



REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITOR: Hans Ingo Weber

Dept<sup>o</sup> Projeto Mecânico, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

Álvaro Toubes Prata

Dept<sup>o</sup> Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPO

Carlos Alberto de Almeida

Dept<sup>o</sup> Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,  
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UFRJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UFRJ)

Moysés Zindeluck (COPPE/UFRJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UFRJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UFRJ)

Samir N.Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

---

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /  
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18<sup>o</sup> Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

---

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



## MATRIX FORMULATION OF THE DYNAMIC ANALYSIS OF SDOF SYSTEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN

### FORMULAÇÃO MATRICIAL DA ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

F. Venâncio Filho

Dept. of Civil and Environmental Engineering  
Rutgers, The State University of New Jersey  
P.O. Box 909, Piscataway, NJ, USA  
On leave of absence from COPPE/UFRJ  
Programa de Engenharia Civil

A.M. Claret

Departamento de Engenharia Civil  
Escola de Minas/UFOP  
35.400 Ouro Preto, MG - Brasil

#### ABSTRACT

*Frequency domain analysis is strongly indicated for dynamic analysis of structural systems with frequency-dependent properties. All available methods for dynamic analysis in the frequency domain use the Fast Fourier Transform, FFT for short, algorithm for the numerical calculation of direct and inverse discrete Fourier transforms. Although the FFT algorithm is computationally very efficient in an iterative or in a step-by-step non-linear analysis, this algorithm can be very hard to work. In this work, a matrix formulation of the frequency domain dynamic analysis of SDOF systems is presented. The aim of this formulation is to be computationally more efficient for dynamic non-linear analysis.*

**Keywords:** Fast Fourier Transform ■ Frequency Domain Analysis ■ Matrix Formulation ■ Non-Linear Analysis in Frequency Domain

#### RESUMO

*A análise dinâmica no domínio da frequência é indicada para sistemas estruturais com propriedades dependentes da frequência da excitação. Todos os métodos disponíveis para análise no domínio da frequência usam o algoritmo Fast Fourier Transform, referido abreviadamente por FFT, para a execução das transformadas discretas de Fourier. Embora o algoritmo FFT seja computacionalmente muito eficiente, em uma análise não-linear através de um processo iterativo ou passo-a-passo, este algoritmo pode exigir um grande esforço computacional. Nesse trabalho, uma formulação matricial da análise dinâmica no domínio da frequência de um sistema de um grau de liberdade é apresentada. O objetivo dessa formulação é fornecer um algoritmo computacionalmente mais eficiente para análise dinâmica não-linear no domínio da frequência.*

**Palavras-Chave:** Transformada Rápida de Fourier ■ Análise no Domínio da Frequência ■ Formulação Matricial ■ Análise Não-Linear no Domínio da Frequência

## INTRODUCTION

The analysis of dynamic response in frequency domain is strongly indicated for structural systems with frequency-dependent properties. Linear structural dynamic analysis in frequency domain is well known and had a great development with the use of the Fast Fourier Transform algorithm. Nevertheless, only recently methods of non-linear dynamic structural analysis in the frequency domain have been developed. KAWAMOTO [2] presented an iterative method called Hybrid Frequency-Time Domain method, of HFTD method, in which the non-linearities are treated as pseudo-forces. DARBRE and WOLF [3] presented the segmenting version of HFTD procedure and demonstrated its convergence criterion. VENANCIO-FILHO and CLARET [4] presented a method for non-linear dynamic analysis in frequency domain based on a step-by-step incremental technique with linearized steps and a secant stiffness. All these methods use the FFT algorithm for calculation of direct and inverse discrete Fourier transforms.

Although the FFT algorithm is computationally very efficient in an iterative or step-by-step non-linear analysis, this algorithm can be very hard to work. The number of terms in the discrete series, using the FFT algorithm, must be a power of two. Thus, if no sufficient precision is achieved with  $N$  terms, only  $2N$  terms can be used. This fact means that the computational effort and the space of memory needed by the algorithm can increase very rapidly. On the other hand, the FFT algorithm is apart from the procedure of the response calculation in the frequency domain, implying in the repetition of a set of operations, every time it is called.

In this work, a matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF systems in the frequency domain is presented. It is aimed to increase the computational efficiency of dynamic non-linear analysis in the frequency domain. There is only one condition implied over the number of terms in the discrete series:  $N$  must be an odd integer. Moreover, the Fourier transforms are implicitly performed in such a way that the number of operations required in non-linear analysis is optimized.

## CLASSICAL FORMULATION

The dynamic response of a SDOF system in the frequency domain can be expressed by the following equations, CLOUGH and PENZIEN [1], p. 114:

$$v(t_n) = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} H(\bar{\omega}_n) P(\bar{\omega}_n) e^{i2\pi \frac{mn}{N}} \quad (1)$$



and

$$P(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(t_n) e^{-i2\pi \frac{mn}{N}} \quad (2)$$

The total time interval  $T_p$  in which the response is to be calculated is divided into  $N$  ( $N$  odd) equal time intervals given by:

$$\Delta t = \frac{T_p}{N} \quad (3)$$

and the discrete times in which the load is defined are given by:

$$t_n = n \Delta t = n \frac{T_p}{N} \quad (0 \leq n \leq N-1) . \quad (4)$$

The frequency range is likewise divided into  $N$  equal intervals  $\Delta\bar{\omega}$  expressed as:

$$\Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p} \quad (5)$$

and the discrete frequencies  $\bar{\omega}_m$  are taken according Table 1 (see Appendix 1).

In Equation (2),  $P(\bar{\omega}_m)$  is the discrete Fourier transform of the load; in Equation (1),  $H(\bar{\omega}_n) P(\bar{\omega}_n)$  is the discrete Fourier transform of the response (or the response in the frequency domain) and  $v(t_n)$  is the inverse discrete Fourier transform of the response (or the response in the time domain).

The dynamic response expressed by Equations (1) and (2) can be numerically determined by the Fast Fourier Transform algorithm. In dealing with this algorithm,  $N$  must be a power of two and, consequently, an even integer. Nevertheless, as will be subsequently shown, when  $N$  is even there is an imaginary term in the response. In order to get rid of this term,  $N$  must be odd.

## MATRIX FORMULATION

Let:

$$\mathbf{P} = \{p(t_0), p(t_1), p(t_2), \dots, p(t_n), \dots, p(t_{N-1})\} \quad (6)$$

and

$$\mathbf{v} = \{v(t_0), v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n), \dots, v(t_{N-1})\} \quad (7)$$

be, respectively, the vectors of the load and the response at the discrete times:

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

and let:

$$\mathbf{P} = \{P(\bar{\omega}_0), P(\bar{\omega}_1), P(\bar{\omega}_2), \dots, P(\bar{\omega}_m), \dots, P(\bar{\omega}_{N-1})\} \quad (9)$$

be the vector of the discrete Fourier transform of the load defined at the discrete frequencies  $\bar{\omega}_m$  interpreted according to Table 1.

With the definition of Equations (6) and (9), Equation (2) can be casted in matrix form as:

$$\mathbf{P} = \Delta t \mathbf{E}^* \mathbf{P} \quad (10)$$

where the  $(N \times N)$  matrix  $\mathbf{E}^*$  is defined as the matrix whose generic term  $E_{mn}^*$  is:

$$E_{mn}^* = e^{-imn(2\pi/N)} \quad (11)$$

or, explicitly,

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 & \dots & e^0 \\ e^{-i(2\pi/N)} & e^{-i2(2\pi/N)} & \dots & e^{-in(2\pi/N)} & \dots & e^{-1(N-1)(2\pi/N)} \\ e^{-i4(2\pi/N)} & \dots & e^{-i2n(2\pi/N)} & \dots & e^{-i2(N-1)(2\pi/N)} \\ \text{Symmetric} & & e^{-imn(2\pi/N)} & \dots & e^{-im(N-1)(2\pi/N)} \\ & & & & e^{-i(N-1)^2(2\pi/N)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

By the same token, the response from Equation (2) is written in matrix form as:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (13)$$

where  $\mathbf{E}$  is the matrix defined in Equation (11) with positive signs in the exponentials instead of negative ones, and  $\mathbf{H}$  is the diagonal matrix formed with the complex frequency response functions calculated at the discrete frequencies of Table 1. The typical term of  $\mathbf{H}$  is given by:

$$H(\bar{\omega}_m) = (k - m \bar{\omega}_m^2 + i \bar{\omega}_m c)^{-1} \quad (0 \leq m \leq m-1) \quad (14)$$

where  $k$ ,  $m$ , and  $c$  are the stiffness, mass, and damping of the SDOF system, respectively. Substituting now  $\mathbf{P}$  from Equation (10) into Equation (13), the following equation is obtained:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{P} \quad (15)$$

Equation (15) expresses the matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF systems in the frequency domain. In the sequel, it is proven that the matrix product  $\mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{p}$  is real, provided  $N$  is odd.

Consider from Equation (2)  $P(\bar{\omega}_m)$  and  $P(\bar{\omega}_{N-m})$ , with  $m = 0, 1, \dots, (N-1)/2$  written in indicial notation, respectively, as

$$\frac{1}{\Delta t} P(\bar{\omega}_m) = E_{mj}^* P_j \quad (16)$$

and

$$\frac{1}{\Delta t} P(\bar{\omega}_{N-m}) = E_{(N-m)j}^* P_j \quad (17)$$

where  $j = 1, 2, \dots, N-1$ . All the corresponding terms in the summations of Equations (16) and (17) are complex conjugates (except the first ones which are real) in face of the proof given in Appendix 2. Therefore,  $P(\bar{\omega}_m)$  and  $P(\bar{\omega}_{N-m})$  are complex conjugates.

Consider now Equation (13) written as:

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (18)$$

where  $\mathbf{A}$  is given by:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{H} . \quad (19)$$

The  $n^{\text{th}}$  line of matrix  $\mathbf{A}$  from Equation (19) can be written as the vector:

$$\mathbf{A}_n = \left\{ \frac{1}{k} \dots e^{inm(2\pi/N)} \bar{H}_m(\omega) \dots e^{in(N-m)(2\pi/N)} \bar{H}(\omega_{N-m}) \dots \right\} \quad (20)$$

As  $(e^{inm(2\pi/N)}, e^{in(N-m)2\pi/N})$  (and  $(H(\bar{\omega}_m), H(\bar{\omega}_{N-m}))$ ) are pairs of complex conjugates (see Appendices 2 and 1, respectively), the typical pair displayed in Equation (20) is also a pair of complex conjugates.

Multiply now  $\mathbf{A}_n$ , from Equation (20), by  $\mathbf{P}$ , from Equation (9), in order to obtain the typical term of  $\mathbf{v}$ ,  $v_n$ , from Equation (18). The result, in indicial notation, is

$$\frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} v_n = E_{nm} H(\bar{\omega}_m) P(\bar{\omega}_m) . \quad (21)$$

In this summation, all pairs like:

$$[E_{nm} H(\bar{\omega}_m) P(\bar{\omega}_m), E_{n(N-m)} H(\bar{\omega}_{N-m}) P(\bar{\omega}_{N-m})] \quad (22)$$

where  $m = 1, 2, \dots, N-1$  and were  $\omega_m$  is interpreted according to Table 1, are complex conjugates pairs. On the other hand the first term ( $m = 0$ ) in the summation of Equation (21) is real. Therefore,  $v_n$  is a sum of a real term (the first one) with pairs of complex conjugates which finally proves that  $v_n$  is real and, consequently,  $v$  is real.

A very important point that must be emphasized is that  $N$  must be odd, otherwise there would be in the summation of Equation (21), a central term:

$$E_{n(N/2)} \bar{H}(\omega_{N/2}) \bar{P}(\omega_{N/2})$$

which has not its complex conjugate in order to form a complex conjugate pair. In this way, there would exist an imaginary term in the summation which produces  $v_n$ . This is contrary to the condition implied in FFT algorithm that  $N$  should be a power of two and, consequently, even.

## FINAL REMARKS

Equation (15) establishes a matrix formula for the analysis of the response of a SDOF system in the frequency domain. The aim of this formulation is to minimize the computational effort required in non-linear analysis in the frequency domain. On the other hand, in Equation (15) the only condition implied over  $N$  is that it should be odd. Thus,  $N$  can be changed freely to achieve sufficient precision in the response, optimizing the space of memory in the computer and the number of operations in the process.

The matrices  $E$ ,  $H$  and  $E^*$  have properties that can simplify the numerical implementation of Equation (15), also reducing the computational effort.

## REFERENCES

- [1] CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, 1982.



- [2] KAWAMOTO, J.D. - Solution of Nonlinear Dynamic Structural Systems by a Hybrid Frequency-Time Domain Approach, MIT Research Report R83-5, Department of Civil Engineering, Cambridge, 1983.
- [3] DARBRE, G.R. and WOLF, J.P. - Criterion of Stability and Implementation Issues of Hybrid Frequency-Time-Domain Procedure for Nonlinear Dynamic Analysis, Transactions of 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Lausanne, August 1987.
- [4] VENANCIO-FILHO, F. and CLARET, A.M. - Non-linear Dynamic Analysis with Frequency-Dependent Damping, Damping-89, Florida, February 1989.

## APPENDIX 1

The discrete frequencies employed in this formulation must be interpreted according Table 1. Taking into account the frequencies  $\bar{\omega}_m$  from Table 1,  $H(\bar{\omega}_m)$  and  $H(\bar{\omega}_{N-m})$ , Equation (14), are complex conjugate.

Table 1. Discrete frequencies ( $N$  odd)

$m$	$m$ or $(N-m)$	$\bar{\omega}_m$
0	0	0
1	1	$\Delta\bar{\omega}$
2	2	$2\Delta\bar{\omega}$
...	...	...
$(N-1)/2$	$(N-1)/2$	$[(N-1)/2] \Delta\bar{\omega}$
$(N+1)/2$	$(N+1)/2$	$[-(N-1)/2] \Delta\bar{\omega}$
...	...	...
$N-2$	2	$-2\Delta\bar{\omega}$
$N-1$	1	$-\Delta\bar{\omega}$

## APPENDIX 2

Apply Euler formula to  $e^{imn(2\pi/N)}$  in order to have:

$$e^{imn(2\pi/N)} = \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + i \sin\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \quad (\text{A2.1})$$

and to  $e^{i(N-m)n(2\pi/N)}$  to have:

$$\begin{aligned} e^{i(N-m)n(2\pi/N)} &= \cos\left[(N-m)n \frac{2\pi}{N}\right] + i \sin\left[(N-m)n \frac{2\pi}{N}\right] \\ &= \cos(2\pi m) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + \sin(2\pi m) \sin\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \\ &\quad + i \left[ \sin(2\pi m) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - i \sin\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \cos(2\pi m) \right] \\ &= \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - i \sin\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Equations (A2.1) e (A2.2) prove that  $e^{imn(2\pi/N)}$  and  $e^{i(N-m)n(2\pi/N)}$  are complex conjugates.

## CÁLCULO DA FLAMBAGEM DE EIXOS ROTATIVOS COM A SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL

### BUCKLING OF ROTATING RODS WITH VARIABLE CROSS SECTION

F.A. Rochinha

H. da Costa Mattos

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Departamento de Engenharia Mecânica

Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea

22.453 Rio de Janeiro, RJ - Brasil

#### RESUMO

*Este trabalho estuda a possibilidade de ocorrência de flambagem em eixos rotativos de seção transversal variável. Adota-se um modelo de estruturas unidimensionais geometricamente exato que permite a extensibilidade. Este modelo resulta num problema não-linear de autovalor em equações diferenciais ordinárias. Utiliza-se o Método do Tiro para a aproximação numérica da solução, o que permite encontrar a velocidade crítica de flambagem (autovalor do problema) e, também, as configurações pós-críticas. Os resultados obtidos mostram que a teoria proposta é bastante interessante, já que permite a utilização de eixos bastante esbeltos em projetos de Engenharia.*

**Palavras-chaves:** Flambagem de Eixos Rotativos ■ Bifurcação ■ Estruturas Unidimensionais Não-Lineares ■ Eixos com Seção Variável ■ Método do Tiro

#### ABSTRACT

*This work studies the possibility of occurring buckled states in rotating rods with variable cross section. A geometrically exact model for one dimensional extensible structures is adopted. The nonlinear eigenvalue problem in ordinary differential equations obtained is solved by a shooting technique. The critical velocities and the bent configurations are numerically determined. The results show that the presented method is very useful in Engineering design, because it allows the use of very slender shafts.*

**Keywords:** Buckling of Rotating Rods ■ Bifurcation ■ Non-Linear Rods ■ Shafts with Variable Cross Section ■ Shooting Method

## INTRODUÇÃO

Existe um grande interesse no estudo do comportamento de eixos rotativos submetidos a grandes velocidades angulares. Isto se deve principalmente a possibilidade do aparecimento de configurações não retilíneas quando esta velocidade for suficientemente alta (ver a Figura 1).

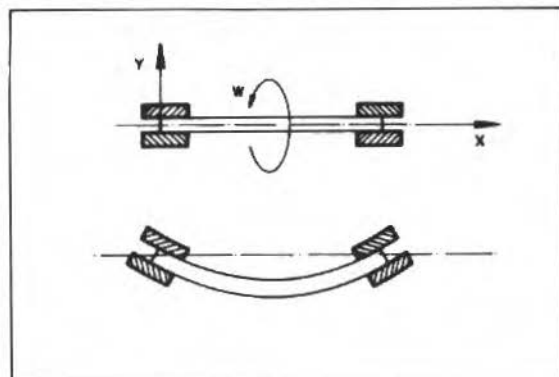


Figura 1. Flambagem de eixo rotativo

No entanto, os estudos apresentados até hoje ([1]-[5]) não tratam com toda a generalidade o problema: eixos com qualquer geometria, com vários tipos possíveis de apoio e constituídos de diferentes materiais.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método sistemático (modelagem e simulação numérica) para a análise deste problema. Ele estende e generaliza os resultados apresentados em [6], considerando eixos com variação da seção transversal.

Na seção 2 o modelo mecânico utilizado é apresentado resumidamente. É adotada a hipótese tradicional de que o eixo é suficientemente esbelto para ter seu comportamento adequadamente modelado por um teoria de estruturas unidimensionais. O desenvolvimento dessa teoria é discutido, com detalhes, em [7] e [8].

Inicialmente é estudado o problema do eixo com seção transversal constante e, posteriormente, são introduzidas modificações que permitem o estudo do eixo com seção variável. O comportamento da estrutura é modelado por um sistema de equações diferenciais ordinárias com condições de contorno que dependem do problema em questão. A partir de um certo valor da velocidade angular (velocidade

crítica) é encontrada mais de uma configuração (solução) possível: uma retilínea (trivial) e outras fletidas. Trata-se, portanto, de um problema de bifurcação [9]. As configurações bifurcadas (não triviais) serão chamadas de flambadas, analogamente ao que é feito no caso de uma viga reta submetida a esforços de compressão.

O sistema de equações obtido é adimensionalizado e, na seção 3, é apresentada uma técnica numérica de solução que se baseia no Método do Tiro [10]. Na seção 4 é analisada a flambagem de um eixo de seção transversal variável em duas situações: engastado nas extremidades e rotulado nas extremidades.

Finalmente, na seção 5 são feitos alguns comentários sobre a utilização do método proposto ressaltando a viabilidade de sua aplicação em projetos de Engenharia.

Apesar de ser possível dar um tratamento matemático rigoroso ao problema, não existe a preocupação de apresentar resultados teóricos sobre a existência de solução (o que pode ser facilmente mostrado experimentalmente). O interesse deste trabalho está voltado basicamente para aplicações.

## MODELAGEM DO PROBLEMA

**Eixo com Seção Constante.** Seja um eixo elástico, de comprimento  $L$  e diâmetro constante  $D$ , girando a uma velocidade angular constante  $\omega$ . De [6] segue que o seu comportamento pode ser estudado como um problema de equilíbrio no plano, bastando ser adotado um referencial girando solidário ao corpo. Na análise, despreza-se o efeito do peso próprio da estrutura.

O problema se resume, então, a resolver o seguinte sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias no intervalo  $(0, L)$  (as condições de contorno serão discutidas mais adiante):

$$N' - \theta' Q + c' t = 0 \quad (1)$$

$$Q' + \theta' N + c' n = 0 \quad (2)$$

$$M' + c' Q = 0 \quad (3)$$

$$c' = 1 + N/(EA) \quad (4)$$

$$\theta' = M/(EI) \quad (5)$$



$$x' = c' \cos(\theta) \quad (6)$$

$$y' = c' \operatorname{sen}(\theta) \quad (7)$$

onde  $(\ )' = d(\ )/ds$ ,  $s \in [0, L]$  é o comprimento de arco na configuração de referência,  $c$  é o comprimento de arco na configuração deformada,  $\theta$  é o ângulo que a tangente à configuração deformada no ponto material  $s$  faz com a horizontal,  $N$  é o esforço normal,  $Q$  o esforço cortante,  $M$  o momento fletor,  $x$  e  $y$  são coordenadas cartesianas introduzidas para o cálculo da configuração deformada,  $t$  e  $n$  são as componentes da força centrípeta na direção tangente e normal à configuração deformada, respectivamente:

$$t = \rho w^2 y \operatorname{sen}(\theta)$$

$$n = \rho w^2 y \cos(\theta)$$

e  $\rho$  é a densidade linear do eixo:  $\rho = (\gamma A)$  onde  $\gamma$  é a densidade volumétrica do material e  $A$  a área da seção transversal.

Usando a lei de conservação de massa apresentada em [8], obtem-se:

$$c' \rho = \hat{\rho}$$

com  $\hat{\rho}$  sendo a densidade linear do eixo na configuração de referência. Desta forma, elimina-se a incógnita  $\rho$  do problema.

$E$  e  $I$  são o módulo de Young do material e o momento de inércia da seção, respectivamente. É fácil verificar que, para uma seção circular,  $I = A^2/(2\pi)$ .

Diferentes problemas não-lineares podem ser obtidos, dependendo das condições de contorno consideradas. Alguns tipos de condições que procuram modelar estruturas rotativas em situações de funcionamento real são:

i) Eixo apoiado em suas extremidades.

$$M(0) = 0, c(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, M(L) = 0, x(L) = L, y(L) = 0$$

ii) Eixo engastado em suas extremidades.

$$\theta(0) = 0, c(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, \theta(L) = 0, x(L) = L, y(L) = 0$$

iii) Eixo apoiado em suas extremidades, permitindo-se que uma delas se desloque horizontalmente, mantendo-se o comprimento total inalterado.

$$M(0) = 0, c(0) = 0, y(0) = 0, M(L) = 0, c(L) = L, y(L) = 0$$

iv) Eixo engastado em suas extremidades, permitindo-se que uma delas se desloque horizontalmente, mantendo-se o comprimento total inalterado.

$$\theta(0) = 0, c(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, \theta(L) = 0, c(L) = L, y(L) = 0$$

v) Eixo engastado em uma de suas extremidades e livre na outra.

$$\theta(0) = 0, c(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, M(L) = 0, N(L) = 0, Q(L) = 0$$

Neste trabalho, por razões de espaço, apresenta-se apenas o comportamento de um eixo submetido às condições (i) e (ii).

**Eixo com Seção Variável.** A teoria apresentada anteriormente é adequada se a seção transversal do eixo for constante ao longo do comprimento. No entanto, em muitas aplicações práticas encontram-se situações como mostra a Figura 2.

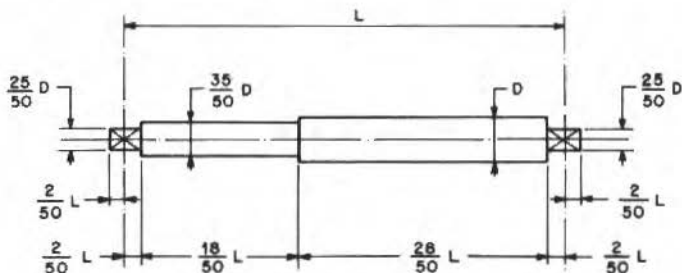


Figura 2. Eixo com seção variável

Seja então o eixo subdividido em  $(n-1)$  partes ao longo do seu comprimento

$$0 = s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_n = L$$

tais que, em cada intervalo  $L_i$ :

$$L_i = \{s \in (0, L) / s_i < s < s_{i+1}\}$$

a seção transversal tem uma área  $A = A_i$  e um momento de inércia  $I = I_i$ .

Neste caso, é possível mostrar que as Equações (1)-(7) são definidas em todos os pontos  $s \in (0, L)$  exceto nos pontos  $s_i$ . Isto é, a derivada à esquerda das variáveis consideradas não é necessariamente igual a derivada à direita. No entanto, estas variáveis são contínuas em todo intervalo  $(0, L)$ .

O problema pode ser definido, então, como encontrar campos contínuos  $(N, Q, M, \theta, c, x, y)$  definidos em  $[0, L]$  que satisfaçam as Equações (1)-(7) nos intervalos  $L_i$  verificando algum dos conjuntos de condições de contorno apresentados.

**Adimensionalização.** Para aumentar a generalidade do estudo, facilitando a normalização, o sistema (1)-(7) pode ser adimensionalizado, obtendo-se:

$$\bar{N}' - \theta' \bar{Q} + \bar{c}' \bar{T} = 0 \quad (8)$$

$$\bar{Q}' + \theta' \bar{N} + \bar{c}' \bar{n} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{M}' + \bar{c}' \bar{Q} = 0 \quad (10)$$

$$\bar{c}' = 1 + C_i \bar{N} \quad (11)$$

$$\theta' = \bar{M} (I_R / I_i) \quad (12)$$

$$\bar{x}' = \bar{c}' \cos \theta \quad (13)$$

$$\bar{y}' = \bar{c}' \operatorname{sen} \theta \quad (14)$$

para cada intervalo  $\bar{L}_i$ , onde:

$$\bar{M} = (ML)/(EI_R)$$

$$\bar{N} = (NL^2)/(EI_R)$$

$$\bar{Q} = (QL^2)/(EI_R)$$

$$\bar{c} = c/L$$

$$\bar{x} = x/L$$

$$\bar{y} = y/L$$

$$C_i = I_R/(A_i L^2)$$

$$\bar{t} = (A_R/A_i) \bar{y} \lambda \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\bar{n} = (A_R/A_i) \bar{y} \lambda \cos(\theta)$$

$$\lambda = (\hat{\rho}_R L^4 w^2)/(E I_R)$$

$A_R$  e  $I_R$  são valores da área e do Momento de inércia de uma seção transversal, tomada como referência.  $\hat{\rho}_R$  é a densidade linear associada ao seguimento do eixo cuja área da seção transversal é  $A_R$ .  $\bar{L}_i = \{\bar{s}_i \in (0, 1) / \bar{s}_i < \bar{s} < \bar{s}_{i+1}\}$ .

As condições de contorno (i) e (ii) adimensionalizadas têm a seguinte forma:

i) Eixo apoiado em suas extremidades.

$$\bar{M}(0) = 0, \bar{c}(0) = 0, \bar{x}(0) = 0, \bar{y}(0) = 0, \bar{M}(1) = 0, \bar{x}(1) = 1, \bar{y}(1) = 0 \quad (15)$$

ii) Eixo engastado em suas extremidades.

$$\theta(0) = 0, \bar{c}(0) = 0, \bar{x}(0) = 0, \bar{y}(0) = 0, \theta(1) = 0, \bar{x}(1) = 1, \bar{y}(1) = 0 \quad (16)$$

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

O objetivo é encontrar campos escalares contínuos  $\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}, \bar{c}, \bar{x}, \bar{y}, \theta$  definidos no intervalo  $[0,1]$  que verifiquem o sistema (8)-(14) nos intervalos  $\bar{L}_i$  e que satisfaçam as condições de contorno (15) ou (16).

A maior dificuldade para a solução numérica desse problema está no fato das condições de contorno serem definidas em dois pontos ( $\bar{s} = 0$ ) e ( $\bar{s} = 1$ ). Caso fossem conhecidos todos os valores das incógnitas no ponto  $\bar{s} = 0$ , qualquer técnica simples para a integração de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias poderia ser utilizada (Runge-Kutta de quarta ordem, por exemplo [10]).

Neste trabalho foi utilizada uma técnica baseada no Método do Tiro ([8], [10]). Detalhes sobre a implementação, convergência e viabilidade do método estão nas referências e não serão discutidos neste trabalho.

**Idéia Básica do Método do Tiro.** Determinar uma solução do problema formado pelo sistema (8)-(14) e as condições de contorno (15) (eixo biapoiado) é equivalente a encontrar um valor  $t = (t_1, t_2, t_3) \in R^3$  de forma que, resolvendo-se o problema formado por (8)-(14) e as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \bar{N}(0) = t_1, \bar{Q}(0) = t_2, \bar{\theta}(0) = t_3, \bar{M}(0) = 0, \\ \bar{c}(0) = 0, \bar{x}(0) = 0, \bar{y}(0) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

as condições (15) sejam satisfeitas.



Analogamente, determinar uma solução do problema formado pelo sistema (8)-(14) e as condições de contorno (16) (eixo biengastado) é equivalente a encontrar um valor  $t = (t_1, t_2, t_3) \in R^3$  de forma que, resolvendo-se o problema formado por (8)-(14) e as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \bar{N}(0) = t_1, \quad \bar{Q}(0) = t_2, \quad \bar{M}(0) = t_3, \quad \bar{\theta}(0) = 0, \\ \bar{c}(0) = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{y}(0) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

as condições (16) sejam satisfeitas.

Assim, a determinação de uma solução de cada um dos problemas anteriores é equivalente a encontrar uma raiz de cada uma das seguintes funções:

$$G_i: R^3 \rightarrow R^3$$

$$t = (t_1, t_2, t_3) \rightarrow G_i(t) = (\bar{x}(1) - 1, \bar{y}(1), \bar{M}(1))$$

ou

$$G_{ii}: R^3 \rightarrow R^3$$

$$t = (t_1, t_2, t_3) \rightarrow G_{ii}(t) = (\bar{x}(1) - 1, \bar{y}(1), \bar{\theta}(1))$$

Os valores  $G_i(t)$  e  $G_{ii}(t)$  para um ponto  $t \in R^3$  são obtidos integrando-se numericamente os problemas de valor inicial formados, respectivamente, por  $\{(8)-(14), (17)\}$  e  $\{(8)-(14), (18)\}$ , o que pode ser feito, conforme já foi observado, usando-se uma técnica do tipo Runge-Kutta de quarta ordem. As raízes das funções  $G_i$  e  $G_{ii}$  podem ser obtidas utilizando-se variantes do Método de Newton [11].

## EXEMPLOS

Nesta seção será estudada, para duas condições diferentes de funcionamento, uma família de eixos cuja geometria está mostrada na Figura 2. Os parâmetros geométricos  $C_i, (A_i/A_R), (I_i/I_R)$ ;  $i = 1, 4$  são fixados:

$$D_i = \eta_i D \rightarrow (A_i/A_R) = \eta_i^2 \rightarrow (I_i/I_R) = \eta_i^4$$

$$\eta_1 = (25/50); \eta_2 = (35/50); \eta_3 = 1, \eta_4 = (25/50)$$

$$C_i = I_R/(A_i L^2) = (1.25 \times 10^{-3})/\eta_i^2$$

**Eixo Apoiado nas Extremidades.** As Figuras 3, 4 e 5 mostram as curvas do esforço normal adimensionalizado  $\bar{N}$ , do esforço cortante adimensionalizado  $\bar{Q}$ , e do ângulo  $\theta$  na extremidade  $\bar{s} = 0$  do eixo versus o parâmetro  $\lambda$ . Através destes gráficos acompanha-se a evolução de uma solução bifurcada (não coincidente com o eixo das abscissas) que surge a partir de  $\lambda \approx 55$ .

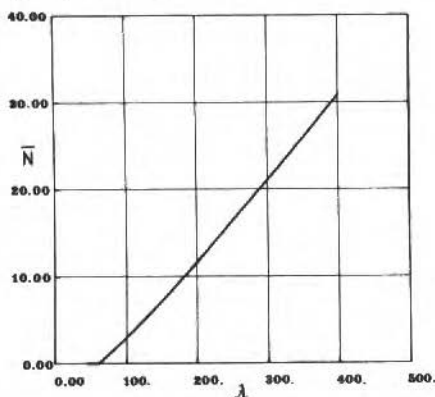


Figura 3. Esforço normal ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

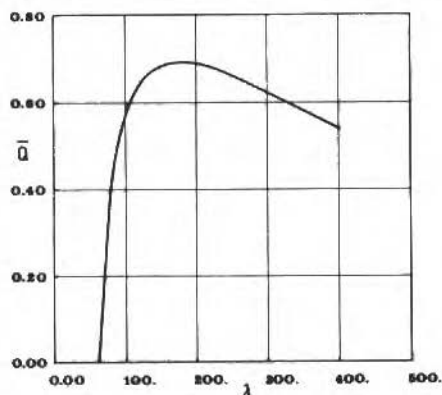


Figura 4. Esforço cortante ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

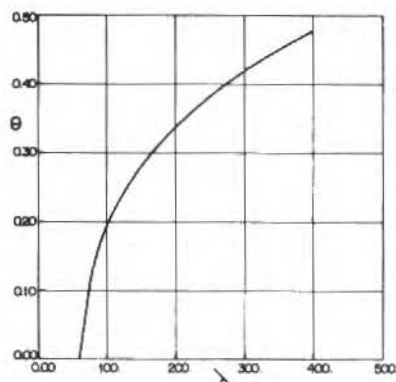


Figura 5. Ângulo  $\theta$  ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

Na Figura 6 mostra-se uma seqüência de configurações deformadas do eixo que fazem parte do ramo bifurcado de soluções. É importante observar que, devido a geometria não uniforme do eixo, a solução bifurcada não é simétrica, diferenciando-se assim do caso onde a seção transversal é constante [6].

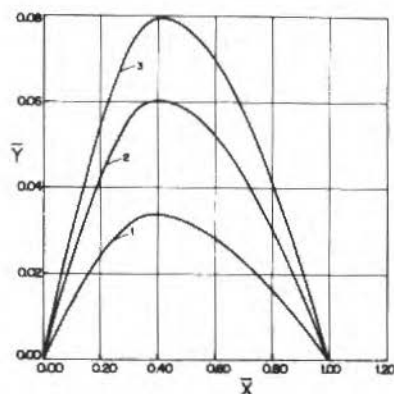


Figura 6. Configurações não triviais (flambadas).

curva 1.  $\lambda = 80$

curva 2.  $\lambda = 120$

curva 3.  $\lambda = 160$

As Figuras 7 e 8 mostram as curvas do momento fletor adimensionalizado e do ângulo  $\theta$  versus o comprimento de arco, para diversos valores de  $\lambda$ .

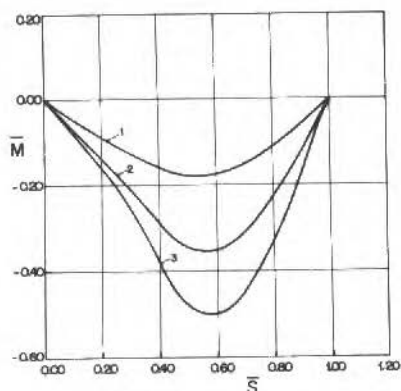


Figura 7. Momento versus  $\bar{s}$

curva 1.  $\lambda = 80$

curva 2.  $\lambda = 120$

curva 3.  $\lambda = 160$

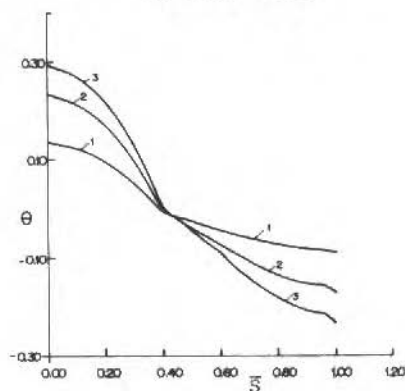


Figura 8. Ângulo  $\theta$  versus  $\bar{s}$ ;

curva 3.  $\lambda = 80$

curva 3.  $\lambda = 120$

curva 3.  $\lambda = 160$

Como já foi comentado anteriormente, as derivadas destas curvas em relação a  $\bar{s}$  não são necessariamente contínuas nos pontos onde há uma mudança na área da seção transversal, como pode ser observado na Figura 8.

**Eixo Engastado nas Extremidades.** As Figuras 9, 10 e 11 mostram as curvas do esforço normal adimensionalizado  $\bar{N}$ , do esforço cortante adimensionalizado  $\bar{Q}$ , e

do momento adimensionalizado  $\bar{M}$  na extremidade  $\bar{s} = 0$  do eixo versus o parâmetro  $\lambda$ . Constata-se a existência de uma solução bifurcada a partir de  $\lambda \approx 150$ .

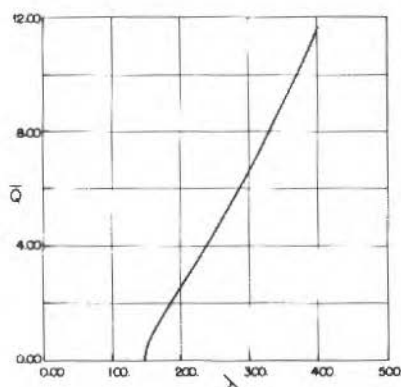


Figura 9. Esforço normal ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

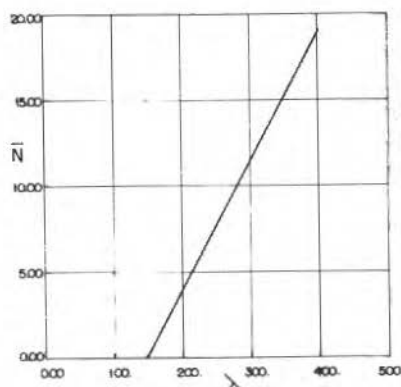


Figura 10. Esforço cortante ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

Na Figura 12 mostra-se uma seqüência de configurações deformadas do eixo, que fazem parte do ramo bifurcado de soluções. Assim como no exemplo anterior, as configurações obtidas não são simétricas.



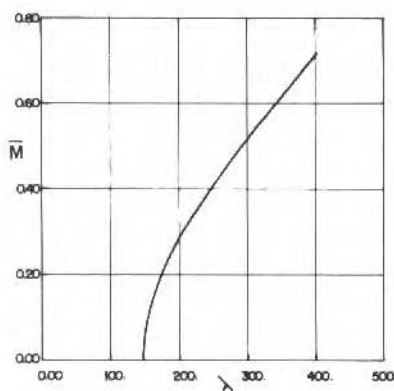


Figura 11. Momento ( $\bar{s} = 0$ ) versus  $\lambda$

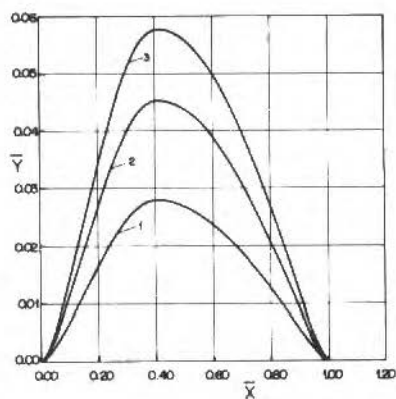


Figura 12. Configurações não triviais  
 curva 1.  $\lambda = 160$   
 curva 2.  $\lambda = 180$   
 curva 3.  $\lambda = 200$

As figuras 13 e 14 mostram as curvas do momento fletor adimensionalizado  $\bar{M}$  e do ângulo  $\theta$  da solução bifurcada versus o comprimento de arco  $\bar{s}$ , para diversos valores de  $\lambda$

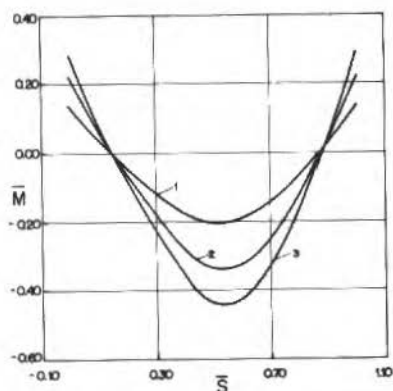


Figura 13. Momento versus  $\bar{s}$   
 curva 1.  $\lambda = 160$   
 curva 2.  $\lambda = 180$   
 curva 3.  $\lambda = 200$

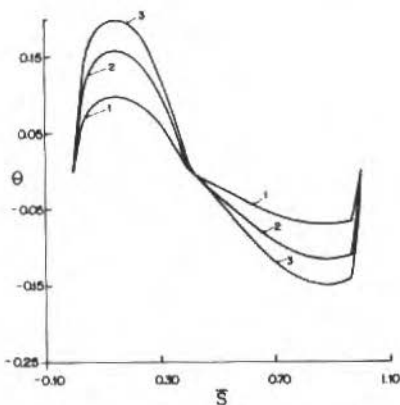


Figura 14. Ângulo  $\theta$  versus  $\bar{s}$   
 curva 1.  $\lambda = 160$   
 curva 2.  $\lambda = 180$   
 curva 3.  $\lambda = 200$

À semelhança do exemplo anterior, na Figura 14 as derivadas das curvas com respeito a  $\bar{s}$  não são contínuas em todos os pontos.

A partir dos resultados obtidos, estabelece-se uma rápida comparação entre o comportamento do eixo para as duas situações estudadas.

Na Figura 15 mostra-se a distribuição do momento fletor adimensionalizado ao longo do eixo para  $\lambda = 160$ . Como pode ser observado, próximo às extremidades os valores são muito maiores no caso engastado, aonde as condições de apoio exigem mudanças bruscas de curvatura na solução bifurcada.

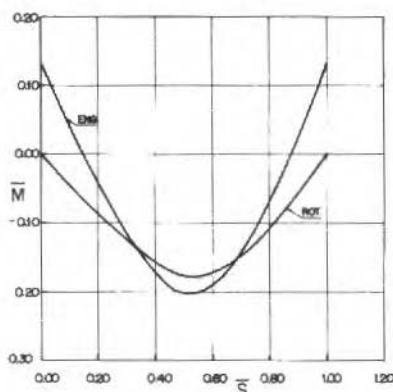


Figura 15. Comparação da distribuição de momentos -  $\lambda = 160$

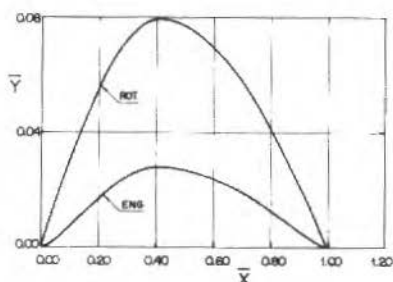


Figura 16. Comparação das configurações deformadas -  $\lambda = 160$

Na Figura 16 observa-se as diferentes configurações assumidas pelo eixo para  $\lambda = 160$  nas duas situações analisadas. Em ambos os casos o deslocamento máximo se dá em  $\bar{x} = 0,40$ , aonde há uma mudança de geometria sensível. Em todos os pontos os deslocamentos são maiores para o caso birrotulado.

## CONCLUSÃO

A teoria mecânica e o método numérico propostos neste trabalho permitem a obtenção da configuração flambada de eixos rotativos com seção transversal variável. São calculados também os esforços internos e as velocidades críticas de flambagem (autovalores do problema).

É importante salientar que o método apresentado permite o cálculo das reações nos apoios (rolamentos ou mancais). Isto é particularmente importante no caso estudado onde foram obtidas configurações não simétricas, o que implica em esforços diferentes atuando nas extremidades.

Outros efeitos podem ainda ser introduzidos sem dificuldade no modelo, como por exemplo o eixo constituído por diferentes materiais (variação da densidade e do módulo de elasticidade). Isto permite simular o comportamento de um sistema formado por um eixo e engrenagens.

Uma abordagem alternativa para o problema pode ser obtida através de uma formulação variacional equivalente às equações locais (1)-(7) via Lagrangeano Aumentado [12].

## REFERÊNCIAS

- [ 1] ANTMAN, S.S. e NASHMAN, A. - Large Buckled States of Rotating Rods, Non-linear Analysis Theory Methods & Applications, 4, nº 2, p. 303-327, 1980.
- [ 2] WANG, C.Y. - On the Bifurcation Solutions of an Axially Rotating Rod, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 35, p. 391-402, 1982.
- [ 3] WANG, C.Y. - Free Rotation of an Elastic Rod with an End Mass, ASME J. Appl. Mech., 53, p. 864-868, 1986.
- [ 4] WANG, C.Y. - Rotation of a Free Elastic Rod, ASME J. Appl. Mech., 35, 49, p. 225-227, 1982.
- [ 5] ERCOLI, L.; LAURA, P.A.A. e NATALIN, L.B. - Critical Velocities of Shafts of Non-uniform Cross-Section, J. Sound and Vib., 119, nº 3, p. 559-561, 1987.
- [ 6] SILVA RAMOS, M.A.M.; ROCHINHA, F.A. e SAMPAIO, R. - Configurações Não Triviais de um Eixo Rotativo, Anais do IX COBEM, p. 539-541, Brasil, 1987.

- [ 7] COSTA MATTOS, H. e SAMPAIO, R. - Modelagem de Estruturas Unidimensionais Planas em Equilíbrio, Anais do VIII COBEM, p. 425-428, Brasil, 1985.
- [ 8] COSTA MATTOS, H. e SAMPAIO, R. - Análise Não Linear de Estruturas Unidimensionais Elásticas, RBCM, 8, nº 2, p. 131-149, 1986.
- [ 9] RABINOWITZ, P.H. - Application of Bifurcation Theory, Academic Press, 1977.
- [10] STOER, J. e BULIRSH, R. - Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.
- [11] ORTEGA, J.M. e RHEINBOLDT, W.C. - Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables, Academic Press, 1970.
- [12] ROCHINHA, F.A.; SAMPAIO, R. e LE TALLEC, P. - Modelagem e Simulação Numérica de Cabos Umbilicais, RBCM, a aparecer.

## MODELO PARA ANÁLISE DE EFEITOS DE CARGAS MÓVEIS EM TABULEIROS RODOVIÁRIOS

### *A MODEL FOR THE ANALYSIS OF MOVING LOAD EFFECTS ON HIGHWAY BRIDGE GIRDERS*

João Luis Roehl

Ronaldson Carneiro

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Departamento de Engenharia Civil

Rua Marquês de São Vicente, 255 - Gávea

22.453 Rio de Janeiro, RJ - Brasil

#### RESUMO

*Desenvolve-se um método para análise de vigas de pontes rodoviárias, para condições de apoio e restrições diversas, sob a ação de cargas móveis, usando-se matrizes de rigidez e amortecimento variáveis com a posição do veículo. Paralelamente, é considerado o problema da interação veículo-viga sob os prismas da variação das propriedades dinâmicas do conjunto e da força de interação. A análise observa os efeitos, no modelo, da consideração do grau de liberdade à rotação do veículo, da variação do seu peso e da sua velocidade e, ainda, da sua interação com a viga. São trabalhados extensamente dois exemplos e conclui-se sobre a adequação do método, do modelo adotado e sobre o comportamento do sistema veículo-viga.*

**Palavras-chaves:** Dinâmica Estrutural ■ Pontes Rodoviárias ■ Cargas de Veículos em Pontes

#### ABSTRACT

*A method is presented to the analysis of highway bridge girders under the action of moving loads, for different end conditions, using stiffness and damping matrices variable with the vehicle position. One concerns with the problem of the vehicle bridge interaction under the views of the dynamical characteristics of the system and the interaction force. The study considers the effects of this interaction and of the vehicle rotatory inertia, weight and velocity. Two examples are extensively explored to conclude on the model and analysis method adequacy and on the vehicle-girder behavior.*

**Key-words:** Structural Dynamics ■ Highway Bridges ■ Vehicle Loads on Bridges

## INTRODUÇÃO

O problema de avaliação dos efeitos da ação dos veículos sobre os tabuleiros das pontes rodoviárias é assunto que vem preocupando a comunidade de engenheiros estruturais desde longa data [2 a 5, 7 a 10]. Em síntese, busca-se um critério conveniente para cálculo dos esforços e deslocamentos nos tabuleiros das pontes devidos à passagem dos veículos. A metodologia corrente recomenda o cálculo desses efeitos admitindo-os estáticos e a majoração dos resultados por meio de um coeficiente de impacto. No Brasil, a NBR-7187 recomenda o cálculo do impacto vertical com base em fórmula que leva em conta exclusivamente o comprimento do vão da ponte, o que coincide com a maioria das normas adotadas em outras nações.

A observação dos tabuleiros das pontes rodoviárias revela, com freqüência, situações de usura prematura dos pavimentos e das estruturas de concreto. Por outro lado, têm crescido muito nas últimas décadas a tonelagem e a velocidade dos veículos rodoviários, e não se tem revisto paralelamente o critério de avaliação do coeficiente de impacto.

Visando realizar um estudo amplo do problema, apresenta-se, neste trabalho, um método para a análise de vigas e de pontes, com eixo reto, com condições de apoio e restrições diversas, sob a ação de cargas móveis, usando-se matrizes de rigidez e amortecimento variáveis com a posição do veículo. Para um veículo com dois eixos, é usado um modelo condensado em um único ponto de sustentação. Paralelamente, é considerado o problema da interação veículo-viga sob os prismas da variação das propriedades dinâmicas do conjunto e da força de interação.

O trabalho é ilustrado com dois exemplos: uma viga simplesmente apoiada e uma viga contínua com três vãos, para diversas condições de peso e velocidade do veículo. Conclui-se sobre a adequabilidade do método, do modelo adotado e sobre o comportamento do sistema veículo-viga.

## MODELO MATEMÁTICO

A constituição do modelo matemático é feita considerando-se o sistema veículo-viga a partir de idealizações de cada um dos elementos constituintes.

O veículo é representado simplificadaamente com apenas um ponto de sustentação. Os movimentos de translação e rotação do veículo são descritos por dois graus de liberdade.

A viga é discretizada com massas concentradas e flexibilidade distribuída. Às massas estão associados os movimentos de rotação no plano e translação vertical.

## VEÍCULO

O veículo é modelado como um sistema massa-mola-amortecedor. Dependendo da idealização, esse sistema pode ter um ou dois graus de liberdade representando os movimentos de rotação no plano e translação vertical, como mostra a Figura 1. As coordenadas principais,  $y_v$  e  $r_v$ , estão referidas ao centro de rigidez do veículo; desta maneira, estão desacoplados os dois graus de liberdade e o veículo é representado com um único ponto de sustentação. Então, os coeficientes de rigidez do veículo com um ponto de sustentação, à translação,  $k_y$ , e à rotação,  $k_r$ , ficam associados às correspondentes grandezas do veículo com dois eixos, pelas expressões:

$$k_y = k_{y1} + k_{y2} \quad k_r = k_{y1} \cdot s_1^2 + k_{y2} \cdot s_2^2 \quad (1)$$

e, os coeficientes de amortecimento,  $c_y$  e  $c_r$ , podem ser escritos de forma semelhante aos de rigidez.

Os coeficientes de massa são obtidos por translação dos valores calculados em relação ao centro da massa, para o centro de rigidez.

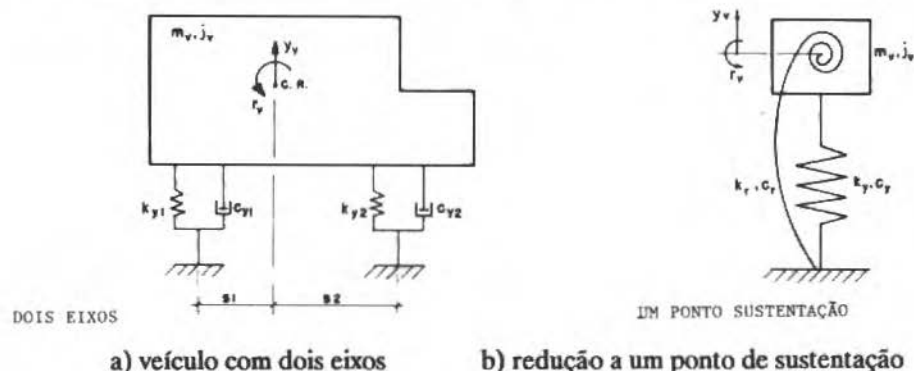


Figura 1. Modelo do veículo com dois eixos

## SISTEMA VEÍCULO-VIGA

A representação deste sistema é mostrada na Figura 2.



A viga pode ter rótulas e balanços. Os pontos de apoio são rígidos e o momento de inércia,  $J$ , da seção transversal em relação à linha neutra, pode variar em cada elemento de viga. As massas são concentradas conforme as componentes isostáticas do peso sobre cada nó.

O veículo é responsável pelo carregamento da viga ao se deslocar com velocidade horizontal uniforme,  $V$ , sobre esta. O seu peso e o momento por este causado em relação ao seu centro de rigidez atuam sobre a viga na forma de forças nodais equivalentes, as quais variam com o tempo pois dependem da posição do veículo.

O veículo é parte integrante do sistema e, como tal, participa na equação de movimento; como é um elemento móvel, a cada nova posição, o sistema é modificado e são induzidos, conseqüentemente, mudanças na equação de movimento, mais precisamente, nos termos associados com a rigidez e com o amortecimento do sistema.

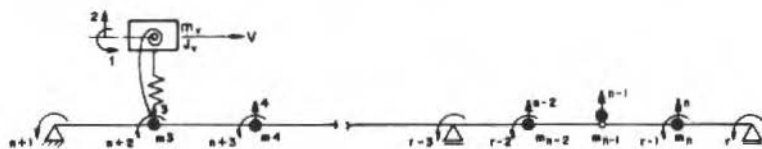


Figura 2. Modelo do sistema veículo-viga

A rigor, essa modificação deve ser processada a cada avanço do veículo sobre a viga, o que acarreta grande esforço computacional. Para simplificar esse processo, admite-se o veículo deslocando-se de nó em nó, procedendo-se as modificações nas matrizes de rigidez e amortecimento do sistema, ao ser ultrapassado o centro de cada elemento de viga. Entre dois nós consecutivos, a ação do peso móvel é marcada pela variação das cargas nodais equivalentes, que são calculadas como se o veículo transitasse continuamente sobre a ponte, e não apenas de nó em nó.

Esta aproximação mostra-se conveniente pela simplificação grande do trabalho que propicia, sem criar afastamentos sensíveis da solução verdadeira, para uma extensão relativa corrente dos elementos de viga,  $1/8$  a  $1/10$  do comprimento do vão.

## EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Admitindo-se desprezível a modificação na resposta devida à consideração da inércia à rotação dos nós do modelo, escreve-se a equação de movimento para o

sistema sem amortecimento representando-se por um ponto sobre o símbolo de uma variável uma derivação em relação ao tempo,  $t$  :

$$\begin{bmatrix} M & : & \emptyset \\ \dots & : & \dots \\ \emptyset & : & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{v}} \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{vv} & : & K_{v\theta} \\ \dots & : & \dots \\ K_{v\theta} & : & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dots \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \dots \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo que o vetor  $\mathbf{v}$  contém, nos dois primeiros elementos, os deslocamentos do veículo,  $r_v$  e  $y_v$ , nesta ordem, e, a seguir, os deslocamentos verticais dos nós da viga; o vetor  $\mathbf{r}$  reúne os deslocamentos rotacionais desses mesmos nós. Os dois primeiros elementos de  $\mathbf{f}$  são nulos e os demais representam as cargas nodais, assim como os elementos de  $\mathbf{b}$  guardam os momentos de fixação. Quando o veículo é considerado com um único grau de liberdade, o primeiro elemento de  $\mathbf{v}$  é eliminado e a ordem dos vetores e matrizes, conseqüentemente, reduzida.

Condensando-se estaticamente as equações de movimento obtém-se sucessivamente:

$$\mathbf{r} = K_{\theta\theta}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - K_{v\theta}^T \mathbf{v}) \quad (3)$$

$$\mathbf{K}^* = K_{vv} - K_{v\theta} \cdot K_{\theta\theta}^{-1} \cdot K_{v\theta}^T \quad (4)$$

e, considerando-se o escalar  $a_1$ , escreve-se:

$$\mathbf{C} = a_1 \cdot K_1^* \quad (5)$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} - K_{v\theta} \cdot K_{\theta\theta}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (6)$$

que é a equação de movimento condensada, para o sistema amortecido, com a ordem igual à soma do número de graus de liberdade do veículo com o de graus de liberdade translacionais da viga.

## RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

As matrizes de coeficientes  $\mathbf{K}^*$  e  $\mathbf{C}$  variam com a posição do veículo sobre a viga, i.e., são funções da variável tempo,  $t$ . Assim sendo, prefere-se a integração passo a

passo, admitindo-se uma variação linear da aceleração durante o intervalo de tempo  $[\delta]$ ,  $\Delta t$ , e mantendo-se essas matrizes constantes, enquanto o veículo desloca-se de centro a centro de elementos de viga justapostos, com os valores dos coeficientes calculados para o veículo colocado sobre o nó intermediário.

Naturalmente, para a aplicação do processo, começa-se por escrever as equações de movimento sob a forma incremental:

$$\mathbf{M} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C} \cdot \Delta \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}^* \cdot \Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{f} - \mathbf{K}_{\varphi\theta} \cdot \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad (7)$$

e, com a ajuda das expressões que relacionam os incrementos  $\Delta \mathbf{v}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{v}}$  e  $\Delta \ddot{\mathbf{v}}$ , torna-se a Equação (7) explícita em  $\Delta \ddot{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{M}' \cdot \Delta \ddot{\mathbf{v}} = \Delta \mathbf{f}' \quad (8)$$

tendo-se considerado para tal:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \mathbf{K}^* \frac{\Delta t^2}{6} \quad (9)$$

e,

$$\Delta \mathbf{f}' = \Delta \mathbf{f} - \mathbf{C} \cdot \ddot{\mathbf{v}}_t \cdot \Delta t - \mathbf{K}^* \left( \dot{\mathbf{v}}_t \cdot \Delta t + \ddot{\mathbf{v}}_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \right) - \mathbf{K}_{\varphi\theta} \cdot \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad (10)$$

O procedimento para integração é realizado segundo o algoritmo, abaixo, cujas etapas são discriminadas:

a) Conhecidos  $\mathbf{v}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t}$  determina-se  $\ddot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{v}}_t$ :

$$\ddot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{f} - \mathbf{K}_{\varphi\theta} \cdot \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t} - \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{v}_{t+\Delta t} \right)$$

b)  $\mathbf{M}'$  e  $\Delta \mathbf{f}'$  são obtidos, respectivamente, pelas Equações (9) e (10);

c) Calcula-se  $\Delta \ddot{\mathbf{v}}$  a partir da Equação (8);

d) Obtém-se  $\Delta v$  e  $\Delta \dot{v}$  pelas expressões que relacionam os incrementos das variáveis [6]:

$$\Delta \dot{v} = \ddot{v}_t \cdot \Delta t + \Delta \ddot{v} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$\Delta v = \dot{v}_t + \ddot{v}_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{v} \cdot \frac{\Delta t^2}{6} \quad (11)$$

c)  $v_{t+\Delta t} = v_t + \Delta v$  ;  $\dot{v}_{t+\Delta t} = \dot{v}_t + \Delta \dot{v}$  (12)

f) Faz-se  $v_t = v_{t+\Delta t}$  e  $\dot{v}_t = \dot{v}_{t+\Delta t}$ , e retorna-se ao passo (a), até o final do tempo de resposta.

## EXEMPLOS

Para avaliação do modelo e do correspondente programa de computador, é realizada uma série grande de testes para controle da precisão e eficiência. Em sua versão final, o programa apresenta bons índices quanto a estes requisitos, e a discretização adotada para o sistema veículo-viga permite a análise com uma subdivisão dos vãos não maior que em dez elementos de viga. Para exemplificação da análise, escolhem-se duas vigas de pontes rodoviárias, uma simplesmente apoiada com inércia constante, e a outra constituída por três vãos contínuos com inércia variável.

São usados veículos com um e dois graus de liberdade com peso total de 200 e 400kN, trafegando com velocidade constante,  $V$ , em cada passagem e variando de travessia em travessia, entre os limites 70 e 1400 km/h, conforme o parâmetro de velocidade,  $\alpha$ , definido pela expressão:

$$\alpha = \frac{V \cdot T_{01}}{2l} \quad (13)$$

onde  $T_{01}$  é o período fundamental de vibração da viga descarregada e  $l$  o comprimento do maior vão. Entende-se que esses limites de velocidade são adotados para mostrar o comportamento do sistema em situações extremas.

## VIGA ISOSTÁTICA

A Figura 3 representa o modelo adotado para a viga de 30m de vão, momento de inércia  $J = 3,98m^4$ , módulo de elasticidade  $E = 3 \times 10^{10} N/m^2$ , massa distribuída  $\bar{m} = 9,2 \times 10^3 kg/m$  e coeficiente relativo de amortecimento  $\xi = 0,03$ .

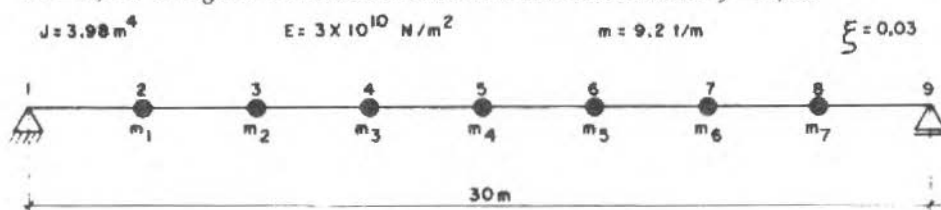


Figure 3. Modelo da viga isostática

O veículo é modelado com um único ponto de sustentação e com um ou dois graus de liberdade. As frequências correspondentes à translação e à rotação são feitas iguais a 3 e 4 Hz, respectivamente, e o coeficiente relativo de amortecimento igual a 0,1. Cada modelo é identificado pelo símbolo do veículo utilizado; V2 - 20, por exemplo, é o modelo com dois graus de liberdade e  $20 \times 10^3 kg$  de massa total. Assim, a Tabela 1 reúne as propriedades dos veículos utilizados.

Tabela 1. Características dos modelos de veículos

MODELO	V1-20	V1-40	V2-20	V2-40	V2-60
ELEMENTOS					
Massa ... $10^3 kg$	20	40	20	40	60
Inércia à rotação ... $10^3 kgm^2$	-	-	45	90	135
Rigidez à translação ... kN.m	7 106	14 212	7 106	14 212	21 318
Rigidez à rotação ... kN.m			28 424	56 849	85 273

Inicialmente, avaliam-se as frequências naturais do sistema veículo-viga e respectivos modos de vibração, e os resultados são comparados com os obtidos para a viga descarregada. Como os modos de vibração variam muito pouco, são

apresentados somente os valores das freqüências naturais. A Tabela 2 mostra os valores dessas freqüências para a viga descarregada com parâmetros distribuídos,  $\bar{f}_i$ . Os valores de  $i = 1$  e 2 identificam os modos associados diretamente com os graus de liberdade do veículo, enquanto que os demais incorporam os sete modos da viga,  $i = 3$  a 9.

Tabela 2. Freqüências naturais do veículo,  $i = 1$  e 2, e da viga simplesmente apoiada com parâmetros distribuídos ( $i = 3$  a 9)

modo $i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_i$ (Hz)	3,00	4,00	6,29	25,15	56,59	100,60	157,19	226,35	308,09

Tabela 3. Relação das freqüências naturais  $f_{ij}/\bar{f}_i$ , do sistema, veículo V2-40 e viga simplesmente apoiada.

modo $i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
veículo nó $j =$									
1	1,000	0,997	1,002	1,000	0,998	0,993	0,977	0,937	0,850
2	0,992	0,998	1,008	1,001	0,999	0,993	0,977	0,937	0,850
3	0,977	0,998	1,022	1,002	0,998	0,993	0,997	0,937	0,850
4	0,965	0,998	1,036	1,001	0,998	0,993	0,997	0,937	0,850
5	0,960	0,999	1,042	1,000	0,998	0,993	0,997	0,937	0,850

A Tabela 3 exibe os quocientes,  $f_{ij}/\bar{f}_i$ , dos valores das freqüências naturais do sistema veículo-viga para os correspondentes da viga sem o veículo, Tabela 2. Assim, o modo  $i = 1$  é o em que predomina a deslocabilidade associada ao veículo, valendo as indicações da primeira coluna para verificar a variação da freqüência natural desse modo com o deslocamento do veículo ao longo da viga. Já a primeira linha de valores da tabela mostra como variam as freqüências naturais dos diversos modos para o veículo sobre o nó 1, i.e., viga descarregada; tais informações mostram que as primeiras freqüências da viga são pouco alteradas pela discretização adotada ( $j = 1, i = 3$  a 7).

Observa-se que a presença do veículo modifica somente a frequência fundamental da viga ( $i = 3$ ) e, assim mesmo, com variação inferior a 5% da frequência da viga descarregada ( $i = 3, j = 5$ ); para o caso V2-60, não relatado em detalhe, esta variação chega a 7%. No que tange às frequências dos modos 1 e 2, associados diretamente às deslocabilidades do veículo, estas sofrem pequenas variações com a posição deste sobre a viga como era de se esperar.

A Figura 4 mostra o diagrama de resposta no tempo na seção central da viga quando sujeita à passagem do veículo V1-20,  $\alpha = 0,09$ . Esse gráfico tem como ordenada o fator de amplificação  $FA = v : |v_e|$ , sendo  $v_e$ , o deslocamento estático máximo da viga na mesma seção 5, para o veículo V1-20, que é igual a  $-0,942\text{mm}$ ; nas abscissas indica-se a posição do veículo pelo parâmetro  $V \cdot t/l$ . A linha cheia corresponde ao deslocamento em cada posição da carga, e a pontilhada à resposta pseudo-estática. A primeira é, essencialmente, a linha de influência dinâmica para o deslocamento na seção 5.



Figura 4. Resposta da viga isostática. Deflexão da seção central

Pode ser assinalado que a resposta dinâmica oscila em torno da pseudo-estática com um período próximo do fundamental de vibração da viga. Visto desta maneira, o parâmetro  $\alpha$ , Equação (13), exibe um significado físico interessante: o seu inverso,  $2 \cdot f_{01} \cdot t_1$ , é igual a duas vezes o número de oscilações completas da viga, durante o tempo  $t_1$  em que o veículo demora-se sobre ela.

A Figura 5 mostra as curvas espectrais para deslocamento e momento fletor no centro do vão em função da velocidade do veículo expressa diretamente em km/h e sob a forma do parâmetro  $\alpha$ . É observado que essas curvas são onduladas tendo extensão e amplitude crescentes com  $\alpha$ ; esse aspecto é uma consequência das características de resposta no tempo identificadas na figura anterior. É claro, se  $\alpha$  cresce indefinidamente, os valores indicativos da resposta da viga tendem para zero.

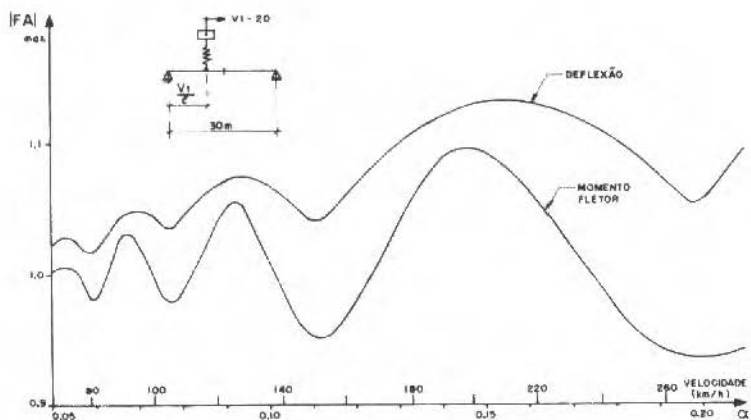


Figura 5. Valores máximos da resposta para a viga isostática

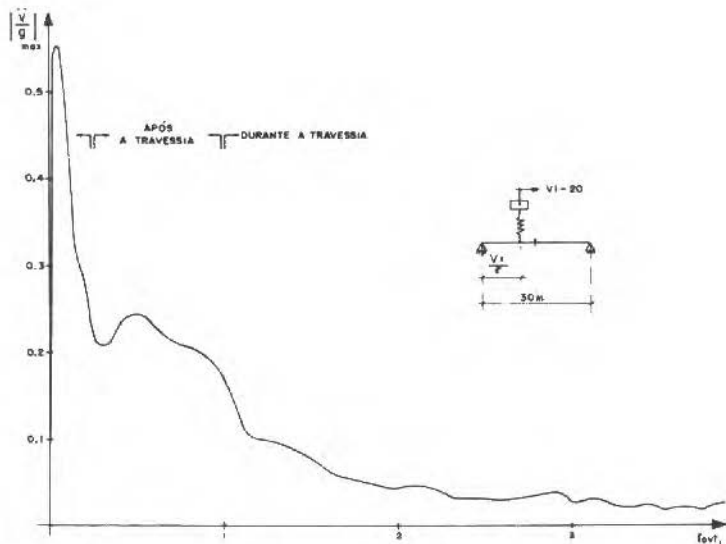


Figura 6. Espectro da resposta em aceleração na seção central da viga isostática



Agora, na Figura 6, é apresentado o espectro de resposta da aceleração na seção central da viga normalizada em relação à aceleração da gravidade,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . Nota-se que para valores baixos de  $f_{01} t_1$ , elevados de  $\alpha$ , caracteriza-se um comportamento nitidamente dinâmico, com  $|\dot{v}|_{\text{max}} = 0,55g$ . Por outro lado, é observada tendência do comportamento estático quando o indicador desloca-se para o extremo direito do gráfico. Verifica-se também a existência de regiões onde se alternam máximos ocorrendo durante e após a passagem do veículo sobre a viga.

Considera-se, na Figura 7, o gráfico da aceleração do veículo,  $\dot{y}_v$ , que fornece indiretamente, uma avaliação da interação veículo-viga; constata-se que esta interação provoca uma variação do peso do veículo inferior a 10%.

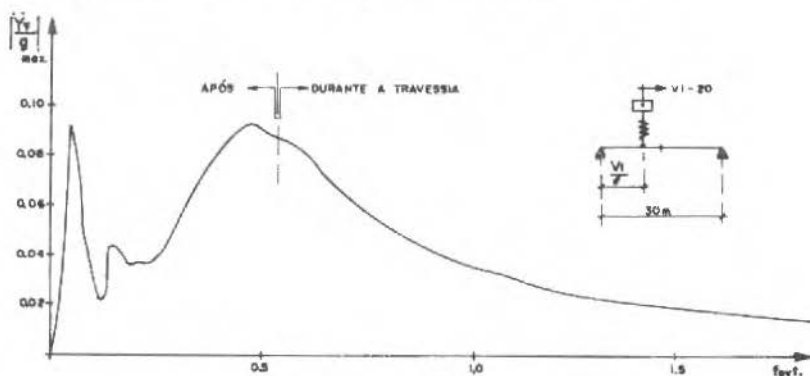


Figura 7. Espectro da resposta em aceleração do veículo sobre a viga isostática

## VIGA CONTÍNUA

Este exemplo consiste de uma viga contínua com três vãos, seção caixão com inércia variável, como mostram a Figura 8 e a Tabela 4. O módulo de elasticidade  $E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , e o fator de amortecimento  $\xi = 0,03$ .

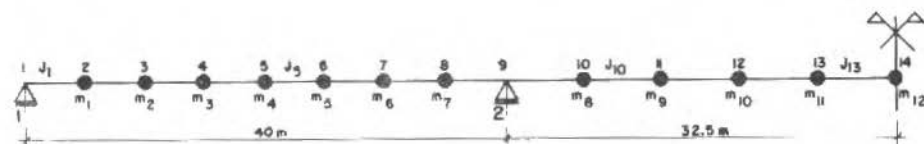


Figura 8. Modelo de viga contínua

Tabela 4. Características da viga contínua

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$m_i(t)$	34,00	68,25	71,06	73,87	68,68	79,36	84,22	95,90	121,26	112,26	91,98	76,68	68,25	68,25
$J_i(m^4)$	2,078	2,078	2,078	2,078	2,078	2,239	3,558	6,697	15,796	13,788	5,520	2,761	2,078	2,078

Em virtude da pequena influência associada à interação veículo-viga, verificada no primeiro exemplo, a análise das freqüências e modos reduz-se apenas à apresentação dos resultados das freqüências com o veículo no primeiro nó, Tabela 5.

Tabela 5. Freqüências naturais da viga contínua

i	1	2	3	4	5	6	7	8	23
$f_{i1}(Hz)$	1,45	2,66	3,97	5,81	9,16	11,26	13,27	18,15	113,30
$f_{i1}   f_{11}$	1,000	1,830	2,729	3,998	6,298	7,744	9,129	12,486	77,931

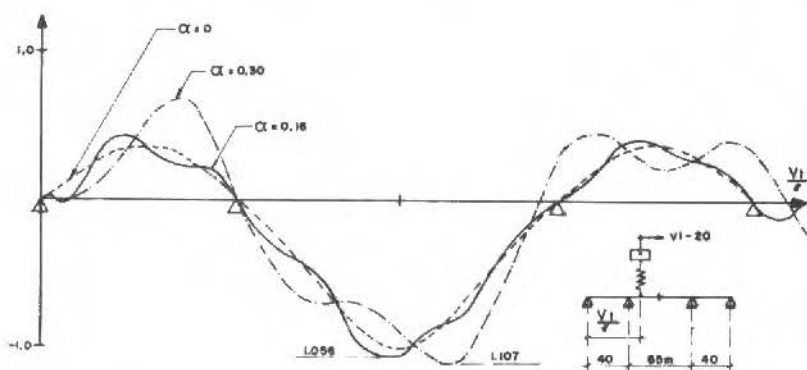


Figura 9. Resposta da viga contínua. Deflexão da seção central

O comportamento desta viga sujeita ao veículo V1-20 é, em muitos aspectos, semelhante ao da viga simplesmente apoiada do exemplo anterior. A Figura 9

mostra a resposta no tempo da deflexão na seção central da viga para as velocidades de 105 e 204 km/h, que correspondem a valores de  $\alpha$  iguais a 0,16 e 0,30, respectivamente; os deslocamentos estão normalizados em termos do deslocamento estático,  $v_e = 5,35\text{mm}$ , para o veículo colocado sobre esta seção e o valor de  $t_1$ , para o cálculo de  $\alpha$ , é tomado igual ao tempo de travessia do vão central.

De maneira semelhante, as Figuras 10 e 11, exibem os gráficos dos momentos fletores na seção de simetria e na do segundo apoio intermediário, normalizados pelo valor  $P \cdot l/4$ , sendo  $P$  o peso do veículo e  $l$  o comprimento do vão central. As linhas para  $\alpha \neq 0$  materializam linhas de influência dinâmica que oscilam em torno das linhas de influência estática,  $\alpha = 0$ . A máxima amplificação, para o deslocamento é 1,11 e para o momento fletor da ordem de 1,34, decorrente da relação 0,67/0,50 obtida da Figura 11.

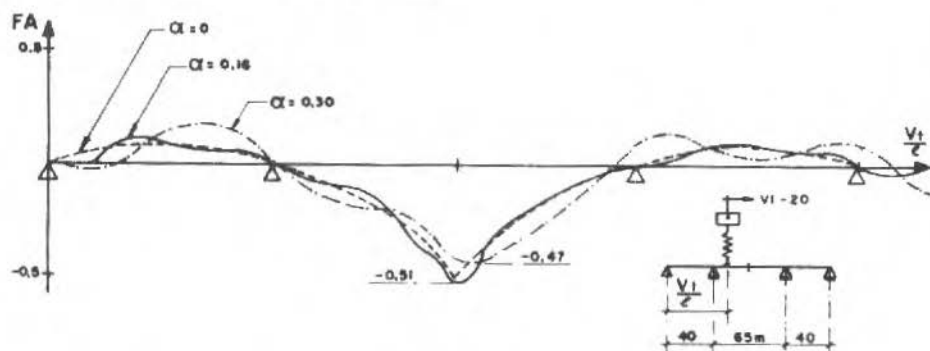


Figura 10. Resposta da viga contínua. Momento fletor na seção central

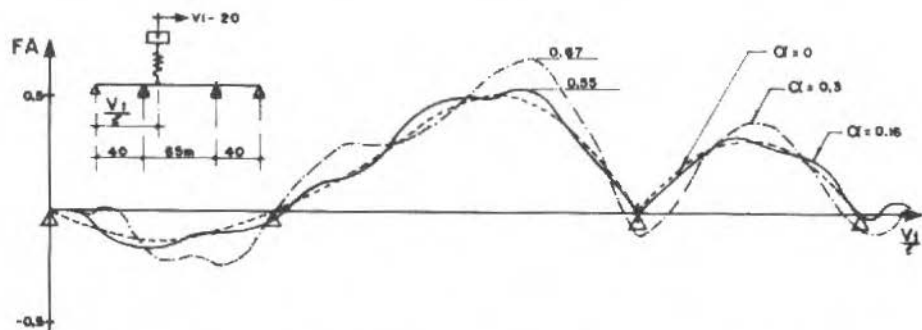


Figura 11. Resposta da viga contínua. Momento fletor na seção do 3º apoio.

## CONCLUSÕES

Em todos os casos estudados, em quantidade muito além do que foi apresentado, o modelo proposto para o sistema veículo viga e a correspondente implementação em computador fornecem resultados com muito boa aproximação, com pequeno esforço computacional e, principalmente, com grande flexibilidade para admitir outras situações de carregamento. A consideração da deslocabilidade à rotação do veículo não altera sensivelmente os efeitos sobre a viga, em relação ao caso em que apenas a deslocabilidade à translação.

A confrontação dos resultados das respostas das vigas à passagem do veículo com as linhas de influência estáticas dos mesmos efeitos ilustra muito bem a ação da mobilidade do carregamento e reforça o conceito da linha de influência dinâmica.

De maneira geral, para velocidades correntes do veículo, a majoração dos efeitos estáticos não ultrapassa o nível dos 10%. Em certos casos todavia, as amplificações podem ir além do promovido pelo coeficiente de impacto recomendado pelas normas. O problema deve ficar mais importante se consideradas excitações peculiares introduzidas por irregularidades na pista e condições iniciais não homogêneas, quando da entrada do veículo na ponte.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPERJ - Fundação para Auxílio à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro o auxílio financeiro para o desenvolvimento do trabalho. O assunto integra também a dissertação de mestrado do primeiro autor, bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, durante seu curso de pós-graduação.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] CARNEIRO, R.J.F.M. - Análise de Pontes Rodoviárias sob a Ação de Cargas Móveis, PUC - Pontifícia Universidade Católica, Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, 1986.
- [ 2 ] CHIU, W.; SMITH, R. and WORMLEY, D.N. - Influence of Vehicle and Distributed Guideway Dynamic Interactions, J. Dynam. Syst. Meas. Control, Trans. ASME 93(1), p. 25, 1971.

- [ 3] FLEMING, J.F. and ROMUALDI, J.P. - Dynamic Response of Highway Bridges, ASCE Journal Structural Division, vol. 87, 1961.
- [ 4] HILLBERG, A. - Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders, Inst. Struc. Engr. Bridge Building, Royal Inst. Tech., Stockholm, 1951.
- [ 5] HUANG, T. and VELETOS, A.S. - Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges, ASCE J. Mech. Div., vol. 96, 1970.
- [ 6] NEWMARK, N.M. - A Method of Computation for Structural Dynamics, ASCE J. Mech. Div., vol. 85, 1959.
- [ 7] STANISIC, M.M. and HARDIN, J.C. - On the Response of Beams to an Arbitrary Number of Concentrated Moving Masses, J. Franklin Inst., vol. 287, pp. 115-123, 1969.
- [ 8] TRAIL-NASH, W.R. and GUPTA, R.K. - Bridge Dynamic Loading due to Road Surface Irregularities and Breaking of Vehicle, Intl. J. Earthquake Engr. Struc. Dyn., vol. 8, pp. 83-96, 1980.
- [ 9] WEN, R.K. - Dynamic Response of Beams Transversed by Two-Axle Loads, ASCE J. Mech. Div., vol. 86, 1960.
- [10] YOSHIDA, D.M. and WEAVER, W. - Finite Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads, Pub. Intl. Assoc. Bridge Struc. Engr., vol. 31, p. 179, 1971.

## BOUNDARY ELEMENT APPROACH FOR THE TRANSIENT THERMOELASTIC PROBLEM

### UMA APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA TERMOELÁSTICO TRANSIENTE

**Maurice Boulos Halal**

FURG - Fundação Universidade do Rio Grande  
Departamento de Física  
96.200 Rio Grande, RGS - Brasil

**Sergio Colle**

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica  
88.049 Florianópolis, SC - Brasil

#### ABSTRACT

*A Boundary Element Method formulation is presented which uses time independent fundamental solutions for solving an axisymmetric thermoelastic problem resulting from a transient temperature field. Firstly, the integral equation of the heat conduction problem is obtained, with the use of auxiliary coordinate functions. Proceeding analogously for the elastic domain, the displacement field boundary integral equations are obtained. Then, the stress field at the boundary can be calculated with no additional integrations. In order to analyse non-homogeneous bodies, a subregionalization procedure is employed. A computer program is now being developed in order to test the efficiency of the method.*

**Key-words:** Boundary Elements ■ Dual Reciprocity ■ Axisymmetric Thermoelasticity ■ Subregions

#### RESUMO

*Apresenta-se uma formulação do Método dos Elementos de Contorno que utiliza soluções fundamentais independentes do tempo para a determinação do problema termoelástico axissimétrico resultante de um campo de temperatura não-estacionário. Inicialmente, a equação integral da condução de calor é obtida, com o uso de funções coordenadas auxiliares. Procedendo analogamente para o domínio elástico, as equações integrais no contorno do campo de deslocamentos são obtidas. Assim, o campo de tensões no contorno pode ser determinado sem integrações adicionais. No sentido de analisar corpos não-homogêneos, procede-se uma subregionalização. Um programa computacional está sendo desenvolvido com o objetivo de testar a eficiência do método.*

**Palavras-chave:** Elementos de Contorno ■ Dupla Reciprocidade ■ Termoelasticidade Axissimétrica ■ Subregiões

## INTRODUCTION

The purpose of the present paper is to apply the BEM to the solution of the transient temperature field in solids of axisymmetric geometry. Once the temperature field is determined, the method is applied to the solution of the displacements field and consequently of the stress field, having as a starting point the equations of the equilibrium and the constitutive relations.

There are several applications in the engineering industry in thermoelasticity, especially in the treatment of welded workpieces of cylindrical shape in furnaces, such as the temperature control, normalization and tempering. When a workpiece is exposed to a temperature field, in general it can be subjected to thermal stresses. In these circumstances, one should control its velocity in the furnace in order to avoid stress concentrations in the welding joint, which can produce fractures in the composite solid.

The BEM transforms the differential equation in the domain into an integral equation which relates the distributions and their normal derivatives exclusively on the boundary. This feature reduces by one the dimension of the problem, regardless of numerical methods used in connection with it. Hence discretization for numerical purposes is confined to body surfaces, thus reducing the order of the matrix system, although the matrix is non-symmetric and fully populated. However, when one deals with transient problems, there results a domain integral due to the initial condition in the case of unsteady heat conduction. Additionally, in the thermoelastic problem the term which results from thermal loads also gives rise to a domain integral. These features reduce the attractiveness of the method, removing its main characteristic of being a 'boundary only' method. For this reason RIZZO & SHIPPY [1] early derived a formulation in which the volume integral is converted to a surface integral. However, the formulation is restricted to steady thermal loads. WROBEL [2] proceeded the solution of the 2-D isotropic transient heat conduction, and eliminated the domain integral by assuming that the initial condition satisfied a Laplacian.

An alternative approach is due to NARDINE & BREBBIA [3], which used time independent fundamental solutions to elastodynamic problems. As the initial step they approximated the term of the partial differential equation that did not contain time derivative, by applying Green's second identity. Next, the dynamic term (time derivative of the displacements) was approximated, with the use of coordinate functions, followed by a further application of the Green's second identity. As a result they obtained boundary integrals only, added to the advantage of using time independent fundamental solutions to transient problems. The resulting ordinary differential equations system in time is then solved by direct methods, analogous to the ones used in finite elements.

Recently, WROBEL et al. [4] applied the method (called Dual Reciprocity) to the solution of heat diffusion with axisymmetric geometry. Further applications are due to LOEFFLER & MANSUR [5] to the wave propagation problem; SLÁDEK & SLÁDEK [6] produced formulations to transient 2-D and 3-D thermoelasticity without evidence of numerical implementations, and others.

In this paper the Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) is extended to the axisymmetric thermoelasticity problem resulting from transient thermal loads. For completeness, the axisymmetric transient heat conduction problem formulated in [4] with the use of DRBEM will be outlined in the next section. First, one obtains the 3-D boundary integral equation, then by integrating it along a ring, one arrives at the axisymmetric formulation. A similar procedure is performed to the axisymmetric thermoelasticity DRBEM formulation.

In order to apply the method to nonhomogeneous solids, a subregionalization procedure is described. Moreover, the subregionalization produces banded-matrices in the resulting system of equations.

## HEAT CONDUCTION DRBEM FORMULATION

### a) Three-Dimensional

The body is divided into subregions  $D^m$ , each of which may have different physical properties. The partial differential equation which governs the transient heat conduction for each subregion  $D^m$  is given by:

$$\alpha^m \nabla^2 \theta^m (q^m, t) = \frac{\partial \theta^m}{\partial t} (q^m, t) \quad (1)$$

where  $\alpha^m = (k/\rho c_p)^m$  is the thermal diffusivity,  $k^m$  the thermal conductivity,  $\rho^m$  the specific mass,  $c_p^m$  the specific heat, and  $\theta^m$  is the temperature excess with respect to temperature  $T$  of the undeformed subregion  $D^m$ . Equation (1) is subjected to the following boundary conditions:

$$\theta^m (Q^m, t) = \bar{\theta}^m (Q^m, t), \quad Q^m \in \partial D^m \quad (2)$$

with  $\bar{\theta}^m$  prescribed on the boundary  $\partial D^m$  of the subregion  $D^m$ . Additionally, the following interface conditions between two adjacent subregions have to be considered:



$$\theta^m(q, t) = \theta^n(q, t) \quad (3)$$

$$k^m \frac{\partial \theta^m}{\partial n}(q, t) = -k^n \frac{\partial \theta^n}{\partial n}(q, t) \quad (4)$$

which are the temperature continuity and the heat flux compatibility along any interface, respectively. As the problem is time dependent, one needs the initial conditions:

$$\theta^m(q^m, t) = \bar{F}^m(q^m), \quad t = t_0 \quad (5)$$

In order to solve Equation (1), subjected to the conditions (2)-(5), let us consider the stationary auxiliary problem in an infinite body given by:

$$\alpha^m \nabla^2 G^m(p^m, q^m) = -\delta(p^m, q^m) \quad (6)$$

where  $G^m(p^m, q^m)$  is the time independent fundamental solution satisfying Equation (6),  $p, q$  being the source and the field point, respectively, and  $\delta$  is the Dirac distribution. By applying Green's second identity and the  $\delta$  properties to be Equations (1) and (6), one can derive the following integral equation to a particular subregion  $D^m$ :

$$\int_D k G \nabla^2 \theta dx_q = -\theta(p) + \int_{\partial D} (G q - q^* \theta) dS_Q \quad (7)$$

where the superscript denoting a subregion has been dropped for simplicity. Here  $q^* = k \partial G / \partial n$  and  $q = k \partial \theta / \partial n$ ,  $n$  being the outward unit normal to the boundary  $\partial D^m$ . Now, taking the source point  $p$  to the boundary and accounting for the jump of  $q^*$ , one arrives at the following boundary integral equation:

$$\int_D k G \nabla^2 \theta dx_q = -C(p) \theta(p) + \int_{\partial D} (G q - q^* \theta) dS_Q \quad (8)$$

where  $C(p)$  depends on the internal angle at  $p \in \partial D^m$ , and the last integral on the right hand side is to be taken as the Cauchy principal value [7]. The next step

consists in approximating the domain integral in Equation (8). Let us first define a set of coordinate functions  $f^j$  as follows:

$$\dot{\theta}(p, t) = \sum_{j=1}^N f^j(p) \dot{\Psi}^j(t) \quad (9)$$

where the dot indicates time derivative and  $\dot{\Psi}^j$  are unknown functions in time. Then, substituting Equation (1) in the domain integral of Equation (8), and applying Equation (9), one gets:

$$\int_D G \theta \, dx_q = \sum_{j=1}^N \dot{\Psi}^j \int_D f^j G \, dx_q \quad (10)$$

Assuming that for each coordinate function  $f^j$  there exists a function  $\chi^j$  such that  $\nabla^2 \chi^j = f^j$ , substituting in the domain integral and proceeding as in Equation (8), one arrives at the 3-D boundary integral equation:

$$\begin{aligned} C(P) \theta(P, t) + \int_{\partial D} [q^*(P, Q) \theta(Q, t) - G(P, Q) q(Q, t)] \, ds_Q = \\ = \sum_{j=1}^N \frac{\dot{\Psi}^j}{\alpha}(t) \left\{ C(P) \chi^j(P) + \int_{\partial D} [q^*(P, Q) \chi^j(Q) - G(P, Q) \eta^j(Q)] \, ds_Q \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

which involves only boundary integrals; here,  $\eta = k \, \partial \chi / \partial n$ .

For 3-D problems, the coordinate functions are chosen to be [4]:

$$f^j(p) = R(p, q_j) \quad (12)$$

where  $R$  is the Euclidean distance,  $q_j$  are the coordinates of the  $j$ -pole (fixed nodal point) and  $p$  are the coordinates of a point in  $D$ . Then,  $\chi$  and  $\eta$  are given by:

$$\chi^j(p) = \frac{1}{12} R^3(p, q_j) \quad (13)$$

$$\eta^j(p) = \frac{k}{4} R^2(p, q_j) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (14)$$

It is worth noting that the choice of  $f^j$  is consistent with the fundamental solution behavior, which is itself a function of  $R$ .

### b) Axisymmetric

Let us now suppose that the body is axisymmetric, so the variables  $\theta, q, \chi, \eta$  do not depend on the angle  $\varphi$  of the cylindrical coordinates  $(r, \varphi, z)$ . Then we can perform an integration in advance for  $\varphi [0, 2\pi]$  in Equation (8), resulting the following integral equation:

$$\begin{aligned} & C(P)\theta(P, t) + \int_{\Gamma} [q^*(P, Q)\theta(Q, t) - G(P, Q)q(Q, t)]r(Q) d\Gamma_Q + \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\psi^j(t)}{\alpha} \left\{ C(P)\chi^j(P) + \int_{\Gamma} [q^*(P, Q)\chi^j(Q) - G(P, Q)\eta^j(Q)]r(Q) d\Gamma_Q \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

where  $\Gamma$  is the boundary which is the intersection of  $\partial D$  with the  $r^+ - z$  semiplane (see Figure 1). Now, the fundamental solution not only depends on  $R$ , but also on the distance of the source and the field points to the axis of revolution. Then, the values of  $f, \chi$  and  $\eta$  are given, respectively, by [4]:

$$f^j = R(P, Q_j) \left[ 1 - \frac{r_j}{4r} \right] \quad (16)$$

$$\chi^j = \frac{R^3(P, Q_j)}{12} \quad (17)$$

$$\eta^j = \frac{k}{4} R^2(P, Q_j) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (18)$$

In order to numerically solve Equation (15), the variables involved will be approximated within each boundary element by using a set of interpolation function  $\Phi^T$ :

$$\theta = \Phi^T \theta_e, \quad q = \Phi^t q_e$$

$$\chi^j = \Phi^t \chi_e^j, \quad \eta^j = \Phi^T \eta_e^j \quad (19)$$

with  $e$  denoting a particular boundary element. Now, applying Equation (15) to all boundary nodes, one gets the following set of ordinary differential equations in time:

$$[H] \{\theta\} - [g] \{q\} = \frac{1}{\alpha} ([H] \{\chi\} - [g] \{\eta\}) \{\dot{\Psi}\} \quad (20)$$

By evaluating expression (9) at all boundary nodes and inverting the result, one obtains:

$$\{\dot{\Psi}\} = [F]^{-1} \{\dot{\theta}\} \quad (21)$$

which, after substitution in Equation (20), results in:

$$[C] \{\dot{\theta}\} + [H] \{\theta\} = [g] \{q\} \quad (22)$$

where:

$$[C] = -\frac{1}{\alpha} ([H] \{\chi\} - [g] \{\eta\}) [F]^{-1} \quad (23)$$

Equation (22) can be solved by a direct time integration procedure, analogous to those used in finite elements [4].

In the section that follows the formulation of the thermoelastic problem raised from the temperature distribution determined by Equation (22) is presented.

## THERMOELASTICITY DRBEM FORMULATION

### a) Three-Dimensional

Let us consider an isotropic, sectionally homogeneous, perfectly elastic body, occupying a region  $D$ , of contour  $\partial D$ , sufficiently regular.

Considering a partition of  $D$  into subregions  $D^k$  with contours  $\partial D^k$ , the equations of equilibrium for each subregion can be written as:

$$\mu u_{i,jj}(p, t) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}(p, t) = \gamma \theta_{,i}(p, t) \quad (24)$$

subjected to prescribed tractions boundary conditions:

$$t_i(p, t) = \sigma_{ij}(p, t) n_j(p) = \bar{t}_i(p) \quad (25)$$

where  $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\beta$ ,  $\mu$  and  $\lambda$  being Lamé constants,  $\beta$  is the linear coefficient of thermal expansion,  $u_i$  are the displacements, the comma denotes partial derivative with respect to the cartesian coordinates, and  $\theta$  is to satisfy Equation (1).

Simultaneously, let us consider the following stationary problem of thermoelasticity:

$$\mu u_{i,jj}^*(p, q) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}^*(p, q) + B_i^*(p, q) = \gamma G_{,i}(p, q) \quad (26)$$

$u_i^*$  being the fundamental displacements of the elastostatic problem and  $G$  is to satisfy Equation (6) [6] (see Appendix).

Proceeding as usually in the BEM approach [7], the following integral equation is obtained:

$$\begin{aligned} C_{ij}(P) u_j(P, t) + \int_{\partial D} [T_{ij}(P, Q) u_j(Q, t) - U_{ij}(P, Q) t_j(Q, t)] dS_Q = \\ = \int_D \gamma \theta(q, t) U_{ij,i}(P, q) dV_q \end{aligned} \quad (27)$$

where  $(P, Q) \in \partial D^k$ ,  $(p, q) \in D^k$ . By applying the same procedure as in [6], the volume integral given in Equation (27) will be transformed into boundary integrals (see Appendix). The result is:

$$\begin{aligned}
 & C_{ij}(P) u_j(P, t) + \int_{\partial D} [T_{ij}(P, Q) u_j(Q, t) - U_{ij}(P, Q) t_j(Q, t)] dS_Q - \\
 & - \alpha \int_{\partial D} [U_i(P, Q) \theta_j(Q, t) - \theta(Q, t) U_{ij}(P, Q)] n_j(Q) dS_Q = \\
 & = \sum_{k=1}^N \dot{\Psi}^k(t) \left\{ \int_{\partial D} [U_i(P, Q) \chi_j^k(Q) - \chi^k(Q) U_{ij}(P, Q)] n_j(Q) dS_Q + \right. \\
 & + \frac{\gamma C_{ij}(P) \tau_j^k(P)}{\alpha(\lambda + 2\mu)} + \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \int_{\partial D} \chi^k(Q) G(P, Q) n_i(Q) dS_Q \\
 & \left. + \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \int_{\partial D} [\tau_i^k(Q) G_j(P, Q) - G(P, Q) \tau_{ij}^k(Q)] n_j(Q) dS_Q \right\} \quad (28)
 \end{aligned}$$

b) Axisymmetric

Next, the 3-D integral Equation (28) is transformed into an axisymmetric one. This is accomplished by integrating these integrals along a ring  $\varphi [0, 2\pi]$ , since the variables  $u_i, t_i, \theta, \chi^k$  and  $\tau_i^k$  (and the normal derivatives) are angle independent. Having in mind that  $dS_Q = r_Q d\varphi(Q) d\Gamma_Q$ , where  $Q = Q(r, z)$ , one obtains the integral equation:

$$\begin{aligned}
 & C_{ij}(P) u_j(P, t) + \int_{\Gamma} [T_{ij}(P, Q) u_j(Q, t) - U_{ij}(P, Q) t_j(Q, t)] r_Q d\Gamma_Q - \\
 & - \alpha \int_{\Gamma} [U_i(P, Q) \theta_j(Q, t) - \theta(Q, t) U_{ij}(P, Q)] n_j(Q) r_Q d\Gamma_Q = \\
 & = \sum_{k=1}^N \dot{\Psi}^k(t) \left\{ \int_{\Gamma} [U_i(P, Q) \chi_j^k(Q) - \chi^k(Q) U_{ij}(P, Q)] n_j(Q) r_Q d\Gamma_Q + \right. \\
 & + \frac{\gamma C_{ij}(P) \tau_j^k(P)}{\alpha(\lambda + 2\mu)} + \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \int_{\Gamma} [\chi^k(Q) G(P, Q)] n_i(Q) r_Q d\Gamma_Q + \\
 & \left. + \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \int_{\Gamma} [\tau_i^k(Q) G_j(P, Q) - G(P, Q) \tau_{ij}^k(Q)] n_j(Q) r_Q d\Gamma_Q \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

where  $(P, Q) \in \Gamma$  and  $ij = r, z$ . As it can be observed from Equation (29), all the integrals are at the boundary  $\Gamma$ , and therefore there is no need to discretize the domain  $\Omega$  of the body to solve for the integral due to the transient thermal 'body force'. The functions  $\tau_i^k$  are obtained by first choosing the coordinate functions  $f^k$  that must satisfy  $\nabla^2 \chi^k = f^k$ . With  $\chi^k$  obtained, the solution of  $\nabla^e \tau^k = \chi_{,i}^k$  gives the  $\tau_i^k$  (see Appendix). As the problem is now axisymmetric, it seems to be more consistent to choose the set of coordinate functions in terms of elliptic integrals [8]. Then, if one chooses the following coordinate functions,

$$f^k(r, z) = 4 \bar{R} E(h) \quad (30)$$

where:

$$\bar{R} = [(r + r_k)^2 + (z - z_k)^2]^{1/2} \quad (31)$$

the primitive  $\chi^k$  will give:

$$\chi^k(r, z) = \frac{\bar{R}^3}{9} [(h-1) K(h) + 2(2-h) E(h)] \quad (32)$$

and the  $\tau_i^k, i = r, z$ , are given, respectively, by:

$$\begin{aligned} \tau_r^k(r, z) = & \frac{\bar{R}^3}{270h} \{ [6r_k(h^2 + h - 1) + 10rh(2 - h)] E(h) \\ & + [3r_k(2 - h) + 5rh](h - 1) K(h) \} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tau_z^j = \frac{\bar{R}^3 \bar{Z}}{54} [(h - 1) K(h) + 2(2 - h) E(h)] \quad (34)$$

where  $\bar{Z} = (z - z_j)$ ;  $K(h)$  and  $E(h)$ ,  $h$  being the modulus, are the elliptic integrals of the first and second kind, respectively (see Appendix).

For numerical solution purpose of Equation (29), the variables involved are assumed to vary according to interpolation functions over each boundary element,

$$\mathbf{u} = \Phi^T \mathbf{u}_e \quad \boldsymbol{\tau} = \Phi^T \boldsymbol{\tau}_e \quad t = \Phi^T t_e \quad \partial \boldsymbol{\tau} / \partial n = \Phi^T \partial \boldsymbol{\tau}_e \quad (35)$$

Then, the discretized version of Equations (29) is given as:

$$[T] \{u\} = [A] \{\dot{\theta}\} + [B] \quad (36)$$

where:

$$\begin{aligned} [A] &= [F]^{-1} ([U^*] \{\eta\} + [g_n] \{\chi\} - [Q^*] \{\tau\} - [g] \{\partial \tau\}) \\ [B] &= [U] \{t\} - [Q^*] \{\theta\} + [U^*] \{q\} \end{aligned} \quad (37)$$

where the traction boundary conditions have been applied. It is worth noting that the time enters only as a parameter in Equation (36) since the temperature and its time derivative have been calculated previously in the heat conduction Equation (22).

With the nodal values of the temperature known from Equation (15), the displacement and the traction known from Equation (29), one can determine the stress tensor at the boundary by using a local coordinate system (see ref. [7], [9]).

## SUBREGIONS

For analysis purpose of nonhomogeneous bodies, a domain decomposition procedure is outlined in this section. The body is divided into two subregions with different physical properties (see Figure 1).

In the interface, the following conditions are to be considered:

$$q_I^1 = - \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \quad q_I^2 = q_I \quad (38)$$

$$\dot{\theta}_I^1 = \dot{\theta}_I^2 = \dot{\theta}_I \quad (39)$$

$$\theta_I^1 = \theta_I^2 = \theta_I \quad (40)$$



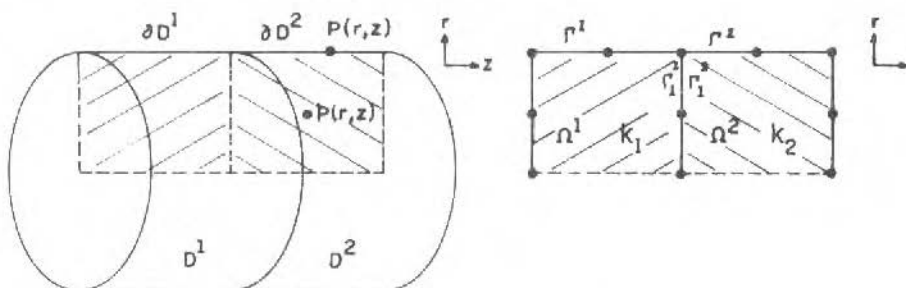


Figure 1. a) Axisymmetric Geometry; b) Discretized

Then, applying Equation (22) to each subregion, the following matrix form can be obtained:

$$[C^1 \quad C_I^1] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^1 \\ \theta_I^1 \end{Bmatrix} + [H^1 \quad H_I^1] \begin{Bmatrix} \theta^1 \\ \theta_I^1 \end{Bmatrix} = [g^1 \quad g_I^1] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q_I^1 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

$$[C^2 \quad C_I^2] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \theta_I^2 \end{Bmatrix} + [H^2 \quad H_I^2] \begin{Bmatrix} \theta^2 \\ \theta_I^2 \end{Bmatrix} = [g^2 \quad g_I^2] \begin{Bmatrix} q^2 \\ q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Thus, Equations (38)-(42) can be represented by the matrix expression:

$$\begin{bmatrix} C^1 & C_I^1 & 0 \\ 0 & C_I^2 & C^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}^1 \\ \theta_I^1 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & -g_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & (\frac{k_1}{K_2})^2 g_I^2 & g^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta^1 \\ \theta_I^1 \\ q_I^1 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1 & 0 \\ 0 & g^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

An analogous system results for the thermoelastic problem given by Equation (36).

## CONCLUSIONS

The axisymmetric thermoelasticity problem has been formulated. The resulting equations contain only boundary integrals, thus, there is no need to discretize the domain of the body to solve for transient thermal loads. A domain decomposition

procedure is adopted in order to account for nonhomogeneous solids. Another advantage is matrices result in banded form.

The coordinate functions given by Equation (30) do not form a complete set. Then, accuracy is not guaranteed. For this reason, other coordinate functions will be tested.

As it was observed, the boundary conditions of the thermal problem were prescribed temperature, and the temperature at the interface is to be computed.

If one has prescribed nonlinear boundary conditions (e.g. Thermal radiation) one would solve Equation (22) iteratively (e.g. by Newton-Raphson method) for the temperature and the heat flux. A computer program is being developed by the authors which considers the above mentioned features.

## REFERENCES

- [ 1 ] RIZZO, F.J. and SHIPPY, D.J. - An Advanced Boundary Integral Equation Method for 3-D Thermoelasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 11, pp. 1753-1768, 1977.
- [ 2 ] WROBEL, L.C. - Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method, *Ph.D. Thesis*, University of Southampton, 1981.
- [ 3 ] NARDINI, D. and BREBBIA, C.A. - Transient Dynamic Analysis by the BEM, *Boundary Element* (Ed. Brebbia, C.A.; Futagami, T. and Tanaka, M.), Proc. 5th, Int. Conf. BEM, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, 1983.
- [ 4 ] WROBEL, L.C.; TELLES, J.C.F. and BREBBIA, C.A. - A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Axisymmetric Diffusion Problems, *Boundary Elements VIII*, (Ed. Tanaka, M. and Brebbia, C.A.), Proc. 8th. Int. Conf. BEM, Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 1986.
- [ 5 ] LOEFFLER, C.F. and MANSUR, W.J. - Resposta do Transiente em Problemas com Cargas impulsivas Através do Método dos Elementos de Contorno, *COBEM 87*, IX Congresso Brasileiro de Eng. Mec. (Ed. Prata, A.T.; Snoeijer, B. e Selke, C.A.C.), Florianópolis, S.C., Brasil, 1987.
- [ 6 ] SLÁDEK, V. and SLÁDEK, J. - A New Approach to Transient Dynamic Analysis of Thermoelasticity by the Boundary Element Method, *Eng. Anal.*, vol. 2, nº 4, pp. 221-229, 1985.
- [ 7 ] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C. - *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, 1984.

- [8] HALAL, M.B. - Método dos Elementos de Contorno para o Cálculo do Transiente de Tensões Térmicas em Sólidos Seccionalmente Homogêneos, *Tese de Doutorado* (em andamento), EMC-UFSC, S.C., Brasil.
- [9] LACHAT, J.C. - A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics, *Ph.D. Thesis*, University of Southampton, 1975.

## APPENDIX

### A) Kernels of the Axisymmetric Integral Equations

The fundamental solution and its normal derivative that appear in Equation (15) are given by [1]:

$$G(P, Q) = \frac{K(h)}{a+b}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) = \frac{1}{(a+b)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2r_Q} \left[ \frac{r_P^2 - r_Q^2 + (z_P - z_Q)^2}{a-b} E(h) - K(h) \right] n(r_Q) + \frac{z_P - z_Q}{a+b} E(h) n(z_Q) \right\}$$

where:

$$a = r_P^2 + r_Q^2 + (z_P - z_Q)^2, \quad b = 2r_P r_Q$$

$K(h)$  and  $E(h)$  are the elliptic integrals of the first and second kinds, respectively,

$$K(h) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{[1 - h \cdot \text{sen}^2 \theta]^{1/2}} d\theta, \quad E(h) = \int_0^{\pi/2} [1 - h \cdot \text{sen}^2 \theta]^{1/2} d\theta$$

The fundamental solutions  $U_i, i = r, z$ , of the integral Equation (29) are written as [8]:

$$U_r(P, Q) = \frac{1}{hF} \left\{ r_P E(h) + [h(r_P - r_Q) - r_P] K(h) \right\}$$

$$U_z(P, Q) = \frac{1}{F} (z_P - z_Q) K(h)$$

where:

$$F = 4\pi^2 \mu (\lambda + 2\mu) [(z_P - z_Q)^2 + r_P + r_Q]^2]^{1/2}$$

The normal derivatives of the above kernels are given by:

$$\frac{\partial U_j}{\partial n_i}(P, Q) = U_{j,i}(P, Q) n_i(Q), \quad i = r_Q, z_Q$$

More details are found in reference [8].

### B) Approximation of the Domain Integral

It is easy to prove that the following relations between the fundamental solutions are valid:

$$U_{ij,i}(P, Q) = \frac{\alpha}{\gamma} \nabla^2 U_j(P, Q) \tag{A.1}$$

$$\nabla^2 U_j(P, Q) = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} G_{j,i}(P, Q) \tag{A.2}$$

The thermal load volume integral that appears in Equation (27) is written as:

$$D = \int_D \gamma \theta U_{ij,i} dV \tag{A.3}$$

Substituting (A.1) in (A.3), applying the divergence theorem, using Equations (1) and (9) to the resulting domain integral, and applying once more the divergence theorem, one obtains:

$$\int_D U_j \theta dV = \sum_{k=1}^N \Psi^k \left\{ \int_D \nabla^2 U_j \chi^k dV + \int_{\partial D} (U_j \chi_{,i}^k - \chi^k U_{j,i}) n_i dS \right\} \quad (\text{A.4})$$

Now, substituting (A.2) in the domain integral, with a further use of the divergence theorem and assuming that for each  $\chi^k$  there exists a function  $\tau_j^k$  ( $j = r, z$ ) such that  $\nabla^2 \tau_j^k = \chi_{,j}^k$ , one arrives at:

$$\int_D \chi^k G_{,j} dV = \int_{\partial D} \chi^k G n_j dS + \int_{\partial D} (\tau_j^k G_{,i} - G \tau_{j,i}^k) n_i dS + \int_D \tau_j^k \nabla^2 G dV \quad (\text{A.5})$$

But we know that:

$$\int_D \nabla^2 G dV = -\frac{1}{\alpha} \int_D \delta(P, Q) dV = -\frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.6})$$

Then, with the use of Equation (A.6) in (A.5) and accounting for the singularities one can arrive at Equation (29).

## ELASTO-VISCOPLASTICIDADE GENERALIZADA

### GENERALIZED ELASTO-VISCOPLASTICITY

Heraldo da Costa Mattos

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Departamento de Engenharia Mecânica - PUC/RJ  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22.453 Rio de Janeiro - RJ

#### RESUMO

*Este trabalho apresenta uma formulação geral para problemas de evolução em elasto-viscoplasticidade. Apesar da forte não-linearidade das equações constitutivas consideradas, mostra-se que uma técnica numérica bastante simples pode ser utilizada para a aproximação da solução. Como exemplo da teoria, um problema considerando equações constitutivas que modelam a plasticidade e o envelhecimento de ligas metálicas é resolvido e analisado.*

**Palavras-chave:** Elasto-viscoplasticidade ■ Variáveis Internas ■ Fluência ■ Envelhecimento ■ Elementos Finitos

#### ABSTRACT

*This paper presents a general formulation for evolution problems in elasto-viscoplasticity. In spite of the strong non-linearity of these constitutive equations, it is shown that a very simple numerical technique can be used for approximating the solution. As an example of the theory, a problem with constitutive equations which take in account the interaction between plasticity and aging in metal alloys is solved and analysed.*

**Key-words:** Elasto-viscoplasticity ■ Internal Variables Theory ■ Creep ■ Aging ■ Finite Elements

## INTRODUÇÃO

O atual desenvolvimento dos computadores e das técnicas numéricas para a solução de problemas não-lineares permitem o uso de equações constitutivas cada vez mais sofisticadas (e realísticas) em problemas de Engenharia. Isto é muito importante em aplicações onde condições de carregamento muito severas podem ocorrer (como em aviões, usinas nucleares, etc.) porque uma modelagem mais precisa do comportamento do material permite a produção de elementos estruturais de alta performance mais seguros e confiáveis.

Os objetivos principais desse trabalho são a apresentação de uma formulação variacional geral para problemas de evolução em Elasto-viscoplasticidade e mostrar uma técnica simples de aproximação numérica das respectivas soluções.

De uma forma geral, as deformações plásticas de metais e polímeros não são instantâneas por causa da viscosidade. A Elasto-plasticidade clássica (independente do tempo) permite equacionar de uma maneira satisfatória uma grande quantidade de problemas, mas a influência da viscosidade é muito importante em altas temperaturas. Em alguns materiais (como em certos tipos de polímeros e aços inoxidáveis), verifica-se a ocorrência de fenômenos viscosos mesmo em baixas temperaturas. Isto tem gerado, ao longo dos últimos anos, um interesse crescente no estudo da viscoplasticidade, ou plasticidade dependente do tempo.

Para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos, na segunda seção a modelagem mecânica é discutida de forma sintética, supondo-se que todas as funções possuem regularidade suficiente para dar sentido à análise.

As equações constitutivas consideradas são desenvolvidas dentro de um contexto termodinâmico, associando-se variáveis de estado aos diversos mecanismos físicos em jogo. Elas englobam e generalizam um grande número de equações constitutivas encontradas na literatura e permitem a simulação de diferentes fenômenos mecânicos observados em ligas metálicas e polímeros, tais como a plastificação, a fluência, a relaxação e o envelhecimento. Reenfatizamos que algumas leis de comportamento elasto-viscoplásticas modelam bastante bem não só o comportamento material à altas temperaturas, mas também a temperatura ambiente. Para isso basta que os coeficientes das equações sejam identificados adequadamente.

Na terceira e na quarta seções é apresentada uma formulação variacional geral para o problema de evolução de um sólido elasto-viscoplástico. Os espaços funcionais apropriados são claramente definidos, permitindo transformar o problema mecânico num problema matemático preciso. Uma característica das equações elasto-viscoplásticas é que, apesar da sua forte não-linearidade, os problemas de

evolução resultantes são muito regulares e, portanto, muito simples do ponto de vista matemático (são mais simples, por exemplo, do que os obtidos usando-se a teoria de Elasto-plasticidade).

Na quinta seção é apresentada uma técnica numérica bastante simples para a aproximação da solução do problema. Ela consiste em discretizar o espaço através de uma técnica de elementos finitos e usar um procedimento de integração passo a passo no tempo (diferenças finitas). O algoritmo de solução proposto pode ser facilmente implementado a partir de um programa de elementos finitos para a elasticidade infinitesimal. Além disso, a formulação geral apresentada evidencia a conveniência de utilizar um único código numérico para tratar qualquer tipo de equação elasto-viscoplástica, bastando que o usuário defina, para cada situação, uma subrotina com as leis de evolução adequadas para as diferentes variáveis internas.

Finalmente, na sexta seção um exemplo considerando equações que modelam o acoplamento entre a plasticidade e o envelhecimento em ligas metálicas é apresentado e resolvido. Ao que se sabe este é o primeiro modelo proposto na literatura que permite a obtenção das curvas de "iso-envelhecimento" devidas a uma evolução não homogênea desse fenômeno.

## MODELAGEM MECÂNICA DO PROBLEMA

Seja um sólido  $S$  submetido a pequenas deformações. Isto é, a cada instante  $t$  considera-se que ele ocupa um domínio limitado fixo  $\Omega$  de  $R^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ , segundo o problema) de fronteira  $\Gamma$  suficientemente regular. Esta fronteira é dividida em duas partes complementares  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

A partir de um estado inicialmente conhecido, o corpo é submetido a esforços externos definidos da seguinte forma: forças de corpo  $b(x, t)$  são aplicadas em  $\Omega$  e forças de superfície  $f(x, t)$  são aplicadas em  $\Gamma_2$ . Além disso, um deslocamento  $\bar{u}(x, t)$  é prescrito em  $\Gamma_1$ .

Este problema é modelado classicamente através das relações cinemáticas, das equações de equilíbrio (quasi-estático), das equações constitutivas e considerando-se as condições de contorno e iniciais adequadas.

**Relações Cinemáticas.** Seja  $u$  o campo de deslocamento do corpo  $S$  e  $\epsilon$  o campo de deformação. Sob a hipótese de pequenas deformações tem-se que:

$$\epsilon = Du = (1/2) (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1)$$



onde  $D$  é o operador gradiente simétrico.

**Equações de Equilíbrio.** Se a inércia for desprezível, as leis clássicas da Dinâmica dos Corpos Deformáveis se reduzem as equações de equilíbrio, que podem ser expressas da seguinte forma:

$$\operatorname{div} T + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2)$$

$$Tn = f \quad \text{em } \Gamma_2$$

onde  $T$  é a tensão e  $n$  é a normal unitária exterior a  $\Gamma_2$ .

**Equações Constitutivas.** As equações constitutivas consideradas neste trabalho foram originalmente propostas em [1], [2], [3] e englobam a maioria das leis de comportamento elasto-viscoplásticas disponíveis na literatura (por exemplo ver [4]-[8]).

Em [1]-[3] a teoria é desenvolvida dentro de um contexto termodinâmico, associando-se variáveis de estado aos diferentes mecanismos que intervêm durante o processo de deformação. Esta questão não será discutida detalhadamente aqui já que foge ao objetivo deste trabalho.

O postulado básico (Método do Estado Local [9]) é que o estado termodinâmico de um meio contínuo num dado ponto material e num dado instante pode ser completamente definido a partir do conhecimento de um certo número de variáveis de estado. Estas variáveis são introduzidas *a priori* para descrever alguns mecanismos físicos e suas leis de evolução devem satisfazer a Segunda Lei da Termodinâmica.

Para a evolução isotérmica de um sólido elasto-viscoplástico submetido a pequenas deformações considera-se tradicionalmente que o estado dependa, pelo menos, da deformação total  $\epsilon$  além de outras variáveis notadas  $e^p$  e  $\beta$ .  $e^p$  é o clássico tensor deformação plástica e  $\beta$  representa abstratamente outras variáveis associadas com mudanças do estado interno do meio (como o endurecimento causado pela plastificação, envelhecimento, etc.).

A escolha das variáveis  $\beta$  irá depender do grau de detalhe da modelagem desejada, podendo, portanto, variar em cada problema específico. O exemplo apresentado mais adiante tornará mais claro o papel dessas variáveis. Por enquanto, para simplificar a apresentação da teoria,  $\beta$  será considerado um escalar.

Um conjunto completo de equações constitutivas elasto-viscoplásticas terá, então, a seguinte forma:

$$T = C (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = h_1 (T, \varepsilon^p, \beta) \quad (4)$$

$$\dot{\beta} = h_2 (T, \varepsilon^p, \beta) \quad (5)$$

$C$  é o clássico tensor de elasticidade (de quarta ordem, simétrico e positivo definido) e  $h_1, h_2$  são funções que caracterizam a evolução de  $\varepsilon^p$  e  $\beta$ .

Uma simplificação na notação (que será útil no desenvolvimento da teoria) pode ainda ser feita, introduzindo-se (3) em (4) e (5):

$$\dot{\varepsilon}^p = h_1 (C (\varepsilon - \varepsilon^p), \varepsilon^p, \beta) = f_1 (\varepsilon, \varepsilon^p, \beta)$$

$$\dot{\beta} = h_2 (C (\varepsilon - \varepsilon^p), \varepsilon^p, \beta) = f_2 (\varepsilon, \varepsilon^p, \beta)$$

**Condição de Contorno Cinemática e Condições Iniciais.** Em  $\Gamma_1$  é prescrito um deslocamento  $\bar{u}$ :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (6)$$

No instante  $t = 0$  tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon^p(x, 0) &= \varepsilon_o^p(x) \\ \beta(x, 0) &= \beta_o(x) \end{aligned} \quad \text{em } \Omega \quad (7)$$

## FORMULAÇÃO VARIACIONAL

O conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis será definido a cada instante  $t$  da seguinte forma:

$$V(\bar{u}(t)) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v = \bar{u}(t) \quad \text{em } \Gamma_1\}$$

Em particular, o espaço  $V(0)$  será notado simplesmente  $V$ .  $V(\bar{u}(t))$  é um espaço afim associado a  $V$ .

Daqui para diante, o espaço  $V$  será considerado como o conjunto dos deslocamentos admissíveis. Todos os resultados são válidos para o caso onde  $\bar{u}(t) \neq 0$ , bastando fazer uma mudança de variáveis do tipo  $u = w - \bar{u}$ , com  $\bar{u} = \bar{u}(t)$  em  $\Gamma_1$ .

Os espaços funcionais em que estão definidos os campos  $\varepsilon^p(t)$  e  $\beta(t)$  serão notados, respectivamente,  $E$  e  $B$ , isto é:

$$\varepsilon^p(t) \in E ; \quad \beta(t) \in B$$

Supondo que os elementos de  $V, E, B$  são suficientemente regulares, é possível, então, propor a seguinte formulação variacional a partir de (1)-(7) [1]:

- I) Dados os esforços externos  $b$  e  $f$ , encontrar as funções  $u : [0, \tau] \rightarrow V$ ;  $\varepsilon^p : [0, \tau] \rightarrow E$ ;  $\beta : [0, \tau] \rightarrow B$ , tais que:

$$\int_{\Omega} C Du \cdot Dv = \int_{\Omega} b \cdot v + \int_{\Gamma_2} f \cdot v + \int_{\Omega} C \varepsilon^p \cdot Dv, \quad \forall v \in V$$

com

$$\dot{\varepsilon}^p = f_1(Du, \varepsilon^p, \beta) \quad ; \quad \varepsilon^p(t=0) = \varepsilon_0^p$$

$$\dot{\beta} = f_2(Du, \varepsilon^p, \beta) \quad ; \quad \beta(t=0) = \beta_0$$

Até este ponto foi suposto que todas as funções possuíam regularidade suficiente para dar sentido a análise. No entanto a escolha dos espaços funcionais onde são definidos os campos envolvidos é muito importante e obedece a razões matemáticas precisas. Ela é fundamental para o estabelecimento de teoremas de existência e unicidade de solução e para garantir a equivalência entre o problema local e o problema variacional. Portanto, na próxima seção esta questão será abordada com um pouco mais de detalhes.

## FORMULAÇÃO ABSTRATA

Muitos problemas em Mecânica possuem uma estrutura comum, o que torna possível o desenvolvimento de uma formulação abstrata. Para facilitar a apresentação dessa formulação será usada a seguinte notação:

Para um espaço de Hilbert  $H$  qualquer, o espaço das funções  $f: [0, \tau] \rightarrow H$  tais que  $\|f(t)\|_H \in L^2((0, \tau))$  será notado  $L^2(0, \tau; H)$ . O subespaço das funções  $f$  de  $L^2(0, \tau; H)$  tais que  $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, \tau; H)$  (a derivada  $\frac{\partial f}{\partial t}$  é tomada no sentido das distribuições) será notado  $H^1(0, \tau; H)$ .

Seja então:

- i) Uma região  $\Omega$  de  $R^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ );
- ii) Um espaço de Hilbert separável  $V$ , cujos elementos são campos vetoriais definidos em  $\Omega$ ;
- iii) Um espaço de Hilbert  $B$  cujos elementos são campos escalares definidos em  $\Omega$ ;
- iv) Um espaço de Hilbert  $E$  cujos elementos são campos tensoriais definidos em  $\Omega$ ;
- v) Uma forma bilinear  $a: V \times V \rightarrow R$ , simétrica, contínua e coerciva;
- vi) Uma função  $l: V \times E \times [0, \tau] \rightarrow R$ , linear e contínua na primeira variável.

O problema de evolução abstrato tem a seguinte forma:

II) Encontrar  $u \in H^1(0, \tau; V)$ ,  $e^p \in H^1(0, \tau; E)$ ,  $\beta \in H^1(0, \tau; B)$  tais que,  
 $\forall t [0, \tau]$ :

$$a(u, v) = l(v, e^p, t), \quad \forall v \in V$$

com

$$\dot{e}^p = g_1(u, e^p, \beta); \quad e^p(t=0) = e_0^p$$

$$\dot{\beta} = g_2(u, e^p, \beta) ; \quad \beta(t=0) = \beta_0$$

Um caso particular de (ii) é (i) onde:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} C Du \cdot Dv$$

$$l(v, e^p, t) = \int_{\Omega} b \cdot v + \int_{\Gamma_2} f \cdot v + \int_{\Omega} C e^p \cdot Dv$$

$$g_1(u, e^p, \beta) = f_1(Du, e^p, \beta) ; \quad g_2(u, e^p, \beta) = f_2(Du, e^p, \beta)$$

$$b \in [L^2(\Omega)]^n, \quad f \in [L^2(\Gamma_2)]^n$$

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^n \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_1\}$$

$$E = \{\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \mid \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ij} \in L^2(\Omega)\}$$

$$B = L^2(\Omega)$$

Condições suficientes para a existência de solução em (II) são apresentadas em [1].

## DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA - ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Os problemas variacionais em Elasto-viscoplasticidade podem ser aproximados de diferentes maneiras. Normalmente, as seguintes abordagens são utilizadas:

- A primeira consiste em discretizar o espaço e o tempo utilizando uma técnica de elementos finitos (elementos finitos espaço-temporais).
- A segunda consiste em discretizar apenas o espaço através de uma técnica de elementos finitos e usar um procedimento de integração passo a passo no tempo.

Por uma questão de simplicidade, foi feita neste trabalho a opção de trabalhar apenas com a segunda abordagem, usando-se uma formulação em deslocamentos. Outros tipos de formulações variacionais equivalentes (em tensões, mistas, problemas de mínimo e de ponto de sela associados) podem ser encontradas em [1]. Os diferentes trabalhos encontrados na literatura que tratam do estudo numérico de problemas Elasto-viscoplásticos a partir dessas formulações equivalentes, apesar de serem muito interessantes, não serão analisados aqui.

O objetivo desta seção é mostrar que, apesar da generalidade e da sofisticação das equações constitutivas consideradas neste trabalho, uma técnica numérica simples pode ser utilizada para aproximar a solução do problema (II).

A idéia básica para esta aproximação numérica é fazer uma discretização de Galerkin sobre o espaço dos deslocamentos cinematicamente admissíveis e integrar as leis de evolução através de um esquema de diferenças finitas.

O primeiro trabalho nesta linha foi apresentado por Zienkiewicz e Corneau. Em 1974 eles estenderam [10] para a Elasto-viscoplasticidade perfeita os trabalhos anteriores de ZIENKIEWICZ-WATSON-KING [11] sobre a Viscoelasticidade linear. O algoritmo proposto por eles consistia, a grosso modo, de um método de Euler explícito para a integração temporal.

A partir daí, diversos trabalhos foram desenvolvidos visando generalizar este método. A principal parte deste esforço foi feita no sentido de estudar diferentes esquemas de integração no tempo [12]-[26].

Até bem recentemente, a quase totalidade desses estudos considerou apenas materiais elásticos perfeitamente viscoplásticos [10]-[22]. No entanto, com o desenvolvimento de leis de comportamento mais sofisticadas onde se considera diferentes variáveis internas, o estudo numérico de problemas elasto-viscoplásticos com endurecimento vem tomando maior impulso [23]-[25], já que estas equações são muito mais adequadas para a modelagem de metais e ligas metálicas. No entanto, cada um desses trabalhos trata de uma família específica de equações viscoplásticas não apresentando um estudo sistemático geral.

**Discretização do Espaço  $V$ .** Fixado um instante  $t \in [0, \tau]$ , e supondo-se que  $\varepsilon^p(t)$  é conhecido, obtém-se o seguinte problema a partir de (II):

$$(II.1) \text{ Encontrar } u(t) \in V, \text{ tal que: } a(u(t), v) = l(v, \varepsilon^p(t), t) \quad \forall v \in V$$

Este problema é idêntico ao obtido no estudo do equilíbrio de um corpo elástico linear com uma deformação inicial  $\varepsilon^p(t)$ .

Um resultado clássico (apresentado, em [27], usando-se o conhecido teorema de Lax-Milgram) é que a solução desse problema variacional existe e é única.

Um outro resultado importante é que, como o espaço  $V$  é separável, ele admite uma base de Hilbert. Isto é, existe uma seqüência  $w_i$  de vetores linearmente independentes de  $V$  com as seguintes propriedades:

“ $\forall v \in V$ , existe uma seqüência  $q_i$  em  $R$ , tal que  $\sum_{i=1}^m (w_i q_i)$  converge na norma de  $V$  para  $v$  quando  $m$  tende para  $+\infty$ ”.

O espaço de dimensão finita gerado pelos  $m$  primeiros elementos  $w_i$  será notado  $V^m$ . Pode-se, então, aproximar o problema (II.1) como é habitual na teoria da Elasticidade infinitesimal, dividindo-se o corpo em um certo número de elementos, cada um correspondendo ao suporte de uma função  $w_i$ .  $w_i$  serão as funções de base associadas a cada elemento.

Não se pretende fazer aqui uma apresentação detalhada do método dos elementos finitos. O que é importante enfatizar é que, a cada instante  $t$ , o problema (II.1) é idêntico ao obtido no estudo de um corpo elástico linear, submetido ao mesmo carregamento, com as mesmas condições de contorno e com uma deformação inicial  $\varepsilon^p(t)$ .

Todos os resultados clássicos para a análise numérica de problemas elásticos lineares podem, portanto, ser automaticamente adaptados para o problema em questão. Para maiores detalhes sugere-se os trabalhos [14] e [20]. Informações do ponto de vista matemático podem ser encontradas por exemplo, em [27]-[30].

O problema (II.1) discretizado tem a seguinte forma:

(II.2) Encontrar  $u^m(t) \in V^m$ , tal que:  $a(u^m(t), v) = l(v, \varepsilon^p(t), t) \quad \forall v \in V^m$

O problema (II.2) é chamado de aproximação de Galerkin de (II.1). É possível mostrar [27], que a solução de (II.2) existe, é única e que:

$$\lim_{(1/m) \rightarrow 0} ||u^m(t) - u(t)||_V = 0$$

Como o deslocamento  $u^m(t)$  pode ser expresso em função de parâmetros de deslocamento  $q_i(t) \in R$ ,  $i = 1, m$ :

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^m (w_i q_i(t))$$

o problema (II.2) é equivalente a:

(II.3) Encontrar  $U(t) \in R^m$ , tal que  $KU(t) = F(\varepsilon^p(t), t)$  onde:

$$U(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t))$$

$$K_{ij} = a(w_i, w_j)$$

$$F_j(\varepsilon^p(t), t) = l(w_j, \varepsilon^p(t), t)$$

Os resultados apresentados até aqui, permitem propor, então, a seguinte discretização para o problema (II).

III) Encontrar  $u^m \in H^1(0, \tau; V^m)$ ,  $\varepsilon^p \in H^1(0, \tau; E)$ ,  $\beta \in H^1(0, \tau; B)$  tais que,  $\forall t \in [0, \tau]$ :

$$a(u^m, v) = l(v, \varepsilon^p, t) \quad \forall v \in V^m$$

com

$$\dot{\varepsilon}^p = g_1(u^m, \varepsilon^p, \beta); \quad \varepsilon^p(t=0) = \varepsilon_o^p$$

$$\dot{\beta} = g_2(u^m, \varepsilon^p, \beta); \quad \beta(t=0) = \beta_o$$

Ou, o que é equivalente:

IV) Encontrar  $U \in H^1(0, \tau; R^m)$ ,  $\varepsilon^p \in H^1(0, \tau; E)$ ,  $\beta \in H^1(0, \tau; B)$  tais que,  $\forall t \in [0, \tau]$ ,

$$KU = F(\varepsilon^p, t)$$



$$\dot{\varepsilon}^p = G_1(U, \varepsilon^p, \beta) ; \quad \varepsilon^p(t=0) = \varepsilon_0^p$$

$$\dot{\beta} = G_2(U, \varepsilon^p, \beta) ; \quad \beta(t=0) = \beta_0$$

onde:

$$G_1(U, \varepsilon^p, t) = g_1\left(\sum_{i=1}^m (q_i w_i), \varepsilon^p, \beta\right)$$

$$G_2(U, \varepsilon^p, t) = g_2\left(\sum_{i=1}^m (q_i w_i), \varepsilon^p, \beta\right)$$

**Discretização Temporal - Algoritmo de Solução.** Definindo-se um passo de tempo  $\Delta t = (\tau/N)$  associado a um inteiro  $N$ , é possível aproximar numericamente o problema (IV) usando-se o procedimento mostrado a seguir. As seguintes notações são utilizadas:

$$t_i = (i \cdot \Delta t)$$

$$y(t_i) = y_i$$

a)  $i = 0$ ;

b) Cálculo de  $U_i$  resolvendo-se o sistema:

$$KU_i = F(\varepsilon_i^p)$$

$K$  é uma matriz simétrica e positiva definida [27], e o sistema pode ser resolvido usando-se, por exemplo, o método de Cholesky. Este passo é análogo à solução de um problema de equilíbrio em Elasticidade infinitesimal, com uma deformação inicial  $\varepsilon_i^p$ .

- c) Cálculo aproximado de  $\epsilon_{i+1}^p$  e  $\beta_{i+1}$  nos pontos de integração usando-se as leis de evolução e um esquema de diferenças finitas (este item é discutido detalhadamente em [1]). Os esquemas utilizados podem ser explícitos (Euler, Runge-Kutta, etc.) ou implícitos. Uma família de esquemas semi-implícitos é obtida a partir das seguintes relações:

$$\epsilon_{i+1}^p = \epsilon_i^p + G_1(U_i, \epsilon_{i+\theta}^p, \beta_{i+\theta}) \Delta t$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i + G_2(U_i, \epsilon_{i+\theta}^p, \beta_{i+\theta}) \Delta t$$

onde

$$y_{i+\theta} = (1 - \theta) y_i + \theta y_{i+1}, \quad 0 < \theta \leq 1$$

d)  $i = i + 1$ .

e)  $i > N$ ?

SIM: Pare

NÃO: Volte para (b).

Como é possível verificar, este algoritmo permite o desenvolvimento de um código numérico geral, independente das variáveis internas  $\beta$  consideradas. Basta que o usuário escolha, para cada situação, as variáveis internas adequadas e que defina uma subrotina com as funções  $(G_1, G_2)$  e outra com as funções  $(\frac{\partial G_1}{\partial \epsilon^p}, \frac{\partial G_1}{\partial \beta}, \frac{\partial G_2}{\partial \epsilon^p}, \frac{\partial G_2}{\partial \beta})$ , no caso do uso de um esquema semi-implícito (ver o apêndice no final do trabalho).

## EXEMPLO

Nesta seção será apresentado, sem detalhes, um exemplo onde foram usadas as equações constitutivas propostas em [1], [2], [3]. Estas equações elasto-viscoplásticas descrevem o comportamento de ligas metálicas que

“envelhecem” devido a difusão de precipitados na rede cristalina (mudança de fase). Este tipo de fenômeno pode ser causado por diferentes fatores como, por exemplo, a ação de algum tipo de radiação ou devido a algum tratamento térmico. Todos os testes visando verificar a coerência da teoria foram realizados sobre uma liga de alumínio 2024 porque ela envelhece rapidamente e a temperatura ambiente, o que facilita o trabalho experimental. A composição química percentual dessa liga é dada pela seguinte tabela:

Fe	Si	Cu	Mg	Mn	Zn	Cr
0,25	0,49	4,07	0,72	0,60	0,07	0,04

Neste material, após um aquecimento seguido de uma têmpera rápida, as propriedades mecânicas evoluem a temperatura constante e sem carregamento. Esta evolução é provocada pela precipitação de cobre sob diferentes formas dependentes da temperatura. A principal característica é um endurecimento muito grande, já que as propriedades elásticas permanecem constantes. Os resultados de uma série de testes uniaxiais monótonos e cíclicos podem ser encontrados em [31]. Eles permitem indicar os acoplamentos  $e$ , em particular, mostrar que o endurecimento isotrópico e o envelhecimento são fortemente acoplados, enquanto que o endurecimento cinemático e o envelhecimento são praticamente independentes.

A partir desses achados experimentais, e usando-se o formalismo apresentado na seção 2, propõe-se o seguinte modelo de comportamento para esta liga:

$$\beta = (p, e, a) \quad (8)$$

$$\dot{e}^p = (1.5/J) (S - X) < (J - R - \sigma_y)/k >^\mu \quad (9)$$

$$\dot{e} = \dot{e}^p - \varphi_1 \alpha \dot{p} \quad (10)$$

$$\dot{p} = ((2/3) \dot{e}^p \cdot \dot{e}^p)^{1/2} \quad (11)$$

$$\dot{a} = \varphi_2 < a_\infty - a > \quad (12)$$

onde

$$\langle x \rangle = \max \{x, 0\}$$

$$J = (1.5 (S - X) \cdot (S - X))^{1/2}$$

$S$  é a parte desviadora de  $T = C (\varepsilon - \varepsilon^p)$

$$X = c_1 e$$

$$R = b (1 - \exp(-\gamma p)) + ca$$

$$\varphi_1 = \varphi_\infty + (1 - \varphi_\infty) \exp(-\eta p)$$

$$\varphi_2 = (\alpha - \beta \exp(-\gamma' p))$$

$$a_\infty = A + (1/A) \exp(-k' p)$$

$\alpha, \mu, k, c_1, b, \gamma, c, \varphi_\infty, \eta, \alpha, \beta, \gamma', A, k'$ , são constantes que caracterizam o material.  $p$  é a variável de estado associada com o endurecimento isotrópico causado pela plastificação,  $e$  é a variável associada como endurecimento cinemático causado pela plastificação e  $a$  é a variável associada com o envelhecimento (concentração de precipitados na matriz sólida). O acoplamento existente entre o envelhecimento e a plasticidade é introduzido na teoria a partir desta variável. Desta forma, pontos com diferentes histórias de deformação plástica irão "envelhecer" de maneira diferente.

A estrutura estudada é uma placa com entalhe com o deslocamento prescrito nas extremidades como mostra a Figura 1. A Figura 2 mostra a evolução deste deslocamento no tempo.

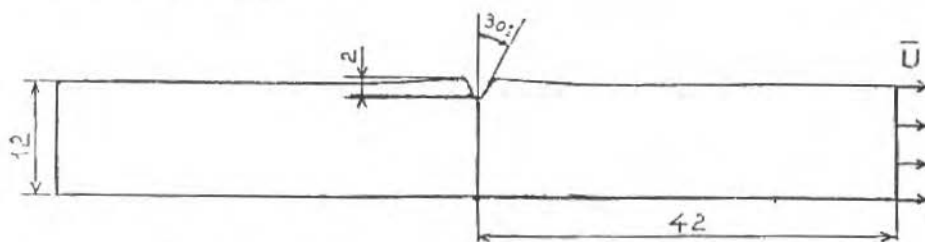


Figura 1. Estrutura com entalhe. A espessura é de 1 mm

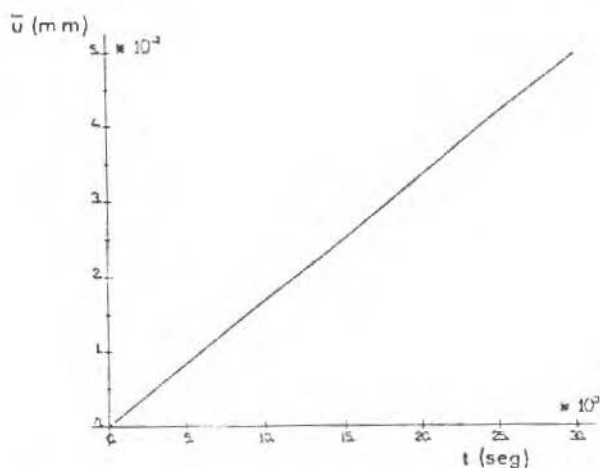


Figura 2. Evolução de  $\bar{u}$  no tempo

O material considerado foi uma liga de alumínio com os seguintes coeficientes:

$E = 72500MPa$	$\nu = 0.33$	$\varphi_{\infty} = 0.81$
$c_1 = 78MPa$	$\eta = 12$	$b = 40.5MPa$
$\gamma = 5$	$\alpha = 0.00167s^{-1}$	$\beta = 0.00153s^{-1}$
$\gamma' = 1$	$A = 0.5$	$k' = 28$
$c = 130MPa$	$\mu = 8$	$k = 98MPa \cdot s$

O problema foi resolvido usando-se elementos quadriláteros isoparamétricos com oito nós e nove pontos de integração, para a integração temporal foi usada uma técnica do tipo Runge-Kutta. A Figura 3 mostra detalhes da malha utilizada. O desenho da parte de baixo é um detalhe da região do entalhe. Evidentemente a simetria do problema pode ser utilizada, considerando-se na solução apenas uma metade da malha apresentada.

As Figuras 4, 5 e 6 mostram os isovalores da variável  $a$  para diferentes instantes. Elas permitem verificar a influência das deformações permanentes no envelhecimento. De acordo com observações experimentais, o material envelhece

menos nas regiões mais próximas do entalhe onde há maior deformação plástica. Ao que se sabe, este é o primeiro modelo proposto na literatura que permite a obtenção das curvas de "isoenvelhecimento" devidas a uma evolução não homogênea desse fenômeno. Isto é fundamental no estudo da fadiga e do dano neste tipo de liga.

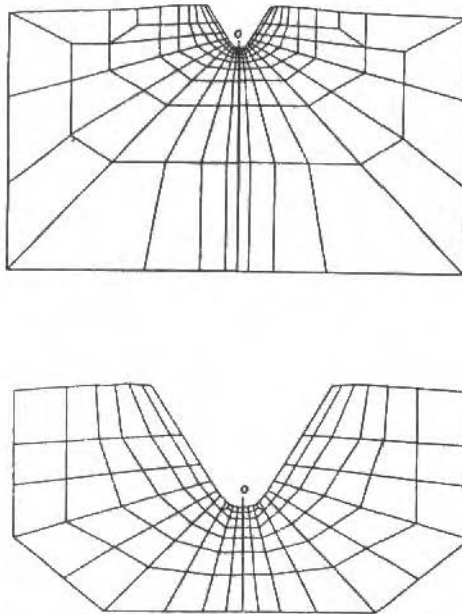


Figura 3. Malha usada na solução numérica do problema

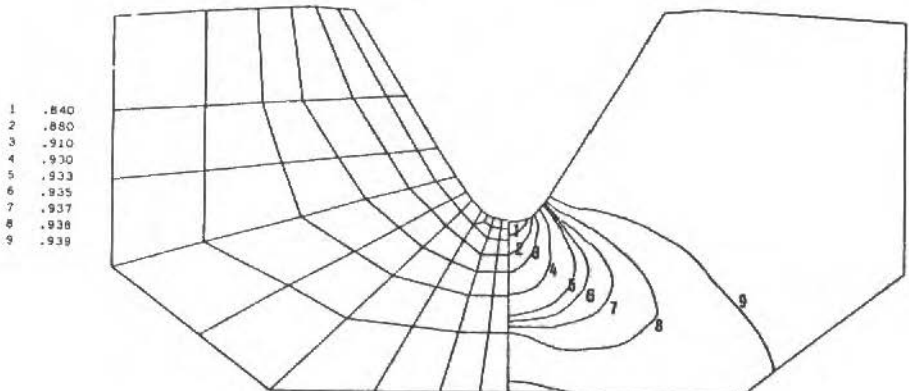
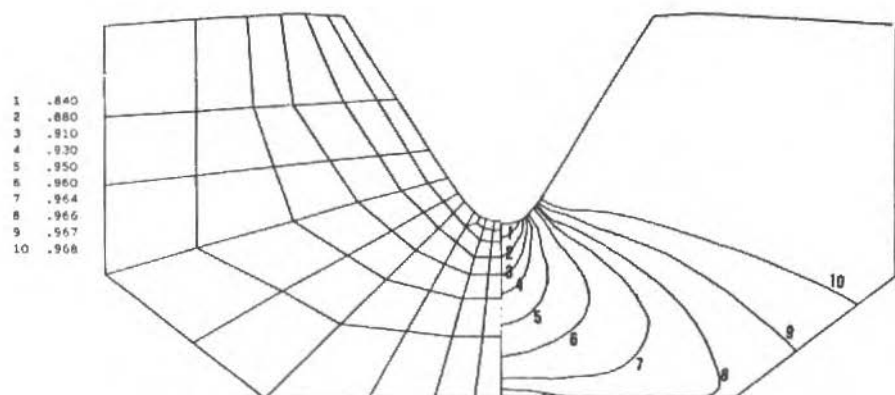
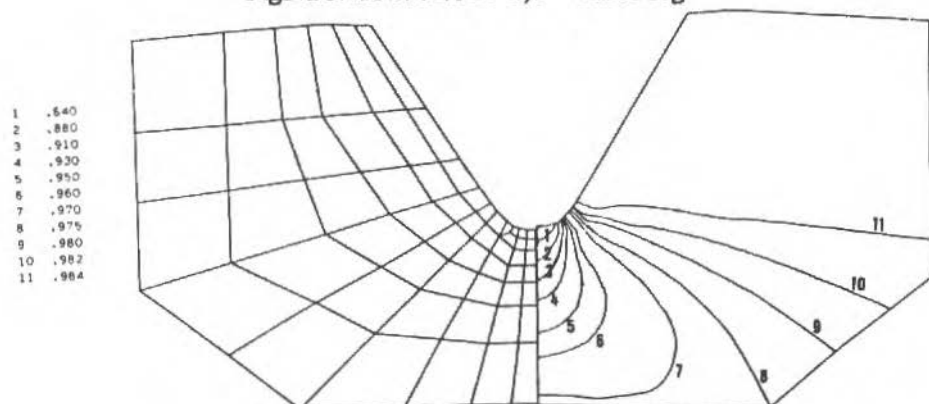
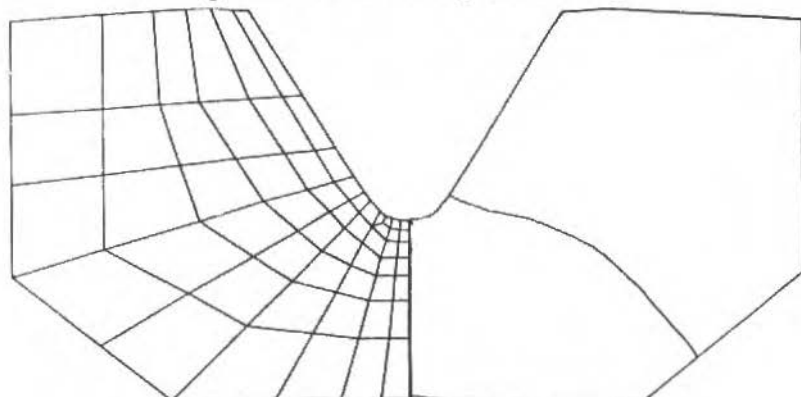


Figura 4. Isovalores de  $\alpha$ ,  $t = 20000$  seg

Figura 5. Isovalores de  $a$ ,  $t = 25000$  segFigura 6. Isovalores de  $a$ ,  $t = 30000$  segFigura 7. Região plastificada,  $t = 20000$  seg

As Figuras 7, 8 e 9 mostram a evolução da região plastificada ao longo do tempo. Como convenção considerou-se como plastificada uma região onde, em todos os pontos,  $(\epsilon^p \cdot \dot{\epsilon}^p)^{1/2} > 10^{-4}$ .

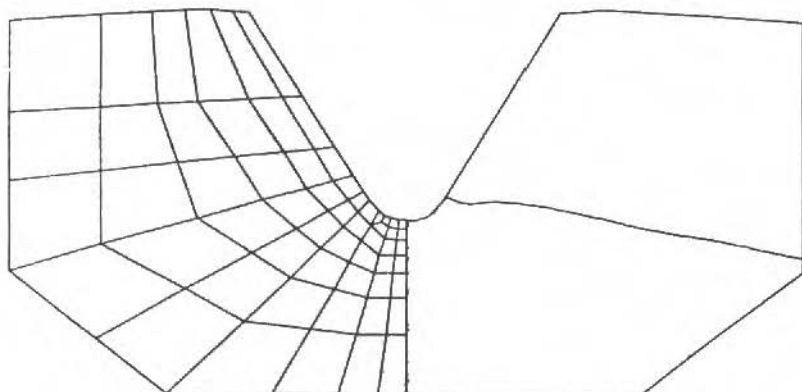


Figura 8. Região plastificada,  $t = 25000$  seg

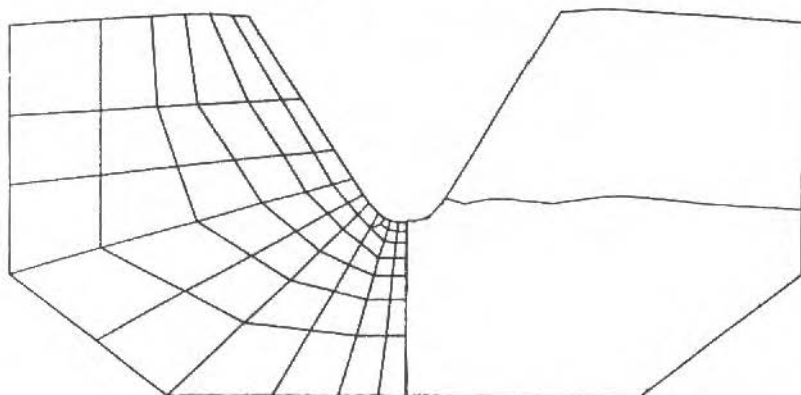
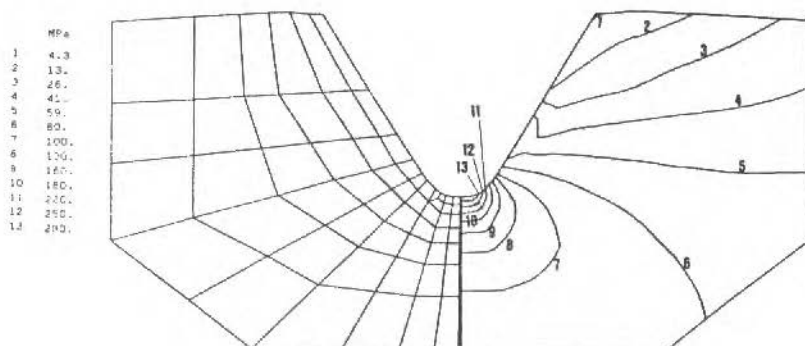
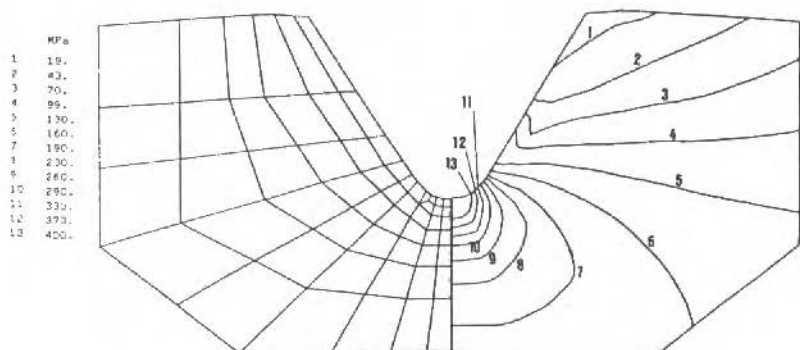
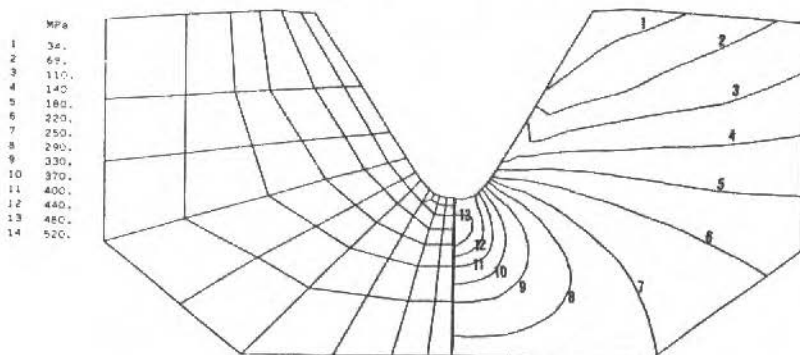


Figura 9. Região plastificada,  $t = 30000$  seg

As Figuras 10, 11, 12, 13, 14 e 15 mostram os isovalores da tensão equivalente  $J = (1.5(S - X) \cdot (S - X))^{1/2}$  em diferentes instantes. A tensão equivalente é fundamental no desenvolvimento de critérios de dano e de fadiga. Neste caso verifica-se que a região mais solicitada se desloca do fundo do entalhe para o centro do corpo de prova. Isto significa que, para este tipo de material, uma trinca pode aparecer inicialmente no centro da placa e não no fundo do entalhe (o que realmente é observado experimentalmente). Este resultado pode ser explicado como uma acomodação das tensões devido a evolução da deformação plástica e



do envelhecimento.

Figura 10. Isovalores de  $J$ ,  $t = 5000$  segFigura 11. Isovalores de  $J$ ,  $t = 10000$  segFigura 12. Isovalores de  $J$ ,  $t = 15000$  seg

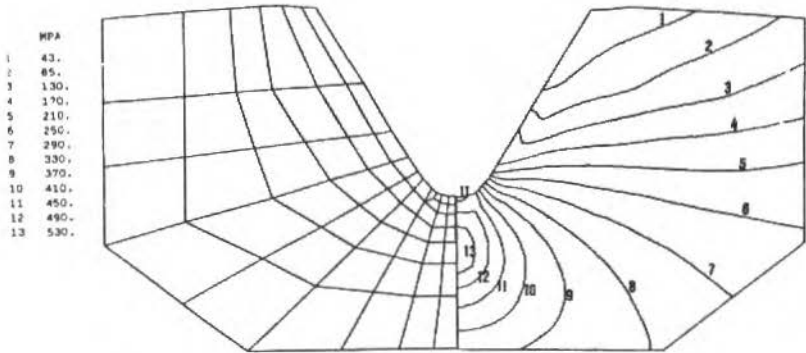


Figura 13. Isovalores de  $J, t = 20000$  seg

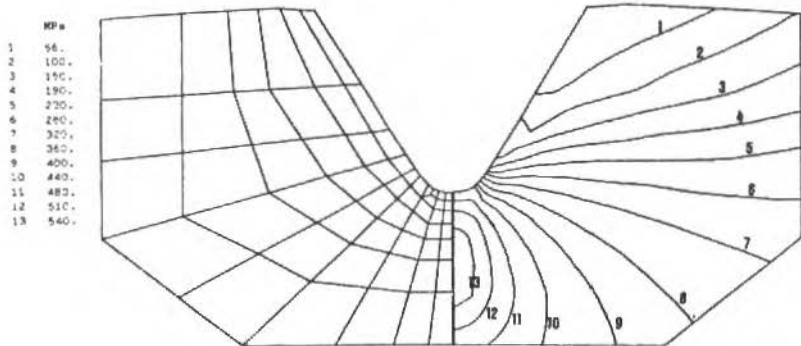


Figura 14. Isovalores de  $J, t = 25000$  seg

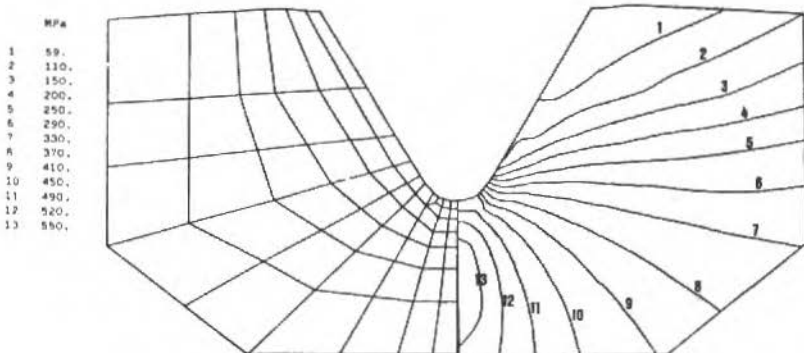


Figura 15. Isovalores de  $J, t = 30000$  seg

## CONCLUSÕES

Foi apresentada uma formulação geral para problemas de evolução em elasto-viscoplasticidade que engloba um grande número de leis de comportamento encontradas na literatura. O problema em deslocamentos resultante permite o uso de uma técnica numérica bastante simples (conhecida como o método da deformação inicial) para a aproximação da sua solução. É importante observar que, para a família de equações constitutivas apresentada, o método de Galerkin pode ser aplicado sem problemas para a discretização do espaço dos deslocamentos cinematicamente admissíveis. A restrição de incompressibilidade que eventualmente pode existir sobre o campo de deformação plástica é automaticamente satisfeita nos pontos de integração, através das leis de evolução. A formulação variacional proposta permite a integração das leis de evolução **por elemento** o que não é possível se são consideradas as abordagens tradicionalmente adotadas na literatura quando se usa o método da deformação inicial (formulação em velocidades [10]-[22]). Além disso, o algoritmo de solução proposto pode ser facilmente adaptado a partir de um programa de elementos finitos para a elasticidade infinitesimal. No entanto, a principal observação é que, a partir dos resultados apresentados, é possível se desenvolver um **único** código numérico para tratar **qualquer** tipo de equação elasto-viscoplástica, bastando que o usuário defina, em cada caso, as leis de evolução adequadas numa subrotina.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi elaborado quando o segundo autor estava como professor visitante na Universidade de Augsburg, com suporte da Fundação Alexander Von Humboldt. Os autores agradecem também a CAPES e ao CNPq pelo suporte oferecido.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] COSTA MATTOS, H. - Uma Contribuição à Formulação Termodinâmica da Elastoplasticidade e da elastoviscoplasticidade, *Tese de Doutorado*, PUC/RJ, Rio de Janeiro, 1988.
- [ 2 ] COSTA MATTOS, H. e MARQUIS, D. - Coupling between Plasticity and Aging in Metals, *Proc. of Int. Seminar on the Inelastic Behaviour of Solids*, Besançon, França, Setembro 1988.

- [ 3 ] COSTA MATTOS, H. e MARQUIS, D. - Modélisation du Couplage entre la Plasticité et le Vieillessement des Matériaux Métalliques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 308, Série II, p. 1113-118, 1989.
- [ 4 ] LEMAITRE, J. e CHABOCHE, J.L. - *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod, 1985.
- [ 5 ] MALININ, N.N. e KHADJINSKI, G.M. - Theory of Creep with Anisotropic Hardening, *I.J. Mech. Sci.*, vol. 14, p. 235-246, 1972.
- [ 6 ] KREMPL, E. - Viscoplasticity based on Total Strain, the Modelling of Creep with Special Considerations of Initial Strain and Aging, *J. Eng. Mat. and Tech.*, nº 100, 1978.
- [ 7 ] MUJAWSKI, D. e MROZ, Z. - A Viscoplastic Material Model and its Application to Cyclic Loading, *Acta Mecanica*, nº 36, p. 213-230, 1980.
- [ 8 ] BENALLAL, A. e MARQUIS, D. - Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elastoviscoplasticity, *J. Eng. Mat.*, Trans. ASME, vol. 109, p. 326-336, 1987.
- [ 9 ] GERMAIN, P. - *Mécanique des Milieux Continus*, Dunod, 1973.
- [ 10 ] ZIENKIEWICZ, D.C. e CORMEAU, I.C. - Viscoplasticity, Plasticity, and Creep in Elastic Solids - A Unified Approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 8, p. 821-845, 1974.
- [ 11 ] ZIENKIEWICZ, D.C.; WATSON, M. e KING, I.P. - A Numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 10, p. 807-827, 1968.
- [ 12 ] CORMEAU, I.C. - Numerical Stability in Quasi-Static Elastoviscoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 9, p. 103-127, 1975.
- [ 13 ] CORMEAU, I.C. - Plasticity and Viscoplasticity in the Finite Element Method, *Ph.D. Thesis*, University College of Swansea, 1976.
- [ 14 ] ZIENKIEWICZ, O.C. - *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, U.K., 1977.
- [ 15 ] ZLAMAL, M. - Finite Element Methods for Non Linear Parabolic Equations, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, vol. 11, p. 93-107, 1977.
- [ 16 ] ARGYRIS, J.A.; VAZ, L.E. e WILLIAM, K.J. - Improved Solution Methods for Inelastic Rate Problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 16, p. 231-277, 1978.

- [17] HUGHES, T.J.R. e TAYLOR, R.L. - Inconditionally Stable Algorithms for Quasi-Static Elastoviscoplastic Finite Element Analysis, *Comp. and Struc.*, vol. 8, p. 169-173, 1978.
- [18] WILLIAN, K.J. - Numerical Solution of Inelastic Rate Problems, *Comp. and Struc.*, vol. 8, p. 531, 1978.
- [19] ARGYRIS, J.A.; DOLTSINIS, J.S. e WILLIAN, K.J. - New Developments in the Inelastic Analysis of Quasi-Static and Dinamic Problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 14, p. 1813-1850, 1979.
- [20] OWEN, D.R.J. e HINTON, E. - *Finite Element in Plasticity*, Pineridge Press, 1980.
- [21] TAROCO, E. e FEIJÓO, R. - *Viscoplasticidad y su Formulation Variational*, II Escola de Matemática Aplicada - Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos, vol. 2, Laboratório de Cálculo, CBPF, 1980.
- [22] OWEN, D.R.J. e DAMJANIC, F. - Viscoplastic Analysis of Solids: Stability Considerations, In *Recent Advances in Non Linear Computational Mechanics*, Pineridge Press, Swansea, 1982.
- [23] RAOUS, M. - Fissuration Sous Contraintes Alternées en Viscoplasticité, *Tese de Doutorado de Estado*, Faculté des Sciences de L'Université de Provence, 1982.
- [24] BENALLAL, A. - Aspects Numériques en Viscoplasticité, *Rapport Interne 35*, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Université Paris 6, ENSET - Cachan, 1983.
- [25] BENALLAL, A. - Structural Analysis in Quasi-Static Elastoplasticity, *Eng. Com.*, vol. 3, p. 323-325, 1986.
- [26] CHABRAND, P.; LICHT, C.; MAISONNEUVE, O. e RAOUS, M. - Residual Thermal Tempering Stress, *Comp. Struc.*, vol. 31, p. 1003-1011, 1989.
- [27] RAVIART, P.A. e THOMAS, J.M. - *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, Masson, 1983.
- [28] STRANG, G. e FIX, J. - *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
- [29] JOHNSON, C. - *Numerical Solution of Partial Diferential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.

- [30] HUGHES, T.J. - *The Finite Element Method, Linear Static and Dinamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.
- [31] MARQUIS, D. - Étude du Couplage entre le Vieillissement et la Plasticité, *Rapport Interne*, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Université Paris 6, ENSET-Cachan, 1987.
- [32] ORTEGA, J.M. e RHEINBOLDT, W.C. - *Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables*, Academic Press, 1970.

## APÊNDICE. IMPLEMENTAÇÃO DO ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL

Supondo-se que  $U_i$ ,  $\epsilon_i^p$  e  $\beta_i$  são conhecidos, deseja-se obter  $\epsilon_{i+1}^p$  e  $\beta_{i+1}$  a partir das seguintes relações (ver a seção 5):

$$Y_{i+1} = Y_i + G(U_i, Y_{i+\theta})$$

onde

$$Y_{i+\theta} = (1 - \theta) Y_i + \theta Y_{i+1} \quad 0 < \theta \leq 1$$

$$Y_i = (\epsilon_i^p, \beta_i)$$

$$G(U_i, Y_i) = (G_1(U_i, Y_i), G_2(U_i, Y_i))$$

Ou seja, fixado um instante  $t_i = (i \cdot \Delta t)$ ,  $(\epsilon_{i+1}^p, \beta_{i+1}) = Y_{i+1}$  será o zero da função  $F$ :

$$F(Y_{i+1}) = Y_{i+1} - Y_i - G(U_i, Y_{i+\theta})$$

o qual pode ser encontrado usando técnicas do tipo Newton-Raphson, quasi-Newton, etc. [32]. Na sua forma mais simples, o método de Newton consiste em procurar um zero da função  $F$  usando o seguinte procedimento:

$$\frac{\partial F(Y_{i+1}^n)}{\partial Y} = 1 - \theta \frac{\partial G(U_i, Y_{i+\theta}^n)}{\partial Y}$$

do item (c). Portanto  $Y_{i+1}^{n+1}$  será calculado da seguinte maneira:

$$Y_{i+1}^{n+1} = Y_{i+1}^n - F(Y_{i+1}^n)$$

Este tipo de simplificação é muito usado na prática e o algoritmo irá convergir se  $Y_{i+1}^n$  for escolhido suficientemente próximo de  $Y_{i+1}$ .

a)  $Y_{i+1}^0$  é dado

$Y_{i+1}^0$  é uma estimativa inicial de  $Y_{i+1}$ . Em geral toma-se  $Y_{i+1}^0 = Y_i$ .

b)  $n = 0$

c) Conhecido  $Y_{i+1}^n$ , calcula-se  $Y_{i+1}^{n+1}$  resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$-F(Y_{i+1}^n) = \frac{\partial F(Y_{i+1}^n)}{\partial Y} \Delta Y$$

onde

$$\Delta Y = Y_{i+1}^{n+1} - Y_{i+1}^n$$

$$\frac{\partial F(Y_{i+1}^n)}{\partial Y} = 1 - \theta \frac{\partial G(U_i, Y_{i+\theta}^n)}{\partial Y}$$

d) Verifica-se se  $||F(Y_{i+1}^{n+1})|| < \delta$ , onde  $\delta$  é um escalar positivo que dá a tolerância do erro para o critério de convergência:

$$\text{SIM: Pare e } Y_{i+1} = Y_{i+1}^{n+1}$$

$$\text{NÃO: } n = n + 1 \text{ e volte para (c)}$$

OBSERVAÇÃO: Um algoritmo simplificado pode ser obtido desprezando-se o termo:

$$\theta \frac{\partial G(U_i, Y_{i+\theta}^n)}{\partial Y}$$

na expressão:



## MODELAGEM DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE UM CORPO RÍGIDO DOTADO DE UM AMORTECEDOR DE NUTAÇÃO ANULAR VISCOSO E SUA VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

### ROTATIONAL MOTION MODELING OF A RIGID BODY WITH A VISCOUS NUTATION DAMPER AND ITS EXPERIMENTAL VALIDATION

Ijar Milagre da Fonseca

Petrônio Noronha de Souza

Instituto de Pesquisas Espaciais

Av. dos Astronautas, 1758

Caixa Postal 515

12.201 São José dos Campos - SP

#### RESUMO

*Este trabalho trata da modelagem matemática e da validação experimental do comportamento dinâmico de um amortecedor de nutação do tipo anular viscoso parcialmente cheio de óleo de silicone. A formulação lagrangiana é utilizada para a dedução das equações do movimento. A validação experimental é feita em uma plataforma girante suspensa em um mancal esférico aerostático. A comparação entre os resultados teóricos e experimentais validaram o modelo matemático adotado.*

**Palavras-chave:** Amortecedor de Nutação ■ Validação Experimental ■ Modelagem ■ Ângulo de Nutação ■ Simulação Digital

#### ABSTRACT

*This work deals with the mathematical modelling and experimental validation of the dynamic behaviour of a partially filled viscous ring nutation damper. The Lagrangian approach is used to derive the equations of motion. The experimental validation is done using a spherical air bearing rotating platform. The theoretical results are validated through the comparison with the experimental ones.*

**Keywords:** Nutation Damper ■ Experimental Validation ■ Modeling ■ Nutation Angle ■ Digital Simulation

## INTRODUÇÃO

Amortecedores de nutação são mecanismos cuja função é dissipar energia interna; por isso, são largamente utilizados para o amortecimento do movimento nutacional de espaçonaves estabilizadas por rotação. Estes dispositivos podem operar de maneira passiva (como é o caso abordado neste trabalho), apresentam alta confiabilidade e funcionam de forma eficiente mesmo quando o movimento está sujeito a torques perturbadores.

O modelo matemático que descreve o movimento de um corpo rígido dotado de um amortecedor de nutação pode ser deduzido por três métodos distintos [1], a saber: i) método do sorvedouro de energia; ii) método dos parâmetros discretos; iii) método modal. O primeiro consiste em resolver as equações de Euler para o movimento livre de um corpo rígido (sem levar em conta qualquer movimento interno) e associar à taxa de variação no tempo do ângulo de nutação uma função dissipativa capaz de descrever o comportamento em nutação do corpo. É claro que deve existir algum tipo de movimento interno para justificar tal dissipação de energia mas isto é ignorado pelo método, estabelecendo-se assim uma espécie de contradição. Portanto é de se esperar que o método forneça no máximo uma boa aproximação, se a escolha da função dissipativa for bem feita. Tal escolha, para ser boa, exige uma certa intuição física do problema quando não uma razoável experiência com análise dinâmica do movimento rotacional de corpos rígidos contendo mecanismos dissipadores de energia. O segundo método permite a obtenção das equações do movimento para um corpo rígido considerando os movimentos internos. Finalmente, o método modal modela o corpo rígido que contém elementos flexíveis em sua estrutura. Neste trabalho utiliza-se o método dos parâmetros discretos por ser ele capaz de proporcionar uma melhor aproximação ao modelo real.

## DESCRIÇÃO DO TESTE

As Figuras 1, 2 e 3 mostram a montagem para a realização do experimento. Nela o amortecedor de nutação é fixado sobre uma plataforma na mesma posição com que ele deve operar no primeiro Satélite Brasileiro de Coleta de Dados (SCD1). Esta plataforma é balanceada estática e dinamicamente, tem sua massa, seus momentos de inércia, a posição de seu centro de massa e o valor dos coeficientes de arrasto aerodinâmico nas direções longitudinal e transversal medidos [2]. A seguir ela é colocada sobre um mancal esférico aerostático sobre o qual pode girar em torno de seus três eixos com torques perturbadores bastante reduzidos. Para executar o teste a plataforma é posta a girar e, em seguida, tem seu movimento perturbado por

um torque impulsivo transversal que introduz um ângulo de nutação que deve ser eliminado pelo amortecedor.

Os movimentos da plataforma são medidos pela projeção de um raio laser que incide sobre uma máscara graduada presa ao teto do laboratório após refletir-se em um espelho fixado sobre a plataforma. O registro é feito por meio de uma filmadora. O resultado filmado pode ser depois copiado para o papel e comparado com os resultados das simulações.

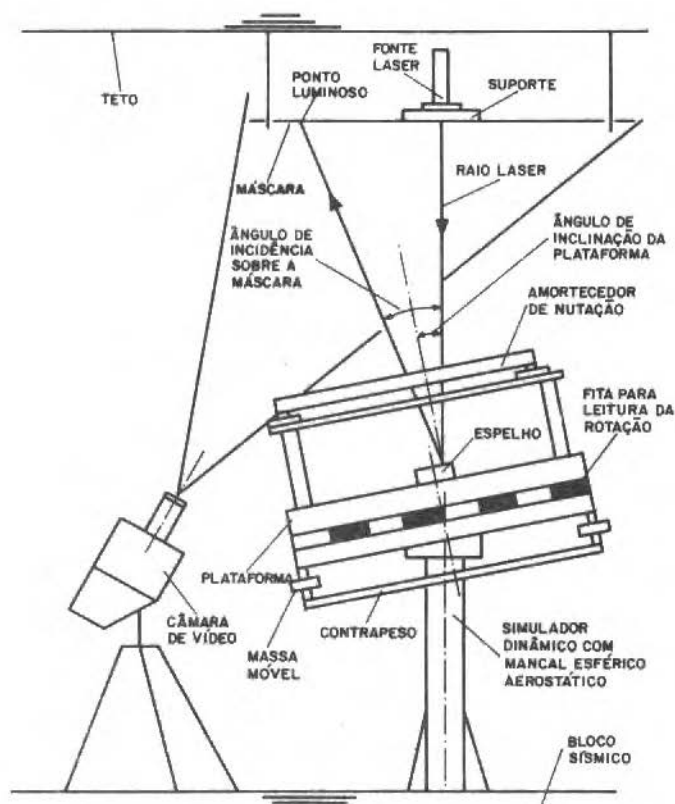


Figura 1. Montagem para o teste funcional

O modelo matemático leva em consideração os valores medidos para os balanceamentos estático e dinâmico da plataforma, acrescidos de uma diferença de 1% entre os momentos de inércia transversais e de desbalanceamentos dinâmicos da ordem de  $10^{-3} \text{ kgm}^2$ , associados a um desalinhamento angular de  $2^\circ$

entre o eixo de simetria axial da plataforma e o principal de inércia. Estes erros acrescentam termos importantes à matriz de inércia da plataforma.

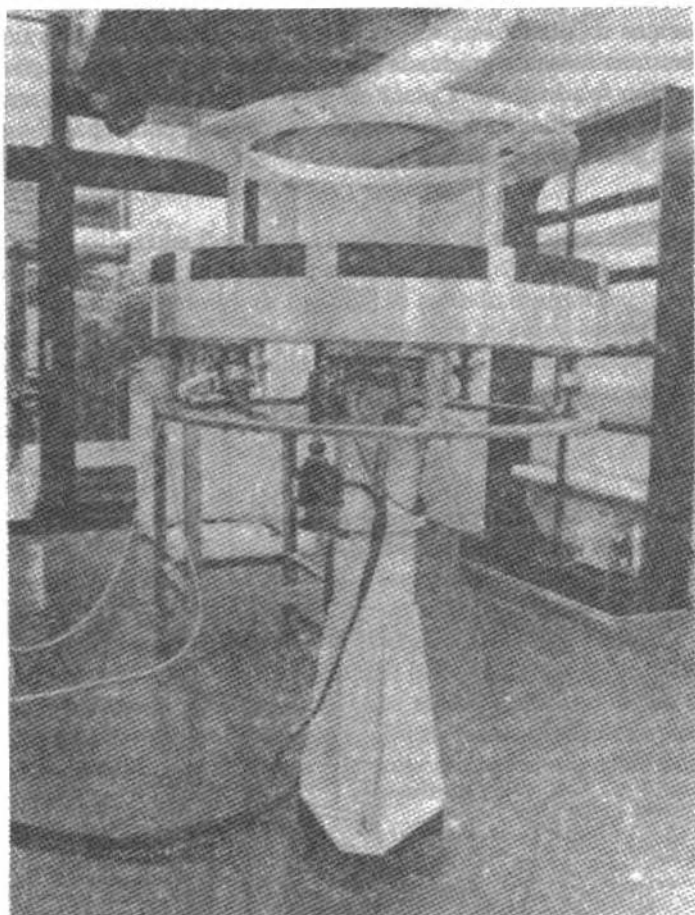


Figura 2. Vista geral do simulador

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

**Hipóteses.** O modelo matemático apresentado a seguir [3], foi concebido pelo método dos parâmetros discretos. Para tanto foram admitidas as seguintes hipóteses:

- a) o fluido se comporta como um tarugo rígido em movimento dentro do anel;

- b) o centro de massa do conjunto plataforma mais amortecedor coincide com o centro de massa da plataforma, que é fixo;
- c) o centro geométrico do anel encontra-se deslocado em relação ao eixo de simetria axial da plataforma;
- d) a distância do centro de massa do fluido permanece constante em relação ao centro geométrico do anel;
- e) o centro de massa da plataforma não coincide com o centro de pressão do mancal esférico.

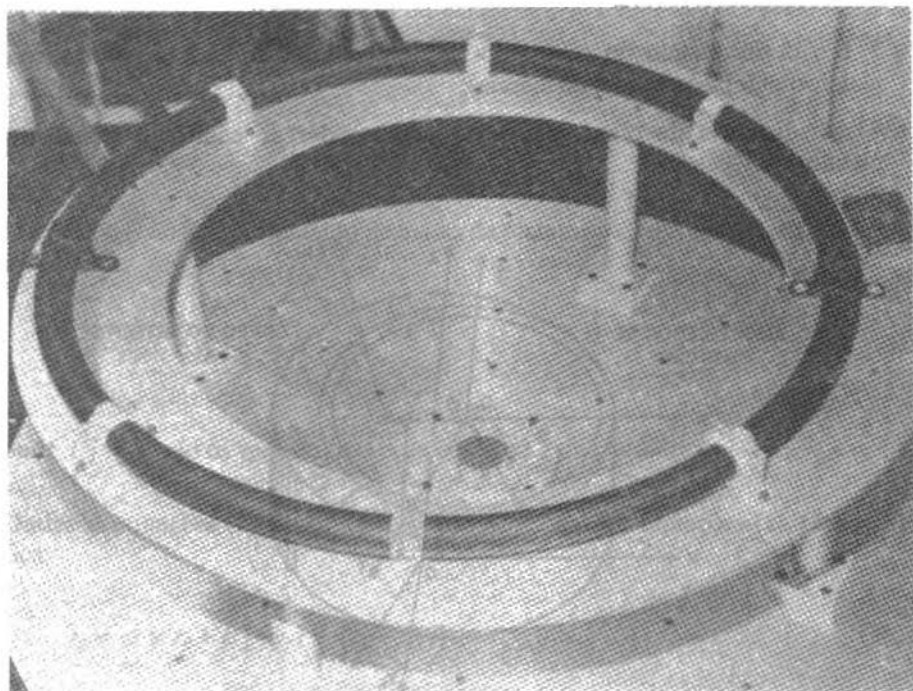


Figura 3. Vista geral do amortecedor de nutação montado

A hipótese de corpo rígido para o fluido, embora discutível, justifica-se neste caso tendo em vista o deslocamento do centro do anel em relação ao eixo de rotação da plataforma (como é também no satélite). Dessa forma, a aceleração centrípeta associada ao movimento rotativo faz com que o fluido se mantenha concentrado no ponto mais distante do eixo de rotação, mesmo para pequenos ângulos de nutação.

Os sistemas de eixos utilizados nesta modelagem, bem como alguns ângulos e cotas, são mostrados na Figura 4 e listados em seguida:

- $Ox_L Y_L Z_L$  é o referencial do laboratório;
- $Oxyz$  é o sistema de eixos principais de inércia com origem no centro de massa da plataforma;
- $O_1 x' y' z'$  é um sistema auxiliar paralelo ao  $Oxyz$  e colocado no plano do amortecedor;
- $\beta$  é o ângulo que posiciona um elemento de massa do fluido com relação ao sistema  $O_1 x' y' z'$ ;
- $\gamma$  é o ângulo preenchido pelo fluido;
- $\delta$  é o deslocamento do centro do anel em relação ao eixo de rotação da plataforma (eixo principal de inércia);
- $h$  é a distância do plano médio do amortecedor ao centro de massa da plataforma.

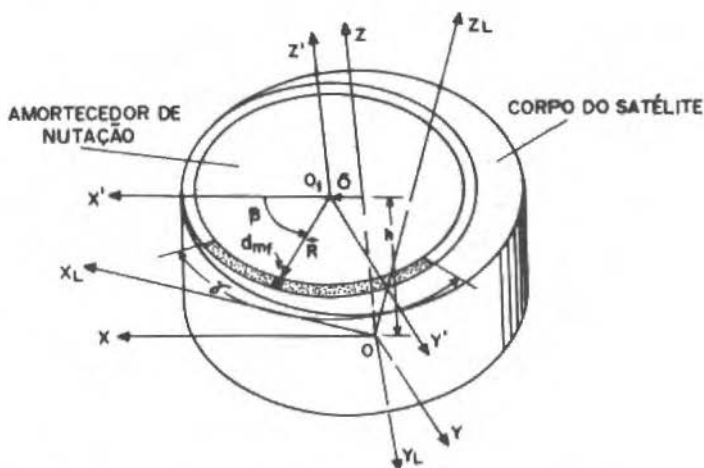


Figura 4. Referenciais  $Ox_L Y_L Z_L$ ,  $Oxyz$  e  $O_1 x' y' z'$

## EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

O vetor posição de um elemento de massa do fluido em relação à origem do sistema  $Oxyz$  é:

$$\underline{r}_f = x_f \underline{i} + y_f \underline{j} + h \underline{k} \quad , \quad (1)$$

onde:

$$x_f = (\delta + R \cos \beta) \quad , \quad (2a)$$

$$y_f = R \operatorname{sen} \beta \quad , \quad (2b)$$

De forma análoga, o vetor posição da massa  $m_b$  adicionada para compensar a excentricidade do amortecedor é:

$$\underline{r}_b = x_b \underline{i} + y_b \underline{j} + h \underline{k} \quad . \quad (2c)$$

O vetor posição de um elemento de massa da plataforma, com relação ao ponto  $O$ , é dado por:

$$\underline{r}_p = x_p \underline{i} + y_p \underline{j} + z_p \underline{k} \quad , \quad (3)$$

onde  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$  e  $\underline{k}$  são os versores nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  da plataforma.

Dadas as equações (2), a taxa de variação no tempo das equações (1), (2c) e (3) fica:

$$\dot{\underline{r}}_f = \underline{\omega} \times \underline{r}_f + \beta [-y_f \underline{i} + (x_f - \delta) \underline{j}] \quad , \quad (4a)$$

$$\dot{\underline{r}}_p = \underline{\omega} \times \underline{r}_p \quad , \quad (4b)$$

$$\dot{\underline{r}}_b = \underline{\omega} \times \underline{r}_b \quad (4c)$$

A energia cinética total é:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\underline{r}}_p \cdot \dot{\underline{r}}_p dm_p + \frac{1}{2} \int \dot{\underline{r}}_f \cdot \dot{\underline{r}}_f dm_f + \frac{1}{2} m_b \dot{\underline{r}}_b \cdot \dot{\underline{r}}_b \quad (5)$$

onde  $dm_p$  e  $dm_f$  são elementos de massa da plataforma e fluido, respectivamente.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} [(A + I_{xf} + I_{xb}) \omega_x^2 + (B + I_{yf} + I_{yb}) \omega_y^2 + \\ & + (C + I_z + I_z) \omega_z^2 + m_f R^2 \dot{\beta}^2] - (I_{xy} + I_{xy}) \omega_x \omega_y + \\ & - (I_{xzf} + I_{xzb}) \omega_x \omega_z - (I_{yzf} + I_{yzb}) \omega_y \omega_z + \beta [(I_{zf} - I_{\delta xf}) \omega_z + \\ & - (I_{xzf} - I_{\delta zf}) \omega_x - I_{yzf} \omega_y] \quad (6) \end{aligned}$$

onde A, B e C são os momentos principais de inércia da plataforma;  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}$  e  $I_{yz}$  são os momentos e produtos de inércia associados ao fluido (índice f) e à massa adicionada ao sistema para o balanceamento (índice b).

A energia potencial é dada por:

$$V = m_f R K (g_x \cos \beta + g_y \sin \beta + hg_z) \quad (7)$$

onde  $g_x, g_y$  e  $g_z$  são as componentes do vetor  $\underline{g}$  (aceleração gravitacional) no sistema de eixos principais de inércia da plataforma e são função dos ângulos de Euler (atitude da plataforma). K é dado por:

$$K = \text{sen}(\gamma/2)/(\gamma/2) \quad (8)$$



onde  $\gamma$  é o ângulo preenchido pelo fluido dentro do anel quando concentrado em uma só região.

A função lagrangiana é dada por:

$$L = T - V, \quad (9)$$

onde:

$$T = T \left[ \omega_\alpha, I_\alpha(\beta), I_{xy}(\beta), I_{xz}(\beta), I_{yz}(\beta), I_{\delta x}(b) \right], \quad \alpha = x, y, z$$

$$V = V \left[ g_x(\theta_i), g_y(\theta_i), g_z(\theta_i), \beta \right],$$

onde os  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são os ângulos de Euler. O torque gravitacional sobre a plataforma, em relação ao ponto O, associado ao fluido e à massa  $m_b$ , é:

$$\underline{M} = \underline{r}_f \times (-m_f \underline{g}) + \underline{r}_b \times (-m_b \underline{g}). \quad (10)$$

Na posição de equilíbrio estável do fluido ( $\beta = \beta = 0$ ) a massa adicionada para compensar a excentricidade do amortecedor está na posição anti-simétrica com relação a  $m_f$ , por esta razão,  $\underline{r}$  é dado por:

$$\underline{r}_b = -x_b \underline{i} - Ok + hk \quad (11)$$

Em notação matricial tem-se então:

$$\{M\} = -m_f \left\{ \begin{array}{l} g_z RK \operatorname{sen} \beta - 2g_y h \\ g_x RK (1 - \cos \beta) + 2g_x h \\ g_y RK (\cos \beta - 1) - RK g_x \operatorname{sen} \beta \end{array} \right\}, \quad (12)$$

O centro de massa da plataforma estática e dinamicamente balanceada não coincide com o centro de pressão (centro da esfera); dessa forma os pontos de aplicação da força da gravidade e o ponto por onde o mancal esférico está suspenso (Figura 5) são separados por uma distância dada pelo vetor:

$$r_d = -dk \quad (13)$$

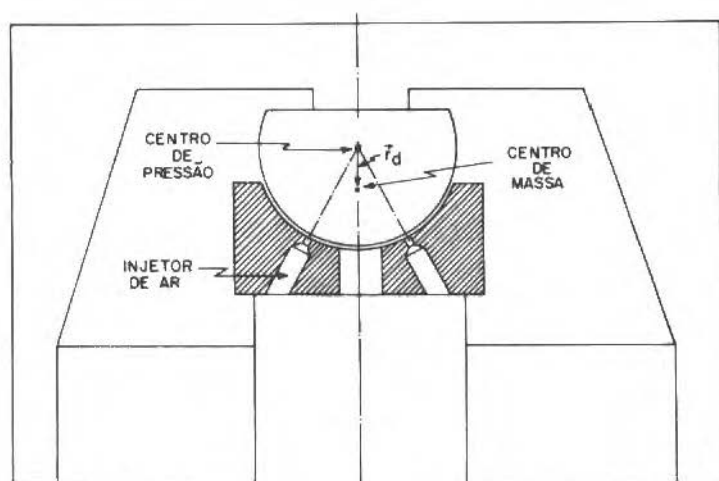


Figura 5. Centro de Massa & Centro de Pressão do Sistema

O torque gravitacional associado a este desalinhamento é dado por:

$$\underline{M}_d = \underline{r}_d \times (-m_p \underline{g}) = -m_p \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -d \\ g_x & g_y & g_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

Em notação matricial tem-se:

$$\{M_d\} = m_p \begin{Bmatrix} -g_y d \\ g_x d \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

O momento gravitacional total sobre a plataforma balanceada estática e dinamicamente é:

$$\{M_T\} = \{M\} + \{M_d\} = \left\{ \begin{array}{l} m_f (2g_y h - g_z RK \operatorname{sen} \beta) - m_p g_y d \\ m_f [g_z RK (\cos \beta - 1) - 2g_x h] + m_p g_x d \\ m_f (g_y RK (\cos \beta - 1) - RK g_{\text{sub}x} \operatorname{sen} \beta) \end{array} \right\} . \quad (16)$$

De acordo com a formulação lagrangiana para quase coordenadas [4], as equações dinâmicas de Euler são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} + [\bar{\omega}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega} \right\} = \{M_T\} . \quad (17)$$

A mesma formulação para coordenadas generalizadas leva a equação para o fluido:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right\} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_\beta - \frac{\partial V}{\partial \beta} , \quad (18)$$

onde:

$$[\bar{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} , \quad (19)$$

Das equações (17) e (18) têm-se:

$$\begin{aligned} & A_T \dot{\omega}_x - I_{xyT} \dot{\omega}_T - I_{xzT} \dot{\omega}_z - (I_{xf} - I_{zf}) \dot{\beta}^{II} + (C_T - B_T) \omega_y \omega_z + \\ & I_{yzT} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - I_{xzT} \omega_x \omega_y + I_{xyT} \omega_x \omega_z + [I'_{xf} \omega_x + (I_{zf} - I_{df} + \\ & - I'_{yf}) \omega_y + (I_{zf} - I'_{zf}) \omega_z] \dot{\beta} - I'_{xf} \dot{\beta}^2 + C_\alpha \omega_x = M_{xT} , \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} & B_T \dot{\omega}_y - I_{xyT} \dot{\omega}_x - I_{yzT} \dot{\omega}_z - I_{yzT} \dot{\beta}^{II} + (A_T - C_T) \omega_x \omega_z + \\ & + I_{xzT} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - I_{xyT} \omega_y \omega_z + I_{yzT} \omega_x \omega_y + [I'_{yf} \omega_y - (I_{zf} - I_{df} + \\ & + I'_{yf}) \omega_x - (I_{zf} - I_{df} + I'_{zf}) \omega_z] \dot{\beta}^2 - I'_{yf} \dot{\beta} + {}^2C_\alpha \omega_y = M_{yT} , \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned}
& C_T \dot{\omega}_z - I_{xzT} \dot{\omega}_x - I_{yzT} \dot{\omega}_y + (I_{zf} - I_{\delta xf}) \beta^{II} + (B_T - A_T) \omega_x \omega_y + \\
& + I_{xyT} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - I_{yzT} \omega_x \omega_z + I_{xzT} \omega_y \omega_z + [I'_{zf} \omega_z + (I_{xf} + \\
& - I_{\delta zf} - I'_{yzf}) \omega_y - (I_{yzf} + I'_{xzf}) \omega_x] \beta + (I'_{zf} - I'_{\delta xf}) \dot{\beta}^2 + D_\alpha \omega_z = M_{zT} , \\
\end{aligned} \tag{20c}$$

$$\begin{aligned}
& m_f R^2 \beta^{II} + (I_{zf} - I_{\delta xf}) \dot{\omega}_z - (I_{xzf} - I_{\delta zf}) \dot{\omega}_x - I_{yzf} \dot{\omega}_y - \frac{1}{2} (I'_{xf} \omega_x^2 + \\
& + I'_{yf} \omega_y^2 + I'_{zf} \omega_z^2) + I'_{xyf} \omega_x \omega_y + I'_{xzf} \omega_x \omega_z + I'_{yzf} \omega_y \omega_z = Q\beta + M_{zf} , \\
\end{aligned} \tag{20d}$$

onde:

$$A_T = A + I_{xf} + I_{xb} , \quad B_T = B + I_{yf} + I_{yb} , \quad C_T = C + I_{zf} + I_{zb} ,$$

$$I_{xyT} = I_{xyb} + I_{xyf} , \quad I_{xzT} = I_{xzb} + I_{xzf} , \quad I_{yzT} = I_{yzb} + I_{yzf}$$

$$M_{zf} = - \frac{\partial V}{\partial \beta} , \quad ' = \frac{\partial (\quad)}{\partial \beta} ,$$

e  $C_\alpha$  e  $D_\alpha$  são os coeficientes de amortecimento associados ao atrito no mancal e ao arrasto aerodinâmico da plataforma.

## MODELAGEM DO TORQUE DEVIDO AO CISALHAMENTO VISCOSO DO FLUIDO NA PAREDE DO ANEL

São dois os tipos de movimento que o fluido desenvolve dentro do anel: movimento síncrono com a rotação própria e síncrono com a nutação do corpo no qual o amortecedor está preso [5]. No primeiro deles o escoamento é do tipo laminar e no outro ele é turbulento [5]. A seguir são deduzidas as equações que expressam o torque devido ao cisalhamento viscoso no tubo para os dois regimes de escoamento.

O torque devido ao cisalhamento viscoso do fluido dentro do anel é dado por:

$$Q_{\beta} = -\tau R^2 P \gamma, \quad (21)$$

onde  $R$  é o raio médio de curvatura do anel;  $P$  é o perímetro de sua seção transversal e  $\gamma$  é o ângulo do anel ocupado pelo fluido quando todo ele se concentra em um único segmento;  $\tau$  é a tensão de cisalhamento do fluido, que pode ser escrita em função da tensão de cisalhamento em tubos retos [6]:

$$\tau = \tau_o \left[ 1 + 0,075 \left( \frac{RD\dot{\beta}}{\nu} \right)^{1/4} \left( \frac{D}{2R} \right)^{1/2} \right], \quad (22)$$

onde  $\beta$  é a velocidade angular relativa do fluido,  $\nu$  é sua viscosidade cinemática e  $D$  é o diâmetro interno do anel.

A tensão de cisalhamento  $\tau_o$  é dada por:

$$\tau_o = \frac{f}{8} \rho R^2 \dot{\beta}^2, \quad (23)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido e  $f$  é o coeficiente de resistência de DARCY-WIESBACH [1] que, pela relação empírica de Blasius, [1] é dado, no caso do regime turbulento, por:

$$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{1/4}}. \quad (24)$$

A substituição das equações (22), (23) e (24) na (21) leva a:

$$Q_{\beta t} = -0,0395 \rho \frac{P\gamma R^{15/4}}{(D/\nu)^{1/4}} \dot{\beta}^{7/4} - 0,0021 \rho D^{1/2} P\gamma R^{7/2} \dot{\beta}^2, \quad (25)$$

que é o torque de atrito para o caso turbulento no qual a primeira parcela corresponde ao torque para o caso de tubos retos e a segunda parcela é uma correção devida à curvatura do anel.

Para o regime laminar, o coeficiente  $f$  é dado por:

$$f = 64/Re , \quad (26)$$

onde o número de Reynolds,  $Re$ , é definido como:

$$Re = \frac{RD\dot{\beta}}{\nu} . \quad (27)$$

A relação entre a tensão do cisalhamento para tubos curvos e tubos retos, para o caso do regime laminar [6], é:

$$\tau = 0,1064 \tau_o [Re (D/2R)^{1/2}]^{1/2} . \quad (28)$$

Esta equação é válida para  $10^{1,6} < Re (D/2R)^{1/2} < 10^3$ .

A substituição das equações (26), (27) e (28) na (21) fornece o torque no eixo de simetria do anel para o regime laminar:

$$Q_{\beta} = -0,7158 \rho P \gamma R^{13/4} D^{1/4} \nu^{1/2} \dot{\beta}^{3/2} . \quad (29)$$

A massa do fluido pode ser escrita na forma:

$$m_f = \rho S R \gamma ,$$

onde  $S$  é a área da seção transversal do tubo:

$$S = \pi D^2/4 = PD/4 ,$$

$$P = 4S/D .$$

Então:

$$Q_{\beta t} = -0,158 m_f \left[ \left( \frac{R^{11/4} \nu^{1/4}}{D^{5/4}} \right) \dot{\beta}^{7/4} + 0,0532 \left( \frac{R^{5/2}}{D^{1/2}} \right) \dot{\beta}^2 \right] , \quad (30)$$

$$Q_{\beta t} = -2,8632 m_f R^{9/4} D^{-5/4} \nu^{1/2} \dot{\beta}^{3/2} . \quad (31)$$

Para baixos valores de Reynolds, para os quais a equação (28) não se aplica, o modelo mais adequado para regime laminar é:

$$Q_{\beta_i} = -8 \pi \gamma \rho \nu R^3 \beta , \tag{32}$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica do óleo utilizado [7].

### EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

Para deduzir as equações cinemáticas foi considerada a seguinte seqüência de rotações:  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  em torno de  $X_L, Y_L$  e  $z$  [4], mostrado na Figura 5.

Com esta seqüência de rotações tem-se:

$$\begin{Bmatrix} y \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\ -c\theta_2 s\theta_3 c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{Bmatrix} ; \tag{33}$$

portanto:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\ s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ c\theta_1 c\theta_2 \end{Bmatrix} g . \tag{34}$$

As equações (35a) ou (35b) são as equações cinemáticas:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_3 c\theta_2 & s\theta_3 & 0 \\ -s\theta_3 c\theta_2 & c\theta_3 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} , \tag{35a}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{c\theta_2} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 c\theta_3 & 0 \\ -s\theta_2 c\theta_3 & s\theta_2 s\theta_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} . \tag{35b}$$

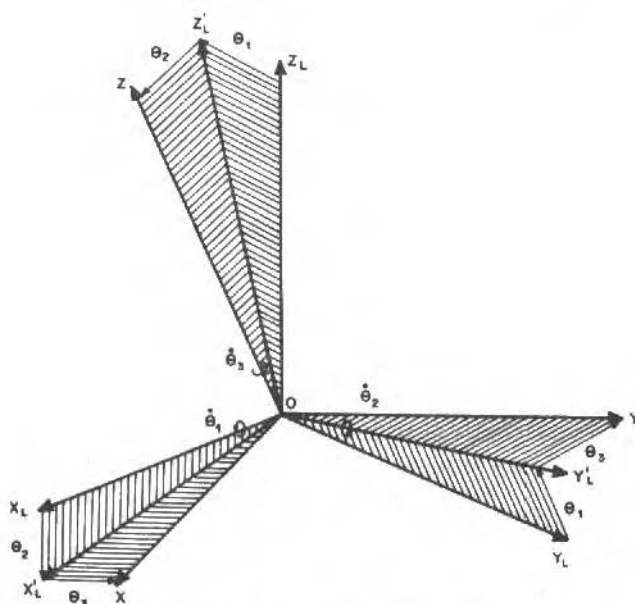


Figura 6. Ângulos de Euler, seqüência 1,2,3

As equações (20) e (35) constituem o sistema de equações diferenciais simuladas em computador.

## RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

A seguir são apresentados os resultados obtidos nas simulações das equações do movimento para as velocidades de 60 (Figuras 7, 9 e 10) e 100 rpm (Figuras 11, 13 e 14). Os resultados são apresentados na forma dos gráficos da trajetória do ponto luminoso sobre a máscara graduada (movimento do eixo de rotação em torno do vetor momento angular) e do ângulo de nutação em função do tempo. Estes resultados são confrontados com os extraídos da gravação do experimento para as mesmas condições iniciais (Figuras 8 e 12).

As trajetórias obtidas nas simulações guardam grande semelhança com as geradas no experimento. As grandes oscilações executadas pelo eixo de rotação, que produzem os laços apresentados nas Figuras 7 e 11, são perfeitamente visíveis nos resultados experimentais apresentados nas Figuras 8 e 12. As maiores discrepâncias encontradas são os tempos de decaimento do ângulo de nutação. Os tempos obtidos



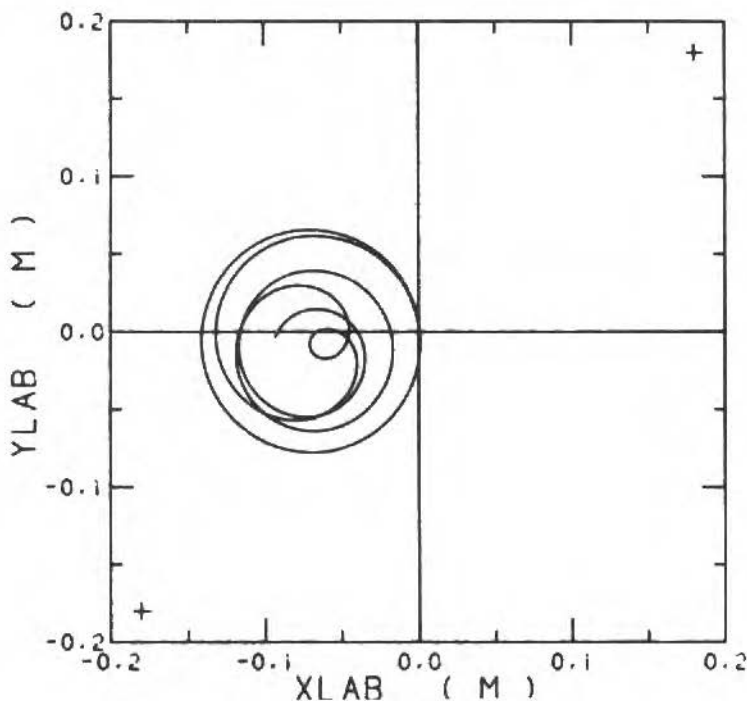


Figura 7. Trajetória sobre a máscara a 60 rpm durante 4 s

experimentalmente são da ordem de  $1/3$  a  $1/2$  dos obtidos via simulação do modelo teórico. Apesar disso o resultado pode ser considerado satisfatório e suficientemente preciso para dar como validado o modelo teórico. A seguir estão listadas as limitações mais importantes da modelagem, as quais podem explicar as discrepâncias mencionadas:

- o fluido é considerado como um tarugo rígido dentro do anel;
- o centro de massa do sistema é considerado fixo durante o movimento;
- a distância do centro de massa do fluido ao centro geométrico do anel é considerada constante durante o movimento;
- há limitações no modelo do torque dissipativo do fluido, principalmente para baixos números de Reynolds.

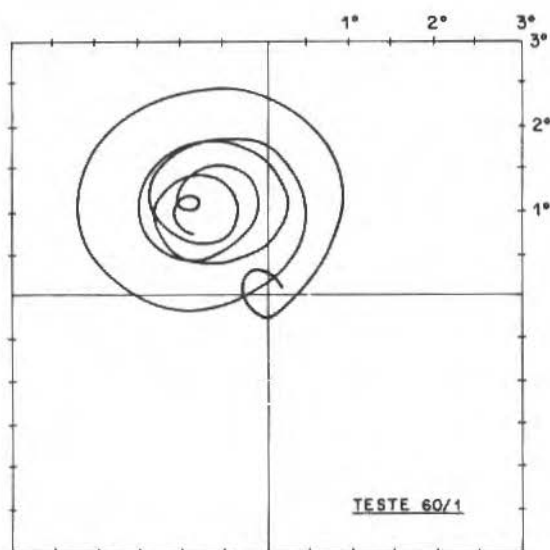


Figura 8. Trajetória sobre a máscara a 60 rpm (experimento)

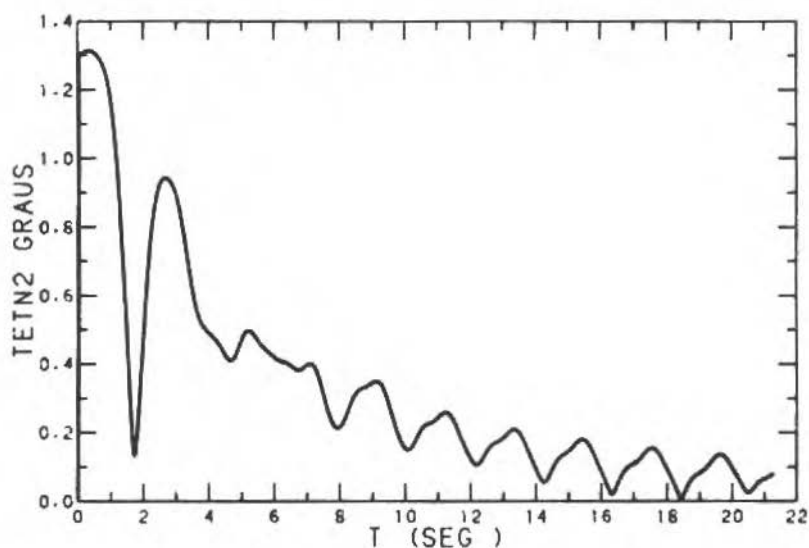


Figura 9. Ângulo de nutação a 60 rpm durante 22 s

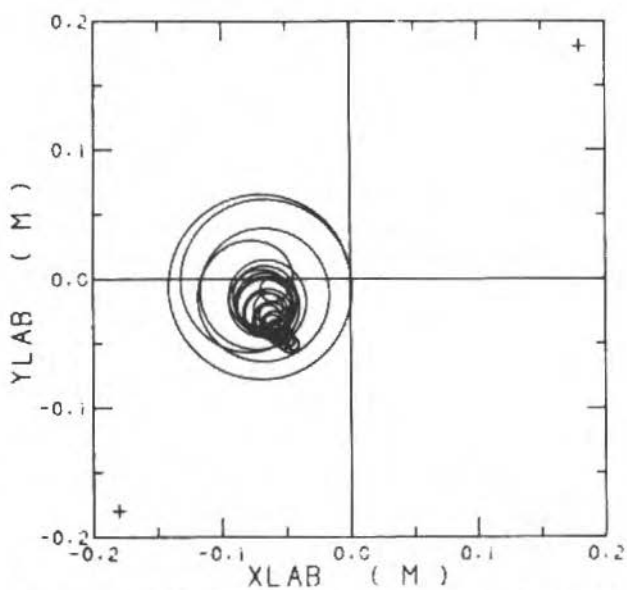


Figura 10. Trajetória sobre a máscara a 60 rpm durante 22 s

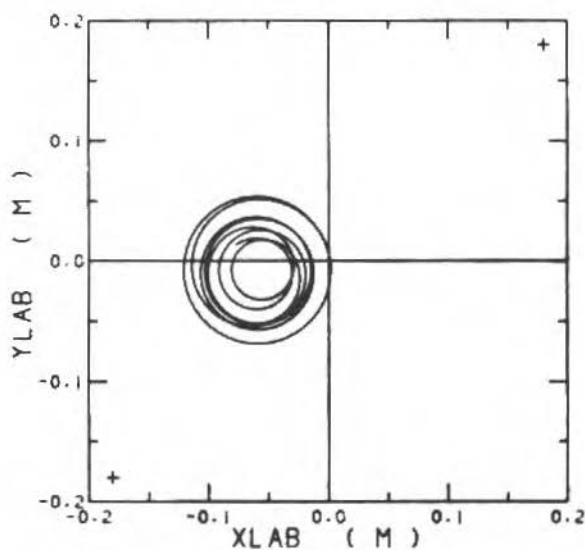


Figura 11. Trajetória sobre a máscara a 100 rpm durante 4 s

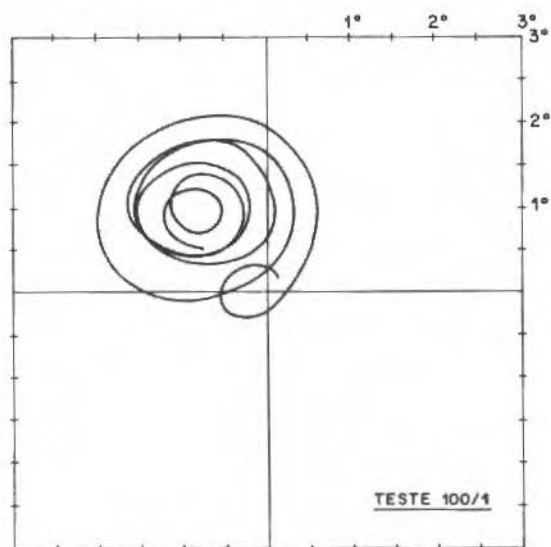


Figura 12. Trajetória sobre a máscara a 100 rpm (experimento)

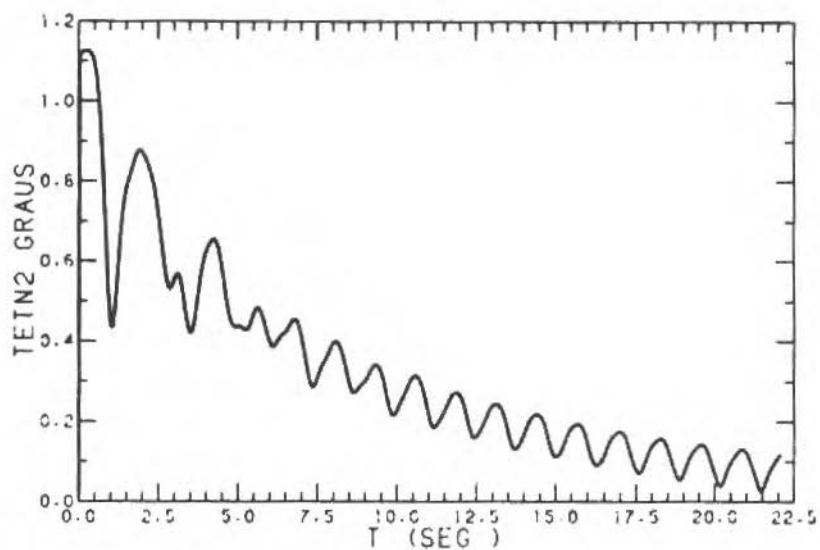


Figura 13. Ângulo de nutação a 100 rpm durante 22,5 s

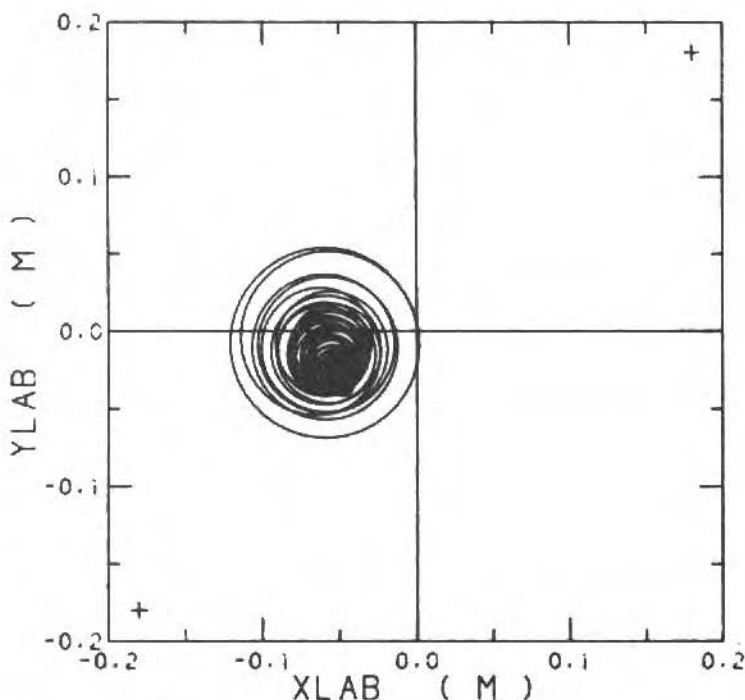


Figura 14. Trajetória sobre a máscara a 100 rpm durante 22,5 s

## APLICAÇÃO PARA O CASO DO SCD1 E CONCLUSÕES

Para simular o caso do SCD1, os termos que introduzem os efeitos da gravidade e dos atritos são retirados e os valores da matriz de inércia são alterados de acordo com as propriedades de massa do satélite. A Figura 15 mostra o ângulo de nutação do satélite em função do tempo. O objetivo desta aplicação é qualificar funcionalmente um amortecedor de nutação projetado e construído para ser utilizado no SCD1.

O objetivo inicial deste trabalho, que era o de conseguir realizar a qualificação funcional de um amortecedor de nutação, foi atingido. O modelo teórico desenvolvido foi validado experimentalmente e os resultados obtidos são compatíveis com os da literatura pertinente à área. Como subproduto deste trabalho fica o desenvolvimento de algumas técnicas que permitem realizar

experimentos em dinâmica de rotação com plataformas equipadas com mancais esféricos aerostáticos.

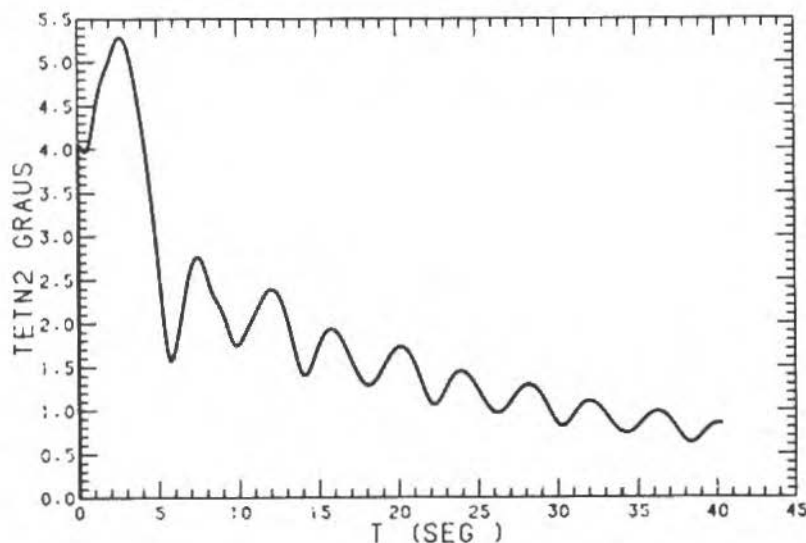


Figura 15. Decaimento do ângulo de nutação do SCD1 a 140 rpm

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] KAPLAN, M.H. - Modern Spacecraft Dynamics & Control, Wiley, 1981.
- [ 2 ] SOUZA, P.N.; FONSECA, I.M.; VAROTTO, S.E.C. - Relatório do Teste de Qualificação Funcional do Amortecedor de Nutação do SCD1 em um Simulador Dinâmico com Mancais Esféricos Aerostáticos, Instituto de Pesquisas Espaciais, 1989, A-ETD-0052.
- [ 3 ] FONSECA, I.M. - Partially filled Viscous Ring Nutation Damper: Dynamical Modelling, Instituto de Pesquisas Espaciais, 1986, DMC-AMNUT-009/86.
- [ 4 ] MEIROVITCH, L. - Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, 1970
- [ 5 ] ALFRIEND, T.K. - Analysis of the Partially filled Viscous Ring Damper, Cornell University, 1973, NASA GRANT NGR-33-010-169.

- [ 6] SCHLICHTING, H. - Boundary-layer Theory, McGraw-Hill, 1968.
- [ 7] ANCHER, L.J.; BRINK, H.v.d.; POUW, A. - Study on Passive Nutation Dampers: Volume III (Appendices), 1975, ESA CR(P)-788.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados para a pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse dos engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

### Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the English title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from English, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.



## ÍNDICE / CONTENTS

F.Venâncio Filho and A.M.Claret	Matrix Formulation of the Dynamic Analysis of SDOF Systems in the Frequency Domain	1
F.A.Rochinha and H.C.Mattos	Cálculo da Flambagem de Eixos Rotativos com a Seção Transversal Variável	11
J.L.Roehl and R.Carneiro	Modelo para Análise de Efeitos de Cargas Móveis em Tabuleiros Rodoviários	29
M.B.Halal and S.Colle	Boundary Element Approach for the Transient Thermo- elastic Problem	45
H.C.Mattos and R.Sampaio	Elastoviscoplasticidade Generalizada	
I.M.Fonseca and P.N.Souza	Modelagem do Movimento Rotacional de um Corpo Rígido Dotado de um Amortecedor de Nutação Anular Viscoso e sua Validação Experimental	89