences are being organised by the Computational Mechanics Institute for 1988/89.

Computer Methods and Water Resources in Developing Countries

14-18 March 1988, Rabat, Morocco

The Conference will constitute a forum for review of the state of the art, the presentation of new research results and exchange of ideas between leading scientists, young researchers and engineers with special emphasis on the benefit of computer hardware and software in water resources to developing countries.

CADCOMP 88 - International Conference on Computer Aided Design in Composite Material Technology

13-15 April 1988, Southampton University, UK

The conference aims to achieve a critical assessment and enhancement of the applications of computer aided engineering techniques in composite materials and structures and will focus on the use of computers in the analysis, design and manufacture of composite materials. Simulation of manufacturing processes will also be covered.

CMWR 88 - Computational Methods in Water Resources

13-17 June 1988, MIT, Boston, USA

The 7th Water Resources Conference held since 1976, formerly called Finite Elements in Water Resources, now reflects the emergence of new techniques such as boundary elements and new developments in classical numerical methods which are of relevance to scientists specializing in the computer simulation of groundwater and surface water flow problems.

AI 88 3rd International Conference on the Applications of Artificial Intelligence in Engineering

August 1988, Los Angeles, CA, USA

The aim of the Conference is to provide an international forum for the presentation of the latest research and developments in the applications of Artificial Intelligence in Engineering. The areas covered by the Conference include design, diagnosis, planning, control, sensing and interpretation, user interface/explanations in all branches of engineering.

BEM 10 - Boundary Element Method Conference

6-8 September 1988, Southampton University, UK

This conference is the next in a successful series held since 1978, when the meeting was convened for the first time at Southampton University. The 1988 Conference will celebrate a decade of boundary element research and industrial applications in the engineering field.

CADMO 88 - International Conference on Computer Aided Design, Manufacture and Operation in the Marine and Offshore Industries

20-22 September 1988, Southampton University, UK

The aim of the conference is to show how designers, builders and operators involved in shipping and offshore structures can benefit from the latest developments in computer applications.

ENVIROSOFT 88 - Development and Application of Computer Techniques to Environmental Studies

27-29 September 1988, Porto Carras, Greece

The Conference will present the most recent developments and practical implementations in the theoretical, numerical and applicable aspects of computer analysis, simulation, modelling, control and forecasting for environmental applications.

STREMA 89 - Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings

5-7 April 1989, Florence, Italy

This Conference is organized to bring together scientists, engineers and architects interested in Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings. The meeting will discuss case studies in addition to the more scientific aspects, trying to learn from past experiences and mistakes.

CMEM 89 - Computational Methods and Experimental Measurements

May 1989, Capri, Italy

The 4th Conference in this series will provide a forum for presentation and exchange of innovative approaches in the fields of numerical methods and experimental studies, with emphasis on their interaction and application in engineering problems.

BETECH 89

June 1989, Windsor, Canada

The fourth annual conference in the successful Betech series of conferences which presents the growing industrial applications of boundary element techniques as well as relevant academic research.

Computer Aided Optimum Design of Structures

20-23 June 1989, Southampton, UK

The object of the Conference is to bring together researchers and engineers using optimum design techniques in order to demonstrate how optimization can be applied in engineering practice. Recent advances in structural optimization theory coupled to new hardware power has resulted in the techniques being applied to solve a large variety of engineering problems. These topics together with the relationship of optimization to computer aided design will be discussed at the conference.

SUSI 89 - Structures under Shock and Impact

11-13 July 1989, Boston, USA

The purpose of this Conference is to bring together experts in many areas of structural response to explosive shock and high-speed impact, with particular reference to the behaviour of military installations and combat structures. The Conference theme will underline the importance of the cross-fertilisation of ideas between military and civilian experts in the design of static and transportable structures subjected to impact loading of all types.

ASE 89 - International Conference on Applications of Supercomputers in Engineering

5-7 September 1989, Southampton University, UK

This conference is intended to increase the awareness amongst scientists and engineers of the potential of the new supercomputers, which not only solve larger problems, but also require a different computational approach to obtain the most efficient results.

Engineering Aspects of Marina Design and Operation

26-28 September 1989, Southampton University, UK

The engineering works associated with all aspects of Marina Design and Operation from the initial feasibility studies through to the environmental considerations are all topics which should be discussed at this important meeting. The most fundamental point for discussion will be the change from straightforward berthing requirements to the integral village complex, which has proved to be the most striking development in recent times.

Soil Dynamics & Earthquake Engineering IV

21st - 24th October 1989, Mexico City, Mexico

This will be the fourth conference in the series of biennial conferences which have grown in attendance by the academic community concerned with the worldwide problems of geotechnical earthquake engineering.

COMPUTATIONAL MECHANICS CONFERENCE DISPLAY SERVICE

If you would like to exhibit any material (eg books, journals, hardware, software) at the above conferences, table-top space is available at a cost of £250 per table.



FOR FURTHER INFORMATION ON THE ABOVE CONFERENCES, PLEASE CONTACT:

Liz Newman, Conference Secretary
Computational Mechanics Institute, Ashurst Lodge, Ashurst, Southampton, SO4 2AA, England
Tel. (042 129) 3223
Telex: 47388 Attn COMPMECH
Fax. (042 129) 2853

ISSN 0100-7386

REVISTA

BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS
MECÂNICAS



Patrocinada pela

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

Secretaria Executiva da ABCM

PUC-RJ

Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea

22453 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Tel.: (021) 529-9437 - Telex: 31048 PURC BR

PEDIDO DE ASSINATURA

Nº _____

● EMITIR RECIBO PARA:

Razão Social: _____

Endereço: _____

Fone: (____) _____ CGC: _____

● ENVIAR EXEMPLARES PARA:

Nome: _____

Endereço: _____

Fone: (____) _____

- Estamos emitindo cheque nominal à ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS no valor de 4,0 OTN's, correspondente ao mês de _____ (Cz\$ _____), referente a assinaturas da RBCM por ano _____

Local

Data

Nome e Assinatura

OBSERVAÇÕES:

- 1 – Preencher todos os campos, datar e assinar;
- 2 – Destacar e enviar juntamente com cheque nominal à ABCM para:
SECRETARIA EXECUTIVA DA ABCM
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea
22453 – Rio de Janeiro, RJ
Telefone: (021) 529-9437
- 3 – Por ser a ABCM uma Sociedade Civil, sem fins lucrativos, visando a divulgação e congregação das Ciências Mecânicas, não trabalhamos com Nota Fiscal e Fatura.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONTATO UNILATERAL COM ATRITO – APLICAÇÃO A UMA PLACA APOIADA SOBRE SOLO RÍGIDO –

Edgar Nobuo Mamiya – Membro da ABCM

Universidade Federal de São Carlos

PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

Heraldo Silva da Costa Mattos – Membro da ABCM

PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

Michel Raous

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique Marceille – France

Rubens Sampaio – Membro da ABCM

PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO

A modelagem de um corpo elástico linear em contato unilateral com uma superfície rígida e submetido a condições de atrito de Coulomb dá origem a um problema de Signorini com atrito. Este trabalho apresenta um método numérico de resolução aproximada deste tipo de problema. O modelo, descrito em termos variacionais, é discretizado via elementos finitos e a minimização do funcional é feita utilizando-se o algoritmo de Gauss-Seidel com Relaxação e Projeção sobre um convexo. Uma técnica de condensação de matrizes permite que o tempo computacional despendido seja reduzido, tornando o código computacional econômico. Este algoritmo é analisado e o seu desempenho é ilustrado através de exemplos envolvendo a interação entre uma placa espessa e seus suportes.

ABSTRACT

The modelling of a linear, elastic body under unilateral contact with a rigid surface and subjected to conditions of Coulomb friction gives rise to a Signorini's problem with friction. This work presents a numerical method for an approximate solution of this type of problem. The model, which is described in a variational way, is discretized by the use of finite elements techniques and the minimization of the functional is carried out utilizing the Gauss-Seidel algorithm with Relaxation and Projection over the convex set. A matrix condensation technique allows the reduction of the computational time spent, making the computational code more economical. This algorithm is analysed and its performance is illustrated by examples involving the interaction between a thick plate and its supports.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresenta-se um tratamento numérico para o problema de Signorini considerando o atrito de Coulomb.

A existência deste problema, na sua forma geral, está em aberto. Para uma forma regularizada do problema, considerando atrito não local e com coeficiente de atrito muito pequeno, DUVAUT [1] e COCU [2] mostraram existência e unicidade. Questões de unicidade ainda são debatidas, mas acredita-se que a solução não é única no caso geral.

A adoção de uma aproximação interna para o espaço de funções considerado e a utilização do método de relaxação pontual levam a uma discretização e a um desmembramento do problema original em três outros, para os quais a existência, a unicidade e a convergência das soluções são garantidas.

O desenvolvimento deste tratamento numérico é apresentado a seguir, descrevendo-se detalhadamente as etapas envolvidas. Alguns exemplos de aplicação são apresentados:

- 1) Placa espessa apoiada sobre superfície rígida e sujeita a carregamento transversal (estado plano de deformação).
- 2) Interação entre uma placa espessa bi-apoiada e seus suportes.

Em ambos os problemas, as condições de unilateralidade e atrito utilizadas no modelo matemático permitem uma melhor avaliação da área efetiva de contato, a qual determina um conhecimento mais correto da distribuição dos esforços reativos.

Os resultados são apresentados graficamente.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de contato unilateral com atrito é aqui formulado no contexto da elasticidade infinitesimal, considerando-se uma relação constitutiva linear. Seja uma estrutura qualquer definida como sendo uma região $\Omega \subset E^n$, $n \leq 3$, com contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, tal que: sobre Γ_1 os deslocamentos sejam prescritos, sobre Γ_2 sejam aplicadas forças

externas t e sobre Γ , os pontos sejam impedidos de se deslocar no sentido da normal externa unitária. Seja a estrutura sujeita a forças de campo b sobre Ω .

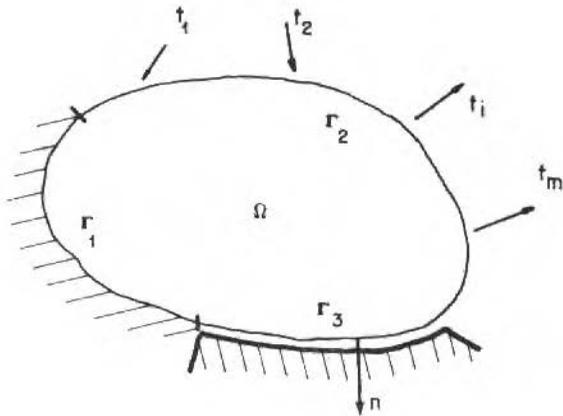


Fig. 1. Modelo de estrutura sobre o E^2

O problema de Signorini (contato unilateral) com atrito de Coulomb para o caso quasi estático e com carregamento monótono pode ser descrito como:

Problema 1: Determine o campo de deslocamentos pertencente ao espaço de Hilbert $H(\Omega)$ tal que satisfaça as seguintes equações e condições:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + b &= 0 \\ \sigma &= \mathbb{E} \varepsilon(u) \end{aligned} \right\} \text{ sobre } \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

$$(\sigma \cdot n)|_{\Gamma_2} = t$$

$$u_n|_{\Gamma_3} \leq 0 \quad \text{tais que} \quad (u_n \cdot \sigma_n)|_{\Gamma_3} = 0$$

$$\sigma_n|_{\Gamma_3} \leq 0$$

$$|\sigma_t|_{\Gamma_3} \leq \mu |\sigma_n|_{\Gamma_3} \quad \text{tal que:}$$

$$\text{Se } |\sigma_t|_{\Gamma_3} < \mu |\sigma_n|_{\Gamma_3} \implies u_t = 0$$

$$|\sigma_t|_{\Gamma_3} = \mu |\sigma_n|_{\Gamma_3} \implies \exists \lambda \geq 0 \quad ; \quad u_t|_{\Gamma_3} = -\lambda \sigma_t|_{\Gamma_3}$$

Nas expressões acima, σ é o tensor tensão, E é o tensor de elasticidade, ε é o tensor deformação, u é o campo de deslocamento e μ é coeficiente de atrito. Na área de contato o deslocamento e os esforços são decompostos da forma: $u = u_n n + u_t$, $\sigma_n = \sigma_n n + \sigma_t$.

À estrutura carregada, isotermicamente e segundo um processo quasi-estático, se associa uma energia de deformação independente deste processo e representada pela forma bilinear $\frac{1}{2} a(\cdot, \cdot): [H(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$i) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad (\text{simetria})$$

$$ii) \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad a(u, u) \leq K \|u\|_{H(\Omega)}^2 \quad (\text{continuidade})$$

$$iii) \quad \exists C \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad a(u, u) \geq C \|u\|_{H(\Omega)}^2 \quad (\text{coercividade})$$

$$\forall u, v \in H(\Omega)$$

O trabalho dos esforços externos $t \in H^1(\Omega)$ (dual topológico de $H(\Omega)$) é representado pelo funcional linear $\langle t, v \rangle : H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in H(\Omega)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto de dualidade entre H e H' .

É possível mostrar [3,4,5,6] que o Problema 1 é equivalente ao seguinte problema de ponto fixo incluindo a resolução de um problema de minimização.

Problema 2: Determine a força g ponto fixo da aplicação do co-

ne $\{h \geq 0\}$

$$h + \mu |\sigma_n(u(h))| ,$$

onde $u(h)$ é a solução do problema (2 bis)

Problema 2 bis: Determine o campo de deslocamentos u pertencente ao convexo $K \subset H(\Omega)$ tal que:

$$J(u) \leq J(v) , \quad \forall v \in K$$

onde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle t, v \rangle_{\Gamma_2} - \langle b, v \rangle + j(v)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} h |v_t| d\Gamma$$

$$K = \{v \in H(\Omega); v_n|_{\Gamma_3} \leq 0\}$$

$$v_n|_{\Gamma_3} = \text{componente normal de } v \text{ em cada ponto de } \Gamma_3$$

Nesta formulação, pode se observar que $J(v)$ é um funcional não diferenciável, que o termo não diferenciável $j(v)$ está associado à condição de atrito e que o convexo K define a condição de contato unilateral.

APROXIMAÇÃO INTERNA

O processo usual de obtenção desta solução é o de se substituir o espaço original H por um espaço H_h de dimensão finita $N(h)$. O modo como se escolhe este espaço H_h é muito importante, determinando o método numérico a se empregar na resolução do problema.

Considerando-se aproximações internas, o Problema 2 bis pode ser reescrito como:

Problema 3: Determine o campo de deslocamento u_h pertencente ao convexo $K_h \subset H_h(\Omega)$ tal que:

$$J(u_h) \leq J(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in K_h$$

onde:

$$J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - \langle t, v_h \rangle_{\Gamma_2} - \langle b, v_h \rangle + j(v_h)$$

$$j(v_h) = \int_{\Gamma_3} h_h |v_h| d\bar{\Gamma}$$

$$K_h = \{v \in H_h(\Omega); v_{n_h} \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_3\}$$

A questão da convergência do Problema 3 para o Problema 2, à medida que $h=1/N \rightarrow 0$, encontra-se em aberto. Entretanto, o método numérico de relaxação pontual aqui empregado conduz a formas discretizadas de três problemas para os quais são conhecidos os teoremas de existência, unicidade e convergência das soluções.

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Uma maneira conveniente de se discretizar o problema de minimização consiste em se utilizar o procedimento de Galerkin via Método dos Elementos Finitos. Seja o domínio Ω dividido em regiões de contorno simples, denominados elementos e seja também definido um certo número N de nós sobre Ω . A cada nó se associa uma função $w_i \in H(\Omega)$ com suporte nos elementos adjacentes ao mesmo. O conjunto das funções w_i forma a base do espaço de dimensão finita H_h .

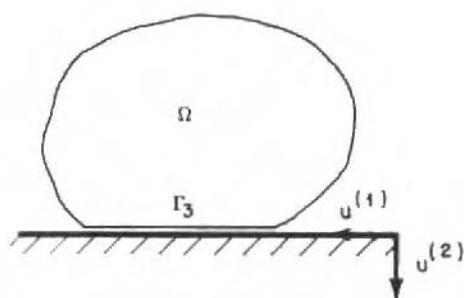
Assim, tem-se:

$$u_h \in H_h \iff u_h = \sum_{i=1}^M u_i^n w_i^h$$

onde M é a dimensão do espaço discretizado.

PROBLEMA PARTICULAR

No desenvolvimento que se segue será considerado que o deslocamento seja um campo vetorial bidimensional. No problema discretizado, os termos de índice ímpar da base estarão associados à primeira componente do campo de deslocamento, enquanto os termos de índice par estarão associados à outra componente. Para efeito de simplificação do problema, será considerado que o convexo K restrinja apenas a segunda componente do deslocamento sobre Γ_3 , conforme ilustra a Figura 2.

Fig. 2. Convexo K no problema bidimensional

Seja então o convexo K_h caracterizado como:

$$K_h = \prod_{i=1}^{2N} K_i$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{Se } i \in I_h &\longrightarrow K_{2i-1} = R \\ &K_{2i} = R^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } i \notin I_h &\longrightarrow K_{2i-1} = R \\ &K_{2i} = R \end{aligned}$$

I_h = conjunto de índices correspondentes aos nós que pertencem a Γ_3 ,

Nestas condições, o problema discretizado pode ser enunciado.

como:

Problema 4: Determine o conjunto $u_i \in K_h \subset R^{2N}$ tal que:

$$J(u_1, u_2, \dots, u_{2N}) \leq J(v_1, v_2, \dots, v_{2N}) \quad \forall v_j \in K_h$$

onde:

$$J(u_1, u_2, \dots, u_{2N}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^{2N} (t_i u_i + b_i u_i) + \sum_{i=1}^M G_i |u_{T_i}|$$

$$a_{ij} = a(w_i, w_j)$$

$$t_i = \langle t, w_i \rangle$$

$$b_i = \langle b, w_i \rangle$$

$$G_i = \int_{\Gamma_i} g w_i d\Gamma_i$$

adotando-se a aproximação grosseira

$$|u_T| \approx \sum_{i=1}^M |u_{T_i}| w_i, \quad \text{onde } M \text{ é o número de nós de contato}$$

onde M é o número de nós de contato.

Observa-se que esta aproximação é pobre somente quando u_T muda de sinal. Como esta é uma situação raramente verificada adotou-se a aproximação, que tem como vantagem a sua simplicidade.

RELAXAÇÃO PONTUAL

Este método de otimização considera a minimização do funcional, componente a componente. Suponha que uma aproximação u^n da solução se ja conhecida. Calcula-se a componente u_i^{n+1} como solução de problema:

Problema 5: Determine $u_i^{n+1} \in K_i$; tal que:

$$\begin{aligned}
 J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) &\leq \\
 &\leq J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, v, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) \quad , \quad \forall v \in K_i, \quad i=1, 2, \dots, 2N
 \end{aligned}$$

onde J e K_i são definidos conforme o Problema 4.

Obtêm-se, por este procedimento, uma sucessão de problemas de minimização em R , em um processo iterativo cuja convergência deve ser estudada.

Antes de se estudar a convergência do processo iterativo, entretanto, é interessante se notar que dependendo da componente a se minimizar, o Problema 5 pode ser especializado conforme os três problemas seguintes:

Problema 6.a: (Pontos nodais não pertencentes a Γ_s). Determine $u_i^{n+1} \in R$ tal que:

$$\begin{aligned}
 J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) &\leq \\
 &\leq J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, v, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) \quad , \quad \forall v \in K_i (=R) \quad , \quad i \notin I_h
 \end{aligned}$$

onde:

$$J(u_1^n, \dots, u_{2N}^n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} u_i^n u_j^n - \sum_{i=1}^{2N} (t_i u_i^n - b_i u_i^n)$$

Problema 6.b: (Componentes sujeitas a restrição de contato unilaterial). Determine $u_i^{n+1} \in K_i$ tal que:

$$\begin{aligned}
 J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) &\leq \\
 &\leq J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, v, u_{i+1}^n, \dots, u_{2N}^n) \quad , \quad \forall v \in K_i (=R^-) \quad , \quad i \text{ par}
 \end{aligned}$$

onde:

$$J(u_1^n, \dots, u_{2N}^n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} u_i^n u_j^n - \sum_{i=1}^{2N} (t_i u_i^n + b_i u_i^n)$$

Problema 6.c: (Componentes sujeitas a condição de atrito). De termine $u_i^{n+1} \in K_i$ tal que:

$$J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_1^{n+1}, \dots, u_{2N}^n) \leq J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, v, u_1^n, \dots, u_{2N}^n)$$

$$\forall v \in K_i (=R), \quad i \text{ ímpar}$$

onde:

$$J(u_1^n, \dots, u_{2N}^n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} u_i^n u_j^n - \sum_{i=1}^{2N} (t_i u_i^n + b_i u_i^n) + \sum_{i=1}^M G_i |v_{T_i}|$$

Os Problemas 6.a, 6.b e 6.c constituem, respectivamente, minimização sobre R de funcionais diferenciáveis, minimizações sobre convexos de R de funcionais diferenciáveis e minimizações sobre R de funcionais não diferenciáveis. A existência e a unicidade das soluções destes problemas em espaços de Hilbert de dimensão infinita são discutidas em [1,2,3]. É fácil verificar que as hipóteses sobre as quais os teoremas correspondentes se apoiam são verificadas para estes problemas discretizados.

Garante-se, portanto, a existência e a unicidade da solução de cada problema em R gerado pelo esquema de relaxação pontual.

É possível mostrar [4] que o processo de relaxação pontual converge para uma solução do problema no espaço discretizado U_h e que as soluções sobre uma família de espaços U_h fornecem uma sequência convergente para a solução sobre H .

ALGORITMO DE CRYER-CHRISTOPHERSON

No caso em que o convexo K_h é definido como:

$$K_h = \prod_{i=1}^M K_i, \quad K_i = [\alpha_i, \beta_i] \quad (\text{no nosso caso } K_i = R \text{ ou } R^-)$$

a minimização do funcional J sobre o convexo K_h é bastante simples, podendo ser efetuada em duas etapas:

- a) Minimização do funcional J , diferenciável em u_i^{n+1} , sobre R .
- b) Projeção P_{K_i} sobre o convexo K_i .

A diferenciabilidade de J em cada u_i^{n+1} garante a possibilidade de se utilizar o método de Gauss-Seidel para a minimização pontual de J . Se, após a etapa (a) acima, proceder-se a uma relaxação, tem-se o algoritmo de Cryer-Christopherson (ou Gauss-Seidel com Relaxação e Projeção GSRP), formalmente descrito por:

. Para cada i :

$$u_i^{n+1/2} = \frac{1}{a_{ii}} \left(t_i + b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^M a_{ij} u_j^n \right)$$

$$u_i^{n+1} = P_{K_i} \left((1-w) u_i^n + w u_i^{n+1/2} \right)$$

MINIMIZAÇÃO DO FUNCIONAL NÃO DIFERENCIÁVEL

No presente caso, a minimização do funcional não diferenciável é relativamente simples, pois pode ser desmembrada em dois problemas de minimização de funcional diferenciável. Seja o funcional J na forma:

$$J(u_1, \dots, u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M a_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^M (t_i u_i + b_i u_i) - \sum_{i=1}^M G_i |u_i|$$

A pesquisa do mínimo deste funcional é feita da seguinte forma:

- i) Supõe-se, inicialmente, que o mínimo \bar{u}_i seja positivo. Neste caso tem-se $|\bar{u}_i| = \bar{u}_i$, J é diferenciável para $u_i > 0$ e o método de Gauss-Seidel pode ser aplicado sobre o funcional. Se o valor de

\tilde{u}_i calculado é efetivamente positivo, tem-se $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i$.

- ii) Caso contrário, supõe-se que $\tilde{u}_i < 0$. Neste caso, tem-se que $|\tilde{u}_i| = -\tilde{u}_i$, J é diferenciável para $u_i < 0$ e novamente é possível aplicar-se o método de Gauss-Seidel sobre o funcional. Se \tilde{u}_i calculado é efetivamente negativo, faz-se $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i$.
- iii) Se nenhuma das hipóteses anteriores é satisfatória, tem-se que o ponto de mínimo é dado por $u_i^{n+1} = 0$.

ALGORITMO PARA O PROBLEMA COM O ATRITO DE COULOMB

A resolução do Problema 2 bis na forma do Problema 4, após discretização, é na realidade a resolução de um problema de Tresca onde o valor limite de atrito g (para saber se há deslocamento ou não) é prescrito. O caso de atrito de Coulomb é determinado via um método de ponto fixo, que é o Problema 2. Obviamente, o ponto fixo do Problema 2 satisfaz a relação:

$$g = \mu |\sigma_n|$$

Esta é a relação de Coulomb onde a força de atrito depende do esforço normal que por sua vez depende do deslocamento u .

O algoritmo é descrito por um método de ponto fixo onde em cada interação se resolve um problema de Tresca:

- i) considere um conjunto inicial (G_i)
- ii) resolva um problema de Signorini com atrito de Tresca associado (Problema 5) usando o método de Cryer-Christopherson.
- iii) calcule as forças nodais F_{n_i} sobre os pontos nodais de Γ_i
- iv) considere um novo conjunto (G_i^n) calculado como:

$$G_i^n = \mu |F_{n_i}|$$

- v) retorno ao passo (ii) até satisfação do critério de convergência

$$\|G_i^{n+1} - G_i^n\| < \epsilon$$

Nos casos práticos, observa-se, em geral, uma convergência rápida para este algoritmo. Não se dispõe, entretanto, de um teorema de convergência para o processo iterativo do algoritmo acima.

CONDENSAÇÃO DA MATRIZ

O método de relaxação pontual, pelo seu caráter iterativo, demanda um tempo computacional elevado. Observa-se, por outro lado, que o emprego desta técnica é desejável somente porque sobre alguns pontos nodais se aplicam condições de unilateralidade e atrito. A técnica de condensação de matrizes empregada neste trabalho limita a utilização do método de relaxação pontual aos pontos nodais sobre Γ_1 . Como estes formam, de um modo geral, um conjunto muito menor que o conjunto de todos os pontos nodais sobre Γ_1 , a dimensão do problema e o tempo computacional requerido para resolvê-lo sofrem um decréscimo considerável.

Esta técnica de condensação já foi utilizada por FELJOO-BARBOSA [9,10,11] para resolver problemas de contato. Para o caso de problemas com atrito eles utilizam uma técnica um pouco diferente. Ela consiste de um algoritmo iterativo com, basicamente, duas etapas, onde se resolve sucessivamente:

- a) um problema de Signorini (pode-se utilizar nesta etapa métodos diretos de programação não-linear adaptados à problemas de complementaridade, p.ex., método de LEMKE [10,11,12]).
- b) um problema de Tresca onde o limite de deslizamento g é fornecido pela solução do problema precedente (pode-se utilizar um método de sobre-relaxação).

As iterações são feitas até estabilização dos limites de deslizamento nodais g_i .

É necessário mencionar também a utilização de métodos de penalização para solução de problemas de contato com atrito. Eles são aplicados na minimização com restrição do funcional não diferenciável que introduzimos previamente [13].

A técnica de redução da dimensão do problema considera que se trabalha com um conjunto de problemas de minimização de funcionais diferenciáveis. Assim, a minimização de $J(u_1, u_2, \dots, u_M)$ é equivalente à pesquisa de raízes do problema:

$$AU = F, \quad A \in \text{Lin}(V, W)$$

Considerando-se uma renumeração conveniente dos nós, seja a seguinte representação, por blocos, do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A_{\ell\ell} & \vdots & A_{\ell C} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{C\ell} & \vdots & A_{CC} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_\ell \\ \vdots \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\ell \\ \vdots \\ F_C \end{pmatrix}$$

onde U_C e F_C são os deslocamentos e as forças nos nós sobre Γ_3 . Reescrevendo-se o sistema acima:

$$A_{\ell\ell} U_\ell + A_{\ell C} U_C = F_\ell$$

$$A_{C\ell} U_\ell + A_{CC} U_C = F_C$$

e isolando-se U_C , chega-se a:

$$A_{CC}^* U_C = F_C^*$$

onde

$$A_{CC}^* = A_{CC} - A_{C\ell} A_{\ell\ell}^{-1} A_{\ell C}$$

$$F_C^* = F_C - A_{C\ell} A_{\ell\ell}^{-1} F_\ell$$

A resolução do sistema acima equivale à minimização do funcional:

$$J^*(U_C) = \frac{1}{2} U_C^T A_{CC}^* U_C - F_C^* U_C$$

sobre um espaço de dimensão proporcional ao número de pontos nodais sobre Γ_3 .

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Placa Simplesmente Apoiada sobre Solo Rígido

Considere-se uma placa espessa longa e de secção retangular simplesmente apoiada sobre solo rígido e submetido a um carregamento vertical em uma de suas extremidades. Assume-se um estado plano de deformação e que o comportamento do material seja elástico linear. Estudam-se casos sem e com atrito entre a placa e o apoio horizontal, sendo os resultados ilustrados nas Figuras 3, 4 e 5. São utilizados elementos finitos triangulares (P_1) com funções interpoladoras lineares.

Observa-se um deslocamento da placa na região não comprimida da barra. Estes resultados não podem ser obtidos numa análise que se despreze as condições de unilateralidade.

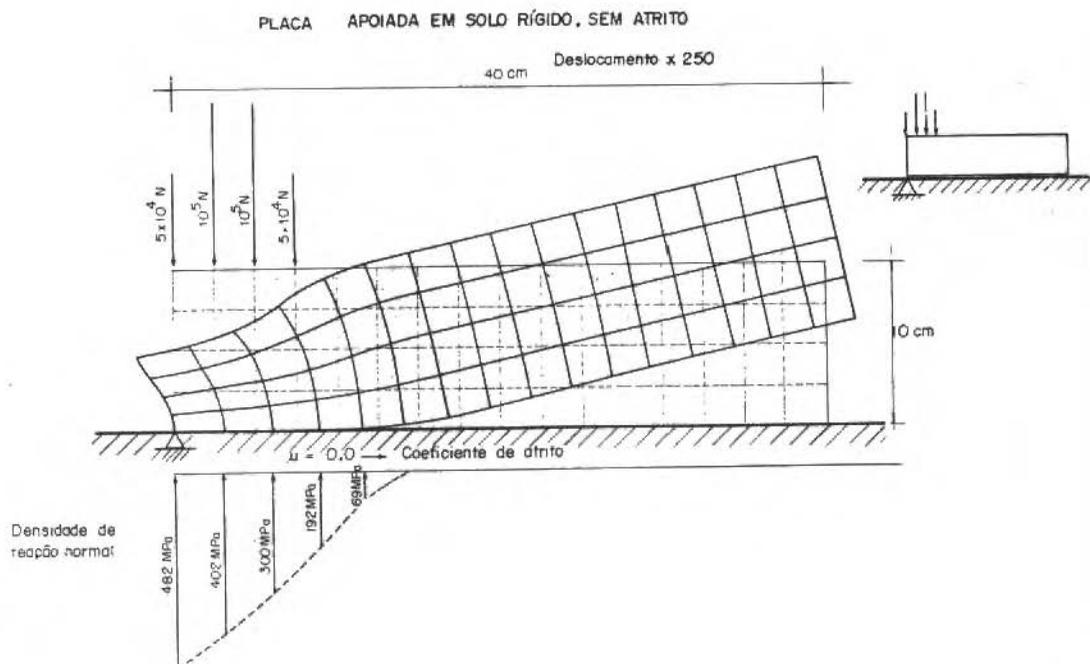


Fig. 3

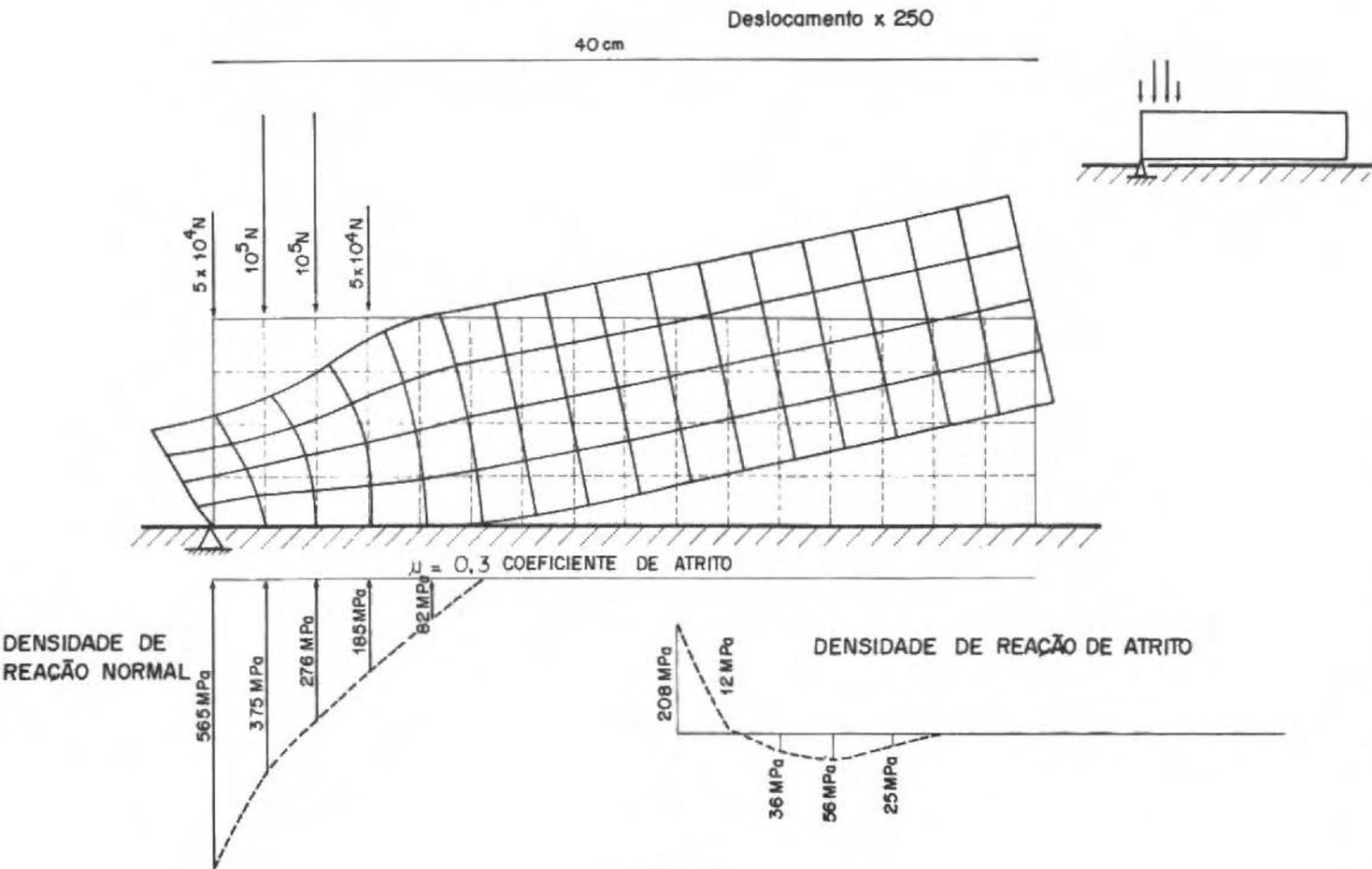


Fig. 4

PLACA APOIADA SOBRE SOLO RÍGIDO

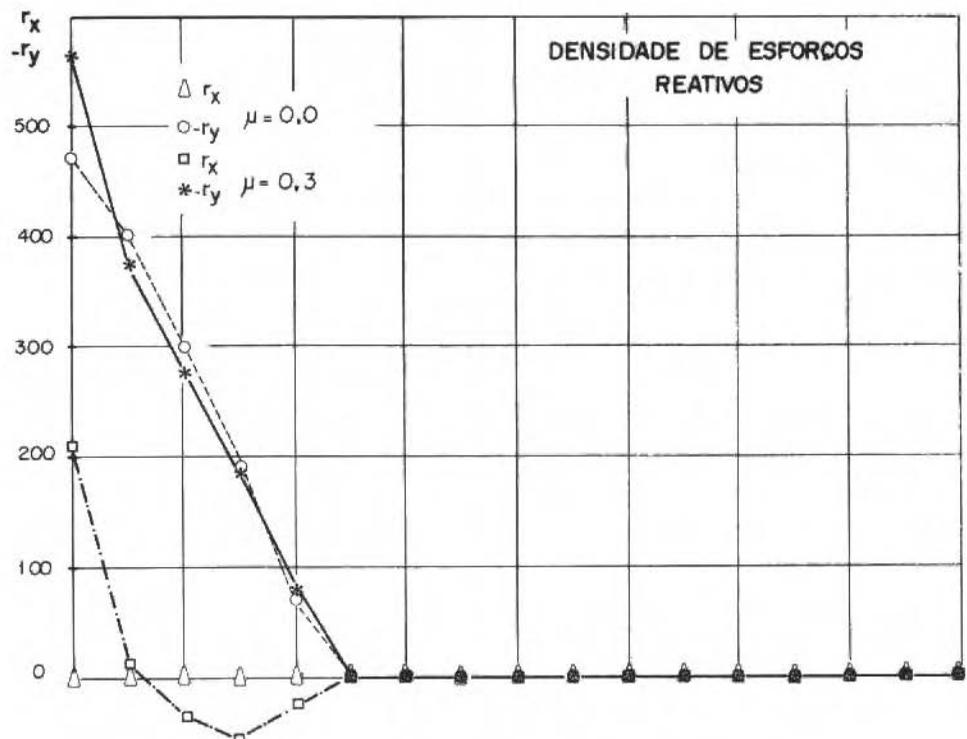
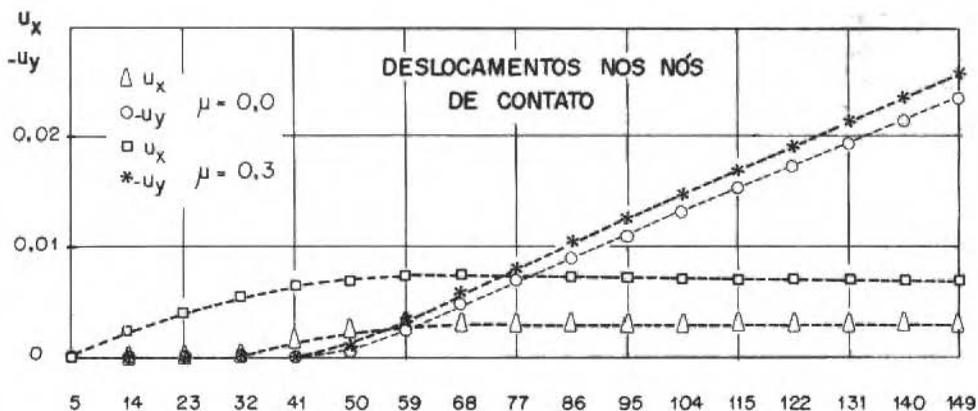


Fig. 5

Placa Apoiada sobre Dormentes Rígidos

Seja uma placa espessa longa biapoiada sobre dormentes rígidos e sob carregamento por forças distribuídas uniformemente. Este exemplo ilustra como o modelo pode ajudar na estimativa das áreas de contato e da pressão efetiva entre os dois corpos em contato, mostrando que estes parâmetros podem vir a ser muito diferentes daqueles presumidos em projeto.

São considerados dois comprimentos distintos para a placa, e a análise considera os casos sem e com atrito ($\mu=0,3$). Os resultados estão ilustrados nas Figuras 6 a 11.

Como seria de se esperar, à medida que o vão da placa aumenta, a área de contato diminui e a distribuição dos esforços reativos torna-se mais irregular. No caso ilustrado na Figura 10, a área de contato efetiva é menor do que 20% da área de contato hipotética, enquanto a pressão de contato é da ordem de 4,6 vezes a pressão calculada supondo-se uma distribuição homogênea dos esforços. A importância da consideração da condição de atrito pode ser verificada comparando-se as Figuras 6 com 7 e 9 com 10.

Este exemplo é utilizado, também, para se ilustrar o ganho de desempenho do algoritmo quando se emprega a técnica de condensação de matriz. A tabela abaixo mostra os tempos despendidos pelos dois procedimentos, para o problema com $l=300\text{cm}$, considerando-se os casos sem e com atrito. A discretização em elementos finitos adotada define 300 elementos e 171 pontos nodais.

Tabela 1. Tempo de CPU (em segundos) exemplo 2, $l=300\text{cm}$

PROBLEMA	PROCEDIMENTO ORIGINAL	MATRIZ CONDENSADA	$t_{\text{orig}}/t_{\text{m.cond.}}$
Sem atrito	762	281	2,71
Com atrito	1162	282	4,12

A vantagem na utilização da condensação de matrizes é maior quando o problema envolve a condição de atrito. Isto se deve ao fato de que, no problema com atrito, tem-se um cálculo iterativo maior, e este é o fator que define o alto tempo computacional, otimizado quan-

PLACA BIAPOIADA
SEM ATRITO

CARREGAMENTO
DISTRIBUIDO $q = 150 \text{ MPa}$
 $L = 240 \text{ cm}$

Deslocamento $\times 10$

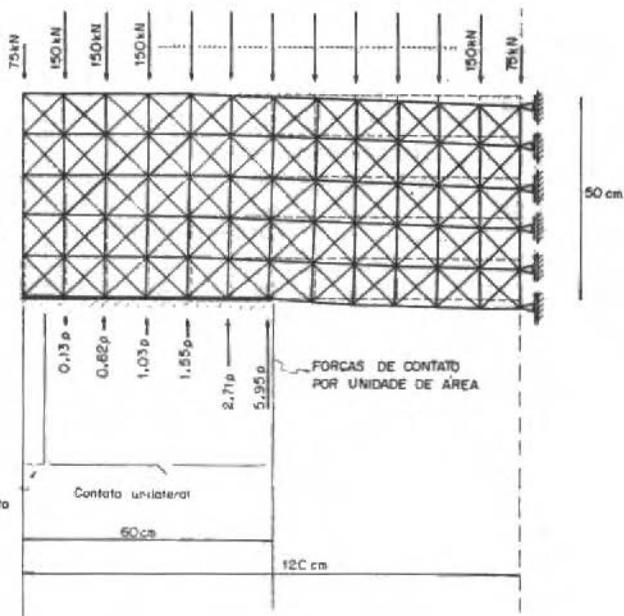
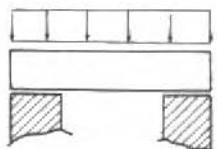


Fig. 6

PLACA BIAPOIADA COM ATRITO
CARREGAMENTO DISTRIBUIDO

$\mu = 0,3$
 $L = 240 \text{ cm}$
 $q = 150 \text{ MPa}$

Deslocamentos $\times 10$

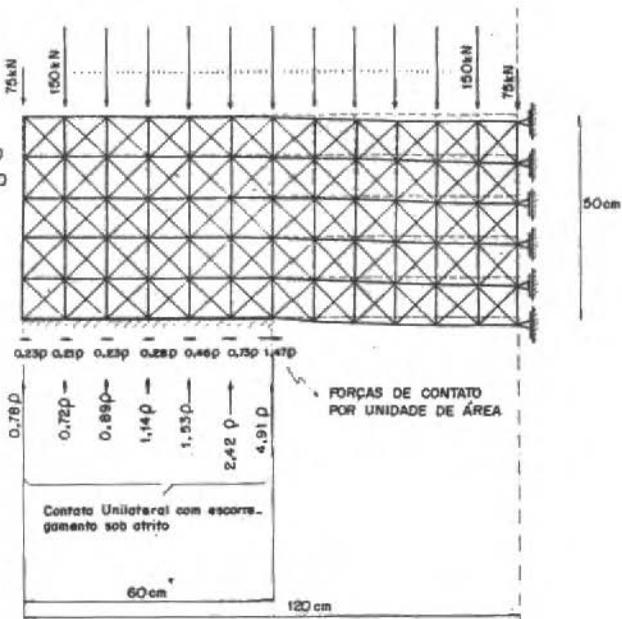
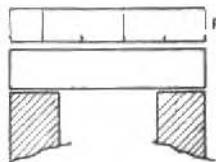


Fig. 7

PLACA BIAPOIADA SOBRE DORMENTES RÍGIDOS

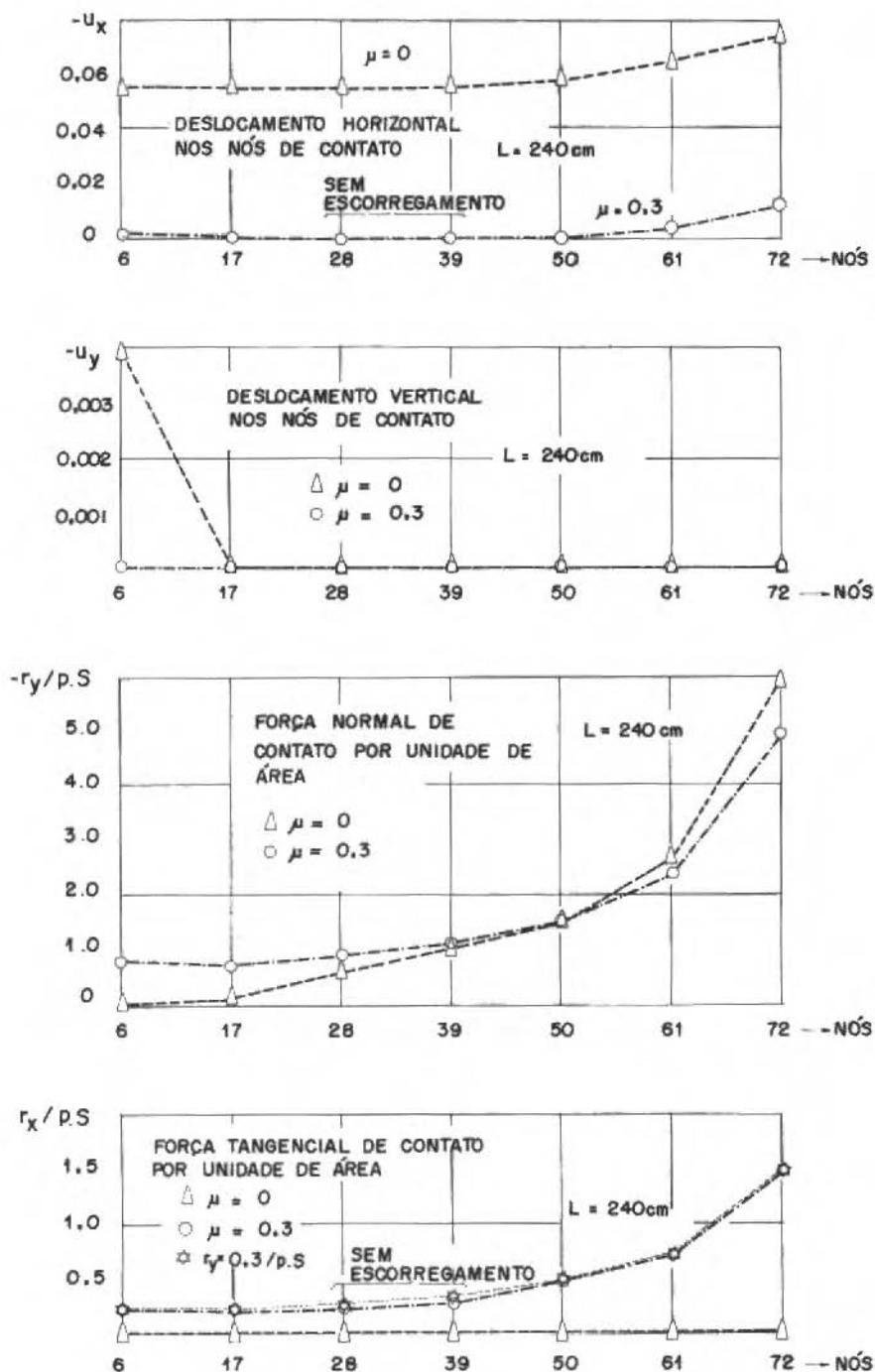


Fig. 8

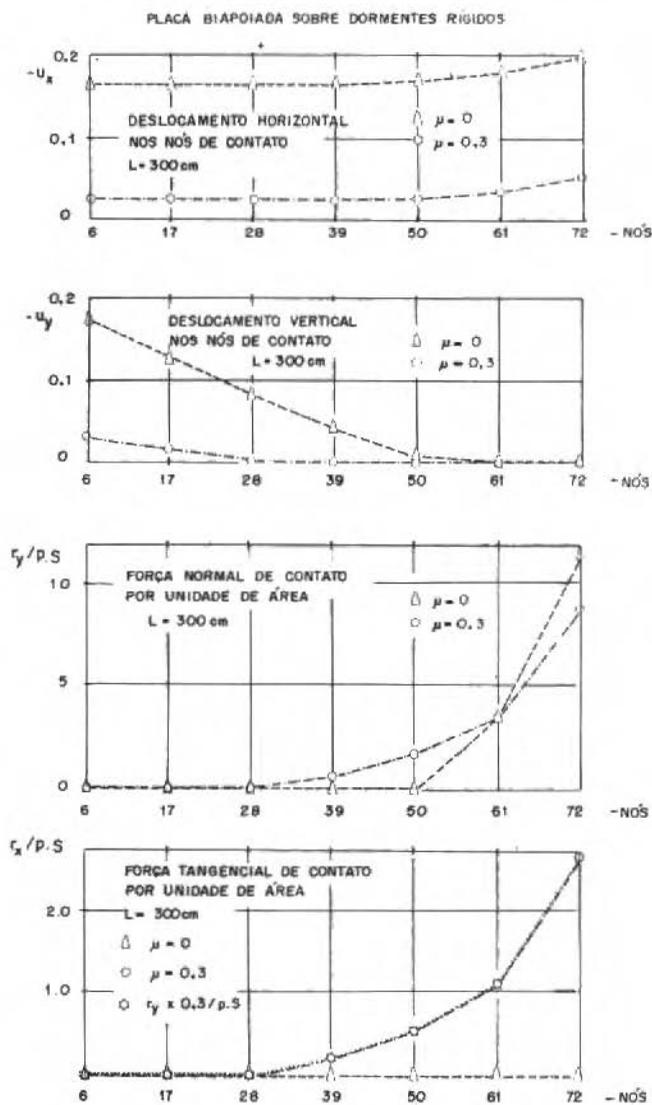


Fig. 11

do se utiliza a técnica de condensação. De fato, pelo procedimento sem condensação, o método de GSRP com atrito envolve, no exemplo, um sistema de 342 minimizações por iteração, enquanto que, pelo procedimento com condensação, trabalha-se com um sistema de 14 minimizações por iteração. Todavia, o ganho no tempo de execução não obedece esta proporção pois grande parte do tempo é utilizado na geração e condensação da matriz A_{CC}^* . No caso, este tempo assume o valor de 257 segundos. Assim, a vantagem na utilização da técnica de condensação de matriz é ainda mais evidente quando são considerados diversos casos de carregamento sobre uma mesma estrutura.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um método numérico capaz de resolver uma classe de problemas de contato unilateral com atrito de Coulomb e aplicou-o a dois problemas de placas apoiadas. Considerou-se a elasticidade infinitesimal com equações constitutivas lineares e uma classe particular de convexos sobre os quais definiram-se os problemas de minimização. Foram apresentados exemplos de aplicação que ilustram a utilização do método e, em particular, a eficiência da técnica de condensação de matrizes. É importante lembrar que esta condensação se faz possível pelo fato de que as minimizações de funcionais não diferenciáveis foram substituídas por minimizações de funções diferenciáveis. Observe que estas substituições não constituem regularizações de funcionais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu suporte da CAPES/COFECUB para Dr. Michel Raous (CNRS) como professor visitante na PUC/RJ durante 3 meses nos anos de 1985 e 1986.

REFERÊNCIAS

- [1] DUVAUT, G., Equilibre d'un solide elastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, *CRAS serie A*, t.290, 263, 1980.
- [2] COCU, M., Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Eng. Sci.*, 22(5), 567-575, 1984.

- [3] PANAGIOTOPOULOS, P.D., *Inequality problems in mechanics and Applications*, Springer-Verlag, 1985.
- [4] DUVAUT, G.; LIONS, J.L., *Inequalities in mechanics and physics*, Springer-Verlag, 1976.
- [5] RAOUS, M.; LATIL, J.C., Code d'éléments finis pour des problèmes de contacts unilatéraux avec frottement formules en termes d'inéquations variationnelles, in "*Unilateral Problems in Structural Analysis*", Ed. G. Del Piero, Springer-Verlag, Vienne, 1987.
- [6] RAOUS, M., Contacts unilatéraux avec frottement en viscoélasticité, in "*Unilateral Problems in Structural Analysis*", CISM course nº 288, Ed. G. Del Piero-F. Maceri, Springer-Verlag, Vienne, 1985.
- [7] RAOUS, M., On two variational inequalities arising from a periodic viscoelastic unilateral problem, in "*Variational Inequalities and Complementarity Problems*", Ed. R.W. Cottle-F. Gianessi-J.L. Lions, John Wiley, 1979.
- [8] RAOUS, M., Notas dos seminários: *Contato unilateral com atrito*, PUC/RJ, 1985.
- [9] BARBOSA, H.J.C.; FEIJÓO, R.A., Um algoritmo numérico para o problema de Signorini com atrito de Coulomb, *VIII COBEM*, pp. 541-544, 1985.
- [10] BARBOSA, H.J.C.; FEIJÓO, R.A., Numerical algorithms for contact problems in linear elastostatics, *Conf. on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants*, vol. 1, pp. 231-244, RS, 1984.
- [11] BARBOSA, H.J.C., Algoritmos numéricos para problemas de contato em Elasticidade, Tese de D.Sc., Prog. de Eng. Civil, COPPE/UFRJ, 1986.
- [12] PINTO, J.; RAOUS, M., Direct non linear programming method for a two body contact, *ICIAM 87*, Paris, La Villette, Juin 1987.
- [13] CAMPOS, L.T.; ODEN, J.T.; KIKUCHI, N., A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics, *Computer Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 34, 821, 1982.

- [14] GLOWINSKI, R.; LIONS, J.L.; TREMOLIERES, R., *Analyse numerique des inequations variationnelles*, Dunod, 1976.
- [15] BREZIS, H., *Analyse Fonctionelle*, Masson, 1983.
- [16] FICHERA, G., Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, *Handbuch der Physik, Ban Via/2*, 391-424, 1972.
- [17] RAVIART, R.A. & THOMAS, J.M., *Introduction a l'analyse numérique des equations aux derivées partielles*, Masson, 1983.
- [18] DEL PIERO, G., Unilateral problems in structural analysis, Módulo III do 2º Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, LNCC/CNPq, 1985.



II ENCONTRO NACIONAL DE CIÊNCIAS TÉRMICAS

OBJETIVOS

- Divulgar a produção científica nacional na área de Ciências Térmicas.
- Promover o intercâmbio entre pesquisadores.
- Incentivar o relacionamento das atividades de pesquisa com o setor produtivo nacional.
- Avaliar as perspectivas de evolução das Ciências Térmicas.

CALENDÁRIO

ATÉ O DIA 15 DE MAIO DE 1988

Os autores deverão encaminhar seus RESUMOS, juntamente com 2 (duas) cópias xerox, seguindo fielmente as instruções.

ATÉ O DIA 15 DE JUNHO DE 1988

Os autores receberão da Comissão Editorial a confirmação de que seus resumos foram aceitos e as instruções para a datilografia do trabalho na forma final.

ATÉ O DIA 01 DE SETEMBRO DE 1988

Os autores deverão encaminhar seus trabalhos na versão final datilografada nos formulários próprios, fornecidos pelo INPE, para a Assessoria de Comunicação Social – Setor de Eventos.

ATÉ O DIA 15 DE OUTUBRO DE 1988

Os autores receberão da Comissão Editorial a confirmação de que seus trabalhos foram aceitos.

Os prazos acima deverão ser cuidadosamente observados considerando que qualquer atraso implicará prejuízo do programa final de impressão dos Anais, que deverão ser distribuídos na ocasião do Encontro.

Todos os trabalhos são de responsabilidade de seus autores. A Comissão não se responsabilizará pela revisão ortográfica ou por nova datilografia dos textos para efeito de publicação.

INFORMAÇÕES E CORRESPONDÊNCIAS

O Instituto de Pesquisas Espaciais – INPE, Setor de Eventos – poderá fornecer quaisquer informações adicionais pelo telefone ou endereço abaixo:

Instituto de Pesquisas Espaciais – INPE – Setor de Eventos

Caixa Postal 515 – 12201 – São José dos Campos – SP

Telefone: (0123) 22 9977 – ramal 539 – Telex: 123 3530 INPE BR

COMISSÃO ORGANIZADORA

Demétrio Bastos Netto	–	Presidente
Maurício Nogueira Frota	–	Vice-Presidente
Nehemias Lima Lacerda	–	1º Secretário
Paulo Moraes Junior	–	2º Secretário
Leon Sinay	–	Tesoureiro
Paulo A. de O. Soviero	–	Editor

DETERMINAÇÃO DE FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA TRINCAS PRÓXIMAS A JUNTAS T EM ESPÉCIMES PLANOS E TUBULARES SUBMETIDOS À TRAÇÃO VIA FOTOELASTICIDADE

José Luiz de França Freire – Membro da ABCM
PUC/RJ – Departamento de Engenharia Mecânica

José Ricardo Rebello
Metal Leve S/A – Indústria e Comércio

RESUMO

Este trabalho relata a aplicação de técnicas fotoelásticas bi- e tri-dimensionais na determinação de fatores de intensificação de tensão, FIT, para trincas próximas a juntas planas e tubulares em T, solicitadas à tração. O método de determinação dos FIT, a partir das ordens de franja isocromáticas lidas nos experimentos, envolve a solução de equações generalizadas de Westergaard para os modos de abertura I e II pelo método de Newton-Raphson associado à ajustes por mínimos quadrados. Além dos FIT para as geometrias consideradas, o trabalho fornece uma importante avaliação da incerteza dos resultados obtidos.

ABSTRACT

This paper reports the application of 2-D and 3-D photoelastic techniques to the determination of stress intensity factors, SIF, for cracks located near plane and tubular T joint specimens, loaded in tension. The scheme adopted for SIF determination, from isochromatic fringe orders measured in the experiments, involved the solution of generalized Westergaard equations for crack opening modes I and II employing the Newton-Raphson method associated to the least squares technique. Besides determining SIF for the considered geometries, this paper also furnishes an important evaluation of the uncertainties associated to the determined SIF.

INTRODUÇÃO

Este trabalho relata os resultados obtidos na aplicação de fotoelasticidade bi e tridimensional na determinação de fatores de intensidade de tensão, FIT, para trincas em geometrias complexas, onde outras técnicas analíticas ou numéricas são difíceis de serem aplicadas. Os objetivos finais são a avaliação de FIT - modo I, para trincas superficiais com formato especial, em espécimes tubulares, localizadas próximas aos pés de juntas soldadas em T como mostrado na Figura 1, e uma medida do erro associado a cada FIT. As juntas em T são as formas mais simples de conexões tubulares, normalmente encontradas, juntamente com nós tipo Y e K, em estruturas de plataformas marítimas de exploração de petróleo. Dois tipos de resultados são apresentados para os espécimes tubulares:

- Fatores K_I (FIT - modo I) para trincas em tubos simples (sem conexões T). Estes fatores são comparados com resultados para barras e tubos, respectivamente com trincas superficiais semi-elípticas e circunferenciais, carregadas à tração.
- Fatores K_I para trincas próximas aos pés de junções soldadas, que são comparados com os resultados descritos acima. Deste modo, a influência da vizinhança das juntas T nos estados de tensão atuantes em pontos próximos às pontas das trincas pode ser quantitativamente avaliada.

Como a fotoelasticidade por congelamento de tensões foi utilizada para estas determinações, dificuldades apareceram devido ao maior tamanho possível que os modelos poderiam ter a fim de ainda poderem se ajustar ao interior do forno para congelamento de tensões. Mais ainda, a técnica de introdução das trincas nos modelos tubulares, particularmente naqueles com junções T, e o tamanho máximo destas trincas (de modo a simular geometrias reais), impuseram as seguintes restrições neste estudo: a) as trincas deveriam ser introduzidas por usinagem; b) o comprimento destas trincas deveria variar entre 1 e 5mm.

Embora métodos fotoelásticos tenham sido aplicados com sucesso na determinação de FIT em problemas com trincas longas, ainda existem dificuldades na determinação de FIT para espécimes com trincas pequenas ($a < 1$ a 2mm). Estas dificuldades estão relacionadas à necessidade

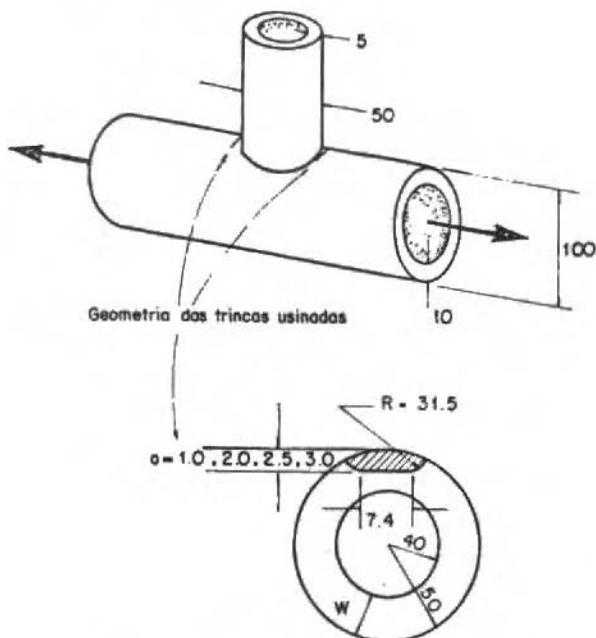


Fig. 1. Geometria dos espécimes tubulares

de medição de ordens de franjas isocromáticas próximo às pontas das trincas, arredondamento da ponta das trincas grande se comparado ao seu comprimento, e, erros associados à medição de parâmetros geométricos na região próxima à raiz das trincas. Se a fotoelasticidade tridimensional é usada, dificuldades adicionais surgem devido ao tamanho dos modelos (limitado ao número e volume de fundições repetidas dos materiais fotoelásticos e ao tamanho interno do forno fotoelástico para acomodar os modelos e sistemas de carregamento), baixo módulo de elasticidade dos materiais fotoelásticos, controle apropriado do alinhamento do carregamento externo aplicado, expansão térmica do material, efeito de tempo e bordo nos materiais fotoelásticos, introdução de trincas por outros meios que não a usinagem, necessidade de utilização de trincas curtas para simular condições de projeto e situações reais de trabalho das estruturas.

Devido às dificuldades mencionadas acima, uma investigação adi

cional foi levada a termo a fim de quantificar o erro associado às de terminações de K_I para os tubos simples e com nós em T. Duas linhas de investigação foram seguidas.

A primeira linha envolveu repetições dos experimentos com os espécimes tubulares a fim de se obter seus valores de K_I e para avali ar a dispersão dos resultados.

A segunda linha envolveu uma análise bidimensional de trincas superficiais em barras planas com e sem juntas T. Os espécimes foram construídos de policarbonato e tinham trincas usinadas ou propagadas por fadiga. Após serem testadas e analisadas, cada barra reta tinha um ramo secundário a ela adicionado ortogonalmente próximo à trinca superficial já existente, a fim de simular juntas T com trincas desen volvidas nas regiões próximas aos seus pés. Os espécimes eram então novamente ensaiados, com 5 repetições, de modo que uma variação esta tística dos fatores K_I pudesse ser determinada. Assim, além do estudo da influência do tamanho e da geometria de trinca (usinada ou propaga da por fadiga) e da geometria do espécime (trinca próxima ou longe das juntas soldadas) sobre os fatores K_I , uma medida da sua dispersão foi obtida, o que é um resultado importante para colocar limites na preci são que se pode efetivamente obter em experimentos similares para de terminação de FIT.

MÉTODO EXPERIMENTAL

Para descrever o estado de tensão para um ponto próximo à pon ta de uma trinca aberta segundo modo I, SANFORD [1] utilizou uma for ma generalizada das equações de Westergaard tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re } Z_I - y \text{ Im } Z_I' - y \text{ Im } Y_I' + 2 \text{ Re } Y_I \\ \sigma_y &= \text{Re } Z_I + y \text{ Im } Z_I' + y \text{ Im } Y_I' \\ \tau_{xy} &= -y \text{ Re } Z_I' - y \text{ Re } Y_I' - \text{Im } Y_I \end{aligned} \quad (1)$$

Para o modo de abertura II, um procedimento similar como segui do para o modo I em [1] e [2] pode ser seguido e expressões para as tensões sob modo II são obtidas tais que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} + \operatorname{Im} Y_{II} + y \operatorname{Re} Y'_{II} \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z'_{II} + \operatorname{Im} Y_{II} - y \operatorname{Re} Y'_{II} \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} - y \operatorname{Im} Y'_{II} \end{aligned} \quad (2)$$

Convenções e definições para as funções acima são:

$$Z = Z(z) \quad , \quad Z' = dZ/dz$$

$$z = x + iy$$

$$Z_{I,II}(z) = \sum_{j=0}^{J_{I,II}} A_{j,I,II} z^{j-1/2}$$

$$Y_{I,II}(z) = \sum_{m=0}^{M_{I,II}} \alpha_{m,I,II} z^m$$

onde A_{j_I} , $A_{j_{II}}$, α_{m_I} , $\alpha_{m_{II}}$ são constantes reais. Quando $j=0$, os coeficientes dos termos $z^{-1/2}$ para os modos I e II serão, respectivamente, A_{0_I} e $A_{0_{II}}$. Estes coeficientes estão relacionados aos PIT - modos I e II da seguinte forma:

$$K_I = A_{0_I} \sqrt{2\pi}$$

$$K_{II} = A_{0_{II}} \sqrt{2\pi}$$

Aplicando a superposição das equações (1) e (2) e usando a equação básica da fotoelasticidade

$$4(\tau_{\max})^2 = (N f_\sigma / t)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \quad (3)$$

onde N é a ordem de franja, t é a espessura da fatia analisada e f_σ é o valor da franja do material utilizado. Coordenadas dos pontos estudados e dados fotoelásticos são coletados e usados para o cálculo de

K_I e K_{II} a partir do método de Newton-Raphson associado a um processo de ajustagem por mínimos quadrados como proposto por SANFORD e DALLY [4].

Decisões sobre o número de parâmetros a ser empregado para cada problema, i.e., $J_I+M_I+J_{II}+M_{II}$, o número de pontos estudados e o tamanho da região onde os dados são coletados não são triviais e precisam ser cuidadosamente analisados. A avaliação dos resultados obtidos é feita de dois modos como indicado em [2]. O primeiro modo é qualitativo e baseado na semelhança entre as distribuições de franjas isocromáticas reais e as plotadas pelo computador que utiliza os valores calculados de K_I e K_{II} e os demais outros parâmetros. O segundo modo é baseado num desvio relativo percentual calculado para as franjas isocromáticas, Δn . Este desvio utiliza as ordens de franjas lidas no polariscópio e as calculadas para o mesmo ponto pelo computador.

O número de pontos usados nesta investigação variou entre 80 a 150 (para cada análise), escolhidos aleatoriamente no interior de uma região limitada por duas circunferências de raios 1 e 8mm e com centro na ponta da trinca. Regiões selecionadas dentro destas duas circunferências permitem bons resultados com apenas 40 pontos. As melhores soluções foram obtidas com os seguintes números de parâmetros: $J_I=5$, $M_I=5$, $J_{II}=1$, $M_{II}=1$, devido ao fato que o modo de abertura II teve influência praticamente desprezível. Diferentes conjuntos de pontos coletados (40 a 150 pontos), obtidos de um mesmo experimento, produziram variações em K_I de apenas 3%, enquanto que valores típicos de Δn variaram entre 1,5 e 5%. Os dados coletados, i.e., ordem de franja N e coordenadas polares dos pontos com relação à ponta das trincas, r e θ , foram determinados num polariscópio de transmissão com aumento de 10x e utilizando o método de compensação de Tardy quando necessário.

Modelos Bidimensionais. Os modelos bidimensionais foram construídos de uma ou mais barras de policarbonato com espessura de 6.35mm, as quais foram fresadas e acabadas manualmente com limas. As barras sujeitas à tração tiveram trincas usinadas introduzidas por fresas tipo disco, com uma geometria de corte proposta em [5], e com uma geometria de ponta mostrada na Fi

gura 2. Outras barras de tração tiveram suas trincas produzidas da seguinte forma: barras com largura excedente tiveram entalhes usinados para a iniciação de trincas de fadiga. Estas foram iniciadas e propagadas ao vibrarem-se as barras utilizando-se uma mesa vibradora. Após pequenos incrementos no seu tamanho, as barras, que estavam engastadas, tinham suas fixações mudadas para as extremidades opostas a fim de que trincas retas pudessem ser propagadas, evitando a tendência de terem seus planos desviados com direção ao engastamento. Após terem atingido um comprimento desejado, a superfície com largura excedente onde o entalhe iniciador fora usinado era removido por fresagem tal que apenas uma trinca de fadiga ficasse lá posicionada. Deste modo, trincas retas de fadiga com comprimentos nominais de 1, 2 e 4,5mm foram construídas. A variação do seu comprimento através da espessura das barras foi controlada de modo a ser menor que 10%. Na maior parte dos casos a variação foi menor que 5%.

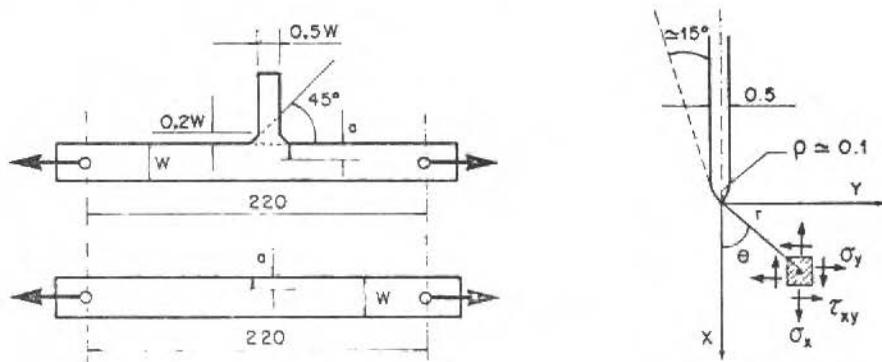


Fig. 2. Geometrias dos espécimes planos e trinca usinada

Cada razão de geometria das barras bidimensionais testadas ($a/w=0,05$, $0,1$ e $0,2$) foi então composta de dois modelos, um com trinca usinada e outra com trinca propagada por fadiga. Estes modelos foram submetidos a 5 séries de carregamentos e coleta de dados. Após terem sido analisados, ramos secundários foram então colados ortogonalmente com adesivo cianoacrilático. Novas séries de 5 carregamentos - coleta de dados foram levadas a termo. Todos estes dados foram então analisados e algumas das conclusões mais importantes serão apresenta-

das na próxima seção.

Modelos Tridimensionais. Dimensões básicas dos espécimes tubulares estão apresentadas na Figura 1. Tubos em dois tamanhos, para os ramos primários e secundários, foram obtidos por fundição a quente e torneados até sua forma final. O material fotoelástico foi composto de 100 partes em peso de Araldite F e 50 partes em peso de anidrido ftálico. Trincas foram fresadas com a mesma ferramenta usada para as trincas bidimensionais nos espécimes de policarbonato. O carregamento foi aplicado no interior do forno de congelamento de tensões por um peso de 200N. A Figura 3 ilustra o aparato simples de carregamento.

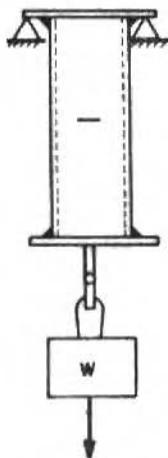


Fig. 3. Esboço do carregamento dos espécimes tubulares

As trincas foram usinadas no ramo primário antes da colagem do secundário com uma resina epoxi comercial com cura à temperatura ambiente. Este adesivo foi testado previamente sob tração na temperatura crítica de congelamento de tensões e comportou-se muito bem, transmitindo perfeitamente o carregamento para todos os pontos tracionados da seção transversal.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados determinados para as análises bi e tridimensio -

nais estão resumidos nas Tabelas 1 e 2. Estas tabelas apresentam valores médios normalizados de FIT, \bar{K}_I^* , como uma função dos parâmetros geométricos adimensionais a/w , número de repetições para cada experimento, n , e desvios padrões dos valores determinados, s_{n-1} .

Tabela 1. Resultados para os espécimes bidimensionais

ESPÉCIMES		a/w	a (mm)	\bar{K}_I^*	\bar{s}_{n-1} (%)	K_I^* [11]	K_I^* [9]
Simples	U	0.05	1.0	1.26	5.6	1.13	1.15
	F			1.10	16		
Soldada	U			1.13	11	-	1.38
	F			1.35	7.2		
Simples	U	0.10	2.1	1.25	2.7	1.19	1.20
	F			1.28	8.2		
Soldada	U			1.29	5.3	-	1.29
	F			1.25	4.9		
Simples	U	0.20	4.5	1.37	2.6	1.36	1.38
	F			1.39	4.2		
Soldada	U			1.38	3.6	-	1.39
	F			1.39	3.6		

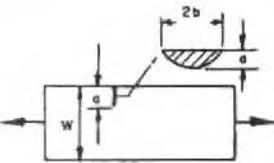
U \equiv trinca usinada, F \equiv trinca propagada por fadiga

$$\bar{K}_I^* = \bar{K}_I / \sqrt{\pi a}, \quad \bar{s}_{n-1} = (s_{n-1} / \bar{K}_I) \times 100\%, \quad \bar{K}_I \equiv \text{valor médio}$$

As faixas dos resultados determinados para os espécimes tubulares lisos (sem conexões T) foram plotadas na Figura 4 de modo a fornecer uma idéia da dispersão dos resultados. A análise destas faixas de dispersão, como também dos desvios padrões apresentados nas Tabelas 1 e 2, é importante antes que qualquer comparação entre FIT para barras ou tubos com ou sem conexões T possa ser feita. Deve-se notar na Figura 4 que a dispersão dos valores dos FIT aumenta quando o comprimento das trincas decresce. Isto é também indicado pelos valores dos desvios padrões nas Tabelas 1 e 2, exceto para os casos dos espécimes tubulares com juntas T. Um gráfico da variação dos desvios padrões percentuais (relativamente a cada FIT médio) está apresentado na Figura 5 como uma função do comprimento de trinca a . É interessante notar como s_{n-1} decresce rapidamente com o acréscimo de a , atingindo 3 a 5%

quando a torna-se maior que 3mm. Isto ocorre para trincas introduzidas por fresagem ou fadiga e, também, para espécimes bi ou tridimensionais, exceto para os tubos com Juntas T, que podem ser considerados pouco representativos pois tiveram apenas 3 repetições para cada geometria.

Tabela 2. Resultados para espécimes tubulares

ESPÉCIMES	a/w	\bar{K}_I^*	Número de Repetições	\bar{s}_{n-1} (%)	OBS
Tubo simples sob tração	0.1	1.1	4	30	Veja Figuras 1 e 2
	0.2	1.0	4	14	
	0.25	1.2	3	8	
	0.3	1.2	7	5	
Tubo com trinca circunferencial sob tração	0.1	1.1	-	-	
	0.2	1.15	-	-	
	0.3	1.2	-	-	
Barra com trinca superficial semi-elítica sob tração	0.1	1.05	-	-	
	0.2	1.1	-	-	
	0.3	1.1	-	-	
Tubo com juntas T sob tração	0.1	1.2	3	10	Veja Figura 1
	0.2	1.1	3	20	
	0.25	1.3	1	-	
	0.3	1.1	3	10	

Uma conclusão parcial até este ponto é que experimentos com procedimentos cuidadosos são ineficientes em evitar grandes erros quando as trincas possuem comprimentos menores que 3mm. Uma predição para tais erros pode ser feita através de publicações prévias [5-8].

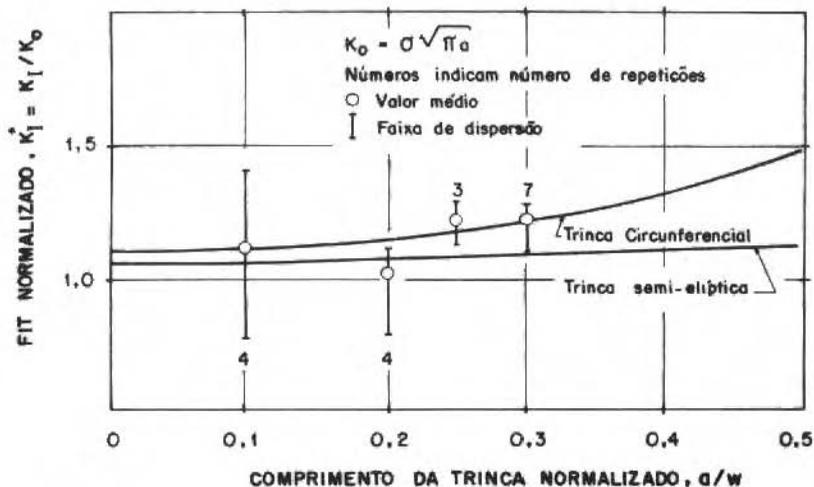


Fig. 4. Valores de FIT tridimensionais normalizados para tubos simples comparados com FIT para trincas superficiais semi-elíptica em barras e circunferenciais em tubos (w = espessura da parede do tubo sujeito à tração)

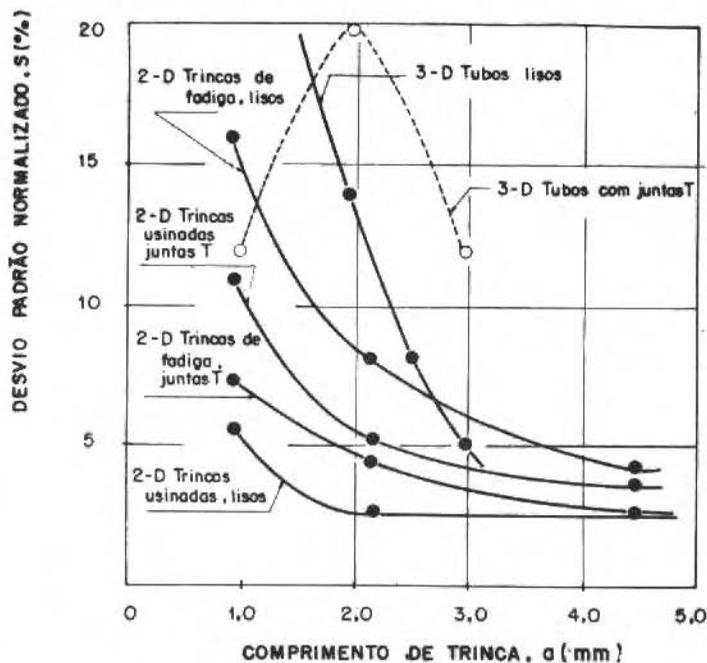


Fig. 5. Variação com o comprimento de trinca dos desvios padrões normalizados para os valores de FIT determinados experimentalmente

Para os experimentos bidimensionais, os erros estão associados à precisão de aplicação do carregamento (tração pura), leitura da ordem de franja nominal para avaliar tensões nominais, leitura de ordem de franja e medição de coordenadas para os pontos estudados e localização da ponta da trinca. Para comparar os resultados experimentais com outros analíticos, é importante levar-se em consideração que outros fatores podem levar a erros tais como: arredondamento da ponta da trinca; forma das trincas usinadas e propagadas por fadiga; comprimento variável das trincas ao longo da espessura das barras; comportamento mecânico e óptico não-linear do material dependente do nível de tensão e taxa de tensão; distorção da geometria da trinca devido ao carregamento. Número de parâmetros devido ao método multi-paramétrico utilizado e número de pontos coletados, assim como as regiões de leitura dos dados, podem influenciar os resultados.

Os experimentos tridimensionais associam todas as fontes de erros acima mencionadas a outras, relativas ao método de congelamento de tensões. Repetição dos testes, no caso do método de congelamento de tensões e corte em fatias, acarreta o uso de modelos diferentes. Assim, nestes casos, lida-se com trincas diferentes em vez da mesma trinca como na análise bidimensional. Em qualquer dos casos, porém, os desvios das médias dos resultados bi e tridimensionais comparados aos resultados analíticos, variaram de 12% a 0% do pior ($a/w=0.05$) ao melhor caso ($a/w=0.2$).

Valores de FIT para barras planas com juntas T foram comparados a resultados de elementos finitos determinados por [9] e concordaram satisfatoriamente bem, exceto para o caso $a/w=0.05$ com trinca usinada. Os valores de K_{II} fotoelásticos, nestes problemas, foram muito pequenos, mesmo para as menores trincas, sendo apenas pequenas frações de K_I e, assim, uma formulação de modo I seria bastante viável de ser empregada nestes problemas. A baixa influência de K_{II} foi também observada experimentalmente, devido às pequenas perturbações apresentadas nas distribuições de franjas isocromáticas típicas de modo I.

Resultados médios de FIT para tubos lisos, apresentados na parte superior da Tabela 2, mostram-se similares a resultados publicados para outros tipos de trincas: trincas circunferenciais em tubos sujeitos à tração e barras com trincas semi-elípticas sujeitas à tração [10].

Valores de FIT para tubos com juntas T estão também apresentados na Tabela 2. Estes resultados não diferem muito daqueles determinados para os tubos lisos, pelo menos se for considerada a faixa de erro experimental - grande, para as pequenas trincas analisadas. Pode-se concluir daí que as juntas soldadas e os ramos secundários próximos às trincas não contribuem de maneira acentuada para modificar o valor de K_I , pelo menos para razões $a/w > 0.1$. Isto é também uma conclusão desta investigação para a análise bidimensional e também um resultado apresentado em [9]. Este último, entretanto, conclui que a proximidade das juntas soldadas eleva os valores de K_I quando a razão a/w torna-se menor que 0.1.

CONCLUSÕES

Considerando o método utilizado para obtenção dos valores de FIT a partir dos dados fotoelásticos, número de dados coletados, número de parâmetros usados e outros detalhes experimentais discutidos no texto, os seguintes pontos podem ser realçados desta investigação

- 1) Uma grande dispersão para os valores de FIT foi encontrada para trincas usinadas ou propagadas por fadiga, em modelos bi e tridimensionais quando os comprimentos das trincas são menores que 3mm. Trincas maiores permitem resultados bastante precisos, frequentemente dentro de uma faixa máxima de $\pm 5\%$ em torno do valor real esperado para o FIT.
- 2) Os resultados bidimensionais mostraram não haver diferenças significativas entre valores de FIT para trincas usinadas e propagadas por fadiga.
- 3) Diferenças entre os valores fotoelásticos de FIT para trincas longe e próximas a juntas soldadas (em espécimes bi ou tridimensionais) foram pequenas e dentro da faixa de erro experimental. Entretanto, resultados de elementos finitos bidimensionais [9] mostram que as diferenças entre estes valores crescem quando as relações a/w decrescem, sendo 7% para $a/w=0.1$ e 20% quando $a/w=0.05$. Quando $a/w > 0.2$, ambos valores de FIT se aproximam, a diferença máxima entre eles sendo 1.5% (por ambas as análises de elementos finitos e fotoelasticidade).

- 4) Valores de FIT para as trincas, com geometria especial, estudadas nos modelos tridimensionais podem ser estimadas pelos valores de FIT para trincas circunferenciais em tubos, já que os erros associados a estas aproximações encontram-se dentro da faixa de erro observada para a análise fotoelástica.

REFERÊNCIAS

- [1] SANFORD, R.J., "A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening - mode crack problems", Mech. Research Communications, 6(5): 289-294, 1979.
- [2] SANFORD, R.J.; FOURNEY, W.L.; CHONA, R. and IRWIN, G.R., "A photoelastic study of the influence of non-singular stresses in fracture tests specimens", ORNL, 1981.
- [3] COSTA, T.F.; REBELLO, J.R. e FREIRE, J.L.F., "Fatores de intensificação de tensão para trincas em juntas planas soldadas", Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 85, 865-868, Dezembro de 1985.
- [4] SANDORD, R.J. and DALLY, J.W., "A general method for determining mixed-mode-stress-intensity factors from isochromatic fringe patterns", Eng.Fract.Mech., 11: 621-633, 1979.
- [5] SCHROEDL, M.A. and SMITH, C.W., "A study of near and far field effects in photoelastic stress intensity determination", Eng. Fract.Mech., 7, 341-355, 1975.
- [6] DOYLE, J.F.; KAMLE, S. and TAKEZAKI, J., "Error analysis of photoelasticity in fracture mechanics", Experimental Mechanics, November, 429-435, 1981.
- [7] SCHROEDL, M.A.; MCGOWAN, J.J. and SMITH, C.W., "An assessment of factors influencing data obtained by the photoelastic stress freezing technique for stress fields near crack tips", Eng. Fracture Mech., 4: 801-809, 1972.
- [8] SMITH, C.W.; MCGOWAN, J.J. and JOLLES, M., "Effects of artificial cracks and poisson's ratio upon photoelastic stress-intensity determination", Exp.Mech., 5: 188-193, 1976.

- [9] SMITH, I.J., "Stress intensity factors for toe deffects in single-sided transverse attachments of varying thickness made with fully penetrating welds", Research Report 183, The Welding Institute, 1982.
- [10] ROOKE, D.P. and CARTWRIGHT, D.J., "Compendium of stress intensity factors", Ministry of Defense, London.
- [11] BROWN, W.F. and SRAWLEY, J.E., STP 410, ASTM, 1966.

ANALOGY BETWEEN HEAT AND MASS TRANSFER FOR DIFFUSION DRIVEN NONISOTHERMAL EVAPORATION

Álvaro Toubes Prata - Membro da ABCM
UFSC - Departamento de Engenharia Mecânica

ABSTRACT

The analogy between evaporative heat and mass transfer is investigated for diffusion-driven nonisothermal evaporation of water from a partially-filled container. It is shown that suitable definitions of the mass transfer coefficient make possible a tight correlation between the ratio of the transfer coefficients and the Lewis number.

RESUMO

A analogia entre transferência evaporativa de calor e massa é investigada para o caso de evaporação difusiva, não isotérmica, de uma cavidade parcialmente cheia com água. É demonstrado que definições convenientes do coeficiente de troca de massa tornam possível a obtenção de estreita correlação entre o número de Lewis e a razão entre os coeficientes de troca.

NOMENCLATURE

c_p	specific heat of air
c_{pw}	specific heat of water vapor
D	binary diffusion coefficient
H	distance between top of the cavity and liquid surface, Fig. 1
h	heat transfer coefficient, equation (6) or (10)
h_{fg}	latent heat of evaporation
h''	heat transfer coefficient, equation (19)
K	mass transfer coefficient, equation (7) or (12)
K'	modified mass transfer coefficient, equation (16)
K''	modified mass transfer coefficient, equation (22)
k	thermal conductivity of air
Le	Lewis number ($=Sc/Pr=k/\rho c_{pw}D$)
\dot{m}	evaporation rate per unit area
Nu	Nusselt number ($=hH/k$)
Nu''	Nusselt number ($=h''H/k$)
Pe_T	Peclet number for thermal transport ($=\dot{m}Hc_{pw}/H$)
Pe_W	Peclet number for mass transport ($=\dot{m}H/\rho D$)
Sh	Sherwood number ($=KH/D$)
Sh'	modified Sherwood number ($=K'H/D$)
Sh''	modified Sherwood number ($=K''H/D$)
T	temperature
T_i	temperature at the liquid surface
T_∞	ambient temperature
W	water-vapor mass fraction
W_i	value of W at the liquid surface
W_∞	value of W at ambient
Y	dimensionless coordinate ($=y/H$)

- y vertical coordinate, Fig. 1
 α dimensionless water-vapor mass fraction, equation (3)
 θ dimensionless temperature, equation (3)
 ρ air density
 ϕ relative humidity

Subscripts

- 0 at $y=0$
H at $y=H$

INTRODUCTION

In the analysis to be presented here, evaporation of liquid water into ambient air will be used to explore the analogy between heat and mass transfer. The evaporating water partially fills an adiabatic-walled, open-topped container.

It will be demonstrate how seeming defects in the analogy can be redressed by suitable definitions of the mass transfer coefficient. Furthermore, the relationship between heat and mass transfer coefficients and the Lewis number will be investigates.

ANALYSIS

A view illustrating the evaporation problem in consideration is shown in Fig. 1. The diffusion-driven nonisothermal evaporation associated with the situation shown in this figure has been recently investigated for a one-dimension, steady state situation [1].

The equation governing the evaporative heat and mass transfer for this problem was shown in [1] to be, respectively,

$$(\dot{m}c_{pw}/k) (dT/dy) = d^2T/dy^2 \quad (1)$$

and

$$(\dot{m}/\rho D) (dW/dy) = d^2W/dy^2 \quad (2)$$

were, all quantities appearing in equations (1) and (2) are explained in the nomenclature.

In [1] equations (1) and (2) were solved for the evaporation of liquid water into an ambient containing air at atmospheric pressure. The relative humidity ϕ of the air at the top of the cavity was varied from 0 to 100 percent, and its temperature T ranged from 15 to 35°C. Results were presented for the interface temperature T_i and for the evaporation rate \dot{m} . The evaporation rate results were presented divided by \dot{m}_{STEFAN} which is that corresponding to the diffusion driven isothermal evaporation, classically known as Stefan

diffusion problem [1,2].

For given ambient conditions, and in the absence of natural convection, the Stefan model provides the upper bound for the rate of evaporation, whereas the nonisothermal model yields the lower bound. A physical discussion of diffusion-driven evaporation exploring the existence of the two aforementioned limits is presented in [1].

Attention will now be focused in the analogy between the evaporative heat and mass transfer. To explore the analogy, a dimensionless temperature and water-vapor mass fraction are defined as

$$\theta = (T - T_1) / (T_\infty - T_1) \quad ; \quad \alpha = (W - W_1) / (W_\infty - W_1) \quad (3)$$

where T_1 and W_1 are, respectively, the temperature and water-vapor mass fraction at the evaporating surface.

If θ and α are introduced into equations (1) and (2), along with $Y = y/H$, where H is the distance from the water surface to the top of the cavity, the resulting differential equations for θ and α are

$$Pe_T (d\theta/dY) = d^2\theta/dY^2 \quad (4)$$

and

$$Pe_W (d\alpha/dY) = d^2\alpha/dY^2 \quad (5)$$

where, except for the Peclet numbers $Pe_T (= \dot{m} H c_p / k)$ and $Pe_W (= \dot{m} H / \rho D)$ the two differential equations are identical. In addition, both θ and α have the same boundary conditions (0 at $y=0$ and 1 at $Y=1$). Therefore,

$$\theta(Y, Pe_T) = \alpha(Y, Pe_W)$$

so that the temperature and mass fraction distributions are completely analogous.

Now, turning to the evaluation of the heat and mass transfer coefficients, h and K , there are some deviations in the analogy that have to be dealt with. These transfer coefficients are defined

according to

$$h = [\dot{m}h_{fg} + \dot{m}c_{pw}(T_{\infty} - T_i)] / (T_{\infty} - T_i) \quad (6)$$

and

$$K = \dot{m} / \rho (W_i - W_{\infty}) \quad (7)$$

in which h_{fg} is the latent heat of evaporation. It should be noted that the latent and the sensible heat are included in the definition of h .

By a formal integration of the energy equation (1) between $y=0$ and H and subsequent application of the boundary condition at the liquid surface,

$$k(dT/dy)_0 = \dot{m}h_{fg} \quad (8)$$

it follows

$$\dot{m}h_{fg} + \dot{m}c_{pw}(T_{\infty} - T_i) = k(dT/dy)_H \quad (9)$$

so that equation (6) becomes

$$h = k(dT/dy)_H / (T_{\infty} - T_i) \quad (10)$$

To determine the mass transfer coefficient K from equation (7), the evaporation rate \dot{m} has to be known. Since \dot{m} is constant throughout the container, it can be calculated at any location y . In this regard, it follows from the definition of mass flux of water vapor and from the impermeability condition for the air at the liquid surface that

$$\dot{m} = [-\rho D / (1 - W_i)] (dW/dy)_0 = [-\rho D / (1 - W_{\infty})] (dW/dy)_H \quad (11)$$

In as much as the heat transfer coefficient in equation (10) was related to the temperature gradient at $y=H$, it is logical to relate \dot{m} to the gradient of the mass fraction at $y=H$ in order to preserve the analogy. Thus, substituting the right-most member of

equation (11) into equation (7) yields

$$K = [-D/(1-W_\infty)] (dw/dy)_H / (W_1 - W_\infty) \quad (12)$$

Now, using the dimensionless variables θ , α and Y , equations (10) and (12) become

$$hH/k = (d\theta/dY)_{Y=1} = f(Pe_T) \quad (13)$$

and

$$KH/D = [1/(1-W_\infty)] (d\alpha/dY)_{Y=1} = [1/(1-W_\infty)] f(Pe_W) \quad (14)$$

in which $f(Pe_T)$ and $f(Pe_W)$ are the same function. If hH/k is identified as a Nusselt number Nu and KH/D is identified as a Sherwood Sh , then

$$Nu/Sh = [f(Pe_T)/f(Pe_W)] [1/(1-W_\infty)] \quad (15)$$

For the analogy between heat and mass transfer to hold, $Nu=Sh$ when $Pe_T=Pe_W$, which is not fulfilled by equation (15) because of the presence of the factor $1/(1-W_\infty)$. The existence of this factor, known as the blowing effect [2], is associated with a convective velocity required to counterbalance the diffusion of air from the top of the cavity to the liquid surface and due to the impermeability condition at this surface.

The seeming defect in the analogy can be overcome by redefining the mass transfer coefficient to include the factor $1/(1-W_\infty)$. This approach is permissible because the definitions of the transfer coefficients contain some degree of arbitrariness, depending on convenience and on the intended use. To bring the analogy into standard form, let

$$K' = (1-W_\infty)K = (1-W_\infty)\dot{m}/\rho(W_1 - W_\infty) \quad (16)$$

and

$$Sh' = K'H/D \quad (17)$$

so that

$$\text{Nu}/\text{Sh}' = f(\text{Pe}_T)/f(\text{Pe}_W) \quad (18)$$

which yields $\text{Nu}=\text{Sh}'$ when $\text{Pe}_T=\text{Pe}_W$, as required for the fulfillment of the analogy.

The aforementioned arbitrariness in the definition of the transfer coefficient enables other forms of the analogy to be derived. In this regard, rather than taking into account both the sensible and latent heat contributions, the heat transfer coefficient can be defined in terms of the latent heat contribution only. This alternative definition is

$$h'' = \dot{m}h_{fg}/(T_\infty - T_i) \quad (19)$$

By making use of equation (8) and introducing the dimensionless temperature θ and coordinate Y , equation (19) becomes

$$h''H/k = (d\theta/dY)_{Y=0} = g(\text{Pe}_T) \quad (20)$$

where it is noted that the newly defined heat transfer coefficient is related to the temperature gradient at the gas-liquid interface. With the construction of a heat/mass transfer analogy in mind, it is appropriate to evaluate the mass transfer coefficient K (equation (7)) using the middle member of equation (11) where the derivative $(dW/dy)_0$ appears. After introduction of dimensionless variables, there is obtained

$$KH/D = [1/(1-W_i)](d\theta/dY)_{Y=0} = [1/(1-W_i)]g(\text{Pe}_W) \quad (21)$$

By examination of equations (20) and (21), it is evident from what has gone before that the factor $1/(1-W_i)$ is an impediment to the attainment of a heat/mass transfer analogy. Consequently, a new mass transfer coefficient K'' is defined as

$$K'' = (1-W_i)K = (1-W_i)\dot{m}/\rho(W_i - W_\infty) \quad (22)$$

With this and with the definitions

$$\text{Nu}'' = h''H/k \quad , \quad \text{Sh}'' = K''H/D \quad (23)$$

it follows from (20) and (21)

$$\text{Nu}''/\text{Sh}'' = g(\text{Pe}_T)/g(\text{Pe}_W) \quad (24)$$

Since $g(\text{Pe}_T)$ and $g(\text{Pe}_W)$ are the same function, then $\text{Nu}'' = \text{Sh}''$ when $\text{Pe}_T = \text{Pe}_W$, thereby fulfilling the analogy.

TRANSFER COEFFICIENT-LEWIS NUMBER RELATION

In work involving mass transfer, it is customary to seek to relate the ratio of the heat and mass transfer coefficients to the Lewis number. Such a relationship is sought to enable the heat and mass transfer coefficients to be interchanged when the Prandtl and Schmidt numbers are not equal.

The Lewis number Le is the ratio of the Schmidt and Prandtl numbers, that is

$$Le = Sc/Pr = k/\rho c_p D \quad (25)$$

By introducing the Lewis number, equation (18) can be rephrased to yield the ratio $h/c_p \rho K'$

$$h/c_p \rho K' = [f(\text{Pe}_T)/f(\text{Pe}_W)] Le \quad (26)$$

Similarly from equation (24), there is obtained for $h''/c_p \rho K''$

$$h''/c_p \rho K'' = [g(\text{Pe}_T)/g(\text{Pe}_W)] Le \quad (27)$$

These equations will be evaluated for the evaporation problem illustrated in Fig. 1. The numerical results for the temperature and mass fraction gradients at the gas-liquid interface and at the top of the container (i.e., the g 's and f 's) obtained from the solution of equations (1) and (2) are substituted into equations (26) and (27) yielding the $h/c_p \rho K'$ and $h''/c_p \rho K''$ ratios for various conditions at

the top of the container. These results are listed in Table 1 along with the corresponding Lewis number.

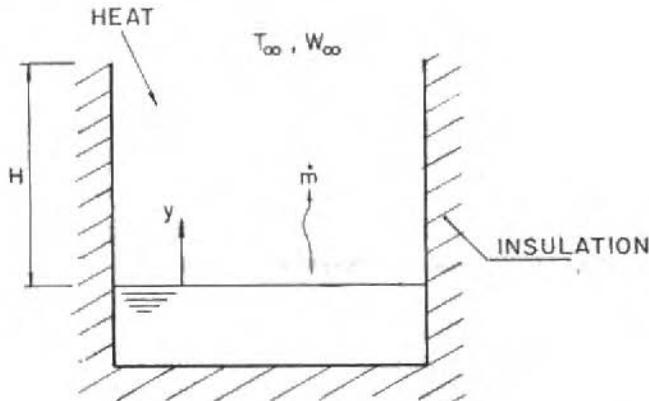


Fig. 1. Evaporation of water into air from an adiabatic-walled container

From Table 1, it is seen that for all the investigated boundary conditions at the top of the container, the values of $h/c_p \rho K'$ and $h''/c_p \rho K''$ are very close to the Lewis number. The maximum deviation which is less than 0.6 percent, occurs for $\phi=0$. For $\phi=1$, the values of $h/c_p \rho K'$, $h''/c_p \rho K''$ and Le are identical.

Table 1. Values of Le , $h/c_p \rho K'$ and $h''/c_p \rho K''$ for various conditions at the top of the container

T (°C)	$\phi=0$			$\phi=0.5$			$\phi=1$		
	Le	$h/c_p \rho K'$	$h''/c_p \rho K''$	Le	$h/c_p \rho K'$	$h''/c_p \rho K''$	Le	$h/c_p \rho K'$	$h''/c_p \rho K''$
15	0.844	0.847	0.842	0.843	0.844	0.842	0.841	0.841	0.841
25	0.842	0.846	0.839	0.840	0.841	0.838	0.837	0.837	0.837
35	0.841	0.845	0.836	0.836	0.838	0.834	0.832	0.832	0.832

To rationalize this outcome, attention may be redirected to equations (26) and (27). Those equations indicate that for the equality of $h/c_p \rho K$ and Le , the ratio $f(Pe_T)/f(Pe_W)$ must be equal to unity; similarly, equation (27) shows that $g(Pe_T)/g(Pe_W)$ must also equal unity. This is possible if f and g are independent of Pe_T and

Pe_w , which occurs only for pure diffusion.

The $\phi+1$ case of Table 1 is, indeed, a pure diffusion situation, so that the precise equality of $h/c_p \rho K'$, $h''/c_p \rho K''$ and Le shown in the table is as it should be. The very slight deviations between these quantities which are in evidence with decreasing ϕ indicate the presence of convection.

The just-cited tight correlation between the ratio of the transfer coefficients and the Lewis number was made possible by the appropriate definition of the mass transfer coefficients, K' and K'' , i.e., equations (16) and (22). Had the mass transfer coefficient K been used, this tight correlation would not occur.

CONCLUDING REMARKS

The nonisothermal evaporation problem of [1] was used to explore the analogy between heat and mass transfer. It was demonstrated that a seeming defect in the analogy caused by the blowing effect can be overcome by a suitable redefinition of the mass transfer coefficient. Various forms of the analogy were shown to exist depending on the chosen definitions of the transfer coefficients. Furthermore, the ratio of the heat transfer coefficient to the modified mass transfer coefficient was shown to be virtually equal to the Lewis number.

REFERENCES

- [1] PRATA, A.T. and SPARROW, E.M., "Diffusion-Driven Nonisothermal Evaporation", Journal of Heat Transfer, vol. 107, pp. 239-242, 1985.
- [2] BURMEISTER, L.C., Convective Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, 1983.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**

Secretaria da ABCM - Biênio 1986-1987
PUC/RJ - ITUC
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil
Tel.: (021) 259-5197 - Telex: 31048 PUCR BR

PARA USO DA ASSOCIAÇÃO

Recebido

/ /

Aprovado

/ /

Matrícula nº

| | - | | - | | | |

FORMULÁRIO PARA AFILIAÇÃO

- Sócio Efetivo
 Sócio Aspirante

DADOS PESSOAIS

Nome		Data Nascimento		
<input type="checkbox"/> Endereço Residencial	Av/Rua	Nº	Bl.	Aptº
	CEP	Cidade	UF	País
		Tel.: ()		

FORMAÇÃO ACADÊMICA

Graduação	Título obtido	Período
	Instituição	País
<input type="checkbox"/> Mestrado e/ou Especial. <input type="checkbox"/>	Título obtido	Período
	Instituição	País
Doutorado	Título obtido	Período
	Instituição	País

ATUAÇÃO PROFISSIONAL

Cargo/Função					
<input type="checkbox"/> Endereço Comercial	Instituição				
	Av/Rua	Nº	Sala		
		CEP	Cidade	UF	País
		Tel.: ()			

Áreas de Especialização
(Use código anexo A)Áreas de Aplicação
(Use código anexo B)**SUGESTÕES / OBSERVAÇÕES**

(Indicar endereço para envio de correspondência)

Local

/ /
Data

Assinatura

ANEXO A

ÁREAS DE ESPECIALIDADE

- 1000 FUNDAMENTOS E MÉTODOS EM MECÂNICA TEÓRICA E APLICADA**
- 1010 Mecânica do Contínuo
 - 1110 Método dos Elementos Finitos
 - 1120 Métodos dos Elementos do Contorno
 - 1130 Métodos assintóticos
 - 1140 Métodos das Diferenças Finitas
 - 1150 Outros Métodos em Mecânica Computacional
 - 1210 Métodos Estocásticos e Estatísticos
 - 1310 Modelagem
 - 1410 Fundamentos de Análise Experimental
 - 1510 Metrologia
 - 1610 Gerência de Projetos
- 2000 DINÂMICA E VIBRAÇÕES**
- 2110 Cinemática e Dinâmica
 - 2210 Vibrações de Sólidos (Fundamentos)
 - 2310 Vibrações (Elementos de estruturas)
 - 2320 Vibrações (Estruturas)
 - 2330 Propagação de Ondas e Sólidos
 - 2340 Impactos em Sólidos
 - 2350 Identificação de parâmetros de sistemas Mecânicos
 - 2410 Propagação de ondas em fluidos incompressíveis
 - 2420 Propagação de ondas em fluidos compressíveis
 - 2510 Interação sólido-fluido
 - 2610 Astronáutica (mecânica celeste e orbital)
 - 2710 Explosões e Balística
 - 2810 Acústica
- 3000 CONTROLE E OTIMIZAÇÃO**
- 3110 Projeto e Teoria de Sistemas Mecânicos
 - 3210 Sistemas de Controle Ótimo
 - 3220 Sistemas de Controle Adaptativo
 - 3230 Aplicações em Sistemas e Controle
 - 3310 Robótica
 - 3410 Otimização de Sistemas e Processos
- 4000 MATERIAIS**
- 4110 Biomateriais
 - 4120 Materiais Metálicos
 - 4130 Materiais Cerâmicos
 - 4140 Materiais Poliméricos
 - 4150 Materiais Conjugados
 - 4210 Conformação Mecânica
 - 4300 Caracterização e Controle Microestrutural
 - 4410 Comportamento Mecânico de Materiais
 - 4420 Comportamento Mec de Mat em Baixas Temperaturas
 - 4430 Comportamento Mec. de Mat. em Altas Temperaturas
 - 4440 Comportamento Mec de Mat sob Carregamento Variável
 - 4450 Comportamento Mec de Mat sob Carregamento Dinâmico
 - 4500 Mecanismo de Fratura
 - 4600 Mecânica de Fratura
 - 4710 Ensaios Destrutivos
 - 4720 Ensaios Não Destrutivos
 - 4800 Corrosão
- 5000 MECÂNICA DOS SÓLIDOS**
- 5010 Elasticidade linear
 - 5020 Elasticidade não-linear
 - 5030 Viscoelasticidade
 - 5040 Plasticidade
 - 5050 Visco-plasticidade
 - 5060 Mecânica de materiais conjugados
 - 5070 Mecânica de meios porosos
 - 5110 Reologia
 - 5210 Cabos, hastes e vigas
 - 5220 Membranas, placas e cascas
 - 5230 Estruturas (geral)
 - 5240 Estruturas (em contato com o solo)
 - 5250 Estruturas (sobremesas ou semi sobremesas)
 - 5260 Estruturas (móveis)
 - 5270 Estruturas (vasos e contenções)
 - 5310 Mecânica dos solos (básico)
- 6000 MECÂNICA DOS FLUIDOS**
- 6010 Reologia
 - 6110 Hidráulica
 - 6210 escoamento incompressível
 - 6220 escoamento compressível
 - 6230 escoamento rarefeito
 - 6240 escoamento em meios porosos
 - 6250 Magneto hidrodinâmico e plasmas
 - 6270 escoamento multifásico
 - 6310 Camadas limites com contorno sólido
 - 6320 Camadas limites com contorno livre
 - 6410 escoamento interno (tubos, canais, coquelet)
 - 6420 escoamento interno (bocais, difusores, ...)
 - 6430 escoamento com superfície livre
 - 6510 Estabilidade do escoamento
 - 6520 Turbulência
 - 6530 Hidrodinâmica de Veículos e estruturas navais
 - 6540 Aerodinâmica
 - 6610 Mecânica dos fluidos aplicada a máquinas
 - 6650 Lubrificação
 - 6710 Transientes Hidráulicos
 - 6810 Técnicas experimentais e visualização de escoamento
- 7000 TERMO-CIÊNCIAS**
- 7010 Termodinâmica
 - 7110 Transporte de calor (convecção monofásica)
 - 7120 Transporte de calor (convecção bifásica)
 - 7130 Transporte de calor (condução)
 - 7140 Transporte de calor (radiação e modos combinados)
 - 7150 Transporte de calor (dispositivos e sistemas)
 - 7210 Termomecânica de sólidos
 - 7310 Transporte de massa (sem e com transporte de calor)
 - 7410 Combustão
 - 7420 Combustão em meio fluidizado
 - 7510 Acionadores e dispositivos de propulsão
- 8000 GEOCIÊNCIAS**
- 8010 "Micromerica"
 - 8110 Meios Porosos
 - 8210 Geomecânica
 - 8310 Mecânica dos Abalos sísmicos
 - 8410 Hidrologia, Oceanografia, Meteorologia
- 9000 ENERGIA E MEIO AMBIENTE**
- 9110 Combustíveis fósseis
 - 9120 Sistemas nucleares (fissão)
 - 9125 Sistemas nucleares (fusão)
 - 9130 Sistemas geotérmicos
 - 9140 Sistemas Solares
 - 9150 Sistemas eólicos
 - 9160 Sistemas de energia oceânica
 - 9210 Armazenamento de energia
 - 9220 Distribuição de energia
 - 9310 Mecânica de fluidos ambiental
 - 9410 Mecânica de dispositivos de armazenamento de resíduos poluentes
- 10000 BIOCÊNCIAS**
- 10110 Biomecânica
 - 10210 Ergonomia
 - 10310 Reabilitação
 - 10410 Mecânica nos esportes

ANEXO B

ÁREAS DE APLICAÇÃO

(Nota: Utilizando os códigos abaixo, especifique a Área de Aplicação de sua Especialidade. Por exemplo: Um especialista em Mecânica dos Fluidos (Família 6000 do Anexo A) atuando na área de Turbulência (6520) deverá escolher a Área de Aplicação 350 (Anexo B) se estiver aplicando seus conhecimentos em Propulsão).

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 010 | Acústica e Controle de Ruído | 300 | Mineração e Metalurgia Extrativa |
| 020 | Aplicações em Biociências | 310 | Ótica |
| 030 | CAD | 320 | Pontes e Barragens |
| 040 | CAM | 330 | Processos de Fabricação
(estampagem, extrusão, trefilação) |
| 050 | Componentes de Máquinas | 340 | Projeto de Estruturas |
| 060 | Controle Ambiental | 350 | Propulsão |
| 070 | Controle de Qualidade | 360 | Prospecção + Perfuração |
| 080 | Criogenia | 370 | Servo-Mecanismos, Controle |
| 090 | Engenharia e Física de Reatores | 380 | Siderurgia |
| 100 | Engenharia de Petróleo | 390 | Sistemas Hidráulicos |
| 110 | Engenharia Oceanográfica | 400 | Sistemas Pneumáticos |
| 120 | Equipamentos de Processos | 410 | Soldagem |
| 130 | Equipamentos Industriais | 420 | Solicitações Acidentais:
(Efeito de Vento, Sismo, Explosão,
Fogo, Inundação) |
| 140 | Fontes Alternativas de energia | 430 | Tecnologia de Alimentos |
| 150 | Forjamento | 440 | Tecnologia Mineral |
| 160 | Fundição | 450 | Transporte (excluindo veículos) |
| 170 | Garantia da Qualidade | 460 | Transmissão de Energia |
| 180 | Indústria Têxtil e
Tecnologia Correlatas | 470 | Tratamento Térmico e
Termoquímica |
| 190 | Inspeção e Certificação | 480 | Tubulações Industriais + Nucleares |
| 200 | Instalações Industriais | 490 | Usinas Hidroelétricas |
| 210 | Instrumentação | 500 | Usinas Termoelétricas |
| 220 | Lubrificação Industrial | 510 | Vácuo |
| 230 | Mancais e Rolamentos | 520 | Vasos de Pressão, Trocadores de
Calor, Equipamentos Dinâmicos
Pesados |
| 240 | Máquinas Ferramentas | 530 | Veículos (Terrestres,
Espaciais, Marítimos) |
| 250 | Máquinas de Fluxo | | |
| 260 | Máquinas Motrizes | | |
| 270 | Mecânica Fina | | |
| 280 | Metalurgia Geral e
Beneficiamento de Minério | | |
| 290 | Metrologia | | |



5º SIMPÓSIO BRASILEIRO SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO

mit further reduction to the dimensions of the Journal, and sent to the Executive Editor

OBJETIVO

Estimular o intercâmbio entre centros de pesquisa, universidades, indústrias e empresas de projeto visando a divulgação, aperfeiçoamento e desenvolvimento de novas técnicas nas áreas de tubulações e vasos de pressão.

PATROCINADORES

SPONSORS

CNPq, FINEP
UNESCO, OEA, ALALC

INSCRIÇÕES

Sócios da ABCM — US\$ 75,00
Não Sócios — US\$ 100,00

A inscrição dá direito aos anais do Simpósio e à participação no coquetel de abertura.

DATAS IMPORTANTES

30/04/88 — Limite para envio dos resumos dos trabalhos.
31/08/88 — Limite para a entrega do texto final dos trabalhos a serem submetidos ao Conselho Editorial.

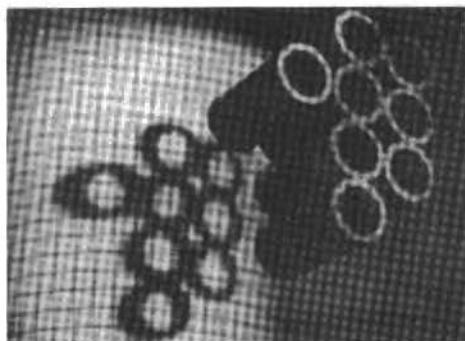
ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA MAILING ADDRESS

Secretaria do 5º SIBRAT
Laboratório Nacional de Computação Científica
Rua Lauro Müller, 455
22290 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil
Tel.: (021) 541-2132 — ramal 148

ORGANIZADORES

ORGANIZERS

Laboratório Nacional de Computação Científica
Comitê de Tubulações e Vasos de Pressão da ABCM



SALVADOR, BAHIA, BRASIL
25 — 28/10/88

PROMOÇÃO DA / PROMOTED BY
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE
CIÊNCIAS MECÂNICAS
ABCM

APOIO SUPPORT

Secretaria de Ciência e Tecnologia do
Estado da Bahia
Secretaria de Ciência e Tecnologia do
Estado do Rio de Janeiro

