

# REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

**REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
**JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

EDITOR: Hans Ingo Weber

Depto. Projeto Mecânico, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6051, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-1495, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

**Álvaro Toubes Prata**

Depto. Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 33-5166, Telex (482) 240 UFSC

**Augusto César Noronha R. Galeão**

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2131, Telex 22563 CBPQ

**Carlos Alberto de Almeida**

Depto. Eng. Mec., PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 529,9323, Telex (021) 131048

**Hazim Ali Al-Qureshi**

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (021) 22-9088 R.158

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UFRJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UFRJ)

Moysés Zindeluck (COPPE/UFRJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UFRJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UFRJ)

Samir N. Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /  
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Rosângela Lamarca de Almeida

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Tel.: (021) 221.6177 R. 278 - Rio de Janeiro - Brasil

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: José Luiz de França Freire

Diretor de Patrimônio: José Augusto Ramos do Amaral

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Tito Luiz da Silveira

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



## INFLUÊNCIA DE RIGIDEZ DA BASE NOS PARÂMETROS DA COLISÃO

*INFLUENCE OF STIFFNESS FOUNDATION IN THE IMPACT PARAMETERS*

**TAMOTSU HIRATA**

UNESP/FEG - Departamento de Mecânica  
C.P.205 - Guaratinguetá, SP - Brasil - CEP 12500

**JAN LEON SCIESZKO - Membro da ABCM**

COPPE/UFRJ - Programa de Engenharia Mecânica  
C.P.68503 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - CEP 21945

### RESUMO

*Um modelo de impacto elástico e visco-elástico, considerando a rigidez da base variável, é utilizado para analisar o comportamento dos parâmetros da colisão. Alguns parâmetros importantes são analisados, tais como, tempo de contato, força de contato, deformação superficial e coeficiente de restituição. Este modelo é aplicado à colisão entre uma esfera de aço e um disco. Neste fato, pode ser ignorado o efeito de propagação de onda do disco. Os resultados de simulação do modelo são comparados com os experimentos.*

**Palavras-chave:** *Impacto elástico e viscoelástico · Rigidez da base variável  
Tempo de contato · Força de contato · Coeficiente de restituição*

### ABSTRACT

*The elastic and visco-elastic impact model, taking into account of a variable stiffness foundation, is used for the analyses of an impact parameter behavior. Some important parameters are analysed, take as, contact time, contact force, surface deformation and coefficient of restitution. This model is applied to the collision of a steel sphere on a disk, which geometrical main dimension has the same magnitude as the sphere. In this fact, the effect of wave propagation on the disk can be ignored. The simulation model was compared with the experimental one.*

**Keywords:** *Elastic and viscoelastic impact · Variable stiffness foundation  
Contact time · Contact force · Coefficient of restitution*

## PARÂMETROS DE COLISÃO

Colisão pode ser definida como o encontro de dois corpos rígidos movidos com velocidades diferentes. Existem dois modelos matemáticos principais que descrevem a colisão de dois corpos. O primeiro é o modelo de Saint-Venant que considera as vibrações elásticas dos corpos durante a colisão. O segundo é o modelo de Hertz que considera a deformação local dos corpos no ponto de contato. No caso dos corpos possuírem alto módulo de elasticidade, como os aços, a deformação local no ponto de contato é predominante onde o processo de deformação é inelástico [1]. De outro lado, Goldsmith [2] mostrou que a importância das vibrações elásticas do corpo cresce na medida em que sua espessura diminui. Barnhart e Goldsmith [3] analisaram as tensões superficiais durante a colisão entre uma esfera e uma viga simplesmente apoiada. Eles consideraram a deformação em redor do ponto de contato como inelástica e, também, as vibrações elásticas da viga. O modelo deles mostrou significativa discrepância em comparação com os resultados experimentais.

Lee e outros [1] propuseram um modelo de colisão que considera a geometria dos corpos; esse modelo utiliza a discretização das massas dos corpos para avaliar a força de contato durante a colisão. O modelo é complicado e não foi verificado experimentalmente.

O modelo matemático de colisão desenvolvido por Herbert e McWhannell [4] considerou a rigidez de superfície de contato como não-linear junto com o amortecimento superficial. Esse trabalho baseou-se nos trabalhos de Goldsmith.

A análise bibliográfica mostra que vários trabalhos foram conduzidos até agora sem, porém, esclarecerem os fenômenos principais da colisão de dois corpos. O trabalho aqui apresentado tem como objetivo principal o estudo analítico-experimental da colisão entre uma esfera e uma base plana de rigidez variável. Os resultados das medidas do tempo de contato e das deformações superficiais dos corpos são apresentados e comparados com os resultados de simulação digital.

## MODELO MATEMÁTICO DE COLISÃO

A representação esquemática do modelo de colisão encontra-se na Figura 1, onde a esfera com massa  $m$ , deslocando-se com velocidade inicial  $\dot{x}_0$ , colide com a base de massa  $M$  e velocidade inicial  $y_0$ . A rigidez das superfícies ao redor do ponto de contato é apresentada como função não-linear  $g(x,y)$ . A base é suspen-

sa através de uma rigidez linear  $K$ . Presume-se que o ponto de colisão coincide com a linha reta que passa pelos centros das massas da esfera e da base. Presume-se, também, que a rigidez de suspensão da base é simétrica e seu ponto de apoio coincide com a mencionada linha reta que passa pelos centros das massas  $M$  e  $m$ . Essas suposições levam a acreditar que a base, depois da colisão vibra em seu modo fundamental, deslocando-se na direção da linha reta definida. O experimento permitiu acreditar que as suposições são verdadeiras. Essa confirmação permite simplificar o modelo apresentado por Herbert e Mcwhannell [4]. Como resultado, o modelo é definido pelas seguintes equações:

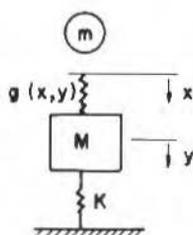


Figura 1. Representação esquemática do modelo da colisão

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + g(x,y) &= 0 \\ M\ddot{y} - g(x,y) + Ky &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Onde,  $g(x,y)$  representa a força de contato superficial. No caso de comportamento dos materiais na superfície como elásticos, essa força pode ser definida como:

$$g(x,y) = K_S (x-y)^{3/2} \quad (2a)$$

Onde,  $K_S$  representa a rigidez superficial. No caso do comportamento dos materiais na superfície como visco-elásticos, a força pode ser definida como [5]:

$$g(x,y) = K_S (x-y)^{3/2} [1 + \lambda(\dot{x} - \dot{y})] \quad (2b)$$

O coeficiente de amortecimento visco-elástico  $\lambda$  é dado por Hirata e Scieszko [6]:

$$\lambda = \frac{1-e^2}{4} \cdot \frac{q+3}{x_c^{q+1}} \quad , \quad \text{com } q \geq -3 \quad (3)$$

Onde,  $q$  é o parâmetro de colisão inelástico,  $e$  é o coeficiente de restituição e  $\dot{x}_0$  é a velocidade de colisão dos corpos. O aumento do parâmetro  $q$  implica no crescimento da perda de energia durante a colisão. Comparando a equação (3) com a fórmula apresentada por Hunt e Clossley [5] para  $q=0$ , as expressões são iguais apesar de que Hunt considerou apenas  $q \neq 0$ .

De acordo com os resultados experimentais de Goldsmith, o coeficiente de restituição  $e$  varia em função da velocidade de colisão entre a esfera e a base. Este coeficiente pode ser definido, considerando-se que a esfera e a base são de aço, como [4]:

$$\begin{aligned} e &= 1 - 0,26 \dot{x}_0^{1/3} && \text{para } \dot{x}_0 \leq 1,5 \text{ m/s} \\ e &= 0,73 - 0,02 \dot{x}_0 && \text{para } \dot{x}_0 > 1,5 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4)$$

A rigidez superficial  $K_S$  é dada por Goldsmith [2]:

$$K_S = \frac{2 E R^{1/2}}{3(1-\nu^2)} \quad (5)$$

Onde,  $E$  - Módulo de elasticidade ( $N/m^2$ ),  $R$  - Raio de curvatura (m) e  $\nu$  - Coeficiente de Poisson.

### SIMULAÇÃO DIGITAL

Para a avaliação do comportamento dinâmico do modelo apresentado foi realizada uma simulação digital, usando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para o propósito da simulação, as equações apresentadas anteriormente foram reformuladas como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= dx_0/dt = \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= dx_1/dt = -g(x,y)/m \\ \dot{y}_1 &= dy_0/dt = \dot{y} \\ \dot{y}_2 &= dy_1/dt = [g(x,y) - K_y] / M \end{aligned}$$

As condições iniciais da simulação foram definidas como a seguir:

$$\begin{aligned} x_0(t=0) &= 0 && x_1(t=0) = x_{1,0} \\ y_0(t=0) &= 0 && y_1(t=0) = 0 \end{aligned}$$

A simulação digital serviu para a avaliação dos principais parâmetros da colisão, como: tempo de contato, força de contato e coeficiente de restituição.

Os dados utilizados para a simulação são:

$$E = 2,1E11 \text{ (N/m}^2\text{)} \quad , \quad \nu = 0,3 \quad , \quad m = 65E-3 \text{ (Kg)}$$

$$R = 12,7E-3 \text{ (m)} \quad , \quad x_{1,0} = 1 \text{ (m/s)}$$

### TEMPO DE CONTATO DURANTE A COLISÃO

Na primeira parte da simulação, analisou-se o tempo de contato  $T$  entre a esfera e a base durante a colisão. O tempo de contato foi analisado em função da razão  $\beta$  das massas da esfera e da base e em função da razão  $\gamma$  da rigidez da superfície e da base, onde a rigidez da superfície é definida na equação (5).

Os resultados da simulação para o modelo elástico são apresentados na Figura 2, onde, no eixo vertical do gráfico tem-se o tempo de contato da esfera com a base em microsegundos e, no eixo horizontal, a razão  $\beta$  da massa da esfera em relação à da base.

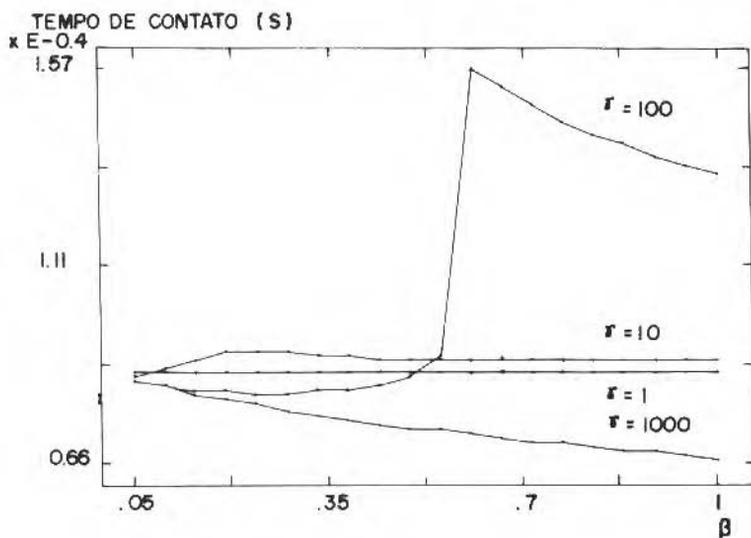


Figura 2. Tempo de contato em função da razão de massa  $\beta$

O gráfico apresenta várias curvas para diferentes valores de  $\gamma$ , onde pode-se observar que para a razão de rigidez  $\gamma=1$  a variação da razão da massa não influi no tempo de contato  $T$ . Essa variação mostra-se significativa para valores  $\gamma > 10$ . É fácil observar que para valor de  $\gamma=100$  e  $\beta=0,5$ , o tempo de contato aumenta rapidamente. Esse aumento do tempo de contato é explicado pelo gráfico apresentado na Figura 3, onde mostra-se o deslocamento  $x$  da esfera pela linha contínua e o deslocamento da base  $y$  pela linha pontilhada, em função do tempo. Nesse gráfico, pode-se observar que para valor  $\gamma=100$  o deslocamento da esfera acompanha o deslocamento da base, prolongando o tempo de contato entre a esfera e a base.

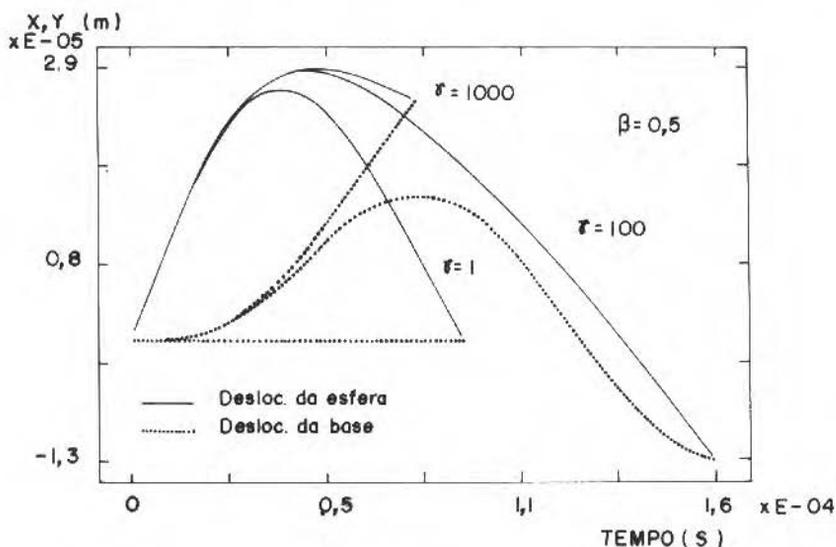


Figura 3. Deslocamentos da esfera  $x$  e da base  $y$  durante a colisão

#### FORÇA DE CONTATO

A força de contato foi determinada através dos deslocamentos relativos entre o centro da esfera e o centro da base. A Figura 4 apresenta um gráfico que mostra as forças de contato em função do tempo, onde a linha contínua representa as forças de contato para o modelo elástico e as linhas pontilhadas para o modelo viscoelástico. Podemos observar que o modelo viscoelástico, com o parâmetro de colisão inelástico  $q=1$ , apresenta forças aproximadamente 15% menores, comparando-se com o modelo elástico. Nota-se, também, que durante períodos de contato prolongados aparece um segundo pique de força. O gráfico da Figura 5

representa a influência da razão da massa  $\beta$  da esfera e da base no valor da força máxima de contato. A análise apresentada foi feita para o modelo elástico. Observa-se que para valores de  $\gamma=100$  e  $\gamma=1000$ , a força máxima diminui rapidamente em função da razão da massa  $\beta$ . Para valores de  $\gamma$  pequenos, a força máxima de contato pouco depende da razão da massa.

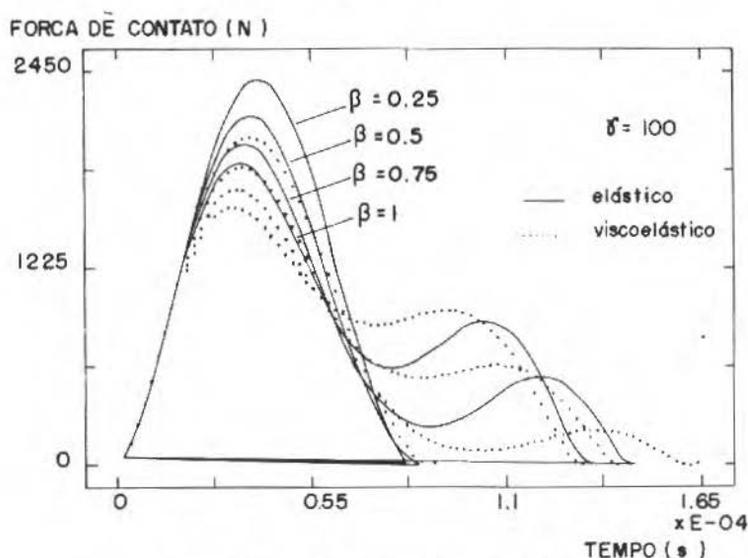


Figura 4. Força de contato durante a colisão

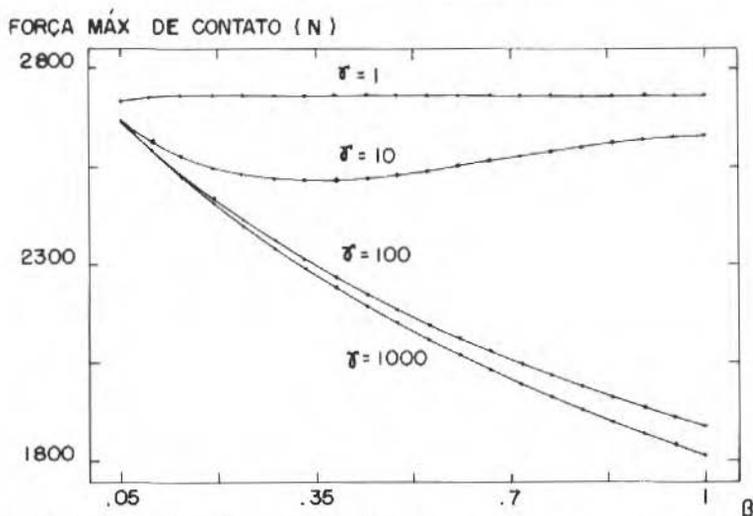


Figura 5. Força máxima de contato em função da razão de massa  $\beta$ , caso elástico

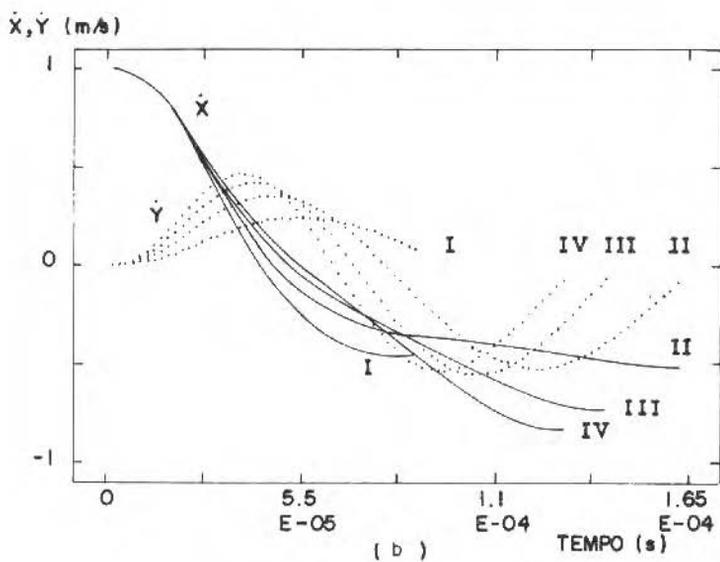
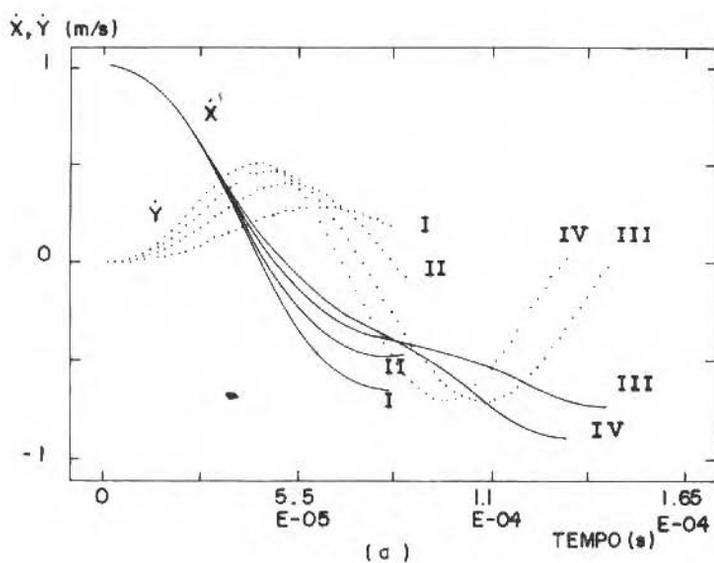


Figura 6. Velocidades nos centros da esfera X e da base Y para a) modelo elástico e b) modelo viscoelástico

## COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

O coeficiente de restituição da energia cinética da esfera é definido como a razão da velocidade antes e depois da colisão. Como a velocidade antes da colisão é constante e igual a 1 m/s para todas as simulações, isso significa que a velocidade da esfera depois da colisão representa o coeficiente de restituição. A velocidade da esfera depois da colisão pode ser observada na Figura 6, onde as linhas contínuas representam a velocidade da esfera e as linhas pontilhadas, a velocidade da base. As velocidades correspondentes da esfera e da base são marcadas pelos mesmos números romanos, onde os números correspondem os seguintes valores da razão da massa  $\beta$ :

a) Curva I:  $\beta = 0,25$ , b) Curva II:  $\beta = 0,5$ , c) Curva III:  $\beta = 0,75$  e d) Curva IV:  $\beta = 1$ .

A influência da razão da massa  $\beta$  no coeficiente de restituição, para diferentes razões de rigidez  $\gamma$ , é apresentada na Figura 7, onde as linhas contínuas representam o modelo elástico e as linhas pontilhadas o modelo viscoelástico com o parâmetro de colisão inelástico  $q=1$ . Esse gráfico mostra ampla variação do coeficiente de restituição, começando com valor 1, onde praticamente não existe perda de energia durante a colisão para o modelo elástico, chegando a valores perto de zero para valores de  $\gamma=1000$  e  $\beta$  aproximando-se de 1.

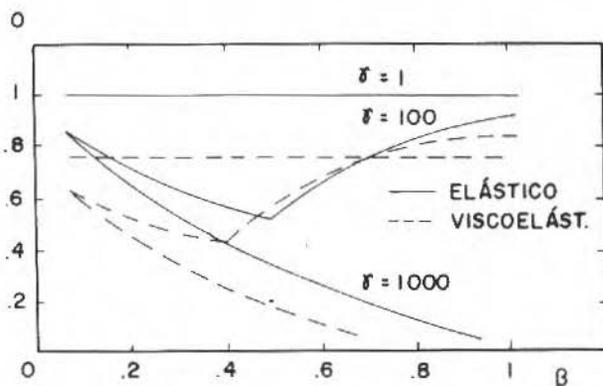


Figura 7. Coeficiente de restituição em função da razão de massa  $\beta$

## EXPERIMENTOS

**Bancada Experimental.** Para verificar os resultados da simulação, foi projetado uma bancada de testes que permitiu medidas experimentais do tempo de contato da esfera com a base e do deslocamento da base durante a colisão.

A bancada experimental apresentada na Figura 8 consiste em uma esfera 1 que colide com a base 2. A parte central da base 2 tem uma massa chamada massa da base que fica suspensa por um anel fino, o qual liga a parte central da base com o anel externo da base. O anel da base é fixo no suporte sólido 3. Embaixo da parte central da base 2, encontra-se um sensor de deslocamento foto-óptico 4 fixo no suporte 3. A esfera 1 é sustentada pelo ímã 5 fixo no suporte 6 da esfera. O suporte da esfera permite a regulagem da posição da esfera em relação à parte central da base 2. A alavanca 7 desloca o ímã 5 para cima, afastando-o da esfera e permitindo a queda livre da esfera. A distância entre a esfera segura pelo ímã e a base determina a velocidade da colisão da esfera.

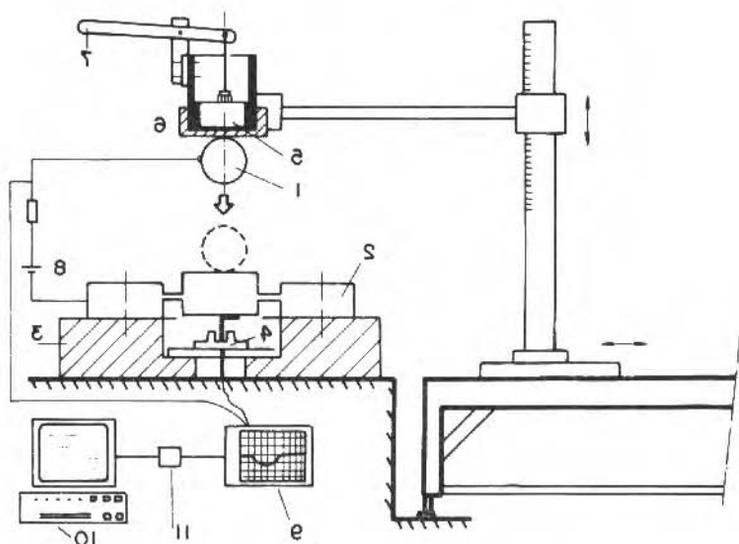


Figura 8. Esquema da bancada experimental para a colisão

Para detectar o tempo de contato entre a esfera 1 e a base 2 foi montado um pequeno circuito elétrico que consiste em uma fonte elétrica 8 e um resistor

ligados através de um fio elétrico fino com a esfera de um lado e com a base de outro lado. A esfera durante a colisão fecha o circuito, o que foi registrado pelo osciloscópio digital 9. Para medir o deslocamento da base usou-se um sensor fotoelétrico 4. O fotosensor é composto de um emissor de luz e um fototransistor. Uma pequena lâmina, fixa em baixo da parte central da base 2, obstrui o feixe de luz que sai do emissor de luz na direção do fototransistor. O deslocamento dessa lâmina varia a quantidade de luz que chega ao fototransistor, variando a tensão elétrica na saída do fototransistor. Essa tensão elétrica é proporcional ao deslocamento da lâmina, o que significa que é proporcional ao deslocamento da parte central da base 2. Essa variação de tensão é registrada pelo osciloscópio digital 9.

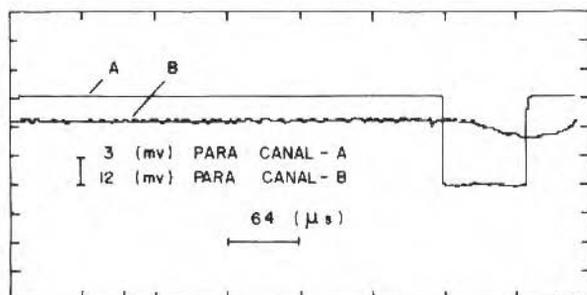
A calibração do conjunto do sensor fotoelétrico é feita estaticamente, aplicando-se forças na parte central da base para criar o deslocamento da mesma. O deslocamento foi medido usando-se um relógio comparador com precisão de 1 micrometro.

Os sinais do deslocamento e do tempo de contato foram registrados simultaneamente pelos dois canais do osciloscópio digital. Os sinais registrados pelo osciloscópio foram transmitidos para um microcomputador Apple, usando-se uma placa de comunicação universal GPIB para futuro tratamento e análise.

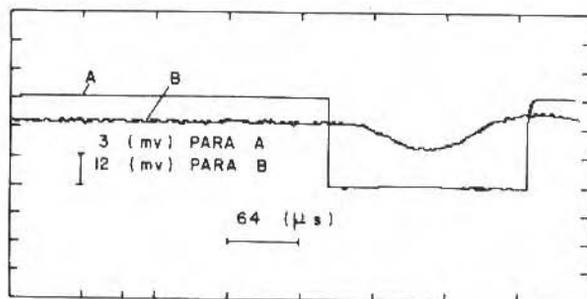
**Resultados Experimentais.** Os exemplos dos resultados experimentais registrados pelo osciloscópio digital encontram-se apresentados na Figura 9, onde a linha A mostra o tempo de contato da esfera com a base e a linha B o deslocamento da base. Os gráficos foram feitos para diferentes diâmetros da esfera, onde o gráfico a) para a esfera de 25 mm e b) para 32 mm. Em todos os casos, a velocidade de colisão foi igual a 1 m/s. Os valores registrados pelo osciloscópio digital, em seguida, foram transmitidos para o microcomputador para o futuro tratamento.

Depois do tratamento, os resultados em forma gráfica foram apresentados na tela do monitor do microcomputador e impressos pela impressora, como podemos ver nas Figuras 10 e 11, onde as linhas pontilhadas representam os resultados experimentais e as linhas contínuas, os resultados da simulação. Os deslocamentos da base são apresentados em função de tempo durante o período do contato da esfera com a base. Na Figura 10 apresentam-se as deflexões para várias velocidades de colisão, sendo na Figura 10a para a esfera de 25 mm de diâmetro e na Figura 10b para a esfera de 32 mm.

A Figura 11 mostra as comparações entre os resultados experimentais e os da simulação digital, modelos elástico e inelástico com o parâmetro de colisão inelástico  $q=1$ . A Figura 11a representa os resultados para a esfera de 32 mm de diâmetro que colide com a base com velocidade de 1,5 m/s e a Figura 11b, para esfera de 38 mm de diâmetro e velocidade de colisão de 1 m/s. Esses gráficos mostram que o modelo viscoelástico é mais próximo dos resultados experimentais do que o modelo elástico.



(a)



(b)

Figura 9. Reprodução dos sinais de osciloscópio para esferas de a) 25 mm e b) 32 mm

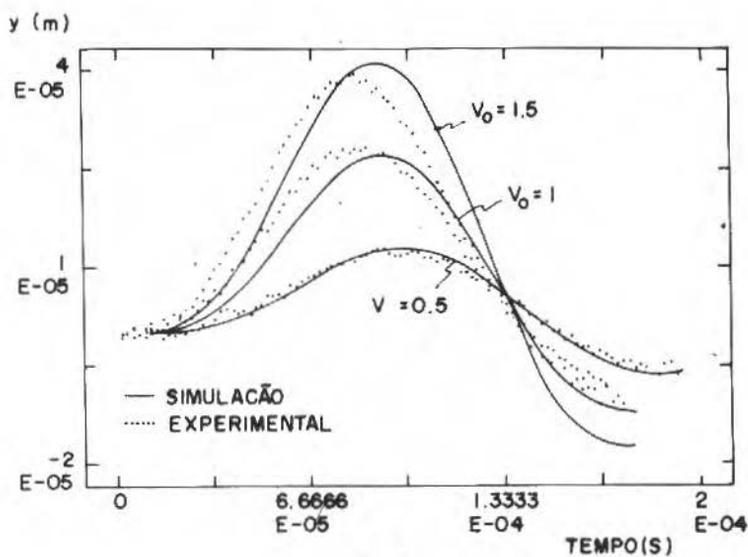
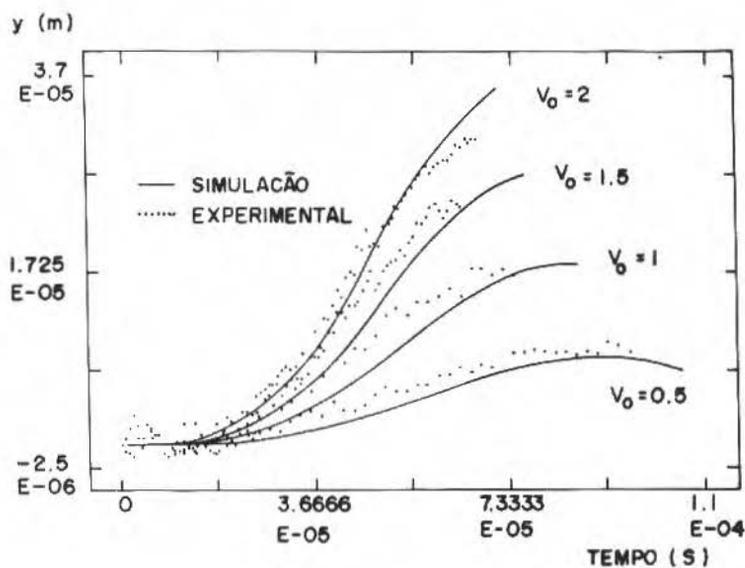
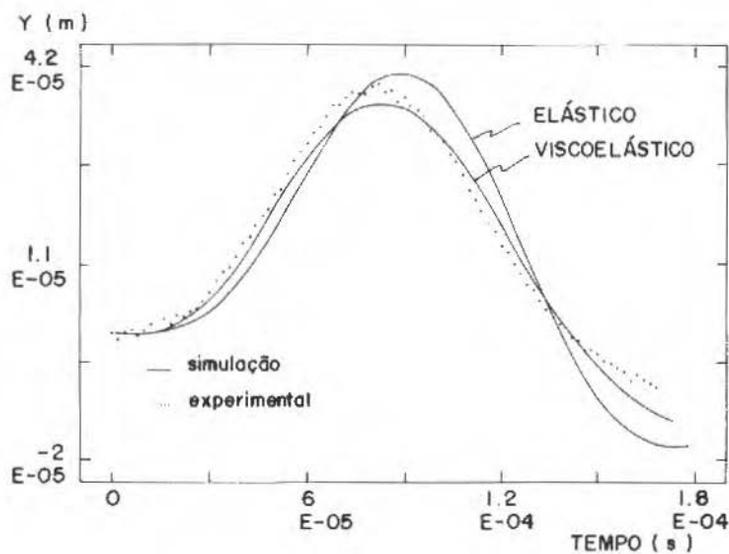
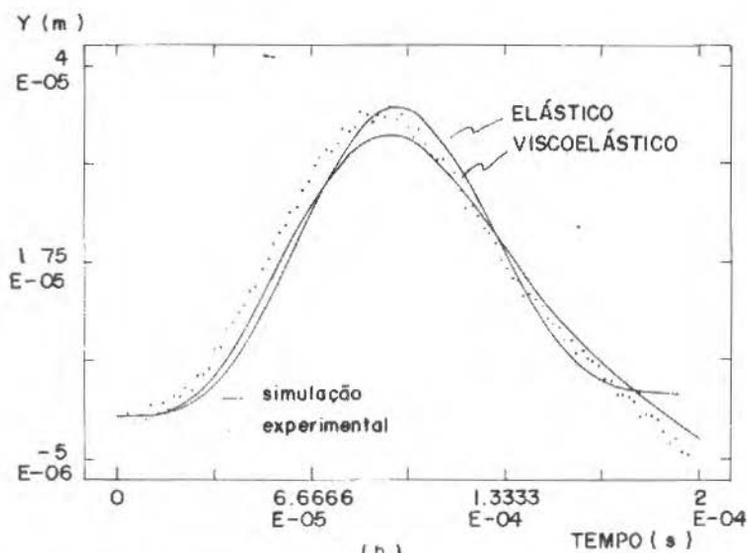


Figura 10. Deslocamento da base y para esferas de diâmetro a) 25 mm e b) 32 mm, com velocidades de colisão  $V_0$  variadas



(a)



(b)

Figura 11. Deslocamento da base y para esferas de a) 32 mm e b) 38 mm com velocidade de colisão  $V_0 = 1,5; 1,0$  m/s respectivamente

## CONCLUSÕES

Comparando-se os resultados experimentais com os resultados da simulação digital, podemos afirmar que o modelo matemático apresentado é bastante preciso para a análise paramétrica da colisão, entre uma esfera de aço e uma base com a rigidez variável.

A variação abrupta do tempo de contato revelada pela simulação digital foi confirmada pelos experimentos.

Constatou-se que a rigidez da base influi, de maneira significativa, nos parâmetros de colisão.

O modelo viscoelástico altera não somente a força da colisão mas também o tempo de contato.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Lee, Y., Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. - The lumped parameter method for elastic impact problems, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, pp. 823-827, dec. 1983.
- [ 2 ] Goldsmith, W. - *Impact*, Edward Arnold, London, 1960.
- [ 3 ] Barnhart, K.E. and Goldsmith, W. - Stresses in beams during transverse impact, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, pp. 440-446, set. 1957.
- [ 4 ] Herbert, R.G. and Mcwhannell, D.C. - Shape and frequency composition of pulses from an impact pair, *Journal of Eng. Industry*, Trans. ASME, pp. 513-517, aug. 1977.
- [ 5 ] Hunt, K.H. and Clossley, F.R.E. - Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, pp. 440-445, june 1975.
- [ 6 ] Hirata, T. e Scieszko, J.L. - Influência de rigidez da base nos parâmetros de impacto, Relatório Interno n<sup>o</sup> 08/87, Prog. de Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ.

## AÇÕES DE IMPACTO SOBRE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

*TRANSVERSAL IMPACT ON REINFORCED CONCRETE BEAMS*

EDUARDO LOPES QUENTAL  
JOÃO LUÍS PASCAL ROEHL - Membro da ABCM

PUC/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea  
Rio de Janeiro, RJ - Brasil - CEP 22453

### RESUMO

Realiza-se um estudo experimental de vigas de concreto armado sob o impacto transversal de um corpo rígido. O modelo físico é uma viga de seção quadrada, engastada e livre, percutida transversalmente por uma esfera de aço. Um estudo via computador é também conduzido para servir de base à interpretação dos resultados sob a ótica da equação integral de Timoshenko e com as deformações de contato de acordo com a relação de Hertz. Os resultados permitem a identificação da influência da variação da massa e velocidade da esfera no processo de colisão, do comportamento geral da viga e da sua armadura e da amplitude, variação e duração da força de contato.

**Palavras-chave:** Impacto · Impacto Transversal · Vigas de concreto armado  
Ações Transientes · Dinâmica Estrutural

### ABSTRACT

One reports an experimental study on reinforced concrete beams under transversal impact of a rigid body. The physical model is a cabled-free member with a square cross section stricken transversally by a steel sphere. An analytical study is also made, through a specially developed computer program, to spread the understanding of the results, under the view of Timoshenko's integral equation with the contact deformations according to Hertz law. The results allow to identify the influence of the sphere mass and velocity variation on the collision process, the general behavior of the beam and its reinforcement and the main trends of the contact force.

**Keywords:** Impact · Transversal Impact · R-C Beams · Transient Loads · Structural Dynamics

## INTRODUÇÃO

O problema do impacto tem sido estudado sob diferentes formulações no que concerne ao entendimento do fenômeno. Os trabalhos iniciais consideram os elementos envolvidos como corpos rígidos e usam equações de equilíbrio de impulso e de momento linear. Posteriormente, os aspectos vibracionais são observados assim como os efeitos multi-dimensionais de propagação de ondas de choque e de distribuição de tensões na região do contato. Desenvolvimentos subsequentes analisam o comportamento dos corpos em colisão além dos limites elásticos dos respectivos materiais usando modelos da teoria da plasticidade [1-9]. O problema, entretanto, está longe de ter uma caracterização ampla e profunda.

Olhando-se de outra maneira, o complicado processo de transferência de energia durante o impacto requer uma sólida base de estudos experimentais nos quais o comportamento do sistema é investigado sobre um modelo físico. Entre os trabalhos experimentais mencionam-se: o de Mason [1] que considera o impacto elástico e inelástico de corpos rígidos sobre vigas simplesmente apoiadas; o trabalho de Crook [2] com observações piezoelétricas sobre a força de contato entre cilindros bem como entre esferas e placas de aço; o desenvolvimento de Schweiger [4] para confirmar uma teoria aproximada para impacto central; e o de Bayer [5] que estuda a colisão entre uma esfera em queda livre e uma manta de borracha disposta sobre uma placa rígida.

Dá-se prosseguimento a uma investigação anterior [10] que considera o comportamento de vigas-colunas de aço sob impacto transversal, focalizando-se agora [11] o caso de vigas de concreto armado para observar com mais detalhe: a influência da massa e velocidade dos corpos em colisão; o número e a duração dos períodos de contato e a amplitude e variação da força de contato. Estes aspectos, na opinião dos autores, precisam ser conhecidos por aqueles que pretendem entender o mecanismo do impacto em favor de uma análise mais consciente. Pilares de pontes sob a ação de objetos flutuantes e o impacto de estilhaços provenientes de explosões internas em elementos estruturais de prédios de centrais nucleares são dois exemplos das várias situações que caracterizam a importância do assunto.

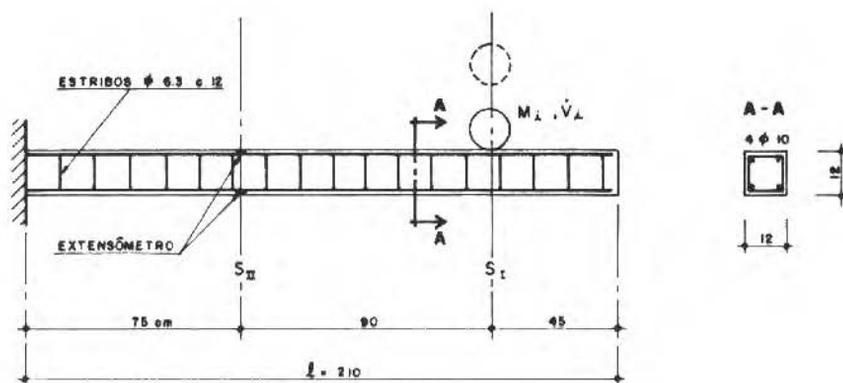
O modelo físico é uma viga de concreto armado, uma extremidade engastada e a outra livre, percutida transversalmente por uma esfera de aço. É também realizado um estudo analítico com base em um programa de computador com modelo matemático calcado na equação integral de Timoshenko e na lei de Hertz para a

definição das deformações de contato [6].

Os resultados permitem identificar o comportamento da viga e da sua armadura e alguns elementos da força de contato: aspecto da função, duração e amplitude.

## MÉTODO DE ANÁLISE

**Análise com Modelo Físico.** O estudo é realizado sobre viga em balanço de concreto armado com 12 x 12 cm de seção transversal, comprimento de 210 cm e com as demais características mostradas na Figura 1. A escolha de uma viga com um extremo livre deve-se à intenção de simplificar a aplicação de uma carga axial em trabalhos subsequentes uma vez que o comportamento de vigas-colunas é o principal objetivo do projeto.



ÁÇO CA 50	$E_a = 206\,000$	MPa	VIGA	$EJ = 262$	kN.m <sup>2</sup>
CONCRETO	$f_{ck} = 22,5$	MPa		$m = 35,3$	kg/m
	$E_c = 26\,300$	MPa			

Figura 1. Modelo da Viga de Concreto Armado

A viga é percutida transversalmente por esferas de aço com massas e velocidades variáveis,  $(M_i, \dot{V}_i)$ , e a resposta do sistema é captada com o arranjo de instrumentação mostrado na Figura 2 cumprindo as seguintes tarefas:

- . acelerômetro n.1 - aceleração da esfera;
- . acelerômetro n.2 - cinemática da viga;

extensômetros - deformação do aço;

circuito n.3 - duração do contato.

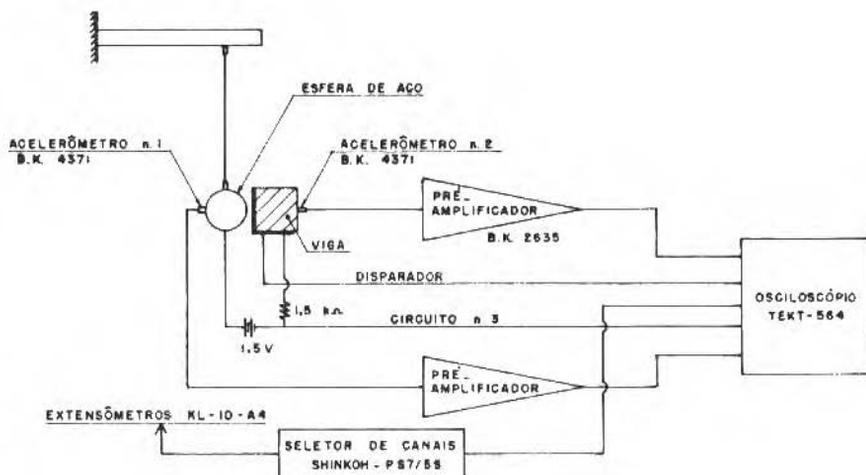


Figura 2. Esquema da Instrumentação

A aceleração da esfera é usada para medir a interação entre os dois corpos em colisão, isto é, para avaliar a função do tempo da força de contato; a aceleração e o deslocamento do arcabouço de concreto e a deformação do aço dão indicação do comportamento da viga.

**Análise com Modelo Matemático.** Este modelo segue a equação integral de Timoshenko que simula o impacto central de uma esfera sobre uma viga, combinando a lei de contato de Hertz com a equação de movimento da viga:

$$\alpha(t) = \left[ \frac{F_c(t)^{2/3}}{k} \right] =$$

$$= \dot{V}t - \frac{1}{M} \int_0^t F_c(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{1}{m\ell} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(c)}{\omega_{0,j} \int_0^1 \phi_j^2(\xi)d\xi} \int_0^t F_c(\tau) \text{sen } \omega_{0,j}(t-\tau)d\tau$$

onde:

- .  $\alpha(t)$  aproximação relativa entre a esfera e a viga
- .  $F_c(t)$  função representativa da força de contato
- .  $\dot{V}$  velocidade da esfera no primeiro contato
- .  $m$  massa distribuída da viga
- .  $\ell$  comprimento da viga
- .  $\omega_{o,j}$  j-ésima frequência natural da viga
- .  $\phi_j$  j-ésimo modo natural da viga
- .  $c$  coordenada do ponto de contato
- .  $k_2$  fator constante

A relação de Hertz foi formulada para corpos não vibratórios. Entretanto, como o período de tempo gasto pelas ondas de tensão para atravessar a região de contato é extremamente menor que a duração do pulso de contato, aquela relação permanece válida pelo menos para os casos de corpos sob vibração elástica. Esta equação não linear (1) é integrada passo a passo considerando-se os dez primeiros modos de vibração e um intervalo de integração  $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$  s, menor que um vigésimo do décimo período natural da viga e muito bem ajustado à duração do contato,  $10^{-3}$  s.

**Programa de Testes.** A viga de concreto é analisada sob o impacto de esferas com três valores de massa:  $M_1 = 0,612$  kg,  $M_2 = 5M_1$  e  $M_3 = 9M_1$ .

Para cada esfera três velocidades iniciais são usadas:  $\dot{V}_1 = 0,60$  m/s,  $\dot{V}_2 = 2\dot{V}_1$  e  $\dot{V}_3 = 3\dot{V}_1$ . Desta maneira, o maior momento linear é 27x o menor e a massa da esfera é mantida pequena comparada à da viga,  $\sim 1/15$ ; é assim assegurado um comportamento elástico e a ocorrência de contatos simples. O modelo matemático é ajustado para apresentar o mesmo período fundamental que o modelo físico, 10,9 Hz, e a resposta obtida para os mesmos casos de massa e velocidade que o modelo físico.

## APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

**Avaliação dos Modelos.** Inicialmente, a frequência fundamental,  $f_{o,1}$ , e o coeficiente de amortecimento crítico,  $\xi_1$ , são determinados a partir de um teste de vibração livre com o modelo físico.

$$f_{o,1} = 10,9 \text{ Hz} \quad \text{e} \quad \xi_1 = 0,03$$

A frequência fundamental do modelo matemático é ajustada para 10,9 Hz e as

próximas nove frequências são calculadas:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{o,i}/f_{o,1}$	6,3	17,6	34,5	57,1	85,3	119,2	158,6	203,7	254

Os resultados numéricos obtidos nos diversos testes estão reunidos na Tabela I: para o modelo matemático, a massa da esfera é variada até  $100 M_1$ . Os resultados mostram uma concordância muito boa entre os dois modelos. Naquela tabela, o impulso total de contato, I, é definido como:

$$I = \int_0^{t_c} F_c \cdot dt \quad (2)$$

e está normalizado em termos de um impulso básico  $I_o = \bar{m} \cdot g \cdot t \cdot T_{o,1}$ , que pode ser entendido como o produto do peso da viga por seu período fundamental de vibração.

Tabela I. Resultados Numéricos dos Modelos

$M_i$	$V_i$	$F_c$ máx/kN		$t_c / 10^{-3}$ s		$1/10^{-3} I_o$		$V_v / \text{mm}$	
		(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
$M_1$	1	2,60	3,07	0,40	0,38	7,8	9,7	0,22	0,25
	2	6,84	6,88	0,33	0,34	18,5	19,2	0,44	0,43
	3	12,85	11,07	0,28	0,32	28,7	28,6	0,68	0,76
5	1	8,32	8,50	0,64	0,64	43,6	44,5	0,94	1,20
	2	20,00	19,13	0,53	0,56	86,5	87,4	1,95	2,36
	3	31,04	30,72	0,49	0,52	123,4	129,6	2,70	3,37
9	1	12,03	11,40	0,67	0,76	64,9	69,7	1,55	1,77
	2	25,74	25,54	0,59	0,66	123,2	136,7	3,18	3,56
	3	41,60	40,92	0,55	0,62	182,5	202,4	4,74	5,29
100	0,1	-	1,71	-	2,82	-	30,7	-	0,82
	0,3	-	6,11	-	2,64	-	87,2	-	2,32
$M_1 = 0,612 \text{ kg}$				$\dot{V}_1 = 0,6 \text{ m/s}$		$I_o = \bar{m} g T_{o,1}$			

(1) Modelo Físico

(2) Modelo Matemático

**Mecanismo de Impacto.** As ações desenvolvidas durante o impacto são estudadas diretamente sobre fotografias da tela do osciloscópio como as que são copiadas nas Figuras 3 a 5 para o caso de massa da esfera  $M_3$  e velocidade  $\dot{V}_2$ . Na Figura 3, apresentam-se os perfis da aceleração máxima da viga, na seção de impacto,  $S_I$ , da aceleração da esfera,  $a_e$ , da deformação da armadura da viga,  $\epsilon_a$ , na seção  $S_{II}$ , e da duração do impacto,  $t_c$ . A Figura 4 inclui o deslocamento da viga,  $v_v$ , em  $S_I$ , e a deformação do aço,  $\epsilon_a$ , para duas escalas de tempo diferentes. Pode-se observar que o impacto consiste de um único choque com duração da ordem de  $10^{-3}$  segundos; isto é verdade mesmo para massas da esfera da ordem de grandeza da massa total da viga. Depois de variar as características dinâmicas do modelo matemático, conclui-se que a existência de um impacto com choques múltiplos depende também, de forma marcante, da frequência fundamental do sistema.

A duração do contato corresponde a 1/200 do período fundamental da viga. Para os casos estudados, esta duração aumenta diretamente proporcional ao valor da massa percutidora e inversamente com a velocidade de impacto. Para esta relativa pequena duração de contato, podia-se esperar que a viga permaneceria praticamente em repouso durante o choque e isto é confirmado na Figura 4b onde o tempo de contato corresponde a 1/20 da primeira divisão horizontal da tela. Olhando-se novamente o traço da aceleração da esfera na Figura 3b, que é uma representação indireta da força de contato,  $F_c$ , nota-se uma função em forma de sino com um tempo de decaimento,  $t_d$ , ligeiramente maior que o tempo de subida,  $t_r$ . O exame de outros resultados, que não podem ser apresentados por limitação de espaço, permitem estimar-se um valor médio para  $t_d = 0,55 t_c$ ; esta segunda parte da curva decresce em curvatura e cresce em duração com massas crescentes da esfera. A amplitude da força de contato é muito alta; para o caso da Figura 3, por exemplo,  $M_3 = 5,51$  kg e  $\dot{V}_2 = 1,2$  m/s, é obtida uma intensidade de 27kN.

Examinando-se os resultados na Tabela 1 pode-se ainda afirmar que:

- para uma velocidade de impacto crescente, a força de contato,  $F_c$ , e o impulso total,  $I$ , aumentam e a duração do contato,  $t_c$ , diminui;
- para uma massa percussora crescente, são majorados os valores de  $F_c$ ,  $I$ , e  $t_c$ ;
- para um valor constante do momento linear,  $M\dot{V}$ , as duas grandezas  $F_c$  e  $I$  decrescem e  $t_c$  aumenta, quando a massa da esfera é majorada e, conseqüentemente, a velocidade reduzida.

**Comportamento da Viga.** O concreto e o aço apresentam uma resposta solidária sobre todas as respostas registradas. De maneira geral, a resposta da viga após o impacto pode ser caracterizada ao longo de duas regiões distintas. A primeira, imediatamente após o impacto e com duração de um período fundamental da viga, quando modos de vibração mais elevados são mobilizados, dominam a resposta e, subseqüentemente, são amortecidos. A região seguinte é identificada pela presença de um único harmônico com frequência igual à fundamental da viga.

Observando-se, agora, especificamente o registro da deformação do aço,  $\epsilon_a$ , na Figura 3b, é possível identificar o início do movimento da viga através de uma componente de frequência bastante elevada - período tão pequeno quanto o tempo de contato. No mesmo registro, junto com o da Figura 4a, notam-se variações significantes na tensão do aço - 20 MPa - para a relativamente pequena energia de impacto usada.

Voltando-se a olhar o deslocamento máximo da viga,  $v_v$ , na Tabela 1, verifica-se que ele varia linearmente com a velocidade de impacto, mas não com o valor da massa percutidora.

**Impulso e Energia.** A energia transferida para a viga até o fim do contato,  $K_v$ , que é também igual ao trabalho realizado pela força de contato no mesmo intervalo de tempo, pode ser escrita como:

$$K_v = \frac{M}{2} (\dot{V}^2 - \dot{V}_f^2)$$

$$\dot{V}_f = \dot{V} - \frac{1}{M} \int_0^t F_c(t) dt = \dot{V} - \frac{1}{M} \quad \text{e, com} \quad K_c = \frac{M\dot{V}^2}{2}$$

$$K_v = I\dot{V} \left( 1 - \frac{1}{2M\dot{V}} \right) = I\dot{V} \left( 1 - \frac{0,25 I\dot{V}}{K_c} \right) \quad (3)$$

Assim, confirma-se que a grandeza principal para orientar o entendimento do processo de transferência de energia da esfera para a viga é o impulso total  $I$ , e

$$I\dot{V} = \int_0^t F_c(t) \dot{V} dt = W_c \quad (4)$$

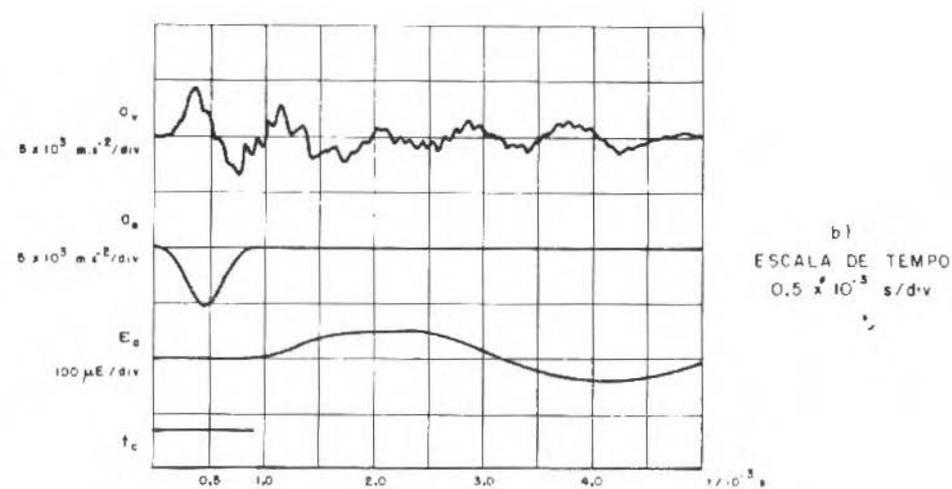
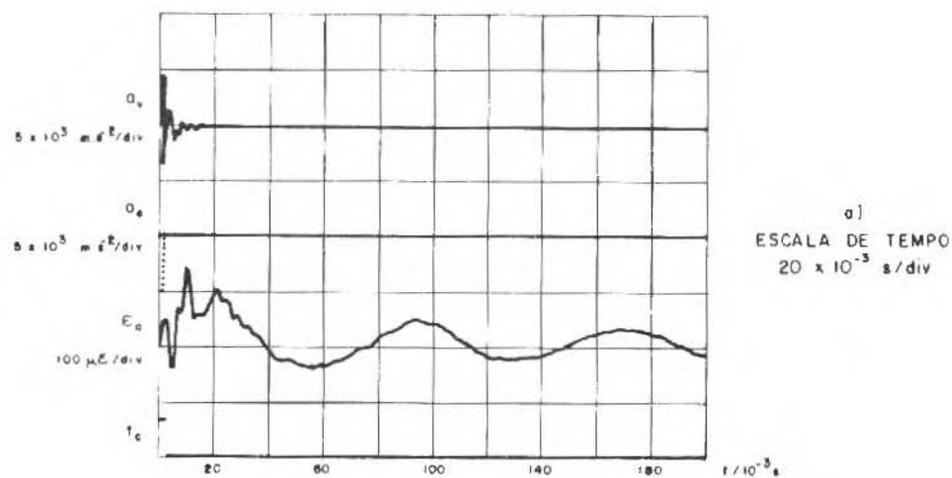


Figura 3. Modelo Físico. Caso  $M_3, \dot{V}_2$

$a_v, a_e, E_a, f_c$

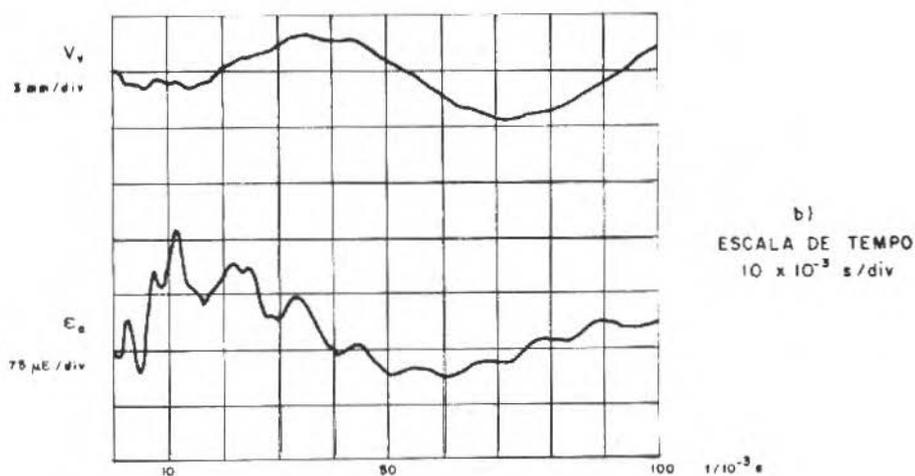
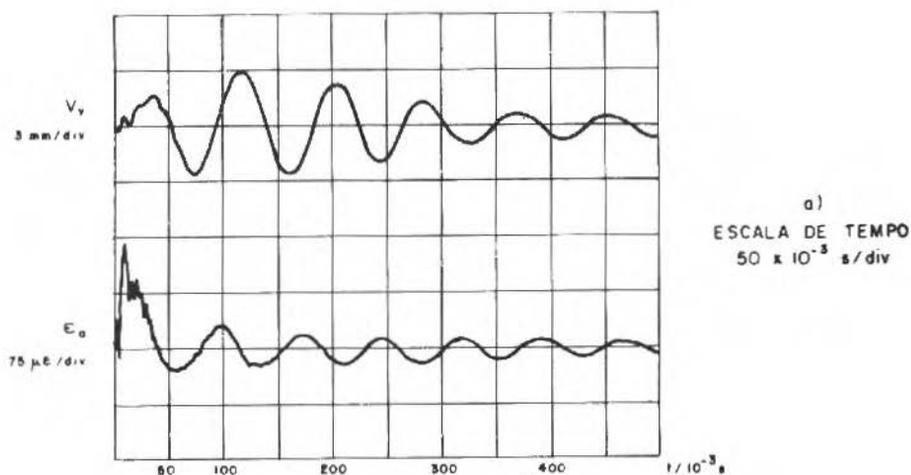


Figura 4. Modelo Físico. Caso  $M_3, \dot{V}_2$

$V_v, E_a$

sendo  $W_c$  interpretado como o trabalho realizado pela força de contato através do movimento de corpo livre da esfera durante o contato. Desta maneira,

$$K_v = \left( 1 - \frac{0,25 W_c}{K_c} \right) W_c \quad (5)$$

Prosseguindo o estudo, relaciona-se o impulso  $I$  ao momento linear  $M\dot{V}$ , Figuras 5, 6 e 7. As duas primeiras figuras mostram exemplos da força de contato,  $F_c$ , versus tempo, para os dois casos, modelo físico e matemático. Inicialmente, estes gráficos são integrados e comparados na Figura 7. Nota-se que, para a massa da esfera constante, há uma relação linear,  $\text{tg } \beta$ , entre  $I$  e  $M\dot{V}$ ; assim, os valores de  $\text{tg } \beta$  e  $M/\bar{m}l$  são analisados e uma relação empírica é encontrada, sendo ilustrada na Figura 8 e transcrita a seguir:

$$\text{tg } \beta = 2,0 - 1,58 \left( \frac{M}{\bar{m}l} \right)^{0,35} \quad (6)$$

Finalmente, o impulso pode ser escrito:

$$I = M\dot{V} \text{tg } \beta \quad (7)$$

Para baixos valores da massa relativa  $M/\bar{m}l$ ,  $\text{tg } \beta$  aproxima-se de 2,0 o que indica um impacto elástico perfeito. Toda esta aproximação está obviamente associada à faixa de valores de  $M\dot{V}$  considerada.

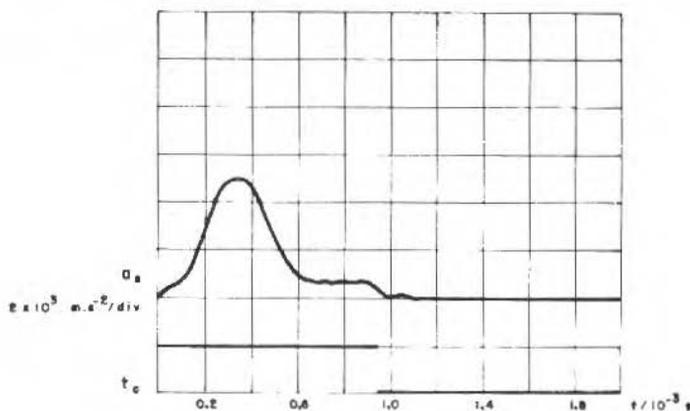


Figura 5. Modelo Físico. Caso  $M_3, \dot{V}_2$   
Aceleração da Esfera,  $a_e$

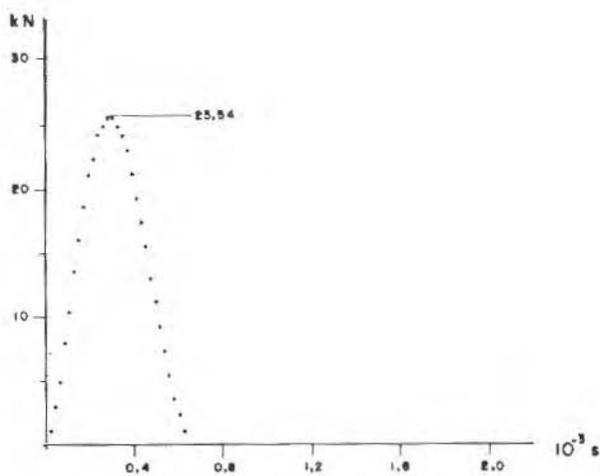


Figura 6. Modelo Matemático. Caso  $M_3, V_2$   
Força de Contato,  $F_c$  (kN)

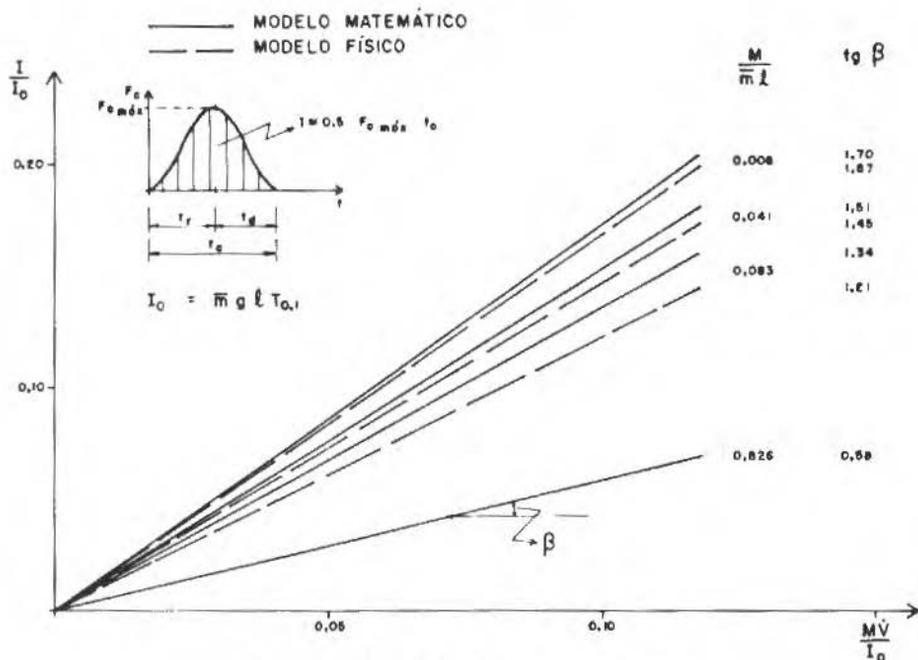
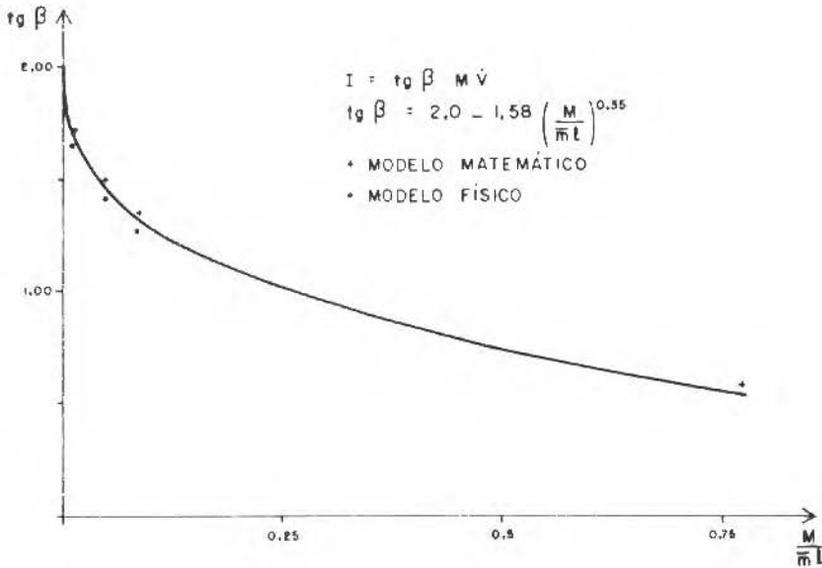


Figura 7. Relação Impulso x Momento Linear

Figura 8. Equação Empírica para  $\operatorname{tg} \beta$ 

**Análise Dinâmica Simplificada.** Como a duração do contato é muito pequena em relação ao período fundamental de vibração da viga, caracteriza-se um comportamento de sistema flexível no qual as forças de massa são predominantes e os valores máximos de resposta em deslocamento ocorrem após a carga ser removida. Em tais casos, o deslocamento máximo de um sistema com um grau de liberdade, com frequência  $f_0$  e rigidez  $k$ , pode ser escrito assim:

$$|v|_{\max} = \frac{2\pi f_0}{k} I \quad (8)$$

Como um exemplo, aplica-se esta idéia ao ensaio ilustrado nas Figuras 4 e 5:

$$f_0 \rightarrow f_{0,1} = 10,9 \text{ Hz} \quad k = 3EJ + (0,79\ell)^3 = 174,8 \text{ kN/m}$$

$$|v|_{\max} = 0,3921$$

$$M_3 = 5,51 \text{ kg} ; \quad \dot{V}_2 = 1,2 \text{ m/s} ; \quad m\ell = 74,13 \text{ kg}$$

$$\text{Equação (7)} \rightarrow I = 5,51 \times 1,2 \times [2,0 - 1,58(5,51 + 74,13)^{0,35}] = 9,0 \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$|v|_{\max} = 0,392 \times 9,0 \times 10^{-3} = 3,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Este valor confere muito bem com os resultados obtidos dos modelos físico e matemático, 3,18 e 3,56mm, respectivamente, na Tabela 1, bem como todos os demais casos estudados.

### CONCLUSÕES

A discussão anterior permite enunciar as seguintes afirmações conclusivas quanto ao comportamento de vigas de concreto armado sob impacto transversal elástico:

- . o modelo matemático de Timoshenko é muito adequado para simular os casos ensaiados;
- . a força de contato pode ser representada por uma função em forma de sino com o tempo de decaimento maior que o de crescimento; esta assimetria é mais acentuada para massas percutidoras maiores;
- . a força de contato atinge amplitudes muito elevadas, maiores que 1000 vezes o peso da esfera, mesmo para velocidades relativamente baixas; esta força é várias vezes maior que a capacidade de resistência estática;
- . a duração do contato é da ordem de  $10^{-3}$  segundos variando positivamente com o crescimento da massa percutidora e negativamente com o da velocidade de impacto;
- . a armadura trabalha solidária com o concreto e experimenta sensíveis variações de tensão em relação às tensões de trabalho, mormente nos instantes iniciais do movimento;
- . todos os testes resultaram em um único impacto simples apesar da massa da esfera ter sido variada até igualar a massa total da viga; o número de impactos depende não só da massa relativa mas também de outras características do sistema percutido;
- . a participação dos modos de vibração da viga, além do primeiro, é limitada a um curto espaço de tempo menor que o período fundamental;
- . o impulso total do impacto pode ser avaliado a partir do momento linear percutidor e isto permite fazer-se uma estimativa bem aproximada da resposta da viga.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Mason, H.L. - Impact on beams, *Journal of Applied Mechanics*, vol.3, 1936.
- [ 2 ] Crook, A.W. - A study of some impacts between metal bodies by a piezoelectric method, *Proceedings of Royal Society of London, series A*, vol. 212, 1952.
- [ 3 ] Goldsmith, W. - Impact, the theory and physical behavior of colliding solids, Ed. Arnold Ltd., London, 1960.
- [ 4 ] Schweiger, H. - A simple calculation of the transverse impact of beams and its experimental verification, *Experimental Mechanics*, Nov. 1965.
- [ 5 ] Bayer, R.G. and Burns, R.C. - Study on impact phenomenon between a sphere and a layered structure, *Experimental Mechanics*, Oct. 1971.
- [ 6 ] Timoshenko, S.; Young, D.H. and Weaver, W. - *Vibration problems in engineering*, John Wiley and Sons Inc., 4th ed., 1974.
- [ 7 ] Hunt, K.H. and Clossley, F.R.E. - Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, June 1975.
- [ 8 ] Pei Chi Chou and William, J. Flis - Design curve for beams under impact loading, *Journal of AIAA*, vol. 15, n<sup>o</sup> 4, Apr. 1977.
- [ 9 ] Herbert, R.G. and Mc Whannel, D.C. - Shape and frequency composition of pulses from an impact pair, *Journal of Engineering Industry*, Trans. ASME, Aug. 1977.
- [10] Roehl, J.L. e Raul N. Neto - Vigas-colunas sob impacto transversal, 3<sup>o</sup> Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, Buenos Aires, Argentina, 1982.
- [11] Quental, E.L. - Impacto transversal em vigas de concreto armado, Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-RJ, 1984.

## UM ALGORITMO PARA A SOLUÇÃO APROXIMADA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE CONSERVAÇÃO

*AN ALGORITHM FOR SOLVING NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS*

**ROGÉRIO MARTINS SALDANHA DA GAMA – Membro da ABCM**

LNCC/CNPq

Rua Lauro Muller, 455 – Botafogo

Rio de Janeiro, RJ – Brasil – CEP 22290

### RESUMO

*Neste trabalho é proposto um procedimento muito simples que permite a obtenção de soluções aproximadas para Problemas de Riemann associados a equações do tipo  $\partial u/\partial t + \partial f/\partial x = 0$ ;  $f = f(u)$ . O método consiste em se buscar soluções aproximadas num certo espaço (este espaço é formado por todas as funções constantes por partes). Este procedimento irá agilizar e tornar econômica a aplicação do Método de Glimm quando a equação acima estiver sujeita a uma condição inicial qualquer. A título de ilustração, duas situações particulares são estudadas.*

**Palavras-chave:** *Problema de Riemann · Solução Aproximada*

### ABSTRACT

*In this paper it is presented a very easy procedure in order to obtain approximated solutions to Riemann Problems associated to an equation like  $\partial u/\partial t + \partial f/\partial x = 0$ ;  $f = f(u)$ . The method consists of looking for approximated solutions (generalized) that belong to a given space (this space consists of all piecewise constant functions). This procedure will be useful when employing Glimm's Method for solving the above equation subjected to any initial data. As examples, we study two particular situations.*

**Keywords:** *Riemann Problem · Approximated Solution*

## INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos físicos são matematicamente descritos através de leis de conservação. A conservação de uma quantidade escalar  $u$  (que é função das variáveis escalares  $x$  e  $t$ ) tem sua forma diferencial expressa por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] = 0 \quad (1)$$

sendo esta forma local proveniente do balanço integral

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx + f(u(x_2)) - f(u(x_1)) = 0 \quad (2)$$

Vários problemas podem ser formulados através de equações diferenciais similares a (1). Um exemplo de grande importância é a equação de Buckley-Leverett, a qual descreve a evolução do campo de saturação num escoamento bifásico no interior de um meio poroso rígido [1]. Outro exemplo importante pode ser encontrado na modelagem do problema de tráfego de veículos numa rodovia [2], onde a função  $u$  representaria a densidade de veículos (número de veículos passando pela posição  $x$  no tempo  $t$  numa certa rodovia).

Seja então o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] &= 0 \\ u(x, t=0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (3)$$

No caso de  $f'(u)$  não ser uma constante a solução (generalizada) do problema (3) pode apresentar ondas de choque.

Um dos métodos numéricos mais eficientes para a simulação de problemas com ondas de choque é o Método de Glimm [3,4], o qual foi especialmente construído para problemas com choque.

Apesar de comprovadamente eficiente, o Método de Glimm tem como inconveniente a necessidade de se conhecer a solução do Problema de Riemann associado, o qual é dado por [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f^*(u)] = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, t=0) = u_L = \text{constante} \quad x < 0$$

$$u(x, t=0) = u_R = \text{constante} \quad x > 0$$
(4)

para todo  $u_L$  e  $u_R$  dados. Em (4) a função  $f^*(u)$  é tal que  $[f^*(u)](u_R - u_L)$  é a envoltória convexa de  $[f(u)](u_R - u_L)$  entre os estados  $u_L$  e  $u_R$ . A solução (generalizada) de (4) depende apenas da razão  $x/t$  ( $u(x, t) = u(x/t)$ ).

O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento numérico para a obtenção de soluções aproximadas para (4).

Este procedimento fornece de forma rápida uma solução aproximada  $\hat{u}(x/t)$  para o problema (4) (mesmo nos casos onde a função  $f(u)$  possua muitos pontos de inflexão e muitos pontos de máximo e mínimo) sem que seja necessária a determinação da função  $f^*(u)$ , o que torna mais simples e económico simular um problema como (3) através do Método de Glimm.

Vamos nos limitar neste trabalho a discutir as soluções aproximadas para (4), uma vez que a aplicação do Método de Glimm é bem ilustrada na literatura [3,4,5].

### A SOLUÇÃO APROXIMADA

A solução aproximada para o problema (4), denotada aqui por  $\hat{u}(x/t)$ , pertencerá a um espaço de funções constantes por partes, possuindo um máximo de  $[N-1]$  descontinuidades.

O primeiro passo para a construção desta solução aproximada é a escolha da seqüência de estados  $\{u_i\}_{i=1, N}$  cujos  $N$  elementos são tais que:

- i)  $u = u_L$  ,  $u_N = u_R$
- ii)  $(u_R - u_L)u_i < (u_R - u_L)u_{i+1}$  :  $i=1, 2, \dots, N-1$

O segundo passo consiste em se caracterizar a função  $g(v)$ , que será usada mais adiante. Esta função é tal que

$$(u_R - u_L)g(v) = \sup_{h \in H} [h(v)(u_R - u_L)] , \quad v \in D$$
(5)

onde  $D$  é o intervalo fechado  $[\min(u_L, u_R), \max(u_L, u_R)]$  e as funções  $h \in H$  são tais que

$$i) [h(\theta a + (1-\theta)b)](u_R - u_L) < [\theta h(a) + (1-\theta)h(b)](u_R - u_L); \quad \theta \in [0,1], \quad a, b \in D$$

$$ii) [h(u_i)](u_R - u_L) \leq [f(u_i)](u_R - u_L); \quad i=1,2,\dots,N$$

A solução aproximada  $\hat{\omega}(x/t)$  será dada por

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(x/t) &= \omega_k & \text{se } s_{k-1,k} < x/t < s_{k,k+1}; & \quad k=2,3,\dots,M-1 \\ \hat{\omega}(x/t) &= \omega_1 = u_L & \text{se } x/t < s_{1,2} \\ \hat{\omega}(x/t) &= \omega_M = u_R & \text{se } s_{M-1,M} < x/t \end{aligned} \quad (6)$$

onde a velocidade de propagação  $s_{k,k+1}$  é calculada por

$$s_{k,k+1} = \frac{f(\omega_{k+1}) - f(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k}, \quad k=1,2,\dots,M-1 \quad (7)$$

A seqüência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$  é formada pelos estados  $u_i$  tais que  $f(u_i) = g(u_i)$ , sendo crescente se  $u_L < u_R$  e decrescente se  $u_L > u_R$ . Esta seqüência é tal que  $\omega_1 = u_L$  e  $\omega_M = u_R$ . O número inteiro  $M$  é o número de estados  $u_i$  tais que  $f(u_i) = g(u_i)$ .

Mais adiante será apresentado um algoritmo muito simples para a construção da seqüência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$  a partir da seqüência  $\{u_i\}_{i=1,N}$ .

### CONVERGÊNCIA

Vamos mostrar agora que a solução aproximada  $\hat{\omega}(x/t)$  estará próxima da solução exata  $\omega(x/t)$ , para  $N$  suficientemente grande, no caso em que a seqüência  $\{u_i\}_{i=1,N}$  tem seus elementos dados por

$$u_i = u_L + (u_R - u_L) \left( \frac{i-1}{N-1} \right), \quad i=1,2,\dots,N \quad (8)$$

Uma vez definida a seqüência  $\{u_i\}_{i=1,N}$  e conhecida a função  $f(u)$  podemos construir a seqüência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$ , a qual nos fornecerá a solução aproximada  $\hat{\omega}(x/t)$ .

**Proposição 1:** Se, na solução exata, dois estados  $u_L$  e  $u_R$  (respectivamente à esquerda e à direita) são conectados por um choque com velocidade  $s$  então

existirá, na solução aproximada, um choque com velocidade  $\bar{s}$  conectando os estados constantes  $\omega_k$  e  $\omega_{k+1}$ , de tal forma que

$$|\omega_k - u_\ell| < \Delta \quad (9)$$

$$|\omega_k - u_{\ell'}| < \Delta$$

$$|s - \bar{s}| < C \Delta \quad (10)$$

onde

$$\Delta = \left| \frac{u_R - u_L}{N-1} \right| \quad (11)$$

**Prova:** Primeiramente é preciso caracterizar os estados  $\omega_k$  e  $\omega_{k+1}$ . Definimos então o estado  $\omega_k$  através da seguinte relação

$$|\omega_k - u_{\ell'}| = \min_{\omega_j} |\omega_j - u_{\ell'}|, \quad (12)$$

onde os  $\omega_j$  são estados tais que

$$|\omega_j - u_\ell| < \Delta \quad (13)$$

A existência de pelo menos um estado  $\omega_j$  com a propriedade (13) é garantida, para  $N$  grande, uma vez que sempre existirá um estado  $u_1$  (tão próximo quanto se queira de  $u_\ell$ ) tal que  $f(u_1) = f^*(u_1)$ , o que implicará em  $u_1 \in (\omega_k)_{k=1, M}$ .

Seja agora definido o estado  $\omega_i$  de tal forma que

$$|\omega_i - u_\ell| = \min_{\omega_j} |\omega_j - u_\ell| \quad (14)$$

onde agora os  $\omega_j$  são tais que

$$|\omega_j - u_{\ell'}| < \Delta \quad (15)$$

A existência de pelo menos um  $\omega_j$  satisfazendo (15) é garantida pelo mesmo argumento anteriormente usado.

Falta apenas mostrar que o índice  $k$ , na equação (12), e o índice  $i$ , na equação (14), são tais que  $i=k+1$ . Para isto é preciso mostrar que não existe  $\omega_n$  tal que

$$\omega_k(u_R - u_L) < \omega_n(u_R - u_L) < \omega_l(u_R - u_L) \quad (16)$$

Considerando (12), (13), (14) e (15) podemos concluir que se existir  $\omega_n$  satisfazendo (16) então este estado será tal que  $\omega_n \in [\min(u_\ell, u_r) + \Delta, \max(u_\ell, u_r) - \Delta]$  (para que se garanta que este estado não é candidato a minimização em (12) ou (14)). Isto implicaria em

$$\frac{f(\omega_n) - f(\omega_k)}{\omega_n - \omega_k} > \frac{f(\omega_l) - f(\omega_n)}{\omega_l - \omega_n} \quad (17)$$

o que contradiz a caracterização dos elementos da seqüência  $\{\omega_k\}_{k=1, M}$  e nos leva a concluir que não existe  $\omega_n$  satisfazendo (16). Assim  $\omega_l = \omega_{k+1}$ .

Vamos provar agora a desigualdade (10). Denotando por  $|f'|_{\max}$  o maior valor absoluto da derivada de  $f(u)$ , podemos escrever que

$$g(\omega_{k+1}) - g(\omega_k) \leq f(u_r) - f(u_\ell) + 2|f'|_{\max} \Delta \quad (18)$$

$$g(\omega_{k+1}) - g(\omega_k) \geq f(u_r) - f(u_\ell) - 2|f'|_{\max} \Delta \quad (19)$$

ou ainda

$$(u_R - u_L) \frac{g(\omega_{k+1}) - g(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} < \left( \frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell} + \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{u_r - u_\ell} \right) \left( \frac{u_r - u_\ell}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) (u_R - u_L) \quad (20)$$

$$(u_R - u_L) \frac{g(\omega_{k+1}) - g(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} \geq \left( \frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell} - \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{u_r - u_\ell} \right) \left( \frac{u_r - u_\ell}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) (u_R - u_L) \quad (21)$$

onde

$$\frac{g(\omega_{k+1}) - g(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} = \bar{s} \quad (22)$$

$$\frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell} = s \quad (23)$$

Assim sendo ficamos com

$$(u_R - u_L) \bar{s} \leq (u_R - u_L) \left( s + s \left( \frac{u_r - u_\ell}{\omega_{k+1} - \omega_k} - 1 \right) + \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) \quad (24)$$

$$(u_R - u_L) \bar{s} \geq (u_R - u_L) \left( s + s \left( \frac{u_{\ell} - u_{\ell}}{\omega_{k+1} - \omega_k} - 1 \right) - \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) \quad (25)$$

Mas, devido a (9), teremos que

$$2\Delta \left( \frac{u_R - u_L}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) \geq \left( \frac{u_{\ell} - u_{\ell}}{\omega_{k+1} - \omega_k} - 1 \right) (u_R - u_L) \geq -2\Delta \left( \frac{u_R - u_L}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) \quad (26)$$

logo

$$\begin{aligned} (u_R - u_L) \left( \frac{(2\Delta)|s|}{\omega_{k+1} - \omega_k} + \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) &\geq (u_R - u_L)(\bar{s} - s) \geq \\ &\geq (u_R - u_L) \left( \frac{-(2\Delta)|s|}{\omega_{k+1} - \omega_k} - \frac{2|f'|_{\max} \Delta}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

o que implica em

$$|\bar{s} - s| \leq \left| \frac{2\Delta(|f'|_{\max} + |s|)}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right| \quad (28)$$

Considerando novamente (9) e levando em conta que  $|s| < |f'|_{\max}$  podemos escrever que

$$|\bar{s} - s| < \frac{4\Delta|f'|_{\max}}{|u_{\ell} - u_{\ell}| - 2\Delta} \quad (29)$$

onde, para N grande, teremos que

$$\frac{4|f'|_{\max}}{|u_{\ell} - u_{\ell}| - 2\Delta} < C \quad (30)$$

**Proposição 2:** Se, na solução exata, dois estados  $u_{\ell}$  (à esquerda) e  $u_r$  (à direita) são conectados por uma rarefação então para  $f'(u_{\ell}) \leq x/t \leq f'(u_r)$  teremos que

$$\int_{f'(u_{\ell})}^{f'(u_r)} |\hat{w}(x/t) - \hat{u}(x/t)| dx/t \leq C\Delta \quad (31)$$

Prova: Uma vez que  $u_\ell$  e  $u_n$  são conectados por uma rarefação teremos que, entre  $u_\ell$  e  $u_n$ ,  $f(u) \equiv f^*(u)$  e todos os estados  $u_k$  entre  $u_\ell$  e  $u_n$  (definidos pela fórmula (8)) serão elementos da seqüência  $(\omega_k)$ . Além disso para  $N$  suficientemente grande existirão  $\omega_m$  e  $\omega_n$  tais que

$$\begin{aligned} |\omega_m - u_\ell| &< \Delta \\ |\omega_n - u_n| &< \Delta \end{aligned} \quad (32)$$

$$u_\ell(u_R - u_L) < \omega_m(u_R - u_L) < \omega_n(u_R - u_L) < u_n(u_R - u_L) \quad (33)$$

Uma vez que  $\hat{\omega}$  é dado por (6) podemos escrever a integral que aparece em (31) como

$$\begin{aligned} \int_{f^*(u_\ell)}^{f^*(u_n)} |\hat{\omega}(x/t) - \bar{u}(x/t)| dx/t &= \int_{f^*(u_\ell)}^{s_{m,m+1}} |\omega_m - \bar{u}(x/t)| dx/t + \\ &+ \int_{s_{n-1,n}}^{f^*(u_n)} |\omega_n - \bar{u}(x/t)| dx/t + \\ &+ \sum_{k=m+1}^{n-1} \int_{s_{k-1,k}}^{s_{k,k+1}} |\omega_k - \bar{u}(x/t)| dx/t \end{aligned} \quad (34)$$

Para  $u \in [\min(\omega_m, \omega_n), \max(\omega_m, \omega_n)]$  a função  $[f'(u)](u_R - u_L)$  é uma função monótona estritamente crescente (na variável  $u$ ). Assim sendo

$$\begin{aligned} [\hat{u}(s_{k-1,k})](u_R - u_L) &< [\bar{u}(x/t)](u_R - u_L) < [\hat{u}(s_{k,k+1})](u_R - u_L), \\ \text{para } x/t &\in (s_{k-1,k}, s_{k,k+1}) \end{aligned} \quad (35)$$

Sendo  $[f'(u)](u_R - u_L)$  estritamente crescente teremos que  $[f(u)](u_R - u_L)$  será convexa (no mesmo intervalo) o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} f'(\omega_k) &< \frac{f(\omega_{k+1}) - f(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k} = s_{k,k+1} < f'(\omega_{k+1}) \\ f'(\omega_{k-1}) &< \frac{f(\omega_k) - f(\omega_{k-1})}{\omega_k - \omega_{k-1}} = s_{k-1,k} < f'(\omega_k) \end{aligned} \quad (36)$$

As desigualdades (36) nos levam a

$$\begin{aligned}\omega_k(u_R - u_L) &< [\hat{0}(s_{k,k+1})](u_R - u_L) < \omega_{k+1}(u_R - u_L) \\ \omega_{k-1}(u_R - u_L) &< [\hat{0}(s_{k-1,k})](u_R - u_L) < \omega_k(u_R - u_L)\end{aligned}\quad (37)$$

Combinando (35) e (37) chegamos a

$$\begin{aligned}\omega_{k-1}(u_R - u_L) &< \{\hat{0}(x/t)\}(u_R - u_L) < \omega_{k+1}(u_R - u_L) \\ \text{para } x/t &\in (s_{k-1,k}, s_{k,k+1})\end{aligned}\quad (38)$$

Subtraindo  $\omega_k(u_R - u_L)$  da desigualdade (38) concluímos que

$$\begin{aligned}-(u_R - u_L)\Delta &< \{\hat{0}(x/t) - \omega_k\}(u_R - u_L) < (u_R - u_L)\Delta \\ \text{para } x/t &\in (s_{k-1,k}, s_{k,k+1})\end{aligned}\quad (39)$$

ou seja

$$|\hat{0}(x/t) - \omega_k| < \Delta \quad \text{para } x/t \in (s_{k-1,k}, s_{k,k+1})\quad (40)$$

Assim sendo

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} \int_{s_{k-1,k}}^{s_{k,k+1}} |\omega_k - \hat{0}(x/t)| d(x/t) < (s_{n-1,n} - s_{m,m+1})\Delta\quad (41)$$

Vamos estabelecer agora uma cota superior para a primeira integral que aparece em (34). Considerando o fato de que  $\{f'(u)\}(u_R - u_L)$  é uma função estritamente crescente para  $u \in (\min(u_\ell, \omega_m), \max(u_\ell, \omega_m))$  podemos escrever que

$$\begin{aligned}u_\ell(u_R - u_L) &< \{\hat{0}(x/t)\}(u_R - u_L) < [\hat{0}(s_{m,m+1})](u_R - u_L) \\ \text{para } x/t &\in (f'(u_\ell), s_{m,m+1})\end{aligned}\quad (42)$$

Além disso sabemos que

$$f'(u_\ell) < f'(\omega_m) < \frac{f(\omega_{m+1}) - f(\omega_m)}{\omega_{m+1} - \omega_m} = s_{m,m+1} < f'(\omega_{m+1})\quad (43)$$

o que implica em

$$u_\ell(u_R - u_L) < \omega_m(u_R - u_L) < [\hat{0}(s_{m,m+1})](u_R - u_L) < \omega_{m+1}(u_R - u_L)\quad (44)$$

Assim, combinando (42) e (44), teremos que

$$u_{\ell}(u_R - u_L) < [\hat{u}(x/t)](u_R - u_L) < \omega_{m+1}(u_R - u_L) \\ \text{para } x/t \in (f'(u_{\ell}), s_{m,m+1}) \quad (45)$$

Subtraindo  $\omega_m(u_R - u_L)$  da desigualdade acima chegamos

$$(u_{\ell} - \omega_m)(u_R - u_L) < (\hat{u}(x/t) - \omega_m)(u_R - u_L) < \Delta(u_R - u_L) \quad (46)$$

Considerando agora (32) e (33) concluímos que

$$|\hat{u}(x/t) - \omega_m| < \Delta \quad \text{para } x/t \in (f'(u_{\ell}), s_{m,m+1}) \quad (47)$$

Este mesmo raciocínio pode ser aplicado ao intervalo  $(s_{n-1,n}, f'(u_n))$  o que nos levará a

$$|\hat{u}(x/t) - \omega_n| < \Delta \quad \text{para } x/t \in [s_{n-1,n}, f'(u_n)] \quad (48)$$

Aplicando as desigualdades (47) e (48) às duas primeiras integrais do somatório em (34) e levando em conta (41) chegamos à desigualdade (31), que é expressa então por

$$\int_{f'(u_{\ell})}^{f'(u_n)} |\hat{u}(x/t) - \hat{u}(x/t)| dx/t < (f'(u_n) - f'(u_{\ell}))\Delta \quad (49)$$

### UM PROCEDIMENTO SIMPLES PARA A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA $\{u_k\}$

Vamos apresentar agora um algoritmo que possibilitará a determinação da sequência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$ , a partir de uma sequência  $\{u_i\}_{i=1,N}$ , de forma muito simples.

O primeiro elemento da sequência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$  será sempre

$$\omega_1 = u_1 = u_L \quad (50)$$

e os demais termos serão obtidos através das desigualdades abaixo

$$\frac{f(u_i) - f(u_{i-1})}{u_i - u_{i-1}} < \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i}, \quad i \geq 2 \\ \frac{f(u_i) - f(u_{i-1})}{u_i - u_{i-1}} < \frac{f(u_R) - f(u_i)}{u_R - u_i}, \quad i \geq 2 \quad (51)$$

As desigualdades (51) devem ser testadas para cada estado  $u_i$  ( $i \geq 2$  e  $u_i \neq u_R$ ) iniciando-se com o estado  $u_2$  e indo até o estado  $u_i$  mais próximo de  $u_R$ .

Se um certo estado  $u_i$  não satisfizer (51) então ele será excluído da seqüência ( $u_i$ ) a qual passará a ter um elemento a menos. A nova seqüência deve ser reordenada e o teste deve começar novamente, de  $i=2$  à  $i=(i-1)$  (onde  $i$  é o número de elementos da nova seqüência).

Este processo deve ser aplicado até que todos os elementos da seqüência resultante satisfaçam a (51). Al teremos que  $M=1$  e a seqüência resultante será a seqüência  $\{\omega_k\}_{k=1,M}$ , onde  $\omega_M = u_R$ .

### EXEMPLOS

Com o objetivo de ilustrar a utilização do metodo apresentado neste trabalho vamos aplicá-lo a dois problemas do tipo (4).

O primeiro exemplo é o Problema de Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u + \sin(\pi u)) = 0$$

$$u(x,0) = u_L = -0,9 \quad x < 0 \quad (52)$$

$$u(x,0) = u_R = 1,6 \quad x > 0$$

Neste caso é fácil de se determinar a solução exata  $\hat{u}(x/t)$ , uma vez que a função  $f^*(u)$  associada a (52) é facilmente obtida. A função  $f^*(u)$  é dada por

$$f^*(u) = \begin{cases} u + \sin(\pi u) & -0,9 \leq u \leq -0,5 \\ u - 1 & -0,5 < u < 1,5 \\ u + \sin(\pi u) & 1,5 \leq u \leq 1,6 \end{cases} \quad (53)$$

sendo a solução exata  $\hat{u}(x/t)$  dada por

$$\hat{u}(x/t) = \begin{cases} -0,9 & \text{se } x/t \leq 1 + \pi \cos(0,9\pi) \\ -q(x/t) & \text{se } 1 + \pi \cos(0,9\pi) < x/t < 1 \\ 2 - q(x/t) & \text{se } 1 < x/t < 1 + \pi \cos(1,6\pi) \\ 1,6 & \text{se } 1 + \pi \cos(1,6\pi) \leq x/t \end{cases} \quad (54)$$

onde a função  $q$  é definida por

$$q(y) = \frac{1}{\pi} \arccos [(y-1)/\pi] \quad , \quad q(y) \in [0, \pi] \quad (55)$$

Uma vez que a solução (generalizada) exata  $\hat{u}(x/t)$  é conhecida nós estamos aptos a fazer uma comparação direta entre  $\hat{u}(x/t)$  e algumas soluções aproximadas  $\hat{\omega}(x/t)$ . Vamos considerar, para efeito de comparação, as soluções aproximadas obtidas com  $N=2$ ,  $N=11$  e  $N=26$  através da equação (8). Utilizando (8) e aplicando (51) obtemos as seguintes seqüências  $(\omega_k)$ :

$$N=2 : (\omega_k) = \{-0,9; 1,6\} \quad (56)$$

$$N=11: (\omega_k) = \{-0,9; -0,65; 1,6\} \quad (57)$$

$$N=26: (\omega_k) = \{-0,9; -0,8; -0,7; -0,6; -0,5; 1,5; 1,6\} \quad (58)$$

A Figura 1 apresenta a função  $f(u)$  e as funções  $g(u)$  obtidas para cada uma das soluções aproximadas. A Figura 2 apresenta uma comparação direta entre a solução exata  $\hat{u}(x/t)$  e as soluções aproximadas  $\hat{\omega}(x/t)$  (para  $N=2$ ,  $N=11$  e  $N=26$ ) obtidas através de (6).

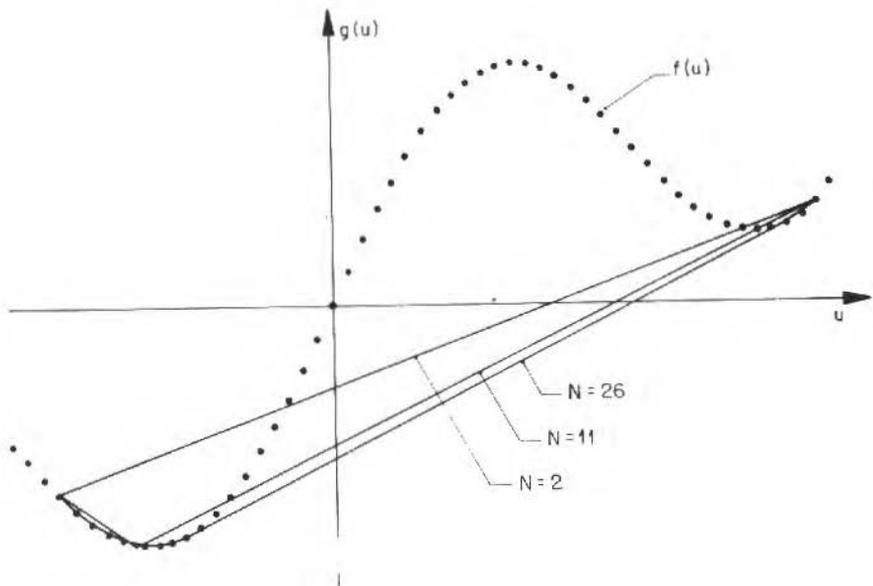


Figura 1. As funções  $g(u)$  para  $N=2$ ,  $N=11$  e  $N=26$

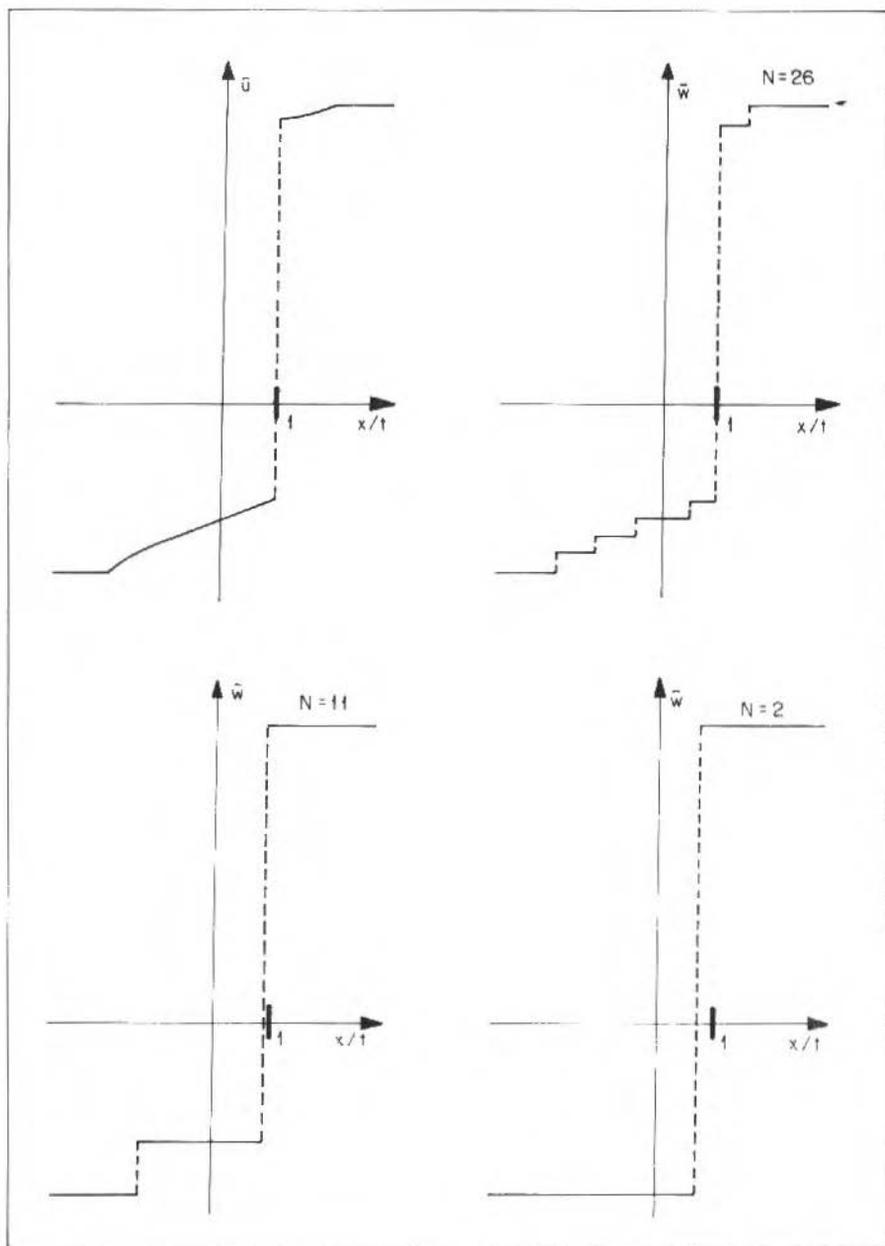


Figura 2. A solução exata  $\hat{u}$  e as soluções aproximadas  $\hat{w}$  (obtidas com  $N=2$ ,  $N=11$  e  $N=26$ )

Consideremos agora o seguinte Problema de Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0$$

$$u(x,0) = u_L = 2,0 \quad , \quad x < 0 \quad (59)$$

$$u(x,0) = u_R = -1,0 \quad , \quad x > 0$$

Neste Problema de Riemann (mais simples que o anterior) a solução exata  $\hat{u}(x/t)$  é contínua, ou seja, os estados  $u_L=2$  e  $u_R=-1$  são conectados por uma rarefação sendo  $f(u)=f^*(u)$  para  $u \in [-1,2]$ . A solução exata  $\hat{u}(x/t)$  é dada por

$$\hat{u}(x/t) = \begin{cases} 2,0 & \text{se } x/t \leq -4 \\ -\frac{1}{2} (x/t) & \text{se } -4 < x/t < 2 \\ -1,0 & \text{se } 2 \leq x/t \end{cases} \quad (60)$$

Considerando  $N=5$  e utilizando a equação (8) obtemos a seqüência  $(u_k)$  a qual será igual à seqüência  $(w_k)$  dada por

$$(w_k) = (2,0; 1,25; 0,5; -0,25; -1,0) \quad (61)$$

A Figura 3 apresenta a solução exata  $\hat{u}(x/t)$  e a solução aproximada  $\hat{w}(x/t)$  (obtida com  $N=5$ ).

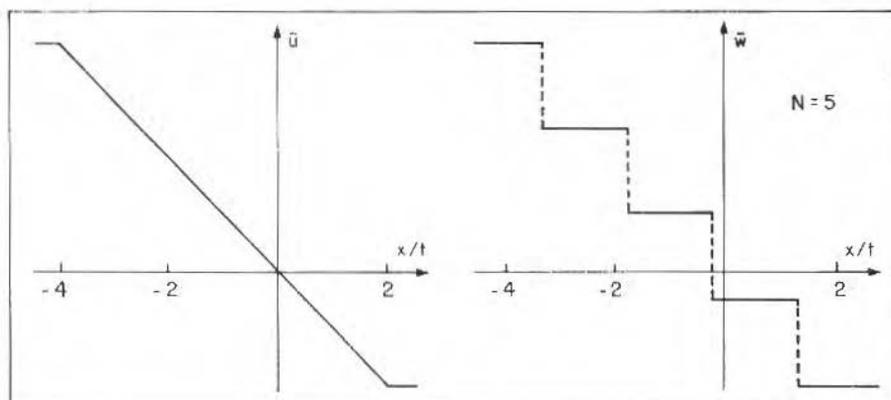


Figura 3. A solução exata  $\hat{u}$  e a solução aproximada  $\hat{w}$  (obtida com  $N=5$ )

Se, no Problema de Riemann (59), considerássemos  $u_L = -1,0$  e  $u_R = 2,0$ , teríamos que a solução exata seria dada por

$$\hat{u}(x/t) = \begin{cases} -1,0 & \text{se } x/t < -1 \\ 2,0 & \text{se } -1 < x/t \end{cases} \quad (62)$$

e, para qualquer  $N \geq 2$  escolhido, a solução exata  $\hat{u}(x/t)$  coincidiria com  $\hat{\omega}(x/t)$ .

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Concus, P. and Proskurowski - Numerical solution of a non-linear hyperbolic equation by a random choice method, *J. Comp. Phys.*, 30, 153, 1979.
- [ 2 ] Morawetz, C.S. - On non-linear waves and shocks, Springer-Verlag, 1981.
- [ 3 ] Smoller, J. - Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [ 4 ] Fehribach, J.D. and Shearer, M. - The elastic string equations: numerical results using Glimm's method and two exact solutions, Technical Report n.º 1987-61, The University of Alabama, in Huntsville, 1987.
- [ 5 ] Colella, P. - Glimm's method for gas dynamics, *SIAM J. Sci.Stat. Comput.*, 3, pp. 76-110, 1982.

## **EFEITO DA FLEXIBILIDADE DE DISCOS NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE ROTORES DE GRANDES VENTILADORES**

*INFLUENCE OF THE FLEXIBILITY OF DISCS ON THE NATURAL  
FREQUENCY OF LARGE VENTILATORS*

**MARCIO TADEU DE ALMEIDA - Membro da ABCM**

**MARCOS THEISS NEVES**

EFEI - Departamento de Mecânica

Av. BPS, 1303

Itajubá, MG - Brasil - CEP 37500

### **RESUMO**

*O presente trabalho visa investigar o efeito da flexibilidade de discos nas frequências naturais de rotores. A formulação analítica é baseada em um modelo matemático do sistema eixo-disco admitidos como flexíveis, considerando também o efeito giroscópico do disco sobre o eixo. As frequências naturais são calculadas através de matrizes de transferência. O sistema é considerado sem amortecimento e com movimento em órbita circular. Realizou-se uma parte experimental, a fim de se verificar a teoria desenvolvida, sendo observada uma boa concordância nos resultados obtidos.*

**Palavras-chave:** *Frequências Naturais · Dinâmica de Rotores · Ventiladores*

### **ABSTRACT**

*This study is developed to include the effect of disc flexibility and gyroscopic forces on the resonant frequencies of symmetric rotating shaft. The shaft and disc are considered lumped masses and a transfer matrix analysis technique is used to obtain the natural frequencies. It is found that disc flexibility can significantly reduce the rotor critical speeds, particularly at low speed of rotation. Some general conclusions are presented. Analytical results obtained by computer calculation were compared to the experimental ones and good correspondance was verified.*

**Keywords:** *Natural Frequency · Rotor Dynamics · Ventilators*

## INTRODUÇÃO

Geralmente em aplicações industriais relacionadas com dinâmica de rotores os discos são tomados como rígidos. Quando eles são flexíveis comparados com a rigidez do eixo, esta hipótese pode introduzir um erro devido a interação disco-eixo. Portanto, é importante que consideremos no comportamento dinâmico do sistema, o rotor como um disco flexível.

Dopkin e Shoup [1] apresentaram resultados sobre um rotor simétrico em movimento estável usando matrizes de transferência. Hagiwara et alii [2] também usou o método das matrizes de transferência para determinar a resposta de um sistema eixo-rotor ao desbalanceamento. Nestes dois artigos o efeito devido as tensões iniciais não foram introduzidos.

Chivens e Nelson [3] desenvolveram um estudo paramétrico do comportamento dinâmico de um rotor biapoiado. Suas equações incluem o efeito centrífugo e foram resolvidas pelo método de Laplace. Eles mostraram que a influência da flexibilidade é mais significativa na precessão indireta do que na direita.

Wilgen and Schalck [4], usando a técnica de Rayleigh-Ritz fizeram um estudo paramétrico das velocidades críticas e instabilidades.

Loewy and Khader [5] usaram elementos finitos para um rotor contendo pás montadas em discos que foram modeladas pelo método da subestruturação. Utilizaram coordenadas generalizadas através do método de Lagrange. Aplicaram o estudo a um exemplo industrial mostrando as influências dos efeitos Giroscópico e de flexibilidade dos discos.

Lalanne et alii [6], estudaram um sistema eixo-disco e mancais flexíveis. As energias cinéticas e de deformação dos elementos foram calculadas, e o método dos elementos finitos foi usado. A solução das equações foram obtidas através do método modal. O estudo foi aplicado à uma turbina à gás.

Desenvolve-se neste texto, a formulação para a análise de vibração em um sistema rotativo composto de eixo-disco, sendo ambos considerados flexíveis. Para estudar o sistema foi utilizado o método das matrizes de transferência [6]. O modelo representa um rotor de um ventilador centrifugo de dupla aspiração, construído pela empresa Aerovento Tecnologia do Ar (Várzea Paulista - SP).

**Modelagem Geral do Sistema.** O equacionamento do sistema real mostrado na Figura 1, foi realizado através do modelo simplificado da Figura 2.

A técnica empregada foi a de subdividir o disco em  $k$  anéis circunferenciais, dispostos ao longo deste, visando representar as propriedades elásticas e dinâmicas do sistema real.

Para o eixo a técnica é análoga, utilizando-se elementos compostos por massa pontual e viga.

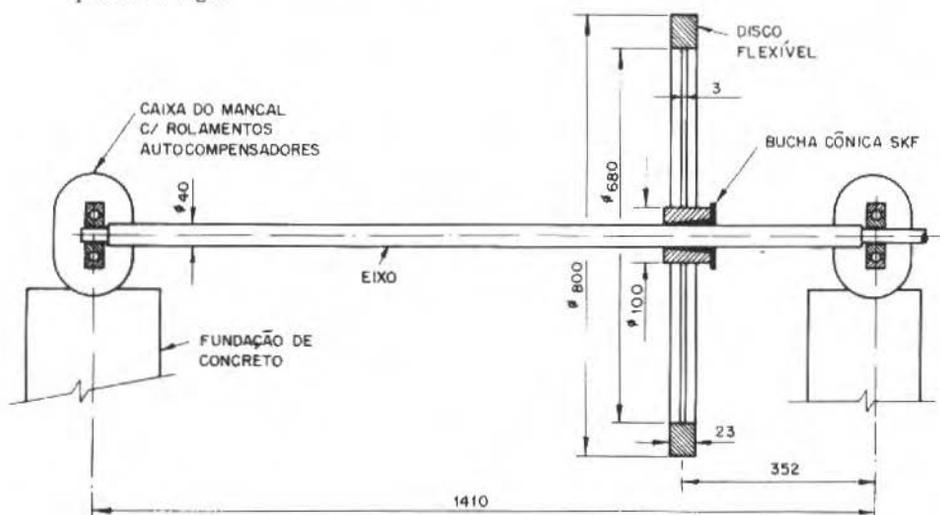


Figura 1. Sistema eixo-disco utilizado no ensaio

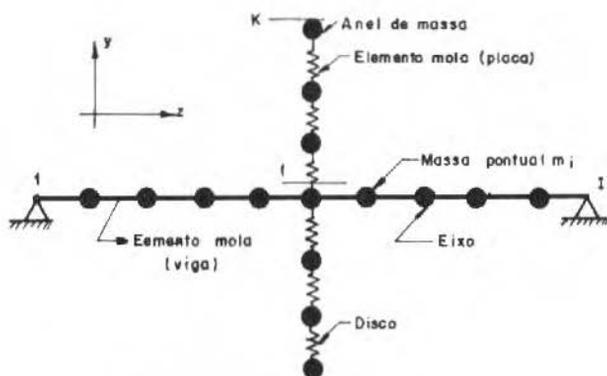


Figura 2. Modelo físico do sistema

## ANÁLISE DO EIXO

O eixo é composto por vários elementos tipo mola e massa, distribuídos ao longo deste como mostra a Figura 2. O vetor de estado é uma matriz coluna que especifica os deslocamentos e as forças internas em um ponto do eixo, sendo este ponto uma extremidade do elemento [7].

As variáveis de estado  $M$  (momento fletor),  $V$  (esforço cortante),  $Y$  (deflexão) e  $\theta$  (inclinação) estão indicados no vetor de estado da equação (1).

$$\{ZE\}_1 = \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1 \quad (1)$$

a) Matriz de transferência campo:

A matriz campo de um elemento do eixo é determinada pelas propriedades elásticas do eixo em uma região entre os pontos de aplicação das forças. Esta matriz transfere os vetores de estado de uma estação  $i$  para o vetor na estação  $(i+1)$ , através de um campo elástico. Essa matriz é mostrada na equação (2), e foi obtida através da resistência dos materiais [6].

$$[FE]_1 = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & (L^2/2EI)_1 & (L^3/6EI)_1 - (\eta L/GS)_1 \\ 0 & 1 & (L/EI)_1 & (L^2/2EI)_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

b) Matriz de transferência ponto:

A matriz ponto do elemento transfere um vetor de estado de uma estação de um elemento de massa para a estação seguinte.

Considerando que o elemento de massa  $m_1$  tem velocidade de precessão  $\dot{\phi}_1$ , obtém-se a matriz ponto para um elemento do eixo.

$$[LE]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (m \cdot \dot{\phi}^2)_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pode-se concluir que para um sistema (eixo) composto de um elemento mola com rigidez flexional  $(E \cdot I)$ , rigidez ao cisalhamento  $(G \cdot S)$ , comprimento  $L$ .

coeficiente de forma  $\eta$ , massa  $m$ , e velocidade angular de precessão  $\dot{\phi}$ , a matriz de transferência massa-mola é escrita conforme a equação (4).

$$[TE]_1 = [FE]_1 [LE]_1 \quad (4)$$

Pode-se também incluir o efeito da temperatura (T) sobre o módulo de elasticidade fazendo no elemento  $E_1 = E(t)$  e  $G_1 = G(T)$ , conforme [8].

### ANÁLISE DO DISCO

Através desta modelagem do disco real é possível obter um modelo matemático que é representativo do comportamento dinâmico do disco. A técnica empregada, no caso do disco, é reduzi-lo a uma série de  $k$  anéis circunferenciais ao longo do raio do disco. Tais anéis são representativos de propriedades do disco real, sendo um destes o anel placa (sem massa e com espessura constante  $t_k$ ), o qual possui propriedades elásticas aproximadas ao trecho real do disco, e o outro o anel massa (sem propriedades elásticas e incluindo o momento de inércia de massa), o qual contribui bastante na vibração, pois exerce um momento de reação dinâmica na estação onde está localizado.

A simulação típica de um sistema disco-eixo é mostrada na Figura 2, onde pode-se observar a distribuição intercalada dos anéis massa e placa.

a) Equação da Rigidez local:

Em termos de parâmetros locais, pode-se equacionar a rigidez flexional do  $k$ -ésimo anel elástico seguido do  $k$ -ésimo anel de massa, como:

$$D_k = \frac{E_k t_k^3}{12(1-\nu_k^2)} \quad (5)$$

onde:

$E_k$  - módulo de elasticidade longitudinal

$\nu_k$  - módulo de Poisson

No disco, o vetor estado inclui a deflexão horizontal  $y$ , inclinação  $\phi$ , momento fletor  $M$ , esforço cortante  $V$ , e raio interno  $R$  do elemento, logo:

$$\{ZD\}_1 = \begin{Bmatrix} y \\ \phi \cdot r \\ M \cdot r^2 \\ V \cdot r^3 \end{Bmatrix}_1 \quad (6)$$

b) Matriz de transferência Campo:

Com base na teoria de placas [11], é possível determinar as equações que regem um elemento de placa circular com raio interno  $R_{(1-1)}$  e externo  $R_1$  e de espessura constante ( $t_k$ ).

Em coordenadas polares, a equação de deflexão é dada por:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] Y(r, \alpha) = 0 \quad (7)$$

$\alpha$  - deflexão angular do disco no raio  $r$ .

Para modos diametrais e circunferenciais adotou-se a função de deflexão como:

$$Y(r, \alpha) = y(r) \cos n\alpha \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), obtém-se:

$$\frac{d^4 y}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 y}{dr^3} - 2 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 y}{dr^2} (-2n^2 + 1) - \frac{1}{r^3} \frac{dy}{dr} (2n^2 + 1) + \frac{1}{r^4} \cdot y \cdot (n^4 - 4n^2) = 0 \quad (9)$$

A solução desta equação é do tipo:

$$y(r) + A \cdot r^J \quad (10)$$

É importante notar que a solução desta equação depende do número de nós diametrais e também que possui raízes duplas.

Um conjunto de soluções é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} n = 0 & ; \quad y(r) = A_1 + A_2 \text{Log}_e r + A_3 r^2 + A_4 r^2 \text{Log}_e r \\ n = 1 & ; \quad y(r) = A_1 r + A_2 r^{-1} + A_3 r^3 + A_4 r \text{Log}_e r \\ n \geq 2 & ; \quad y(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-n} + A_3 r^{2+n} + A_4 r^{2-n} \end{aligned} \quad (11)$$

Pode-se também calcular:

O ângulo radial da deflexão, dado por:

$$\Phi(r, \alpha) = \Phi(r) \cdot \cos n\alpha = \frac{Y}{r}(r, \alpha) \quad (12)$$

O módulo por unidade de comprimento circunferencial do momento fletor na direção tangencial, dado por:

$$M(r, \alpha) = m(r) \cdot \cos n\alpha = -D_k \left[ \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} \right] \quad (13)$$

O esforço cortante no extremo de cada anel, por unidade de comprimento circunferencial, dado por:

$$V(r, \alpha) = v(r) \cos n\alpha = -D_k \left[ \frac{\partial^3 Y}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 Y}{\partial r \partial \alpha^2} \right] -$$

$$- D_k (1-\nu) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 Y}{\partial r \partial \alpha^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} \right] \quad (14)$$

Resolvendo estas equações de acordo com [10], e escrevendo a solução na forma matricial, tem-se para o caso de vibração com somente um nó diametral ( $n=1$ ):

Vetores de estado para as estações interna e externa:

$$\left\{ X_{k+1} \right\}_{int} = \begin{Bmatrix} y_{k+1} \\ \phi_{k+1} \cdot r_{k+1} \\ m_{k+1} \cdot r_{k+1}^2 \\ v_{k+1} \cdot r_{k+1}^3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \left\{ X_k \right\}_{ext} = \begin{Bmatrix} y_k \\ \phi_k \cdot r_k \\ m_k \cdot r_k^2 \\ v_r \cdot r_k^3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Matriz campo entre os vetores estado, escrita como:

$$[EL_k] = [DCR] \cdot [CD] \quad (16)$$

onde:

$$[DCR] = \begin{bmatrix} \beta_k & 0 & 1 & \text{Log}_e \beta_k \\ 1 & (-1/\beta_k) & 3 & 1 + \text{Log}_e \beta_k \\ 0 & -2(1-\nu) & -2(3+\nu)D_k \beta_k & -(1+\nu) \\ 0 & -2(1-\nu) & -2(3+\nu) & (3-\nu)D_k \beta_k \end{bmatrix}$$

$$[CD] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4(3-\nu) & 4(1+\nu) & 4 & 0 \\ 2(3+\nu) & -2(3+\nu) & 3 & 1 \\ -2(1-\nu) & 2(1-\nu) & -1/D_k & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4/D_k \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

A equação matricial interligando os vetores (15) e a matriz campo (16) é mostrada a seguir:

$$\left\{ X_{k+1} \right\}_{\text{int}} = [EL_k] \left\{ X_k \right\}_{\text{ext}} \quad (17)$$

c) Matriz Ponto (Matriz massa):

Essa matriz corresponde ao efeito dinâmico de um anel-massa com raio  $R_1$  em relação ao centro do disco. Essa matriz transfere também o efeito giroscópico do anel-massa de uma estação externa para a interna [10].

Para o caso de um nó diametral, o plano de um elemento será deslocado de  $\phi_k = y_k / r_k$ , conforme mostra a Figura 3.

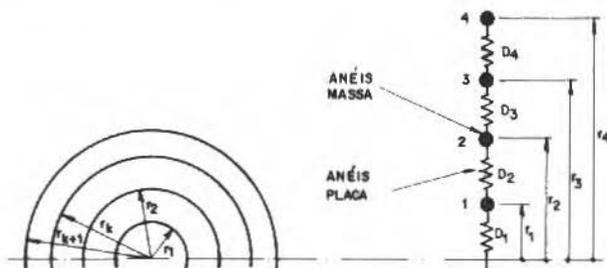


Figura 3. Elementos placa e massa do disco

O anel massa tem momento de inércia polar  $IP_k$  e momento de inércia diametral  $ID_k$ , bem como está sujeito as velocidades angulares de rotação  $\dot{\psi}$  e de precessão  $\dot{\phi}$ , resultando a equação (18) dos efeitos dinâmicos deste anel, ou seja:

$$MG_k = (ID_k \cdot \dot{\phi}^2 - IP_k \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi}) \cdot \phi_k \quad (18)$$

Este momento é equilibrado pela diferença do esforço cortante nas estações interna e externa ao elemento. O momento resultante total é obtido pela integração do momento devido a um esforço de cisalhamento distribuído senoidalmente sobre o anel, conforme a Figura 4, ou seja:

$$MG_k = \int_0^{2\pi} [v(k,ext) - v(k,int)] \text{sen } \alpha \cdot r_k \cdot \text{sen } \alpha \cdot r_k \cdot d\alpha \quad (19)$$

que resulta em:

$$MG_k = [v(k,ext) - v(k,int)] \pi \cdot r_k^2 \quad (20)$$

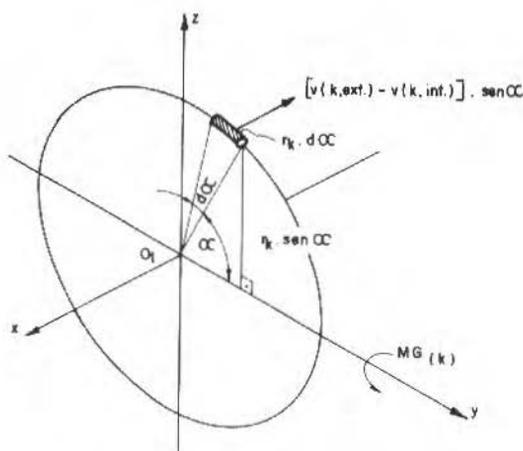


Figura 4. Momento provocado por um elemento do anel massa

Combinando as equações (19) e (20), associadas às condições de contorno da modelagem ( $\phi_{int} = \phi_{ext}$ ;  $y_{ext} = y_{int}$ ), a matriz ponto será:

$$[LD]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \left( \frac{ID \cdot \dot{\phi}^2 - IP \cdot \dot{\phi}\dot{\psi}}{\pi} \right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Pode-se concluir que para um sistema (disco) composto de um elemento mola (placa) e de um elemento massa (anel-massa), a matriz de transferência massa-mola é escrita conforme a equação (22), ou seja:

$$[TD]_1 = [FD]_1 \cdot [LD]_1 \quad (21)$$

Matriz de transferência total do disco:

Multiplicando todos os elementos massa-mola do disco, obtém-se a matriz [TTD], que representa a matriz de transferência total do disco.

$$\{ZD\}_k = [FD]_k \cdot [LD]_k \cdot [FD]_{k-1} \cdot [LD]_{k-1} \dots [FD]_1 \cdot [LD]_1 \cdot \{ZD\}_1 \quad (23)$$

ou na forma matricial resultante, levando-se em consideração as condições de contorno a seguir:

extremidade externa do disco:  $M_k = 0$  e  $V_k = 0$

extremidade interna do disco:  $\{y/R\} = \phi_1$  e  $\dot{\phi}_1 = \theta_1$

onde  $\theta_1$  representa a deflexão angular do eixo no ponto em que o disco está acoplado. Desta forma, a equação (23), fica:

$$\{ZD\}_k = [TTD] \cdot \{ZD\}_1, \text{ ou}$$

$$\begin{Bmatrix} z/R \\ \phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \\ MR \\ VR^2 \end{Bmatrix}_1 \quad (24)$$

Utilizando a submatriz formada pelas linhas inferiores, obtém-se:

$$(MR)_1 = (-)\theta_1 \frac{(t_{44} \cdot t_{31} + t_{44} \cdot t_{32} - t_{34} \cdot t_{41} - t_{34} \cdot t_{42})}{(-t_{43} \cdot t_{34} + t_{33} \cdot t_{44})} \quad (25)$$

$$(VR^Z) = \theta_1 \frac{(-t_{33} \cdot t_{41} - t_{33} \cdot t_{42} + t_{43} \cdot t_{31} + t_{43} \cdot t_{32})}{(-t_{43} \cdot t_{34} + t_{33} \cdot t_{44})} \quad (26)$$

O momento total que o disco exerce sobre o eixo devido à flexibilidade e ao efeito giroscópico, pode ser obtido pela integração de M e V distribuídos senoidalmente sobre o disco, conforme a equação (27).

$$MG = -\pi M_1 R_1^2 - \pi V_1 R_1^2 \quad (27)$$

Substituindo (25) e (26) em (27), vem:

$$\begin{aligned} \frac{MG}{\theta} = \pi & \frac{(t_{44} \cdot t_{31} + t_{32} \cdot t_{44} + t_{33} \cdot t_{41} + t_{33} \cdot t_{42})}{(-t_{34} \cdot t_{43} + t_{33} \cdot t_{44})} + \\ & + \frac{(t_{34} \cdot t_{41} + t_{34} \cdot t_{42} - t_{43} \cdot t_{31} - t_{43} \cdot t_{32})}{(-t_{34} \cdot t_{43} + t_{33} \cdot t_{44})} \end{aligned} \quad (28)$$

A relação (28) é comparável a uma rigidez dinâmica e descreve a interação entre a deformação angular causada pelo disco sobre o eixo e o momento causador dessa deflexão angular. Esta rigidez dinâmica depende logicamente da geometria e material do disco, bem como da velocidade de rotação e relação ou razão de precessão. Por conveniência denomina-se:

$$\frac{MG}{\theta} = k_D \quad (29)$$

## ANÁLISE DO SISTEMA DISCO-EIXO

. Matriz de transferência no ponto sobre o eixo onde se localiza o disco.

Na estação do eixo onde o disco está localizado, veja Figura 5, deve-se considerar:

. força de inércia transversal =  $m(\text{disco}) \cdot Y(i) \cdot \dot{\phi}^2$ ;

. momento devido a flexibilidade do disco e efeito giroscópico =  $k_d \cdot \theta_1$ .

Logo, a matriz de transferência para a estação da Figura 5 em que o disco está localizado no eixo, é obtida aplicando as condições de equilíbrio nesta estação, ou seja:

$$Y_{1,dtr} = Y_{1,esq} ; \quad \theta_{1,dtr} = \theta_{1,esq}$$

$$M_{1,dir} = (-) k_D \cdot \theta_j + M_{1,esq}$$

$$V_{1,dir} = V_{1,esq} + md \cdot \dot{\phi}^2 \cdot Y_1$$

Na forma matricial fica:

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{dir} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_D & 1 & 0 \\ md \cdot \dot{\phi}^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{esq} \quad (30)$$

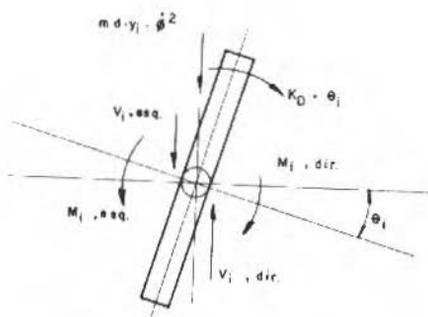


Figura 5. Efeito do disco sobre o eixo

Em notação abreviada a matriz de transferência de influência do disco sobre o eixo será denominada [GD], logo:

$$\{ZE\}_1^{dir} = [GD] \{ZE\}_1^{esq} \quad (31)$$

Matriz de transferência global do sistema eixo-disco.

Iniciando de uma extremidade do eixo, pode-se chegar a outra, incluindo a estação (i) onde o disco está localizado, logo:

$$\begin{aligned} \{ZE\}_{\text{apoio 2}} &= [FE]_n [LE]_n [FE]_{n-1} [LE]_{n-1} \dots \\ &\dots [FE]_j [LE]_j [GD]_i [FE]_{j-1} [LE]_{j-1} \dots \\ &\dots [FE]_1 [LE]_1 \{ZE\}_{\text{apoio 1}} \end{aligned} \quad (32)$$

Em notação abreviada;

$$\{ZE\}_{\text{apolo } 2} = [G] \{ZE\}_{\text{apolo } 1} \quad (33)$$

onde:

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \quad (34)$$

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

Aplicando as condições de contorno para um eixo biapoiado, ou seja, ambos os apoios rotulados, tem-se:

$$M_1 = M_2 = 0 \quad \text{e} \quad Y_1 = Y_2 = 0$$

Estas condições aplicadas na equação (33), obtém-se a equação de submatrizes:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12} & g_{14} \\ g_{32} & g_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ V \end{Bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Desta equação, conclui-se que o determinante da submatriz deve ser nulo, ou seja:

$$\text{DET} = \begin{bmatrix} g_{12} & g_{14} \\ g_{32} & g_{34} \end{bmatrix} = g_{12} \cdot g_{34} - g_{32} \cdot g_{14} = 0 \quad (36)$$

### CRITÉRIO DE BUSCA DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

A equação (36) deve ser satisfeita, implicando em que o determinante desta submatriz deve ser nulo ou próximo de zero. Isto é análogo à obtenção dos auto-valores de um sistema elástico.

A metodologia aqui aplicada é adotar um valor de frequência nas equações do sistema e verificar se para as condições de contorno do sistema, o determinante se anula. As frequências para as quais tais condições são satisfeitas são as frequências naturais do sistema disco-eixo.

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANALÍTICOS

Com a montagem mostrada na Figura 6, foram obtidos os resultados da Tabela 1, sendo a posição do disco igual à distância entre os apoios dividida por 4, ou seja, 1/4 do vão.

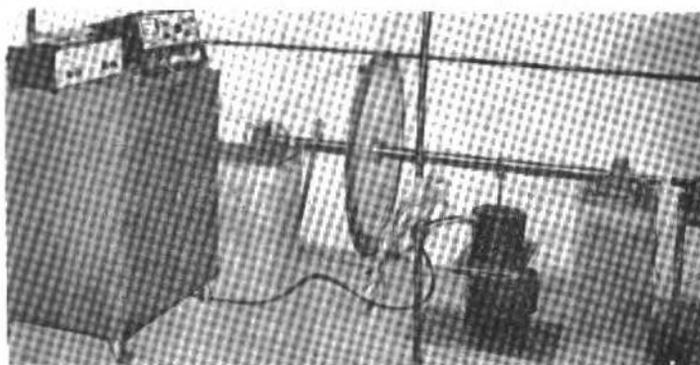


Figura 6. Banco de ensaio, sem rotação

Tabela 1. Resultados do ensaio (sem rotação)

Frequências Naturais - Hz

Formulações	Ordem da Frequência			
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>
Experimental	9,0	21,0	95,0	286,0
Modelagem	8,2	21,9	106,0	229,7

Com a montagem mostrada na Figura 7, foram obtidos os resultados da Tabela 2, sendo a posição do disco também em 1/4 do vão.

Tabela 2. Resultados do ensaio (com rotação)

Rotação Crítica - RPM

Formulações	Ordem
	1 <sup>a</sup>
Experimental	1344
Modelagem	1302

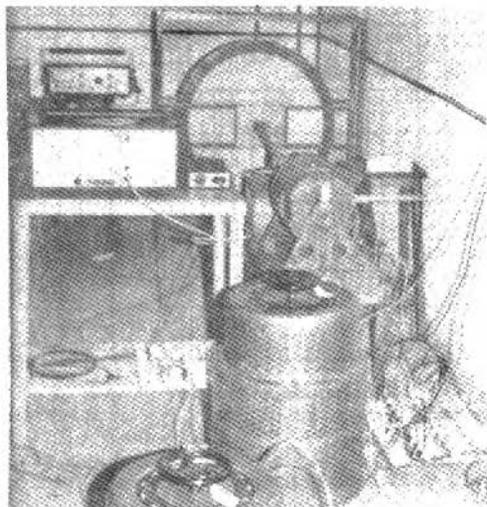


Figura 7. Banco de ensaio com o sistema em rotação

Vale salientar neste ponto, que não foi possível passar o sistema pela ressonância (eixo com vão = 1410 mm, diâmetro do eixo = 40 mm e o disco com diâmetro externo 800 mm e espessura variável). O sistema chegou a níveis de vibrações nos apoios de concreto de 350  $\mu\text{m}$  (pico a pico) e flechas no eixo em torno de 30 mm.

## CONCLUSÕES

**Com relação ao disco.** O efeito de rotação do disco, isolado nas frequências naturais, é mostrado na Figura 8. Este gráfico, obtido através da simulação em computador mostra um aumento da rigidez do disco com o aumento da rotação.

**Com relação ao sistema disco-eixo.** O gráfico da Figura 9 mostra a interação da flexibilidade do disco com relação às velocidades de rotação e precessão. Observa-se que a flexibilidade tem grande efeito para relações de velocidades inferiores 0,5. O efeito da flexibilidade diminui devido à tendência de estabilização da flexão em um só nó diametral, através das forças giroscópicas.

Independentemente da flexibilidade do disco, para precessão direta, há um aumento da frequência natural com o aumento da relação (rot./preces.), e um decréscimo da mesma para a precessão indireta. Este efeito está diretamente relacionado com o sinal de  $k_d$ , de acordo com a equação (29).

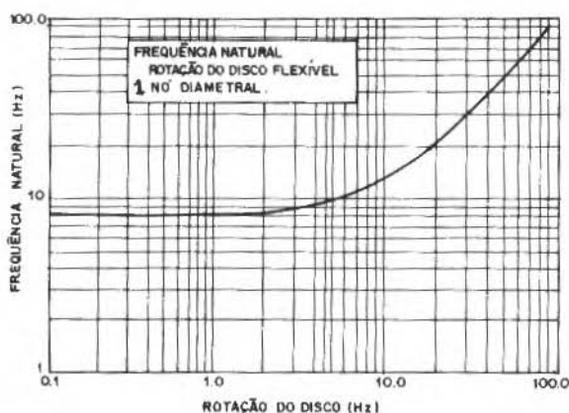


Figura 8. Frequência natural do disco x rotação (Hz)

Pode-se então esperar que a flexibilidade reduza bastante a primeira frequência natural quando a velocidade de rotação é menor que a de precessão, ou seja, para as relações de velocidades inferiores à 0,5.

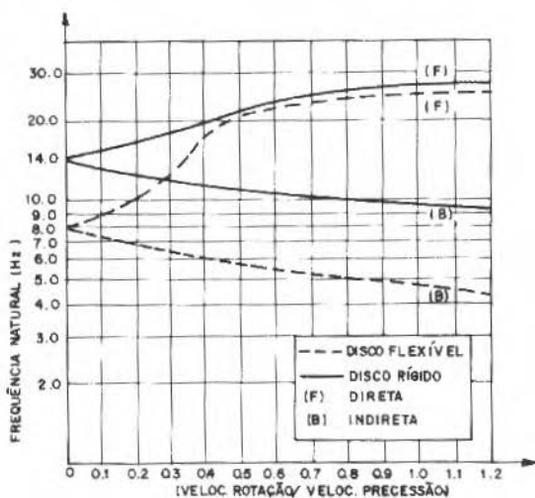


Figura 9. Resposta da frequência natural do sistema x relação (rot./preces.)

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Dopkin, J.A., Shoup, T.A. - Rotor resonant speed reduction caused by flexibility of disks, *Journal of Engineering for Industry*, nov. 1974, pp.1328- 1333.
- [ 2 ] Hagiwara, N. et al. - Analysis of coupled vibration response in a rotating flexible shaft - impeller system, ASME paper n<sup>o</sup> 79, DET, 69.
- [ 3 ] Chiven, D.R., Nelson, H.D. - The natural frequencies and critical speeds of a rotating flexible shaft - disk system, *ASME J. Eng. Ind.*, pp. 881-886, 1975.
- [ 4 ] Loewy, R.G., Khader, N. - Structural dynamics of rotating blade disk assemblies coupled with flexible shaft motions, *A.I.A.A.J.*, pp. 1319-1327, 1984.
- [ 5 ] Lalanne, M., Ferraris, G., Bremond, P. - Prediction of natural frequencies of flexible shaft - disc system, *I.N.S.A.*, 1986, Laboratoire de Mécanique des Structures, Lyon, França.
- [ 6 ] Almeida, M.T. - *Vibrações Mecânicas para Engenheiros*, Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1987.
- [ 7 ] Almeida, M.T. and Dias, J.C. - Free vibrations analysis of beams and shafts by programmable calculators, *Journal of Sound and Vibration*, 1984, vol. 92(1), pp. 39-45, Academic Press Inc. London.
- [ 8 ] Almeida, M.T. - The influence of the temperature in the natural frequencies of shafts, *Proceedings COBEM 81*, Rio de Janeiro, Brasil, Paper C-13, pp. 131-139.
- [ 9 ] Ehrich, F.F. - A matrix solution for the vibration modes of nonuniform discs, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, mar. 1956, pp. 109-115.
- [10] Neves, M.T., Efeito da flexibilidade dos discos nas frequências naturais de rotores, *Dissertação de Mestrado*, Jun. 1987, EFEL.
- [11] Timoshenko, S. - *Theory of Plates and Shells*, Ed. Mc-Graw Hill, 2<sup>a</sup> Edição, pp. 282-290, USA, 1959.

## SOME APPLICATIONS OF MODAL PARAMETER ESTIMATION TECHNIQUES

### ALGUMAS APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Dipl.-Ing. P. EBERSBACH, Research Assistant

Dr.-Ing. H. IRRETIER, Professor

University of Kassel

Institute of Mechanics

Kassel, Federal Republic of Germany

#### ABSTRACT

The aim of this paper is to give a review and comparison of two applied MDOF methods for identification of modal parameters from measured frequency response data in form of experimental results. The first method is a nonlinear iterative algorithm based on linearizing the frequency response function by the first terms of a Taylor series [1], [2]. Starting with initial set of modal parameters, the error between the measured values and the calculated function will be minimized iteratively. The second method is a modification of a noniterative algorithm, known as a linearized rational polynomial algorithm [3], [4]. The modification of this algorithm is especially another definition of the error function, whereby the iteration procedure becomes iterative. In contrast to the first method, this algorithm has a better behaviour in the iteration and it needs only rough starting values for the iteration procedure. A disadvantage of this algorithm is the numerical instability in solving the systems of equations. For comparing the different identification methods three experiments were performed. First the test of a beam, supported by foamed plastics, with impact excitation, which leads to excellent measurement data. Next the test of a turbine blade clamped on a vibration isolated foundation where difficulties occurred by great differences in the peaks in the measured frequency response function and additionally the measured data were disturbed by influences of the clamping. A final test was accomplished to a circular disc - with a magnetic exciter and pseudo-random excitation - where difficulties in the parameter identification results from the double modes. The data acquisition and transformation to the frequency domain were performed by a 4-channel FFT-Analyser in all experiments. For the parameter identification a HP micro computer series 200 was used. The experimental results were compared with theoretical results in all experiments whenever possible.

**Keywords:** Parameter Estimation · Modal Analysis · Disc Vibration

## NOMENCLATURE

$\bar{a}_{k\ell r} = U_{k\ell r} + jV_{k\ell r}$	residues related to the mode shapes of the frequency response function
$b_{k\ell i}$	real coefficients of the numerator polynomial
$\bar{D}(\Omega)$	denominator polynomial
$d_i$	real coefficients of the denominator polynomial
$\bar{F}_\ell$	force at point $\ell$
$f_r = \omega_r / 2\pi$	undamped natural frequency
$\ddot{G}_{k\ell m}$	measured value of frequency response function of acceleration at frequency $\Omega$
$g(\Omega)$	frequency dependent weighting function
$\bar{H}_{k\ell}(\Omega), (\bar{H}_{k\ell}^*(\Omega))$	analytical frequency response function of displacement (acceleration) between point $\ell$ and $k$
$K$	number of displacements (acceler.)
$L$	number of forces
$M$	number of points of the measured frequency response functions
$n$	number of modes in the measured frequency range
$R_{ok\ell}, R_{1k\ell}, R_{2k\ell}$	residual terms to include the influence of modes outside the measured frequency range
$\bar{S}_{k\ell}(\Omega)$	numerator polynomial
$\bar{U}_k(\Omega), (\bar{U}_k^*(\Omega))$	displacement (acceleration) at point $k$
$\delta_r$	damping constant of the $r$ -th mode
$\zeta_r = \frac{\delta_r}{\sqrt{\nu_r^2 + \delta_r^2}}$	damping ratio of the $r$ -th mode
$\bar{\lambda}_r = -\delta_r + j\nu_r$	complex eigenvalue of the $r$ -th mode
$\mu_r$	modal mass of the $r$ -th mode
$\nu_r$	resonant frequency of the $r$ -th mode
$\bar{\phi}_{ir}$	complex mode shape of the $r$ -th mode at point $i$
$\Omega$	excitation frequency
$\omega_r = \sqrt{\nu_r^2 + \delta_r^2}$	natural circular frequency of the $r$ -th mode

## INTRODUCTION

Some aspects of the two methods which are used in this paper are documented in earlier publications. The Nonlinear Iterative Approximation Algorithm [1], [2] is known to be numerically very stable but needs much computation time. The required starting values can be calculated by simpler methods like non-global estimations or simple single degree of freedom methods. The main disadvantage of this method is that it needs very exact starting values especially for the eigenfrequencies.

Otherwise the iteration will diverge rapidly. To prevent this we use the method written in [1] to multiply the correction values by a factor smaller than 1 if the iteration starts to diverge.

The Rational Polynomial Method is mostly used as a direct estimation method [3], [4]. There it works without any starting values (with the exception of the number of eigenvalues in the analysed frequency range). This method works much faster than that one described previously. The disadvantages of this method is first numerical instability if the number of expected eigenvalues increases. This can be prevented by the use of orthogonal polynomials [3], [4]. The other disadvantage is that the method used in [3] and [4] has problems in the use of baseband analysed data. A solution of this problem is described in [5] by a new definition of the error function which is described below for the use in a global algorithm.

In this paper both methods are used in a form that should give the same results. Three different experiments are performed to show the stability of the methods and the quality of the identified modal parameters. As the described experiments were performed by acceleration and force pickups the formulas of the applied identification procedures below are formulated in terms of force and acceleration.

## FREQUENCY RESPONSE FUNCTION FOR MODAL PARAMETER ESTIMATION

The well known basic equation describing the displacement  $U$  at a point  $k$  on a linear structure when a force  $F$  is applied at point  $\ell$  is the frequency response function

$$\bar{H}_{k\ell}(\Omega) = \frac{\bar{U}_k}{\bar{F}_\ell} = \sum_{r=1}^n \frac{\bar{a}_{k\ell r}}{j\Omega - \lambda_r} + \frac{\bar{a}_{k\ell r}^*}{j\Omega - \lambda_r^*} \quad (1)$$

The mode shapes used in this paper have following relation to the residues

$$\bar{a}_{k\ell r} = \frac{\bar{\phi}_{kr} \bar{\phi}_{\ell r}}{2j\nu_r \mu_r} \quad (2)$$

Equation (1) can also be written in terms of acceleration  $\ddot{U}$  caused by a force  $F$

$$\ddot{H}_{k\ell}(\Omega) = \frac{\ddot{U}_k}{F_\ell} = -\Omega^2 \sum_{r=1}^n \frac{\bar{a}_{k\ell r}}{j\Omega - \lambda_r} + \frac{\bar{a}_{k\ell r}^*}{j\Omega - \lambda_r^*} \quad (3)$$

The influence of modes outside the measured frequency range (modes  $r=1, \dots, n$ ) can be considered by including some additional terms

$$\ddot{H}_{k\ell}(\Omega) = -\Omega^2 \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\bar{a}_{k\ell r}}{j\Omega - \lambda_r} + \frac{\bar{a}_{k\ell r}^*}{j\Omega - \lambda_r^*} \right] + R_{ok\ell} + j\Omega R_{ik\ell} - \Omega^2 R_{2k\ell} \quad (4)$$

where the constant term  $R_{ok\ell}$  can be related to a residual mass and the term with  $\Omega^2$  to residual stiffness. For the identification the modal parameters from eq. (4) are often written separated in real and imaginary terms

$$\ddot{H}_{k\ell}(\Omega) = -\Omega^2 \sum_{k=1}^n \left[ \frac{U_{k\ell r} + jV_{k\ell r}}{\delta_r + j(\Omega - \nu_r)} + \frac{U_{k\ell r} - jV_{k\ell r}}{\delta_r + j(\Omega + \nu_r)} \right] + R_{ok\ell} + j\Omega R_{ik\ell} - \Omega^2 R_{2k\ell} \quad (5)$$

Another form to write the frequency response function are rational polynomials

$$\ddot{H}_{k\ell}(\Omega) = \frac{\sum_{i=1}^{2n+3} (j\Omega)^{(i-1)} b_{k\ell(i-1)}}{1 + \sum_{i=1}^{2n} (j\Omega)^i d_i} = \frac{\bar{S}_{k\ell}(\Omega)}{\bar{D}(\Omega)} \quad (6)$$

In this equation the polynomial coefficients are real values. Both equations (5) and (6) have  $4n+3$  linear independent parameters and we can transform one set of parameters to the other by a linear transformation.

#### NONLINEAR ITERATIVE APPROXIMATION ALGORITHM (NIA)

The following section gives a short description of the applied algorithm similar as in [1] and [2]. For the approximation of the modal parameters in

form of a least squares fit with experimental data an error function can be defined

$$E = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L (\bar{G}_{k\ell m} - \bar{H}_{k\ell}(\Omega_m)) (\bar{G}_{k\ell m}^* - \bar{H}_{k\ell}^*(\Omega_m)) \quad (7)$$

The physical interpretation of this function is the sum over all squared differences between the measured values and an analytical form of the frequency response function.

First, the modal parameters can be written in vectors separated in global modal parameters

$$u^T = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]$$

and local modal parameters

$$v_{k\ell}^T = [U_{k\ell 1}, U_{k\ell 2}, \dots, U_{k\ell n}, V_{k\ell 1}, V_{k\ell 2}, \dots, V_{k\ell n}, R_{0k\ell}, R_{1k\ell}, R_{2k\ell}] \quad (8)$$

respectively. As  $\bar{H}_{k\ell}$  is a function of  $2n$  values of  $u_1$  and  $2n+3$  values of  $v_{k\ell i}$  in the next step the frequency response function is written in the first terms of a Taylor series starting with an initial set of estimated modal parameters

$$\bar{H}_{k\ell}^{(1)} = \bar{H}_{k\ell}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \bar{H}_{k\ell}^{(0)}}{\partial u_1} \Delta u_1 + \sum_{i=1}^{2n+3} \frac{\partial \bar{H}_{k\ell}^{(0)}}{\partial v_{k\ell i}} \Delta v_{k\ell i} \quad (9)$$

Starting values for this procedure can be obtained by simpler single degree of freedom methods, e.g. circle fitting. When this form of frequency response function is set in eq. (7) and a Gaussian minimization procedure is performed to the unknown variables  $\Delta u_1$  and  $\Delta v_{k\ell i}$ , the following system of linear equations results (under the condition that the structure is excited only at one point  $\ell$ )

$$\begin{bmatrix} A & B_{11} & B_{21} & \dots & B_{k\ell} \\ B_{11}^T & C & 0 & \dots & 0 \\ B_{21}^T & 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k\ell}^T & 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v_{11} \\ \Delta v_{21} \\ \vdots \\ \Delta v_{k\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{k\ell} \end{bmatrix} \quad (10)$$

The submatrices and vectors of this system of equations contain following terms

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}(\Omega_m)}{\partial u_i} \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial u_j} \right\} \\
 B_{k\ell ij} &= \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left\{ \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}(\Omega_m)}{\partial u_i} \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial v_{k\ell j}} \right\} \quad C_{ij} = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left\{ \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}(\Omega_m)}{\partial v_{k\ell i}} \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial v_{k\ell j}} \right\} \\
 c_{oi} &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ \left( \ddot{G}_{k\ell m} - \ddot{\bar{H}}_{k\ell}(\Omega_m) \right) \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial u_i} \right\} \\
 c_{k\ell i} &= \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left\{ \left( \ddot{G}_{k\ell m} - \ddot{\bar{H}}_{k\ell}(\Omega_m) \right) \frac{\ddot{\partial \bar{H}}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial v_{k\ell i}} \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

The solution of this system of equations is rather simple, because it contains many zeros. In addition, the solution is numerically very stable and converges after a few iterations to a local minimum of the error function (6). The computation time is rather long caused by the extensive derivatives of the FRF's which must be calculated for every frequency line. The most important disadvantage is, that the iteration procedure tends to diverge if the starting values, especially the eigenfrequencies, are not very close to the true values. In this case, which can be noticed by an increase of the error function (6) compared with the previous iteration step, the resulting vector of eq. (10) will be multiplied by a factor between 0 and 1, so that the error function reaches a value lower [1].

A very simple form of the system of equations results by assuming that the global parameters are known (e.g. by time domain methods). Then only the vectors with the local parameters have to be calculated. Starting a minimization procedure from eq. (7) results a system of equations from which the local parameters can be calculated directly without any starting values

$$\begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{k\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{k\ell} \end{bmatrix} \quad (12)$$

where the elements of the vectors  $y_{k\ell}$  are defined as

$$y_{k\ell 1} = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left\{ \bar{G}_{k\ell m} \frac{\partial \bar{H}_{k\ell}^*(\Omega_m)}{\partial y_{k\ell 1}} \right\} \quad (13)$$

The matrix C is the same as in eq. (11). This form of approximation was used partly in our experiments, there called Linear Approximation of the Residues (LAR), in combination with the following identification algorithm.

**MODIFIED RATIONAL POLYNOMIAL ALGORITHM (MRP)**

Usually the Rational Polynomial Algorithm starts with an error function where the unknown parameters appear only in linear terms [3], [4]

$$E = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^L \left[ \left( \bar{D}(\Omega_m) \bar{G}_{k\ell m} - \bar{S}_{k\ell}(\Omega_m) \right) g(\Omega_m) \left( \bar{D}^*(\Omega_m) \bar{G}_{k\ell m} - \bar{S}_{k\ell}^*(\Omega_m) \right) \right] \quad (14)$$

where the function  $g(\Omega_m)$  is set constant. The modification of the Rational Polynomial Algorithm described in [5] uses for this function

$$g(\Omega) = \frac{1}{\bar{D}(\Omega_m) \bar{D}^*(\Omega_m)} \quad (15)$$

where  $g(\Omega)$  can be considered as a weighting function. Using this formulation the error function (14) becomes equal to the error function (7). Due to this modification, in this paper the algorithm is called a Modified Rational Polynomial Algorithm (MRP). As the denominator polynomial contains the unknown eigenvalues, a solution of a minimization procedure is only possible iteratively. Different starting values for the weighting function will be discussed at the end of this section.

Executing a minimization procedure based on eq. (14) we get a similar system of equations as in eq. (10)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{21} & \dots & \mathbf{B}_{k\ell} \\ \mathbf{B}_{11}^T & \mathbf{C} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_{21}^T & 0 & \mathbf{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{k\ell}^T & 0 & 0 & \dots & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{b}_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{k\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_{11} \\ \mathbf{x}_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k\ell} \end{bmatrix} \quad (16)$$

The submatrices and vectors of this system of equations contain following terms

$$\begin{aligned}
 A_{lj} &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K g(\Omega_m) \ddot{\bar{G}}_{k\ell m} \ddot{\bar{G}}_{k\ell m}^* \operatorname{Re} \left\{ (j\Omega_m)^l (-j\Omega_m)^j \right\} \\
 B_{k\ell j} &= - \sum_{m=1}^M g(\Omega_m) \operatorname{Re} \left\{ \ddot{\bar{G}}_{k\ell m} (-j\Omega_m)^l (j\Omega_m)^{j-1} \right\} \\
 C_{lj} &= \sum_{m=1}^M g(\Omega_m) \operatorname{Re} \left\{ (j\Omega_m)^{l-1} (-j\Omega_m)^{j-1} \right\} \\
 x_{o1} &= - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K g(\Omega_m) \ddot{\bar{G}}_{k\ell m} \ddot{\bar{G}}_{k\ell m}^* \operatorname{Re} \left\{ (-j\Omega_m)^l \right\} \\
 x_{k\ell 1} &= \sum_{m=1}^M g(\Omega_m) \operatorname{Re} \left\{ \ddot{\bar{G}}_{k\ell m} (j\Omega_m)^{l-1} \right\} \\
 d_1 &= [d_1, d_2, \dots, d_{2n}] \\
 b_{k\ell 1} &= [b_{k\ell 1}, b_{k\ell 2}, \dots, b_{k\ell(2n+3)}] \quad (17)
 \end{aligned}$$

The main advantage of this way of solution compared with the NIA algorithm is the fact that in the matrices mainly powers of  $\Omega$  must be calculated and no extensive derivatives of the frequency response function. Therefore this algorithm is more than 10 times faster than the NIA algorithm. A problem is that the algorithm is numerically rather unstable. The reason is that the determinant of matrix  $C$ , which must be inverted in the solution procedure, is nearly zero. This might be prevented by substitution the powers of  $\Omega$  by orthogonal polynomials as carried out in [3] and [4]. We have limited in our experiments the number of eigenvalues to be evaluated simultaneously by splitting the frequency range.

A further problem of the above way of solution is that the weighting function contains the solutions of the unknown poles of the polynomial when starting the iteration. Therefore some estimations of taking extreme assumptions for the weighting function are given below to overcome this problem. Eq. (15) can be written in terms of the eigenfrequencies and damping constants

$$g(\Omega_m) = \frac{1/d_{2n}^2}{\prod_{i=1}^n \left( (\Omega_m - \nu_i)^2 + \delta_i^2 \right) \prod_{i=1}^n \left( (\Omega_m + \nu_i)^2 + \delta_i^2 \right)} \quad (18)$$

which shows that the weighting function increases to high values in the case that the measured frequency is equal to any of the eigenfrequencies. If we

assume starting values for the eigenfrequencies which are much higher than the measured frequency range,  $\nu_1 \gg \Omega_m$  eq. (18) becomes

$$g(\Omega_m) = \frac{1/d_{2n}^2}{2n \prod_{i=1} (\nu_i^2 + \delta_i^2)} \quad (19)$$

what means that the weighting function is no longer frequency dependent. A constant weighting function, used normally in the Rational Polynomial Algorithms [3], [4], leads to the problem that mainly the highest eigenvalues are identified correctly or that the algorithm can be used only for small frequency ranges (zoom bands) [3].

The other extreme is to assume starting eigenfrequencies which are nearly zero,  $\nu_1 \ll \Omega_m$  and  $\delta_1 \ll \Omega_m$ , then eq. (18) becomes

$$g(\Omega_m) = \frac{1/d_{2n}^2}{\Omega_m^{4n}} \quad (20)$$

In that case, mainly the lowest eigenvalues are identified correctly. But even when such extreme starting values are taken, the iteration procedure converges always to eigenvalues in the measured frequency range, if no numerical instability occurs.

## EXPERIMENTAL RESULTS

Three experiments were performed to compare the different identification methods. Additionally, these experimental results were compared with theoretical results if possible. The data acquisition and transformation to the frequency domain was executed by a FFT-analyser and the parameter identification procedures were performed by a HP-computer (HP 9920). Each time the MRP algorithm was executed first because of the low computation time and only rough starting values are required. If it was not possible to apply the MRP algorithm to the whole frequency range subsequently a Linear Approximation of the Residues (LAR) was performed. With those modal parameters as starting values, the NIA algorithm was performed.

The first experiment was done on a beam with rectangular cross-section supported by foamed plastics which is seen in Figure 1. This testrig has well

separated eigenvalues, no nonlinear influences and no influence from the clamping is expected. The measured data were obtained by impact testing. An acceleration pickup was attached at point 1 of the beam and all points were excited successively.

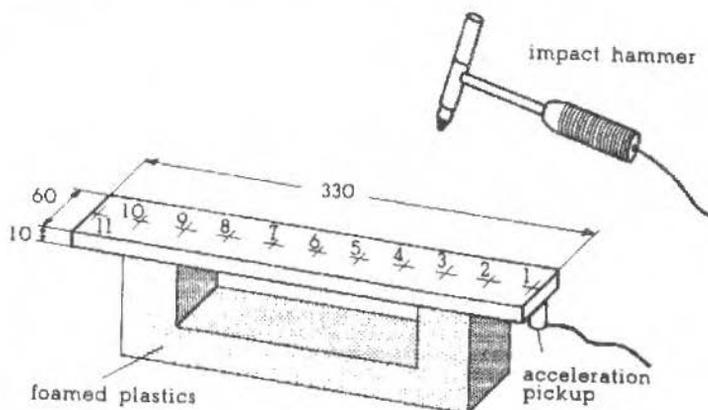


Figure 1. Model 1: Tested beam with simulated free-free condition by supporting on foamed plastics

As starting values for the MRP algorithm 4 eigenfrequencies at 1000, 2000, 3000, and 4000 Hz were taken with assumed damping of 1% of critical damping.

Figure 2 shows the measured values of the frequency response function by exciting the structure at point 1 (driving point). Additionally there is shown a mean deviation which is defined by  $\epsilon = \sqrt{E_{kl}/M}$  ( $E_{kl}$  is the sum of the squared errors of the shown FRF and  $M$  the Number of measured frequencies).

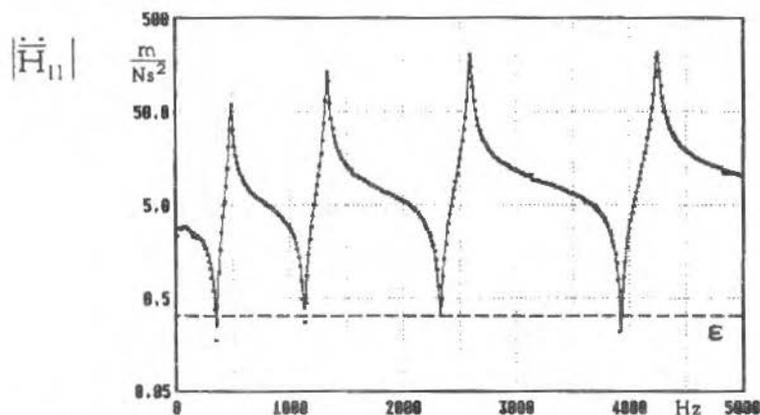


Figure 2. Comparison between the measured values and the identified frequency response function at point 1 (driving point)

The excellent results can be also shown by comparing the experimental results of eigenfrequencies and modeshapes with theoretical ones, where the latter were corrected by terms which include the influence of shear deformation and rotary inertia. This comparison is done in Table 1, where for the measured values the complex modes are given calculated by eq. (2). The values were normalized to a modal mass  $\mu_r$  of 1000 kg. The NIA algorithm performed with these modal parameters as starting values didn't lead to other results.

Table 1. Comparison between identified and theoretical values of eigenfrequencies and mode shapes of model 1

Mode 1		Mode 2		Mode 3	
identified values $f = 483.2 \text{ Hz}$	theor. values $f = 486.6 \text{ Hz}$	identified values $f = 1328.3 \text{ Hz}$	theor. values $f = 1332.9 \text{ Hz}$	identified values $f = 2589.9 \text{ Hz}$	theor. values $f = 2589.9 \text{ Hz}$
48.218 - j0.354	47.158	44.236 - j0.341	44.690	40.442 - j0.354	42.283
24.761 - j0.258	24.446	6.156 - j0.027	7.074	-9.308 - j0.094	-8.126
3.109 - j0.026	3.066	-22.971 - j0.181	-22.265	-33.181 - j0.041	-33.265
-18.516 - j0.244	-14.762	-34.478 - j0.276	-33.660	-17.623 - j0.086	-18.218
-27.652 - j0.299	-26.654	-24.574 - j0.227	-23.925	17.561 - j0.076	17.680
-32.077 - j0.240	-30.835	0.946 - j0.002	0.000	36.176 - j0.102	36.081
-27.758 - j0.332	-26.654	24.066 - j0.223	23.925	18.145 - j0.105	17.680
-15.837 - j0.354	-14.762	34.354 - j0.274	33.660	-16.958 - j0.089	-18.218
1.925 - j0.145	3.066	24.175 - j0.203	22.265	-33.358 - j0.028	-33.265
23.746 - j0.111	24.446	-4.705 - j0.014	-7.074	-11.033 - j0.021	-8.126
46.690 - j0.173	47.158	-42.056 - j0.444	-44.690	37.249 - j0.019	42.283

The next test specimen was a turbine blade clamped on a vibration isolated foundation shown in Figure 3. The acceleration was measured at one point at the end of the blade and the excitation at 83 points on the upper surface was realized by an impact hammer. The frequency response function was measured in the range of 5 to 2000 Hz between all excitation points and the response point.

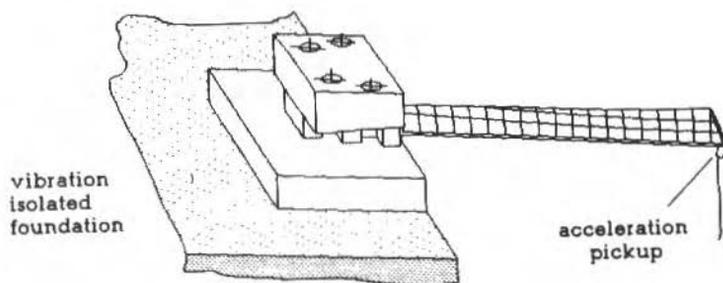


Figure 3. Tested turbine blade

In this case it was not possible to apply the MRP algorithm to the whole frequency range. The first reason is the increasing numerical instability caused by the numbers of eigenvalues. A further reason are the great differences of the maxima of the frequency response function which can be seen in Figure 4.

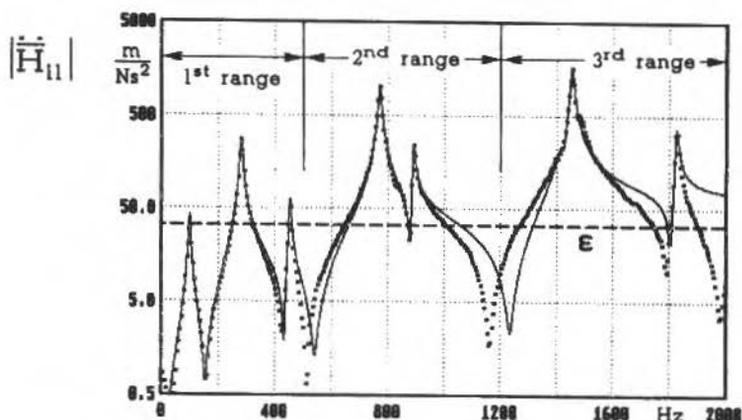


Figure 4. Frequency response function of the driving point and composed analytical function from the MRP algorithm

In addition, the measured data were disturbed by influences of the clamping mainly in the higher frequency range e.g. in Figure 4 between 1400 and 1600Hz. Therefore, the measured data were analysed in three frequency ranges which are shown in Figure 4. Each frequency range was separately analysed as described by eq. (16). Because it was necessary to apply an exponential window for FFT to prevent leakage errors the measured data contain an additional damping which reached up to 90% of the identified damping constant at the first eigenvalue. Figure 4 shows the frequency response function composed by the modal parameters, calculated in ranges, in the whole frequency range without residual terms compared with measured data at the driving point. The composed frequency response function corresponds well with the measured data near the resonances, not so near the antiresonances. The level of the mean deviation is relatively high compared with the function near the first three eigenfrequencies.

Figure 5 shows the same measured values, but the identification was now executed by the NIA algorithm. Five iteration steps were used with starting values for the modal parameters calculated by the MRP algorithm. Now the

correspondence of the composed function is better near the antiresonances although the level of mean deviation decreased very slightly.

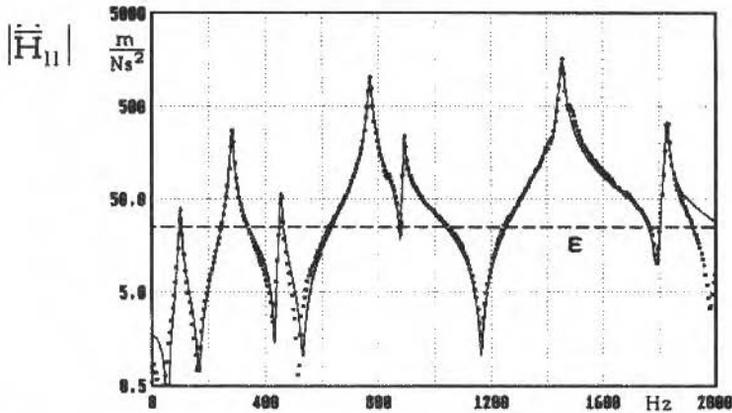


Figure 5. Frequency response function of the driving point and composed analytical function from the NIA algorithm

Table 2 shows the different values of the identified eigenfrequencies and damping ratios of these two different algorithms compared with analytical values which were calculated at our Institute [6]. The parameters identified by the MRP and NIA algorithm show only few differences even the damping ratios with the exception of the mode identified at about 1420 Hz.

Table 2. Comparison between the identified eigenfrequencies and damping ratios and with theoretical eigenfrequencies

MRP Algorithm		NIA Algorithm		Theoretical	Character of the mode shape
f [Hz]	$\zeta$ [%]	f [Hz]	$\zeta$ [%]	f [Hz]	
98.909	3.3371	98.803	3.4717	104	1. bending
280.391	1.5550	280.346	1.5769	302	2. bending
452.808	0.7359	452.792	0.7930	463	3. bending
770.309	0.7307	770.286	0.7404	790	4. bending
889.960	0.3831	889.966	0.3838	815	1. torsion
1421.557	0.6444	1416.544	0.9986	-	-
1453.557	0.4540	1453.580	0.4611	1461	5. bending
1826.834	0.2523	1826.857	0.2512	1466	2. torsion

But this mode could not be confirmed by theory and moreover it is weakly to

detect in the measured data. Therefore it can be concluded that this mode is only caused by disturbance of the structure e.g. by the clamping condition. The eigenfrequencies of the bending modes are always higher than the identified ones caused mainly by the assumption of rigid clamping in the theory. Regarding the torsional modes, it is known that our theoretical model has to be improved [6].

To decrease the mean deviation for the MRP algorithm between the measured values and the identified frequency response function, a first way is to take the eigenfrequencies and damping ratios from Figure 4 and perform a Linear Approximation (LAR) for the Residues related to the mode shapes and the residual terms over the whole measured frequency range. This procedure, given above in eq. (12), takes very short computation time compared with the iterative algorithms.

Table 3. Comparison of the mean deviation  $\varepsilon = \sqrt{E_{k\ell} / M}$  [m/Ns<sup>2</sup>] of the first 10 frequency response functions

Point		MRP	LAR	NIA
l	k			
1	1	33.073	26.137	25.890
2	1	21.852	21.292	20.749
3	1	10.183	9.207	8.321
4	1	13.752	13.248	13.251
5	1	9.446	8.779	8.757
6	1	7.075	6.677	6.098
7	1	10.081	8.928	8.593
8	1	10.633	6.112	6.169
9	1	7.862	3.135	3.072
10	1	5.528	4.418	4.411

As a comparison, Table 3 shows the mean deviations of 10 frequency response functions between the acceleration point and the points of excitation, first evaluated by the MRP algorithm in frequency ranges, second after correction of the linear terms by the LAR algorithm and third evaluated by the NIA algorithm. The comparison of the mean deviations shows, that the LAR algorithm yields results which are of comparable quality than those from the following NIA algorithm. That proves that the eigenvalues calculated by the MRP algorithm were accurate and the most discrepancies are caused by the local modal parameters. The time-extensive NIA algorithm has changed the modal parameters only slightly.

The final experiment was done on a circular disc. The problem of testing a disc are the double modes with theoretically identical eigenfrequencies which are practically more or less slightly different by the influences of additional masses of the accelerometers or other perturbations.

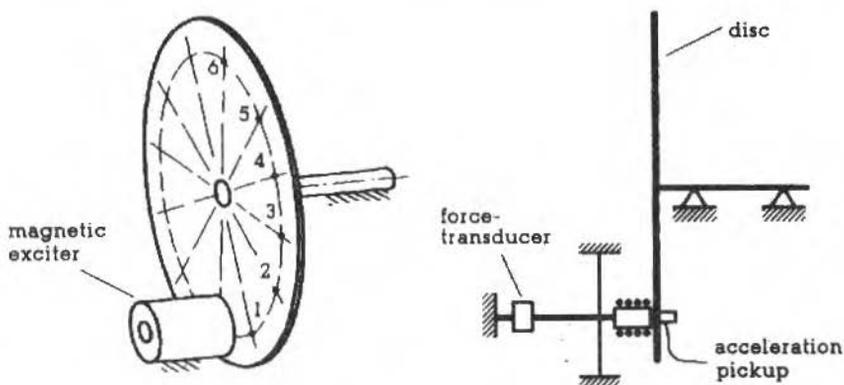


Figure 6. Tested circular disc with the magnetic exciter

The excitation was realized by a magnetic exciter with integrated force transducer which is shown in Figure 6. Because nothing was known about the mode shapes and consequently about a reasonable position of the driving point we put three accelerometers on the disc at point 1 to 3. The excitation point was varied between point 1 to 6 by rotating the disc. In this way we got simultaneously 3 frequency response functions and 18 in all, and thus 6 columns and 3 rows of the frequency response function matrix.

The excitation signal was pseudo random generated by a function generator with a period adjusted to the acquisition time of the used FFT-analyser. The data acquisition was executed by an average of the response due to 25 pseudo random signals. The signal was varied 10 times at each excitation point.

Like in the test of the turbine blade it was not possible to apply the MRP algorithm to all data over the whole frequency range. Therefore, the frequency range was divided into several ranges as shown in Figure 7 and each frequency range was analysed with the MRP algorithm in the same way as done for the turbine blade. Figure 7 shows the frequency response function, including the level of the mean deviation, composed of the identified modal parameters without any residual terms.

Figure 8 shows the same measured values compared with a frequency response function composed of the modal parameters evaluated by the NIA algorithm (9 iterations) with starting values from Figure 7. In both cases, those mode shapes were used which were evaluated by taking point 1 as driving point. Although this time not all measured frequency lines were considered in the MRP algorithm (Figure 7), the comparison of both figures shows similar behaviour as the corresponding figures from the blade with respect to the quality of the fitted curves near the resonances and antiresonances and to the mean deviation.

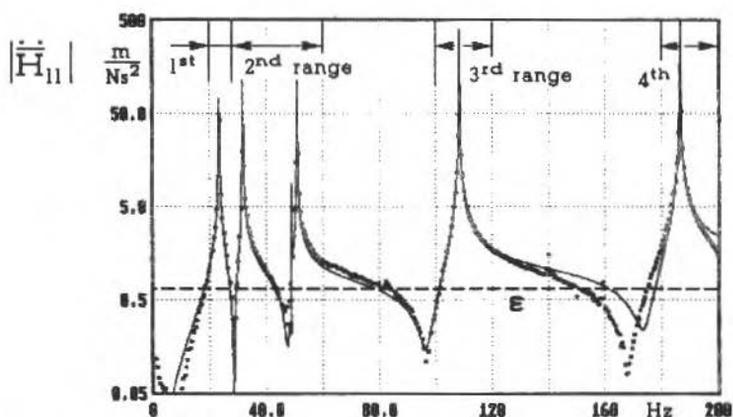


Figure 7. Frequency response function of the driving Point 1 and composed analytical function from the MRP algorithm

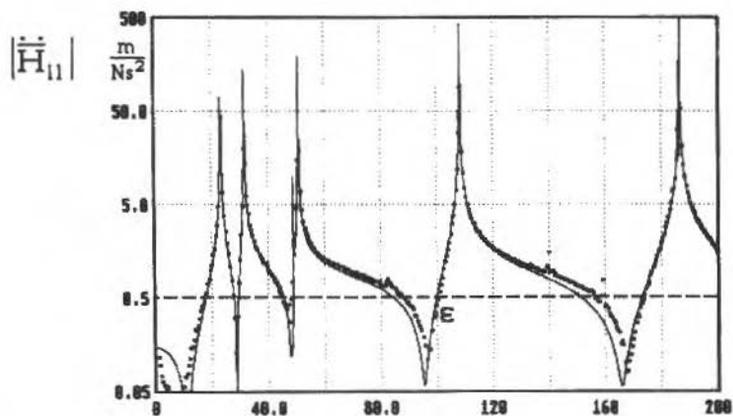


Figure 8. Frequency response function of the driving Point 1 and composed analytical function from the NIA algorithm

As before for the blade, we have compared the eigenfrequencies and damping ratios identified by the two methods. Additionally, the eigenfrequencies were compared with theoretical values calculated as described in [7]. Table 4 shows the result of this comparison. The type of the mode is given in form of number of nodal diameters (OD, 1D, 2D,...) and number of nodal circles (OC, 1C,...). A comparison of the parameters identified by the MRP and NIA algorithm shows a good agreement with respect to the eigenfrequencies, but deviations in the damping ratios which can be compared with the corresponding table from the blade. The theoretical eigenfrequencies show slightly smaller values in the 6 highest modes which may be caused by no exact knowledge of the elasticity and of the mass density of the disc. The contrary behaviour of the three lowest modes may be caused by the rigid clamping which is assumed in the theory.

Table 4. Comparison between the identified eigenfrequencies and damping ratios and with theoretical eigenfrequencies of the disc

MRP Algorithm		NIA Algorithm		Theoretical	Character of the
f [Hz]	$\zeta$ [%]	f [Hz]	$\zeta$ [%]	f [Hz]	mode shape
23.344	0.1421	23.344	0.1481	25.351	1D / OC
23.477	0.1751	23.374	0.1786	25.351	1D / OC
31.677	0.0872	31.678	0.0861	33.326	0D / OC
48.768	0.0226	48.768	0.0230	45.435	2D / OC
50.831	0.0311	50.831	0.0324	45.435	2D / OC
108.374	0.0127	108.374	0.0150	103.241	3D / OC
108.537	0.0275	108.536	0.0261	103.241	3D / OC
186.319	0.0113	186.320	0.0113	181.194	4D / OC
186.750	0.0097	186.750	0.0097	181.194	4D / OC

Table 5. Comparison of the mean deviation  $\epsilon = \sqrt{E_{k\ell}} / M$  [m/Ns<sup>2</sup>] of 9 frequency response functions of the disc

Point		MRP	LAR	NIA
1	k			
1	1	0.6158	0.5180	0.5126
1	2	0.5114	0.4621	0.4574
1	3	0.6112	0.5926	0.5896
2	1	0.4310	0.3626	0.3658
2	2	0.4836	0.3400	0.3349
2	3	0.4348	0.3970	0.4035
3	1	0.3470	0.2599	0.2631
3	2	0.3855	0.3713	0.3806
3	3	0.4723	0.3287	0.3344

A comparison of the mean deviations of 9 frequency response functions shown in Table 5 leads to the same conclusions as in Table 3.

The resolution of the measured data in this experiment was 0.5 Hz. The difference of the identified eigenfrequencies is partly down to 0.1 Hz. Therefore, we examined the mode shapes to prove that the double eigenfrequencies are not caused by deviations of the measured data. In this example, we have 3 driving points for calculating the mode shapes from the residues of the identification procedures, although they were only formulated for using one driving point. Therefore, we get different results for the mode shapes depending on the driving point we use.

The results of our experiment have shown that the double mode shapes were only calculated sufficiently accurate when the values of both mode shapes were approximately equal at the driving point. The values of those mode shapes which comply with this condition are listed in Table 6 normalized to a modal mass  $\mu_r$  of 1000 kg. In addition, Table 6 shows the driving points used for these tests.

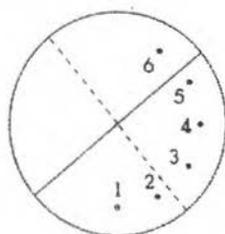
From the theory, it is known that the mode shapes around the circle of an **axi-symmetric** disc are harmonic waves. Consequently, we performed a curve fit of the measured mode shape values on the basis of a harmonic wave to estimate the mode shape amplitude and the nodal lines. The mode shape values from the approximated harmonic waves are compared with the measured values in Table 6. Additionally, there are given the amplitudes of the waves, the angles from point 1 to the nearest nodal line (countered anticlockwise) of the mode shape and, for comparison, the theoretical amplitudes calculated as described in [7]. Table 6 shows that the approximated double mode shapes fulfill the condition of orthogonality rather well although we had only few measured data near the eigenfrequencies. Even the comparison with the theoretical amplitudes of the modes shows sufficient results.

## CONCLUSIONS

The performed experiments leads to following conclusions. The MRP algorithm gives good results in eigenvalues even if the measured data can be analysed only in frequency ranges. In that case, however, the local parameters, residues and residual terms, have some deviations which can be decreased by a LAR algorithm. A further advantage is that the MRP algorithm needs only rough starting values and needs relatively few computation time. The most important

Table 6. Mode shape values of the disc compared with approximated harmonic waves and theoretical values

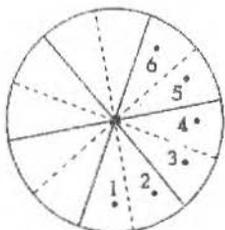
Point	Mode shape 1D OC $f = 23.344$ Hz		Driving Point 1 $f = 23.474$ Hz		
	identified value	approx.	identified value	approx.	
1	15.248 -j 0.256	15.381	11.339 -j 1.265	12.65	12.728
2	19.337 -j 0.046	19.565	4.370 -j 2.270	2.270	2.937
3	20.059 -j 2.973	18.508	-10.136 -j 1.887	1.887	-7.641
4	11.141 -j 0.481	12.491	-18.508 -j 0.828	0.828	-16.171
5	2.318 -j 0.739	3.127	-18.562 -j 1.713	1.713	-20.369
6	-6.019 -j 0.413	-7.075	-20.965 -j 0.067	0.067	-19.108
Approx. amplitude		19.814 <sup>o</sup>			20.579
Angle to nodal line		129.06 <sup>o</sup>			38.21 <sup>o</sup>
Theor. amplitude		18.768			18.768



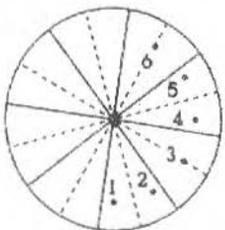
Point	Mode shape 2D OC $f = 48.768$ Hz		Driving Point 3 $f = 50.831$ Hz		
	identified value	approx.	identified value	approx.	
1	1.189 -j 0.050	0.246	-14.325 -j 0.110	0.110	-18.014
2	16.604 -j 0.002	16.644	-6.751 -j 0.290	0.290	-9.216
3	15.893 -j 0.511	16.398	10.802 -j 0.445	0.445	8.798
4	0.134 -j 0.026	-0.246	22.207 -j 0.921	0.921	18.014
5	-16.148 -j 0.349	-16.644	11.149 -j 0.196	0.196	9.216
6	-17.425 -j 0.202	-16.398	-6.260 -j 0.061	0.061	-8.798
Approx. amplitude		19.078			18.015
Angle to nodal line		89.63 <sup>o</sup>			45.38 <sup>o</sup>
Theor. amplitude		18.220			18.220



Point	Mode shape 3D OC $f = 108.374$ Hz		Driving Point 3 $f = 108.536$ Hz		
	identified value	approx.	identified value	approx.	
1	-15.626 -j 2.226	-15.588	-8.183 -j 4.799	4.799	-8.107
2	-8.254 -j 1.084	-10.035	17.244 -j 2.444	2.444	15.170
3	18.481 -j 0.479	18.588	7.639 -j 0.242	0.242	8.107
4	9.673 -j 2.139	10.035	-11.949 -j 3.364	3.364	-15.170
5	-15.521 -j 0.060	-15.588	-8.181 -j 0.397	0.397	-8.107
6	-11.804 -j 1.273	-10.035	14.613 -j 3.370	3.370	15.170
Approx. amplitude		18.538			17.200
Angle to nodal line		40.92 <sup>o</sup>			9.37 <sup>o</sup>
Theor. amplitude		17.306			17.306



Point	Mode shape 4D OC $f = 186.320$ Hz		Driving Point 2 $f = 186.750$ Hz		
	identified value	approx.	identified value	approx.	
1	9.611 -j 1.366	7.542	-12.551 -j 0.086	0.086	-13.867
2	6.396 -j 0.349	7.467	13.718 -j 0.106	0.106	12.710
3	-14.927 -j 0.062	-15.309	-0.830 -j 0.037	0.037	1.158
4	6.820 -j 0.042	7.542	-14.784 -j 0.781	0.781	-13.867
5	9.363 -j 0.485	7.467	12.078 -j 0.131	0.131	12.709
6	-14.842 -j 0.203	-15.309	3.522 -j 0.093	0.093	1.157
Approx. amplitude		15.311			15.388
Angle to nodal line		37.30 <sup>o</sup>			16.08 <sup>o</sup>
Theor. amplitude		16.291			16.291



disadvantage is the numerical instability by solving the system of linear equations. This may be prevented by using orthogonal polynomials.

The advantage of the NIA algorithm is the numerical stability. In addition, the algorithm converges to a minimum of the errorfunction in few steps if the starting values are closely to the true parameters. But compared with the results from the MRP algorithm the improvement of the modal parameters was rather low in all examples. A further disadvantage is the large computation time of the NIA algorithm.

A disadvantage of both methods is that they don't consider the symmetry of the frequency response function matrix. This lead to different mode shapes if more than one column or row of the frequency response function matrix is measured.

#### REFERENCES

- [ 1 ] Busturia, J.M. and Gimenez, J. - Multiexcitation multiresponse nonlinear least squares algorithm, Proc. 10th Int. Seminar on Modal Analysis, Part IV, Leuven, Belgium, 1985.
- [ 2 ] Brown, D.L.; Allemang, R.J.; Zimmerman, R.; Mergeay, M. - Parameter estimation techniques for modal analysis, Proc. 10th Int. Seminar on Modal Analysis, Part I, Leuven, Belgium, 1985.
- [ 3 ] Van der Auweraer; Snoeys, R. and Leuridan, J. - A global frequency domain modal parameter estimation technique for mini-computers, Proc. 10th Int. Seminar on Modal Analysis, Part II, Leuven, Belgium, 1985.
- [ 4 ] Leuridan, J.; Lipkens, J.; Van der Auwerer, H.; Lembregts, F. - Global modal parameter estimation methods: An assessment of time versus frequency domain implementation, Proc. 10th Int. Seminar on Modal Analysis, Part II, Leuven, Belgium, 1985.
- [ 5 ] Kim, K.-J. and Sim, C.-G. - A new curve fitting algorithm for modal parameter estimation, 5th Int. Modal Analysis Conf., London, 1987.
- [ 6 ] Hohlrieder, M. - Experimentelle und numerische Ermittlung der Eigenschwingungsgrößen einer Dampfturbinenschaukel, M. Sc. Thesis, University of Kassel, 1987.
- [ 7 ] Leissa, A.W. - Vibration of plates, Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration, 1969.

## MATERIAIS PARA FOTOELASTICIDADE DE REFLEXÃO

### MATERIALS FOR PHOTOELASTIC COATING

**SONIA APARECIDA GOULART DE OLIVEIRA - Membro da ABCM**  
**HENNER ALBERTO GOMIDE - Membro da ABCM**

UFU - Departamento de Engenharia Mecânica  
Caixa Postal 593 - Campus Santa Mônica  
Uberlândia, MG - Brasil - CEP 38400

#### RESUMO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de materiais para fotoelasticidade de reflexão, usando matéria-prima nacional. Esta técnica tem sido pouco usada no Brasil devido a problemas de importação. Para obtenção destes materiais, usou-se resinas e endurecedores nacionais. Combinando os componentes básicos em proporções variadas obteve-se várias composições, das quais foram selecionadas as duas melhores, baseado nas propriedades mais importantes. Neste trabalho são apresentados o procedimento de obtenção, as propriedades necessárias para o estudo das tensões/deformações usando a técnica da fotoelasticidade de reflexão e os resultados quantitativos em um espécimen com solução analítica conhecida.

**Palavras-chave:** Materiais para fotoelasticidade · Fotoelasticidade de Reflexão · Análise de Tensões/Deformações em Superfícies

#### ABSTRACT

This work deals with the development of a material for the photoelastic coating technique, using Brazilian raw materials. This technique has not been largely used in Brazil owing to difficulties with the importation of the photoelastic materials. To obtain the materials it was used four kinds of epoxy resins and four kinds of amine curing agents as hardeners, all produced by Ciba Geigy - Química S.A. do Brasil. By the combination of the basic components in different amount, several composition were obtained. Among these, the two ones that showed the best properties for photoelastic coating were chosen. This work describes the procedure used to obtain the materials, the properties required to apply the technique and also presents a results of a simple specimen.

**Keywords:** Photoelastic Materials · Photoelasting Coating · Stress Strain in Superfícies

## NOMENCLATURA

$E^c, E^s$	Módulo de Elasticidade do material fotoelástico e do espécimen (MPa)
K	Constante ótica
$K_\epsilon$	Valor da franja para deformação (m/franja)
$K_\sigma$	Valor da franja para tensão (KN/m)
N	Ordem da franja (franja)
Q	Figura de mérito ( $m^{-1}$ )
$T_c$	Temperatura critica ( $^{\circ}C$ )
$t^c, t^s$	Espessura da camada fotoelástica e do espécimen (mm)
$\epsilon_1^c, \epsilon_2^c$	Deformações principais na camada fotoelástica
$\epsilon_1^s, \epsilon_2^s$	Deformações principais na espécimen
$\lambda$	Comprimento de onda (nm)
$\nu^c, \nu^s$	Razão de Poisson do material fotoelástico e do espécimen
$\sigma_1^c, \sigma_2^c$	Tensões principais na camada fotoelástica (MPa)
$\sigma_1^s, \sigma_2^s$	Tensões principais no espécimen (MPa)

## INTRODUÇÃO

Atualmente no Brasil o uso das técnicas experimentais de análise de tensões tem aumentado muito devido aos avanços tecnológicos. Estas técnicas são muito usadas para estabelecer condições de projeto, melhorar a confiabilidade e qualidade dos produtos e otimizar componentes estruturais, constituindo, portanto, em ferramentas de grande valor em engenharia.

A fotoelasticidade de reflexão é usada para determinar as tensões/deformações na superfície dos corpos. Este conceito surgiu na França nos anos 30, mas alcançou um desenvolvimento significativo na década de 50 com Zandman et alii [1,2,3]. A teoria relativa de aquisição e interpretação dos resultados, foi publicada em uma monografia de Zandman, Redner e Daly [4], que reúne os estudos feitos até a data, no campo da fotoelasticidade de reflexão. Mais recentemente, foram publicados vários trabalhos enfocando métodos de separação de tensões na camada fotoelástica [4,5,6].

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de materiais usando matéria-prima nacional. Os componentes usados foram a resina epoxi (Araldite) e endurecedores a base de aminas, produzidos no Brasil. São apresentadas as técnicas de obtenção e as propriedades dos materiais selecionados, bem como uma aplicação com dados quantitativos.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A técnica da fotoelasticidade de reflexão consiste em colar na superfície do espécimen a ser analisado uma camada de material fotoelástico, com uma cola apropriada que produza uma superfície reflexiva na interface - espécimen/camada. Quando o espécimen é carregado, a deformação na superfície do mesmo é transmitida para a camada fotoelástica. Considerando que na superfície de contato a aderência é perfeita, as deformações em qualquer direção são iguais na camada (c) e no espécimen (s). Assim, através da lei ótica para materiais fotoelásticos [5], tem-se que:

$$\varepsilon_1^c - \varepsilon_2^c = \varepsilon_1^s - \varepsilon_2^s = \frac{NK_\varepsilon}{2t^c} \quad (1)$$

Utilizando os conceitos básicos da teoria da elasticidade [5], e assumindo que devido à pequena espessura a camada está submetida a um estado plano de tensão, o estado de tensão no espécimen está relacionado com os parâmetros do problema, através da relação:

$$\sigma_1^s - \sigma_2^s = \frac{E^s(1+\nu^c)}{E^c(1+\nu^s)} \cdot \frac{NK_\sigma}{2t^c} = \frac{E^s}{1+\nu^s} \frac{NK_\varepsilon}{2t^c} \quad (2)$$

Como na fotoelasticidade de transmissão, os parâmetros óticos obtidos permitem a determinação completa do estado de tensão/deformação na superfície do espécimen [4,5]. Assim, a ordem de franja, definida pelas isocromáticas, permite a determinação da diferença das tensões principais e as isoclínicas a determinação das direções das tensões principais. Uma vez obtidos estes parâmetros, vários métodos de separação de tensões podem ser empregados [5,6] para determinar as tensões, sendo o mais usado o da incidência oblíqua.

## OBTENÇÃO E SELEÇÃO DOS MATERIAIS

Os materiais fotoelásticos utilizados nesta técnica são normalmente resinas epoxi curadas com endurecedores a base de aminas e anidridos. Estes materiais são escolhidos tendo em vista suas propriedades como: alta constante ótica, baixo módulo de elasticidade, alta resistência a relaxação ótica e mecânica e alto limite elástico. Além destas propriedades, o material deve ser de fácil obtenção, transparente, fácil de ser usinado, não apresentar manchas óticas, livre de tensões residuais, baixo custo e possuir características que possibilitem a sua utilização em superfícies irregulares.

As resinas e endurecedores utilizados neste trabalho são produzidos pela CIBA GEIGY Química S.A. do Brasil. As resinas têm marca registrada de Araldite, sendo: CY205, MY750, CY248 e XGY1109. Os endurecedores usados, à base de aminas, são agentes capazes de desencadear a ligação entre as duas moléculas de epoxi, sendo quatro os tipos de endurecedores escolhidos: HY943, HY951, HY956 e HY960. Os materiais foram obtidos através da combinação proporcional das resinas, com cada tipo de endurecedor. Para os componentes selecionados, a proporção usada inicialmente foi de 100pp (partes em peso) das resinas com 50pp dos endurecedores.

A Tabela I mostra os materiais obtidos, onde os componentes resinas e endurecedores foram ordenados segundo observações relativas a transparência e fragilidade, contendo também informações sobre a cor e endurecimento.

Tabela I. Materiais obtidos com fundição a temperatura ambiente (25°C) em espessuras de 2mm, tendo 100pp de resina e 50pp de endurecedor

	HY 951	HY 956	HY 943	HY 960
CY 248	-OPACO -NÃO ENDURECEU -BRANCO	-OPACO -VISCOELÁSTICO -BRANCO -DEFEITOS SUPERFICIAIS	-TRANSPARENTE -VISCOELÁSTICO -BRANCO -MANCHAS BRANCAS	-TRANSPARENTE -QUEBRADIÇO -AMARELO
HGY 1109	-SEMI-TRANSPARENTE -NÃO ENDURECEU -BRANCO	-TRANSPARENTE -VISCOELÁSTICO -BRANCO	-TRANSPARENTE -ENDURECIMENTO NORMAL -BRANCO -MANCHAS	-TRANSPARENTE -MUITO QUEBRADIÇO -AMARELO
CY 205	-TRANSPARENTE -VISCOELÁSTICO -BRANCO	-TRANSPARENTE -ENDURECIMENTO NORMAL -BRANCO -DEFEITOS SUPERFICIAIS	-TRANSPARENTE -ENDURECIMENTO RÁPIDO -BRANCO -QUEBRADIÇO	-TRANSPARENTE -MUITO QUEBRADIÇO -AMARELO
MY 750	-TRANSPARENTE -VISCOELÁSTICO	-TRANSPARENTE -BRANCO -ENDURECIMENTO NORMAL	-TRANSPARENTE -QUEBRADIÇO -BRANCO -ENDURECIMENTO RÁPIDO	-TRANSPARENTE -SUPER QUEBRADIÇO -AMARELO

OBS.: A FRAGILIDADE E TRANSPARÊNCIA CRESCEM DA ESQUERDA PARA DIREITA E DE CIMA PARA BAIXO.

Após a análise preliminar que acarretou a eliminação de algumas composições, com base nos resultados da Tabela I, uma segunda etapa de testes foi feita com 100pp de resina e Xpp de endurecedores, com X variando entre 10 e 50. Através das combinações nas proporções mencionadas, fez-se a seleção das melhores com-

posições tendo em vista as características requeridas para um bom material. Desta forma, os materiais obtidos com a resina CY205 tratada com 20 e 30pp do HY951 e 30 e 40pp do HY956 e a resina XGY1109 com respectivamente 20 e 30pp de HY956 e HY943, apresentaram como sendo os melhores materiais. De posse destes oito materiais, foram feitas medidas do módulo de elasticidade ( $E^c$ ) e do valor da franja ( $K_{\sigma}$ ), permitindo determinar os materiais com maior figura de mérito ( $Q = E^c / K_{\sigma}$ ) [5]. Assim, as combinações selecionadas, resina/100 - endurecedor/X, foram:

CY205/100-HY951/20  
HGY1109/100-HY943/30

#### TÉCNICAS DE PREPARAÇÃO E COLAGEM DO MATERIAL

O sucesso na obtenção de resultados usando a técnica da fotoelasticidade de reflexão depende de vários fatores. A preparação dos moldes, fundição dos materiais e a colagem do material fotoelástico no espécimen são etapas importantes na aplicação da técnica. Assim, para a obtenção dos materiais, estes devem ser fundidos em moldes especiais, devido ao grande poder de adesão do Araldite durante o período de cura. Os moldes devem ser posicionados sobre uma mesa nivelada, para garantir a uniformidade na espessura. Neste trabalho foram utilizados moldes de vidro, revestido com borracha de silicone (RTV-B-Dow Corning) e molduras em barras da mesma borracha [7]. Este tipo de molde garante a obtenção de superfícies lisas, evitando assim qualquer tipo de polimento. Outras técnicas podem ser utilizadas, com igual sucesso.

A preparação do material para aplicação em superfícies planas, curvas e irregulares consiste na mistura dos componentes, polimerização parcial da mistura, remoção do material do molde e modelagem do mesmo à superfície do espécimen. Para se proceder a mistura dos componentes, estes devem ser pesados separadamente e aquecidos à mesma temperatura do molde, utilizando-se neste trabalho temperaturas entre 35°C e 45°C. Este aquecimento facilita a mistura dos componentes, pois diminui a viscosidade dos mesmos e proporciona uma reação ou cura mais uniforme ao longo da superfície ou placa do material a ser obtido. Após o aquecimento, os materiais devem ser misturados lentamente, para evitar a formação de bolhas, até a completa homogeneização. Nesta etapa, observa-se uma elevação na temperatura da mistura no início da cura, sendo que esta não deve ultrapassar 50°C. Temperatura maior poderá causar uma reação brusca devido ao alto poder reativo de endurecedores a base de aminas, além do efeito cataliza-

dor da temperatura, provocando a perda da mistura ou gerando manchas óticas no material acabado. Em seguida a mistura é vazada lentamente no molde e espalhada para que ocupe toda a área útil do mesmo. Bolhas de ar que eventualmente apareçam devem ser eliminadas e o molde coberto para proteger a superfície do material. Como a espessura máxima do material fotoelástico usado nesta técnica não é superior a 3mm, a geração interna de calor, devido à reação exotérmica, nunca ultrapassa a temperatura crítica dos materiais desenvolvidos. Isto resulta em materiais óticamente isotrópicos.

Para os materiais selecionados, a geração interna de calor ou temperatura máxima, durante a cura, foi medida para diferentes espessuras. Desta forma, a espessura máxima recomendada para o CY205/100-HY951/20 é de 3mm e para o XGY1109/100-HY943/30 é de 5mm. Estes valores foram encontrados considerando-se a temperatura máxima de cura para uma determinada espessura, inferior a temperatura crítica do material. Temperaturas maiores ocasionam manchas óticas no material. A Figura 1 mostra a variação da temperatura com o tempo, durante a cura do XGY1109/100-HY943/30, para uma placa de 5mm de espessura, obtida usando termopar de cobre-constantan e um sistema de aquisição de dados. Devido a sua espessura, este material tem sua utilização também recomendada para fotoelasticidade plana.

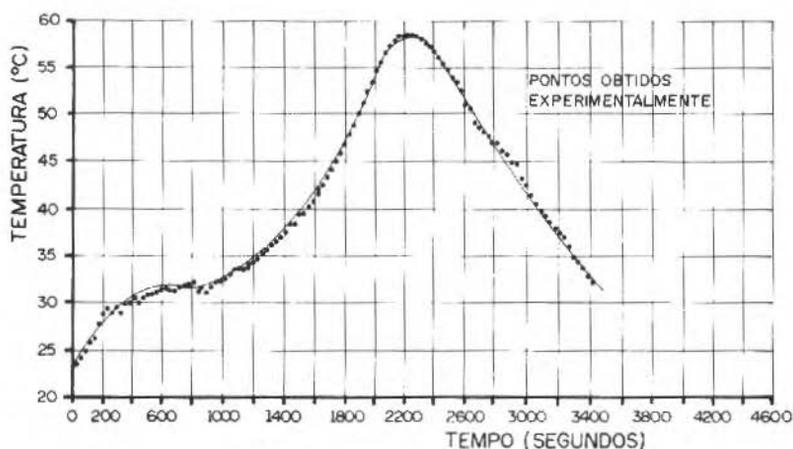


Figura 1. Variação da temperatura de cura com o tempo; placa de XGY1109/100 - HY943/30 de 5mm de espessura

O material fotoelástico desenvolvido passa por diversos estágios de polimerização durante a cura, o que possibilita a sua modelagem em superfícies curvas

e/ou irregulares. O estágio denominado semi-polimerizado, no qual o material se encontra mecanicamente estável mas altamente flexível, é alcançado após determinado tempo de cura. A principal característica do material neste estágio é a falta de memória fotoelástica, isto é, o material pode ser deformado sem apresentar qualquer tipo de efeito ótico depois de totalmente polimerizado. O tempo gasto pelo material para atingir o estágio de semi-polimerização depende da temperatura ambiente, da espessura e da composição do material. Para o CY205/100-HY951/20 o tempo de semi-polimerização foi de 1:30 horas, para uma temperatura ambiente de aproximadamente 25°C e uma espessura de 2mm. Para o XGY1109/100-HY943/30 o tempo foi de 40 minutos, para uma temperatura ambiente de 28°C e uma espessura de 2mm.

Para a aplicação em superfícies curvas e/ou irregulares o material é desmoldado durante este estágio e modelado na superfície do espécimen. A remoção do material é feita puxando-o com movimentos contínuos e lentos, evitando dobras, como mostra a Figura 2. Após a remoção, o material é recortado com uma tesoura e modelado lentamente sobre a superfície limpa do espécimen e impregnada de óleo mineral. Nesta etapa o material não deve ser pressionado ou forçado sobre a superfície, para evitar distensão do mesmo. O tempo de trabalho é de aproximadamente 15 minutos, a partir do qual o material torna-se difícil de ser trabalhado.

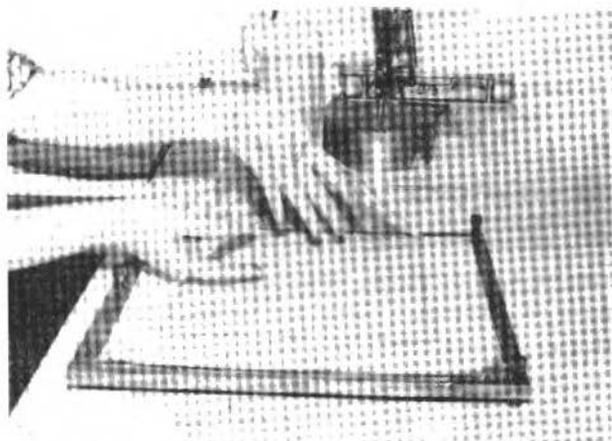


Figura 2. Remoção do material semi-polimerizado do molde

O estágio final da polimerização se dá entre 3 e 5 horas para o CY205/100 - HY951/20. Na obtenção de placas planas este estágio é atingido antes da des-

moldagem. Para moldes curvos e/ou irregulares, após a modelagem, o material deve permanecer sobre a superfície até a completa polimerização. Após a cura a temperatura ambiente, o modelo deve ser submetido a um tratamento térmico a  $70^{\circ}\text{C}$  durante 24 horas. Este tratamento propicia uma completa reação e homogeneização do material, melhorando suas propriedades. Medidas comparativas do módulo de elasticidade ( $E^c$ ) e do valor da franja para tensão ( $K_{\sigma}$ ), antes e depois deste tratamento, comprovam uma melhoria nestas propriedades entre 10 e 15%, além de sua completa estabilização [7]. A Figura 3 mostra um modelo irregular pronto para ser colado no espécimen.



Figura 3. Modelo irregular e espécimen prontos para serem colados

#### PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Como foi visto, os materiais para fotoelasticidade de reflexão devem apresentar características e propriedades específicas para a determinação das tensões/deformações no espécimen, a partir dos fenômenos óticos observados na camada fotoelástica. Algumas destas propriedades, como módulo de elasticidade ( $E^c$ ), valor da franja para tensão ( $K_{\sigma}$ ) e razão de Poisson ( $\nu^c$ ), estão diretamente ligadas à sensibilidade da camada e são essenciais na determinação das tensões/deformações.

O módulo de elasticidade e a razão de Poisson foram determinados usando extensômetros elétricos. As propriedades óticas dos materiais ou calibração dos materiais foram obtidas usando modelos com solução analítica conhecida, feitos do

próprio material, usando polariscópio de transmissão. A variação destas propriedades óticas com a temperatura e o tempo estão mostradas nas Figuras 4 e 5. A Figura 4, mostra a típica variação de valor da franja com a temperatura, que permite determinar a temperatura crítica ( $T_c$ ) dos materiais.

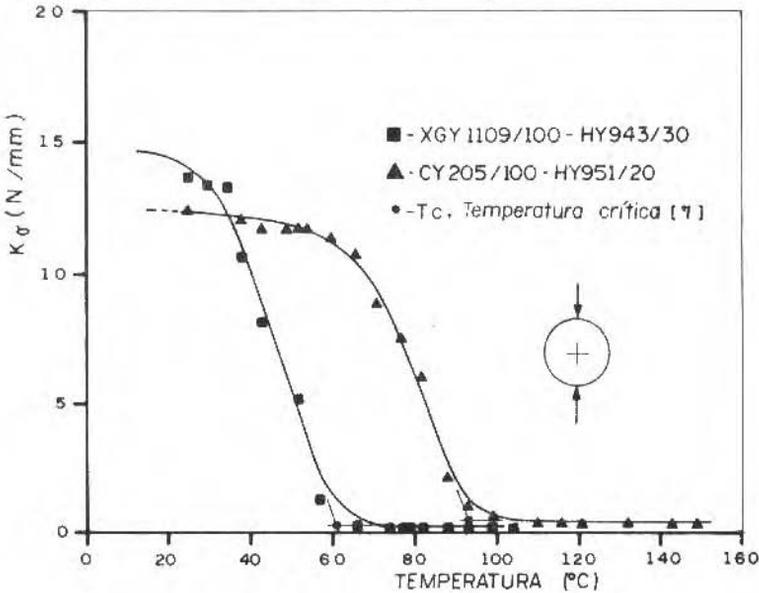


Figura 4. Variação do valor da franja para tensão x temperatura

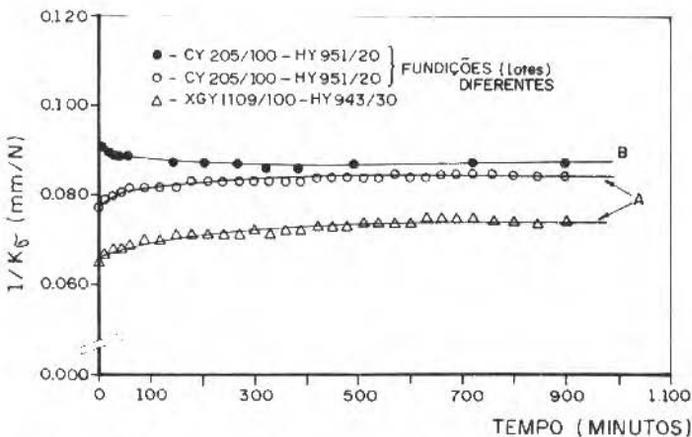


Figura 5. Valor da franja para tensão x tempo, com tensão constante. Curvas A obtidas usando polariscópio de transmissão e B de reflexão

Por outro lado, a Figura 5 mostra que o valor da franja para tensão permanece constante em função do tempo, para uma tensão constante, ou seja, os materiais não apresentam fluência (creep). Esta característica ou propriedade dos materiais desenvolvidos é de fundamental importância em qualquer análise qualitativa, onde os dados experimentais são obtidos em um intervalo de tempo considerável.

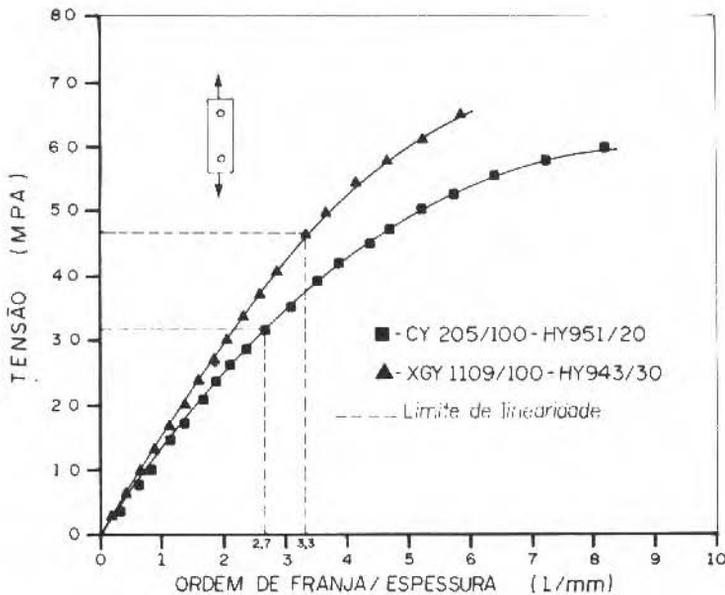


Figura 6. Limite de linearidade dos materiais desenvolvidos

Para análises de tensões/deformações em espécimes, baseado nos princípios da teoria linear da elasticidade, os materiais desenvolvidos devem também apresentar uma linearidade nas relações tensão/deformação e tensão/resposta ótica. A Figura 6 mostra a variação da ordem de franja com a tensão, onde os limites de linearidade, para os materiais, foram definidos assumindo um desvio inferior a 0,2% no coeficiente de correlação da reta na fase elástica.

Na Tabela 2 estão mostradas as principais propriedades e características dos materiais desenvolvidos e sua comparação com os similares importados.

Tabela 2. Comparação dos materiais desenvolvidos com os similares importados

MATERIAL	CY 205 / 100- HY 951/20	X6Y 1109/100 HY 943/30	PL - 1 <sup>(1)</sup>	PS - 8 <sup>(1)</sup>
PROPRIEDADES				
E (MPa)	3130	3210	2900	3100
$\nu$	0,36	0,37	0,36	0,36
$K = \frac{E^2}{1+\nu^2} \cdot \frac{\lambda}{Kg}$ <sup>(2)</sup>	0,107	0,092	0,10	0,09
T <sub>c</sub> (°C)	90	60	> 80	> 70
Nm <sub>ox</sub> (Franja/mm)	2,7	3,3	—	—
CARACTERÍSTICAS GERAIS				
PREÇO (unid.)	1	1	4	7
TEMPO CURA TOTAL (hs)	3 a 5	8 a 10	24	—
TEMPO DE SEMI-POLIMERIZAÇÃO (mi)	90 <sup>(3)</sup>	40 <sup>(4)</sup>	120	—
TEMPO DE MANUSEIO SEMI-POLIMERIZADO (mi)	10 a 20	20	20 a 25	—
ESPESSURA MÁXIMA DE FUNDAÇÃO (mm)	3	5	3	3

(1) MATERIAL IMPORTADO [8]

(2)  $\lambda \cong 577$  nm (LUZ BRANCA)

(3) ESPESSURA DE 2mm, TEMPERATURA AMBIENTE 25°C

(4) ESPESSURA DE 2mm, TEMPERATURA AMBIENTE 28°C

### APLICAÇÃO DO MATERIAL

Com o objetivo de qualificar os materiais desenvolvidos como ferramenta para o uso em análise experimental de tensões/deformações, um espécimen padrão foi analisado. Assim, a diferença das tensões foram determinadas ao longo do raio de uma viga curva, usando o método experimental da fotoelasticidade de reflexão (eq. 2), e comparados com os valores teóricos. Os resultados apresentados na Figura 7 mostram uma concordância significativa entre os valores teóricos e experimentais. É importante ressaltar que, o efeito de reforço foi computado nos resultados experimentais, sendo o fator de correção calculado para um problema de estado plano de tensão [5,7].

Os resultados obtidos com a técnica da fotoelasticidade de reflexão são altamente dependentes de uma completa adesão entre o espécimen e a camada. A cola, além de proporcionar uma perfeita aderência, deve produzir uma superfície reflexiva na interface. Na aplicação mostrada na Figura 7, foi utilizado a cola Araldite - 24 horas com 5 partes em peso de purpurina. Após a completa mistu-

ra, a cola foi espalhada na área, de tal forma a se obter uma camada uniforme e de pequena espessura. O modelo fotoelástico foi então posicionado e pressionado sobre a camada de cola, de uma extremidade à outra para evitar a formação de bolhas de ar. O conjunto foi mantido à temperatura ambiente, até a completa cura da cola, durante mais de 24 horas.

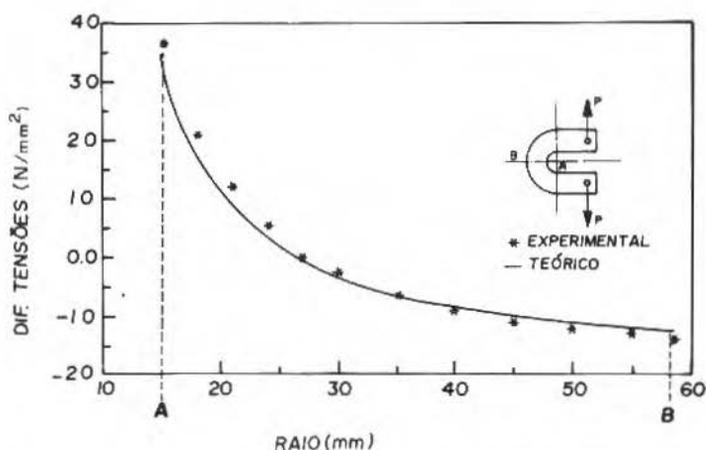


Figura 7. Comparação dos resultados teóricos com os da fotoelasticidade de reflexão

Com base nos resultados apresentados na Figura 7, nenhuma influência significativa da cola foi observada. A Figura 5 mostra, também, o valor da franja para tensão usando polariscópio de reflexão, ou seja, determinação da propriedade ótica do material sob a influência da cola (Curva B). Como pode ser visto, os resultados não apresentam nenhuma influência aparente devido a cola, após um tempo de aplicação da carga superior a 60 minutos. Deve ser mencionado que o valor da franja mostrado na Figura 5 diferem ligeiramente para o CY205/100 - HY951/20, por serem lotes de materiais diferentes. Discrepância igual foi obtida, através de medidas feitas sem interferência da cola, ou seja, usando polariscópio de transmissão.

## CONCLUSÕES

Com base neste estudo e nas observações feitas no decorrer das experiências realizadas, as principais conclusões, são:

- foram desenvolvidos dois materiais, para utilização em fotoelasticidade de reflexão, CY205/100-HY951/20 e XGY1109/100-HY943/30, para análise de tensões/deformações em superfícies planas, curvas e/ou irregulares;
- . os materiais desenvolvidos, quando obtidos em espessuras inferiores a 3mm, tem uma geração interna de calor que não compromete as propriedades óticas finais;
  - . os materiais são obtidos a temperatura ambiente e melhoram suas propriedades quando submetidos a um tratamento térmico a 70°C, por 24 horas;
  - . os materiais desenvolvidos tem alta sensibilidade e apresentam características comparáveis aos similares importados, podendo ser obtidos a custo entre 4 e 7 vezes menor do que estes;
  - . o Araldite - 24 horas demonstrou ser um adesivo com boas propriedades para a técnica da fotoelasticidade de reflexão;
  - . este trabalho coloca ao alcance dos pesquisadores da área todas as informações necessárias para a obtenção e utilização dos materiais desenvolvidos.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro recebido do Departamento de Engenharia Mecânica e Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] Zandman, F.; Wood, M.R. - Photostress, a new technique for photoelastic stress analysis for observing and measuring surface strains on actual structures and parts, *Product Engineering*, pp. 167-178, sept. 1956.
- [ 2 ] Post, D.; Zandman, F. - Accuracy of birefringent coating method for coating of arbitrary thickness, *Proc. SESA*, 18 (1): 21-32, 1961.
- [ 3 ] Zandman, F.; Redner, S.; Riegner, E.I. - Reinforcing effect of birefringent coatings, *Proc. SESA*, 19 (1): 55-64, 1962.
- [ 4 ] Zandman, F.; Redner, S.; Dally, S.W. - Photoelastic coating, *SESA, Monografia 3*, Iowa State University Press, 1977.
- [ 5 ] Dally, J.W.; Riley, W.F. - *Experimental stress analysis*, 2<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, 1978.

- [ 6] Redner, A.S. - Separation of principal strains in photoelastic coating by the slitting method, Exp.Tech., pp. 29-32, may 1987.
- [ 7] Oliveira, S.A.G. - Desenvolvimento de materiais para fotoelasticidade de reflexão, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1988.
- [ 8] Photolastic Inc. - Instruction for bonding flat and contouring photoelastic sheets, Buletin (IB-P-310/320), Malvern, 1962.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações de Física e de Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abrangam desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers are presented in a manner which is appreciated by practising engineers, researchers, and educationalists.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences. In addition, interface with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics, are welcomed.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introductions of novel ideas which have potential in science and manufacturing industry.

### Note and Instructions to Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world, and manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished materials and will be refereed and assessed by reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute outstanding critical appraisals of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticisms of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publications; Comments on current engineering matters of considerable moment.
3. Only papers not previously published will be accepted and authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of papers is taken by the Editors on behalf of two reviews of outstanding scientists and will take into consideration their originality, contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. However Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, always including the English title, the author's name, and the address from which communication comes. In the case of co-authors, respective addresses should be clearly indicated. Follow with the abstract in the paper's language; if different from English an extended summary in this language shall be included. Give also key words for the paper. Next, if possible, the nomenclature list shall be presented.
6. Manuscripts should be typed with double spacing with ample margins, in accordance with other published material submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawings should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be enlarged sufficiently to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph then they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.

**INDICE/CONTENTS**

<b>T. HIRATA</b> and <b>J.L. SCIESZKO</b>	Influência de rigidez da base nos parâmetros da colisão	1
<b>E. L. QUENTAL</b> and <b>J.L.P. ROEHL</b>	Ações de impacto sobre vigas de concreto armado	17
<b>R.M.S. DA GAMA</b>	Um algoritmo para a solução aproximada de equações não-lineares de conservação	33
<b>M.T. DE ALMEIDA</b> and <b>M.T. NEVES</b>	Efeito da flexibilidade de discos nas frequências naturais de rotores de grandes ventiladores	49
<b>P. EBERSBACH</b> and <b>H. IRRETIER</b>	Some applications of modal parameter estimation techniques	67
<b>S.A.G.DE OLIVEIRA</b> and <b>H.A. GOMIDE</b>	Materiais para fotoelasticidade de reflexão	87

