

REVISTA
BRASILEIRA
DE CIÊNCIAS
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITOR: Hans Ingo Weber

Deptº Projeto Mecânica, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

Álvaro Toubes Prata

Deptº Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPO

Carlos Alberto de Almeida

Deptº Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UF RJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UF RJ)

Moysés Zindeluck (COPPE/UF RJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UF RJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UF RJ)

Samir N.Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



MODELAGEM MATEMÁTICA E TESTES DE CAMPO DE EVAPORADORES ÁGUA-REFRIGERANTE

MATHEMATICAL MODELING AND FIELD TESTS OF WATER-REFRIGERANT EVAPORATORS

Paulo Marcos Martins

Ricardo Nicolau Nassar Koury - Membro da ABCM

Bernardino Pereira Neto

Mauri Fortes - Membro da ABCM

EEUFMG - Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus UFMG

31.270 Belo Horizonte, MG - Brasil

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, um modelo físico-matemático integral (concentrado) para análise de evaporadores água-refrigerante. Este modelo tem por base expressões atualizadas para as propriedades termodinâmicas e de transporte associadas. A análise, efetuada por meio de discretização em bloco dos volumes de controle, leva em consideração as diferentes regiões de mudança de fase do refrigerante. O modelo foi validado por meio de dados experimentais obtidos de um protótipo de bomba de calor água-água. Discutem-se as correlações entre os parâmetros de entrada (coeficientes convectivos de transferência de calor, vazões mássicas e pressão e temperatura de evaporação) e dados de saída.

Palavras-chave: Evaporador ■ Bomba de Calor ■ Refrigeração ■ Ar-condicionado

ABSTRACT

A physical-mathematical lumped model is presented for water-refrigerant evaporators, which is based upon updated expressions for the associated thermodynamic and transport properties. The lumped-discretized control volume analysis, takes into account the different phase change regions of the refrigerant. The model has been validated by means of experimental data obtained from a water-water heat pump assembly. Correlations among input (empirical heat transfer coefficients, mass flowrates and evaporation temperature and pressure) and output values are discussed.

Keywords: Evaporator ■ Heat Pump ■ Refrigeration ■ Air-conditioning

NOMENCLATURA

- A_{sa}, A'_{sa} - área de troca de calor da região de superaquecimento do refrigerante, $[m^2]$.
- A_{vab}, A_{vac} - áreas de troca de calor das regiões de vaporização do refrigerante, $[m^2]$.
- A_r - área total de troca de calor do evaporador $[m^2]$.
- ΔA_{vab} - área de troca de calor do volume de controle mostrado na Fig. 4, $[m^2]$.
- c_{pa} - calor específico a pressão constante da água, $[kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$.
- c_{pfl} - calor específico a pressão constante do refrigerante no estado líquido, $[kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$.
- c_{pfv} - calor específico a pressão constante do refrigerante no estado de vapor saturado e superaquecido, $[kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$.
- d_e, d_i - diâmetros externo e interno do tubo interno, do evaporador, $[m]$.
- D_i - diâmetro interno do tubo externo do evaporador, $[m]$.
- F - fator definido nas Equações (21) e (29).
- G_f, G_a - fluxo mássico do refrigerante e da água, respectivamente $[kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}]$.
- h_a, h_v - coeficientes convectivos de troca de calor para a água e para o refrigerante, respectivamente, definidos na Tabela 1 $[W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}]$.
- h_c, h_n, h_{sp} - coeficientes convectivos de troca de calor na região de vaporização do refrigerante, expressos na Equação (2) $[W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}]$.
- i_{fl}, i_{fv}, i_{fsa} - entalpia do refrigerante nos estados líquido saturado, vapor saturado e vapor superaquecido, respectivamente, $[kJ \cdot kg^{-1}]$.
- i_o, i_1, i_2 e i_3 - entalpia do refrigerante saturado à temperatura de evaporação, na entrada do evaporador, no início da fase de superaquecimento e na saída do evaporador, respectivamente $[kJ \cdot kg^{-1}]$.
- i_{fl} - calor latente de vaporização do refrigerante $[kJ \cdot kg^{-1}]$.

- k_a - condutividade térmica da água, $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$.
- k_{fl}, k_{fv} - condutividades térmicas do refrigerante nos estados líquido e vapor, respectivamente, $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$.
- \dot{m}_a, \dot{m}_f - vazão mássica da água e do refrigerante, respectivamente, $[kg \cdot s^{-1}]$.
- P_{sat} - pressão de saturação do refrigerante à temperatura de evaporação T_{fe} , $[kgf \cdot cm^{-2}]$.
- P_{fp} - pressão de saturação do refrigerante à temperatura da parede do tubo T_p , $[kgf \cdot cm^{-2}]$.
- ΔP_{sat} - gradiente de pressão, $\Delta P_{sat} = P_{fp} - P_{sat}$ $[kgf \cdot cm^{-2}]$.
- Pr - número de Prandtl.
- $\dot{Q}_{sa}, \dot{Q}_{vab}, \dot{Q}_{vc}$ - taxas de calor trocadas entre os fluidos, respectivamente na região de superaquecimento e nas subregiões de vaporização A, B e C $[W]$.
- \dot{Q}_t - taxa de calor total trocada entre os fluidos no evaporador, $[W]$.
- $\Delta \dot{Q}_{vab}$ - taxa de calor trocada no volume de controle mostrado na Fig.4 $[W]$.
- Re_a, Re_v - números de Reynolds da água e do refrigerante, respectivamente.
- Re_l - número de Reynolds da parte líquida do refrigerante no escoamento bifásico, definido na Equação (22).
- Re_{fp} - número de Reynolds do refrigerante no escoamento bifásico, definido na Equação (22).
- S - fator expresso nas Equações (25) e (29).
- T_{ae}, T_{as} - temperaturas da água na entrada e na saída do evaporador, respectivamente, $[^{\circ}C]$.
- T_{ai} - temperatura da água na saída da região de superaquecimento do refrigerante, expressa na Equação (3), $[^{\circ}C]$.
- T_{a2} - temperatura da água na saída da subregião de evaporação C do refrigerante, expressa na equação (10), $[^{\circ}C]$.
- $T_{a(i)}, T_{a(i+1)}$ - temperaturas da água na entrada e saída do volume de controle mostrado na Fig. 4, $[^{\circ}C]$.

- T_{fe} - temperatura de evaporação do refrigerante, [$^{\circ}C$].
- T_{f3} - temperatura do valor superaquecido do refrigerante à saída do evaporador, [$^{\circ}C$].
- T_p, T_p - temperatura da parede do tubo no qual ocorre a vaporização do refrigerante, [$^{\circ}C$].
- ΔT_{ln} - diferença média logarítmica de temperatura entre o refrigerante e a água, [$^{\circ}C$].
- ΔT_{sa} - grau de superaquecimento do refrigerante, $\Delta T_{sa} = T_{f3} - T_{fe}$, [$^{\circ}C$].
- ΔT_{sat} - grau de superaquecimento da película de líquidos nas subregiões de vaporização "A,B", mostradas na Fig.3, $\Delta T_{sat} = T_p - T_{fe}$, [$^{\circ}C$].
- U - coeficiente global de troca de calor, [$W \cdot m^{-2} K^{-1}$].
- v_{β} - volume específico do refrigerante no estado líquido, [$m^3 \cdot kg^{-1}$].
- $v_{f\beta}$ - volume específico do refrigerante nos estados de vapor saturado e superaquecido, [$m^3 \cdot kg^{-1}$].
- $X_c, \Delta X$ - título do refrigerante na entrada do evaporador e decremento do título, respectivamente.
- X_u - parâmetro de Martinelli, definido pela Equação (23).

SÍMBOLOS GREGOS

- μ_a - viscosidade da água, [$Pa \cdot s$].
- μ_{β} - viscosidade do refrigerante no estado líquido, [$Pa \cdot s$].
- $\mu_{f\beta}$ - viscosidade do refrigerante nos estados de vapor saturado e superaquecido, [$Pa \cdot s$].
- ρ_l, ρ_v - densidades do refrigerante nos estados líquido saturado e vapor saturado à temperatura de evaporação T_{fe} , [$kg \cdot m^{-3}$].
- σ_f - tensão superficial do refrigerante, [$N \cdot m^{-1}$].

INTRODUÇÃO

Vários modelos físico-matemáticos para a análise de evaporadores e condensadores encontram-se disponíveis na literatura [7,13,19]. Os modelos dividem-se, classicamente, em modelos com discretização espacial (MDE), que requerem a solução de um conjunto de equações diferenciais parciais, e modelos concentrados (MC), baseados em formulações integrais das equações de massa, momentum e energia, que envolvem volumes de controle finitos. É fato incontestável que os MDE levam a resultados que fornecem uma visão bem mais detalhada dos fenômenos físicos envolvidos e permitem, por vezes, a eliminação de testes experimentais comprobatórios, de alto custo [1,16]. Entretanto, quando os dados físicos básicos, necessários à modelagem, são escassos ou não passíveis de utilização em MDE, ou quando as estruturas geométricas envolvidas são complexas, a utilização de MC é conveniente e, por vezes, a única plausível.

A literatura sobre dimensionamento por MC de evaporadores e condensadores é extensa [2,9,10,17]. Entretanto, as expressões empíricas para as propriedades de transporte, utilizadas no modelamento de processos de evaporação e condensação, são aplicáveis, em quase sua totalidade, somente a condições próximas (ou interpoladas) daquelas dos experimentos que as originaram [1,5]; há, portanto, a necessidade de se efetuarem testes experimentais de validação para condições que extrapolem o seu domínio de validade. A utilização de MDE para a solução desta classe de problemas é, também, pouco difundida ou inexistente (no nosso parecer).

A subdivisão de um evaporador aletado tipo serpentina plana ar-R12 em volumes finitos de controle já foi efetuado [14,15,18]; entretanto não foram efetuados testes experimentais de validação do modelo proposto. Os dois tipos mais comuns de evaporadores água-refrigerante são os trocadores de tubos concêntricos e de tubo-carcaça; este último tipo é usado quando as potências envolvidas são superiores a 30 kW [3]. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo concentrado para a análise de evaporadores água-refrigerante e dados experimentais, obtidos a partir de um trocador de calor de tubos concêntricos, que permitam atestar a validade do modelo. O modelo a ser proposto aplica-se a ambos os tipos de evaporadores água-refrigerante.

MATERIAIS E MÉTODOS

O Modelo Físico-Matemático. A Figura 1 mostra um esquema simplificado de uma bomba de calor água-água. As temperaturas do fluido refrigerante e da água, no interior de evaporadores, apresentam um perfil semelhante ao mostrado na

Figura 2. As pressuposições básicas para o modelamento de evaporadores, aqui utilizadas e tendo por base outros trabalhos [8,19] foram:

- 1) O refrigerante entra no evaporador no estado de vapor saturado e sai no estado de vapor superaquecido.
- 2) Perdas térmicas são desprezadas e perdas de carga não são consideradas.
- 3) O modelo foi desenvolvido para evaporadores tipo tubos concêntricos; as resistências térmicas das paredes dos tubos foram desprezadas.
- 4) O regime de escoamento da água é turbulento.

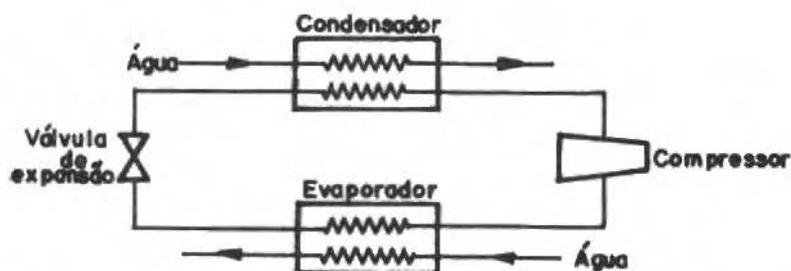


Figura 1. Esquema simplificado de uma bomba de calor água-água

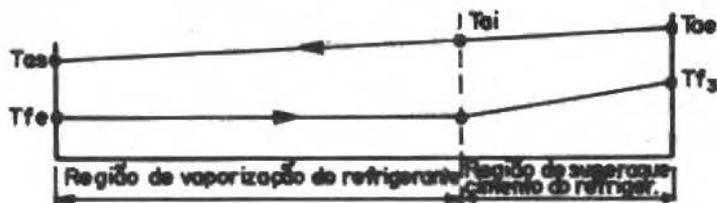


Figura 2. Variação das temperaturas dos fluidos ao longo do evaporador

As Tabelas 1, 2 e 3 contêm as propriedades termodinâmicas e de transporte, assim como os respectivos coeficientes de troca de calor por convecção do refrigerante e da água utilizados no modelo.

Tabela 1. Propriedades Termodinâmicas e de Transporte do R-12

Propriedades	Símbolo	Equação	Validade	Erro Máximo	Referência
Entalpia do líquido saturado e subresfriado	i_{fl} kJ·kg ⁻¹	$i_{fl} = 0,001456 T^2 + 0,90733 T + 418,6$ T em °C	0 - 60°C	0,03%	*
Entalpia do vapor saturado	i_{fv} kJ·kg ⁻¹	$i_{fv} = -0,00135 T^2 + 0,44316 T + 570,05$ T em °C	0 - 60°C	0,03%	*
Entalpia do vapor superaquecido	i_{fsa} kJ·kg ⁻¹	$i_{fsa} = 452,72 + 0,3081 T + 0,0005 T^2 -$ p (0,046841/T - 0,000047) T em k ; p em kgf/m ²	—	—	*
Calor específico a pressão constante do líquido saturado e subresfriado	c_{pfl} kJ·kg ⁻¹ °C ⁻¹	$c_{pfl} = 5,3 \times 10^{-6} T^2 + 0,001485 T + 0,934225$ T em °C	0 - 60°C	0,02%	*
Calor específico a pressão constante do vapor saturado e superaquecido	C_{pfv} kJ·kg ⁻¹ °C ⁻¹	$C_{pfv} = 0,3081 + 0,001 T + P (0,046841/T^2)$ T em k ; P em kgf/m ²	—	—	*
Pressão de saturação	P_{sat} kgf·cm ⁻²	$P_{sat} = 0,001604 T_{sat}^2 + 0,100193 T_{sat} + 3,1469$ T _{sat} em °C	0 < T _{sat} < 30	0,25%	*
Viscosidade do líquido saturado e subresfriado	μ_{fl} pa·s	$\mu_{fl} = 9,583 \times 10^{-9} T^2 - 2,2 \times 10^{-6} T + 0,000267$; T em °C	0 - 60°C	0,80%	*
Viscosidade do vapor saturado e superaquecido	μ_{fv} pa·s	$\mu_{fv} = 4,95 \times 10^{-8} T + 0,0000117$ T em °C	0 - 60°C	1,30%	*

Tabela 1. Propriedades Termodinâmicas e de Transporte do R-12 (cont.)

Propriedades	Símbolo	Equação	Validade	Erro Máximo	Referência
Condutividade térmica do líquido saturado e subresfriado	k_{fl} $ w \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1} $	$k_{fl} = -0,000367 T + 0,0784$ T em $ ^\circ C $	$0 - 60^\circ C$	0,04%	*
Condutividade térmica do vapor saturado e superaquecido	k_{fv} $ w \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1} $	$k_{fv} = 0,000057 T + 0,008308$ T em $ ^\circ C $	$0 - 60^\circ C$	0,90%	*
Volume específico do líquido saturado e superaquecido	v_{fv} $ m^3 \cdot kg^{-1} $	$v_{fv} = \exp(168,12 + 0,004(T - T_{sat}) -$ $- 52,371 L_n T_{sat} + 3,9015 (L_n T_{sat})^2)$ T em $ K $ T_{sat} em $ K $	$23 < T_{sat} < 303k$ $0 < (T - T_{sat}) < 70k$	0,70%	*
Volume específico do líquido saturado e subresfriado	v_{fl} $ l \cdot kg^{-1} $	$v_{fl} = 0,000015 T^2 + 0,001493 T + 0,71588$ T em $ ^\circ C $	$0 - 60^\circ C$	0,30%	*

Tabela 2. Propriedades Termodinâmicas e de Transporte da Água

Propriedades	Símbolo	Equação	Validade	Erro Máximo	Referência
Calor específico a pressão constante	c_a $ kJ \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1} $	$c_a = 0,000478 T + 4,199$ T em $^\circ C$	5 - 60°C	0,30%	*
Viscosidade	μ_a $ Pa \cdot s $	$\mu_a = (-5,15 \times 10^{-6} T^3 + 0,0008154 T^2 - 0,05215 + 1,7659)/1000$; T em $^\circ C$	5 - 60°C	1,10%	*
Condutividade térmica	k_a $ W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1} $	$k_a = 0,00149 T + 0,571$	5 - 60°C	0,80%	*

*Equações obtidas por interpolação lagrangeana de dados tabelados, ASHRAE Handbook (1977), STOECKER (1985), BULLETINS X-88F e X88R1 Du Pont de Nemours (1969).

OBS.: Foi tomado um valor constante para a tensão superficial do freon-12: $\sigma = 8,9 \times 10^{-3} [N \cdot m^{-1}]$ (ASHRAE)

Tabela 3. Coeficientes de Transferência de Calor por Convecção (cont.)

Propriedades	Símbolo	Equação	Validade	Erro Máximo	Referência
Coeficiente de Transferência de Calor para o R-12 Superaquecido	h_v $ w \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1} $	$h_v = 0,023 \cdot R_{ev}^{0,8} \cdot P_{rv}^{0,4} \cdot \frac{k_{fv}}{d_i}$ $R_{ev} = \frac{G_f \cdot d_i}{\mu_{fv}} ; G_f = \frac{4 \cdot \dot{m}_f}{\pi \cdot d_i^2} ; P_{rv} = \frac{c_{pfv} \cdot \mu_{fv}}{k_{fv}}$	$0,6 < P_{rv} < 100$ $R_{ev} > 10^4$	—	McADAMS (1954)
Coeficiente Convectivo de Troca de Calor ao do Evaporador	h_a $ w \cdot m^2 \cdot ^\circ C^{-1} $	$h_a = 0,023 \left(\frac{k_a}{d_h}\right) \cdot (Re_a)^{0,8} (P_{ra})^{0,3}$ onde: $Re_a = \frac{G_a \cdot d_h}{k_a} ; G_a = \frac{4 \cdot \dot{m}_a}{\pi \cdot (D_i^2 - d_e^2)}$ $P_{ra} = \frac{c_{pa} \mu_a}{k_a}$ $d_h = \text{diâmetro hidráulico} = D_i - d_e$	$0,6 < P_{ra} < 100$ $Re_a > 10^4$	—	McADAMS (1954)

A modelagem da região de superaquecimento do refrigerante teve por base as seguintes expressões:

- Taxa de calor trocado entre os fluidos:

$$\dot{Q}_{sa} = \dot{m}_f (i_3 - i_2) \quad \text{ou} \quad (1)$$

$$\dot{Q}_{sa} = \dot{m}_a c_a (T_{ae} - T_{ai}) \quad (2)$$

- Temperatura de saída da água:

$$T_{ai} = T_{ae} - \dot{Q}_{sa} / (\dot{m}_a c_a) \quad (3)$$

- Área requerida para troca de calor:

$$A_{sa} = \dot{Q}_{sa} / (U \Delta T_{ln}) \quad (4)$$

em que ΔT_{ln} é a diferença média logarítmica de temperatura entre o refrigerante e a água:

$$\Delta T_{ln} = \frac{(T_{ae} - T_{f3}) - (T_{ai} - T_{fe})}{\ln [(T_{ae} - T_{f3}) / (T_{ai} - T_{fe})]} \quad (5)$$

- Uma vez especificados o grau de superaquecimento (ΔT_{sa}) e a temperatura de evaporação do refrigerante (T_{fe}), a temperatura de saída do fluido refrigerante é dada por:

$$T_{f3} = \Delta T_{sa} + T_{fe} \quad (6)$$

- O coeficiente global de troca de calor é dado por:

$$U = \frac{1}{\frac{d_e}{d_i \cdot h_v} + \frac{1}{h_a}} \quad (7)$$

A avaliação dos coeficientes de troca de calor foi feita tendo por base as expressões contidas na Tabela 3 e a média aritmética das temperaturas dos fluidos na entrada e saída da região de superaquecimento.

A modelagem da **região de vaporização** do refrigerante teve por base as seguintes considerações e expressões:

- A análise do processo de transferência de calor sob condições de evaporação no interior de tubos é complexa. O coeficiente de transferência de calor depende da variação da temperatura da parede e da configuração do escoamento. As configurações de escoamento e regiões de transferência de calor em função do título da mistura líquido-vapor (x), são mostrados na Figura 3 [6]. Quando o título for superior a 0,95 (subregião C), o fluido estará quase que totalmente no estado de vapor, contendo pequenas gotas de líquido, o escoamento pode ser considerado monofásico e o coeficiente de transferência de calor pode ser avaliado pela expressão de Dittus-Boelter (Tabela 3). Neste caso, a taxa de calor trocado entre os fluidos é:

$$\dot{Q}_{vc} = \dot{m}_f \Delta X i_{fv} = \dot{m}_f (0,05) i_{fv} \quad (8)$$

ou

$$\dot{Q}_{vc} = \dot{m}_a c_a (T_{a1} - T_{a2}) \quad (9)$$

Desta última equação pode-se obter a temperatura da água à saída da subregião C:

$$T_{a2} = T_{a1} - \dot{Q}_{vc} / (\dot{m}_a c_a) \quad (10)$$

A área de troca de calor é:

$$A_{vc} = \frac{\dot{Q}_{vc}}{U \cdot \Delta T_{\ln}} \quad (11)$$

em que:

$$\Delta T_{\ln} = \frac{(T_{a1} - T_{fe}) - (T_{a2} - T_{fe})}{\ln [(T_{a1} - T_{fe}) / (T_{a2} - T_{fe})]} \quad (12)$$

c:

$$U = \frac{1}{\frac{d_e}{d_i \cdot h_v} + \frac{1}{h_a}} \quad (13)$$

Nas expressões acima, o calor específico e o coeficiente de transferência de calor da água devem ser calculados com base na temperatura de entrada na subregião C, T_{at} , enquanto que o coeficiente de transferência de calor do refrigerante deve ser avaliado com base na temperatura de evaporação T_{fe} .

- Quando o título for inferior a 0,95 (subregiões A e B, Figura 3), haverá transferência de calor tanto por convecção quanto por ebulição nucleada [6]. Nessas subregiões, o coeficiente de transferência de calor depende do título; há, portanto, que se discretizarem as subregiões, por meio do título, como variável independente, como mostrado na Figura 4. O título à entrada do evaporador pode ser calculado pela expressão:

$$X_e = \frac{i_i - i_o}{i_{fv}} \quad (14)$$

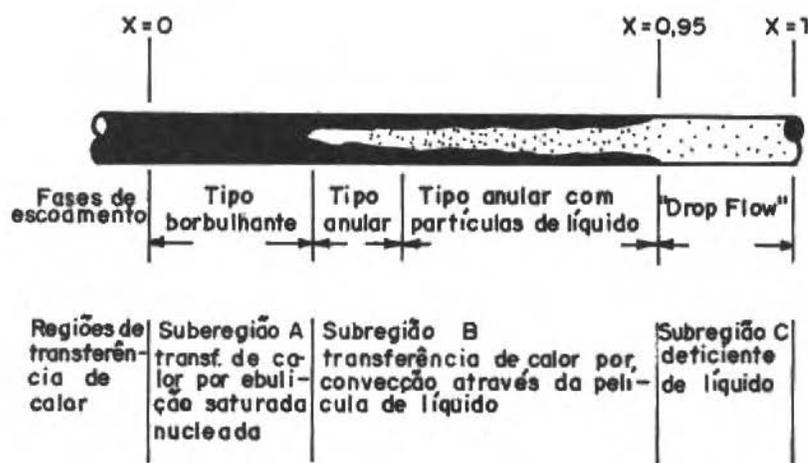


Figura 3. Configuração de escoamento e regiões de transferência de calor na evaporação saturada de um fluido no interior de um tubo em escoamento forçado

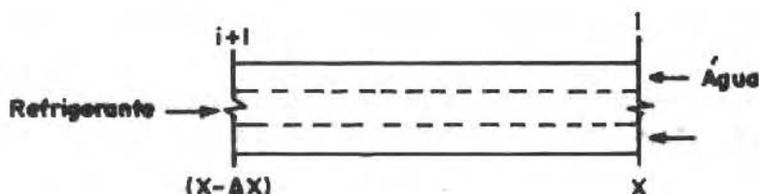


Figura 4.I-ésimo volume de controle compreendido nas subregiões de troca de calor "A" e "B"

em que i_1 é a entalpia da mistura líquido-vapor à entrada do evaporador; i_{fv} é o calor latente e i_o a entalpia do líquido saturado à temperatura de evaporação T_{fe} .

A taxa de calor trocado entre os fluidos é dada por:

$$\Delta \dot{Q}_{vab} = \dot{m}_f i_{fv} (\Delta X) \quad (15a)$$

ou

$$\Delta \dot{Q}_{vab} = \dot{m}_a c_a (T_{a(i)} - T_{a(i+1)}) \quad (15b)$$

A temperatura de saída da água é dada por:

$$T_{a(i+1)} = T_{a(i)} - \Delta \dot{Q}_{vab} / (\dot{m}_a c_a) \quad (16)$$

A área requerida para troca de calor é:

$$\Delta A_{vab} = \Delta \dot{Q}_{vab} / (U \Delta T_{ln}) \quad (17)$$

em que:

$$\Delta T_{ln} = \frac{(T_{a(i)} - T_{fe}) - (T_{a(i+1)} - T_{fe})}{\ln [(T_{a(i)} - T_{fe}) / (T_{a(i+1)} - T_{fe})]} \quad (18)$$

e:

$$U = \frac{1}{\frac{d_e}{d_i \cdot h_{tp}} + \frac{1}{h_a}} \quad (19)$$

As propriedades termodinâmicas necessárias ao cálculo do coeficiente convectivo da água, h_a , têm por base a sua temperatura à entrada do volume de controle, $T_{a(i)}$.

AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE LOCAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Segundo Chen, citado por COLLIER [6], o coeficiente bifásico local de transferência de calor do refrigerante, h_{tp} , é dado pela soma de dois componentes:

$$h_{tp} = h_c + h_n \quad (20)$$

em que h_c é o coeficiente convectivo de transferência de calor e h_n é o coeficiente de transferência de calor por ebulição nucleada; as expressões associadas a esses coeficientes estão na Tabela 3.

Os seguintes pontos, referentes às expressões contidas na Tabela 3, devem ser mencionados:

- Quando da avaliação de h_c e h_n , as propriedades termodinâmicas devem ser calculadas tendo por base a temperatura de evaporação;
- O fator F é definido por:

$$F = \left[\frac{Re_{tp}}{Re_l} \right]^{0.8} \quad (21)$$

em que Re_{tp} é o número de Reynolds para o escoamento bifásico, e Re_l , dado pela expressão (22), é o número de Reynolds referente a apenas a parte líquida do refrigerante:

$$Re_l = \frac{G_f(1-X) \cdot d_i}{\mu_l} \quad (22)$$

A expressão que permite correlacionar o fato F e o parâmetro de Martinelli, X_{tt} , foi obtida por meio de regressão por HABERSCHILL [8].

- O grau de superaquecimento, ΔT_{sat} , é definido como a diferença entre a temperatura de parede do tubo e a temperatura de evaporação do refrigerante, enquanto que ΔP_{sat} é definido como a diferença de pressões de saturação à temperatura de parede do tubo e à temperatura de saturação associada.
- O parâmetro S , introduzido por Chen, permite incluir no cálculo de h_n o efeito exercido pelo superaquecimento da camada do líquido no crescimento de bolhas de vapor. Uma regressão sobre os dados de Chen, efetuada por HABERSCHILL [8], fornece as relações entre S e Re_{tp} , mostradas na Tabela 3.

O cálculo da temperatura de parede, do coeficiente bifásico de vaporização e da área de troca de calor deve ser efetuado por meio de um processo iterativo:

- Obter, como primeira aproximação, a temperatura da parede do tubo, por meio da expressão:

$$T_p = \frac{T_a(i) + T_{fe}}{2} \quad (23)$$

- Calcular ΔT_{sat} e ΔP_{sat} ;
- Calcular, sequencialmente, X_{tt} , F , $Resu_{tp}$, S , h_c , h_n e h_{tp} ;
- Calcular o coeficiente global de troca de calor, U , e ΔT_{ln} utilizando as equações (18) e (19);
- Calcular a área de troca de calor ΔA_{vab} por meio da equação (17);
- Calcular a diferença de temperatura $\Delta T'_{sat}$ por meio da equação:

$$\Delta T'_{sat} = \frac{\Delta \dot{Q}_{vab}}{h_{tp} \cdot \Delta A_{vab}} \quad (24)$$

- Se o valor de ΔT_{sat} , previamente calculado em função de T_p , não coincidir com o valor obtido para $\Delta T'_{sat}$, substitui-se T_{sat} por T'_{sat} e reiniciam-se os cálculos até que a diferença entre ΔT_{sat} e $\Delta T'_{sat}$ seja desprezível.

A TÉCNICA DE SIMULAÇÃO

O procedimento seqüencial utilizado para simular o comportamento de evaporadores foi:

- Definem-se, inicialmente, os dados geométricos do evaporador: diâmetros dos tubos e área total de troca de calor;
- Especificam-se a vazão mássica e a temperatura de entrada da água;
- Calculam-se, para a região de superaquecimento, a taxa de calor trocado (\dot{Q}_{sa}), a área da região (A_{sa}) e a temperatura de saída da água (T_{ai});
- Analogamente, calculam-se, para a subregião de vaporização C, os valores de \dot{Q}_{vc} , A_{vc} e T_{a2} ;
- Nas regiões de vaporização A e B, calculam-se, para cada volume de controle, a taxa de calor trocado (\dot{Q}_{va}), a área de troca de calor (A_{vab}) e a temperatura de saída da água ($T_{a(i+1)}$). Continua-se com as avaliações até que o título à saída do volume de controle coincida com o valor de entrada X_e . A taxa de calor trocado e a área correspondente às regiões A e B serão, então, pelo somatório de seus valores em cada (sub)volume de controle, isto é:

$$\dot{Q}_{vab} = \Sigma \Delta \dot{Q}_{vab} \quad e \quad A_{vab} = \Sigma \Delta A_{vab}$$

- Calcula-se, novamente, a área da região de superaquecimento, A'_{sa} , por meio da expressão:

$$A'_{sa} = A_t - (A_{vc} + A_{vab})$$

- O procedimento deve ser repetido iterativamente até que a diferença entre A'_{sa} e A_{sa} esteja dentro de uma tolerância aceitável.

MONTAGEM EXPERIMENTAL

A montagem experimental consistiu de uma bomba de calor de pequeno porte, descrita em detalhes em MARTINS [11], cujo evaporador é um trocador de calor de tubos concêntricos dispostos horizontalmente com escoamento em contra-corrente, com R-12 escoando através do tubo interno e água escoando na região anular,

com uma área total de $0,4 \text{ m}^2$. A montagem também dispôs de uma válvula de expansão termostática capaz de ajustar o grau desejado de superaquecimento.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados a serem apresentados referem-se a um valor fixo da carga térmica do condensador, ou seja, fixaram-se a temperatura de entrada da água em 24°C e a vazão mássica em $0,032 \text{ kg/s}$.

O grau de validade do modelo apresentado depende fortemente da acurácia das expressões utilizadas para calcular os coeficientes de transferência de calor do refrigerante e da água. Dentre essas expressões, a que mais influencia os resultados é a expressão para o cálculo do coeficiente bifásico de vaporização, uma vez que este coeficiente varia ao longo de toda a região de vaporização. O gráfico dos valores do coeficiente bifásico de vaporização, calculado pelo modelo apresentado, como função do título, para duas temperaturas distintas de evaporação, é apresentado na Figura 5.

A Figura 6 apresenta dados experimentais e de simulação da temperatura de evaporação do refrigerante, em função da temperatura da água no evaporador, para um grau de superaquecimento do R-12 de $6,0^\circ\text{C}$. O desvio máximo entre dados experimentais e os dados simulados foi de $3,5\%$.

Os dados experimentais e de simulação mostraram que a potência térmica do evaporador depende principalmente da temperatura de entrada da água (Figura 7). Se a carga térmica for mantida inalterada, um decréscimo na temperatura da água levará a uma diminuição da temperatura de evaporação e conseqüente diminuição da eficiência do evaporador. Conforme mostrado na Figura 7, para um decréscimo de 4° na temperatura de entrada da água haverá um decréscimo de 10 a 15% na eficiência do evaporador. Os dados simulados de potência térmica divergem dos dados experimentais em, no máximo, $6,8\%$. Dados da simulação também mostram que a potência térmica do evaporador é praticamente insensível às variações de vazão mássica da água, na faixa de vazões de $0,1$ a $0,5 \text{ kg/s}$.

A eficiência do evaporador é fortemente afetada pelo grau de superaquecimento do refrigerante (Figura 8); portanto, este fator deve ser controlado adequadamente. A curva foi obtida para uma carga térmica do evaporador fixada ao se definir que a vazão mássica e temperatura de entrada da água eram de $0,288 \text{ kg/s}$ e 20°C , respectivamente. Os dados simulados revelaram que, a partir de $6,0^\circ\text{C}$ de superaquecimento, cada acréscimo de 2°C leva a um decréscimo de 8 a 10% na potência térmica.

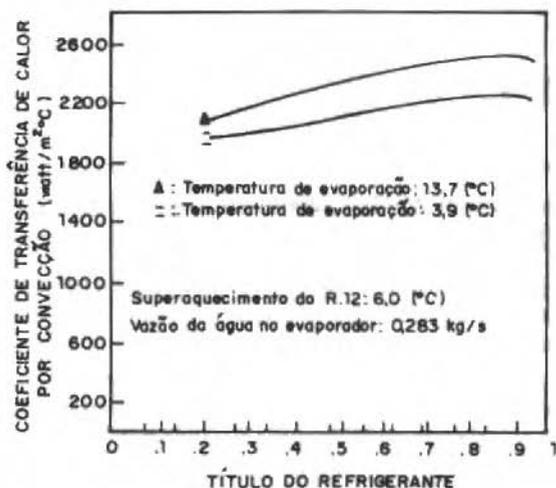


Figura 5. Coeficiente de transferência de calor do refrigerante na região de vaporização

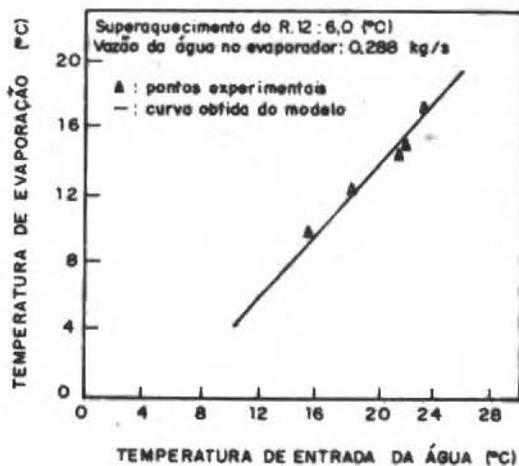


Figura 6. Variação da temperatura de evaporação do refrigerante em função da temperatura de entrada da água no evaporador

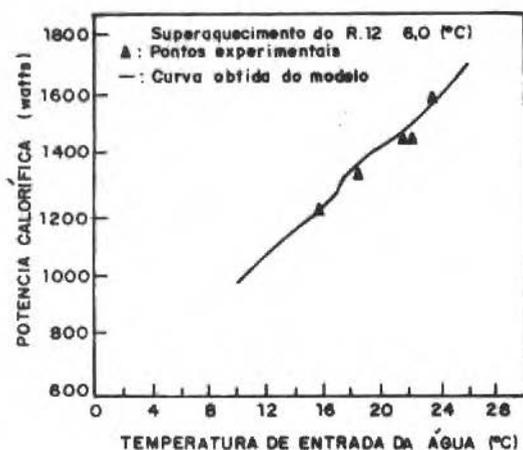


Figura 7. Variação da potência calorífica obtida em função da temperatura de entrada da água no evaporador

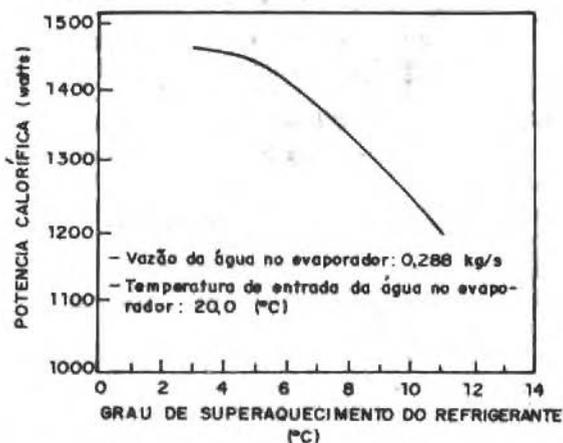


Figura 8. Influência do superaquecimento do refrigerante na potência calorífica obtida no evaporador

CONCLUSÕES

Apresenta-se um modelo para análise de evaporadores água-refrigerante. Dados experimentais obtidos em testes efetuados numa bomba de calor de laboratório permitiram avaliar sua aplicabilidade. O modelo apresentado mostrou-se adequado para estudos de simulação do funcionamento de evaporadores, quando da variação da carga térmica e do grau de superaquecimento do refrigerante.

As correlações empregadas no cálculo dos coeficientes convectivos de transferência de calor do R-12 e da água, e, em particular, do coeficiente bifásico de vaporização do refrigerante, mostraram-se adequadas. Os erros oriundos da utilização de equações de correlação para as propriedades termodinâmicas não afetaram, significativamente, os resultados simulados.

Os dados experimentais e de simulação permitem concluir que a potência térmica de evaporadores água-refrigerante é afetada, primordialmente, pela temperatura de entrada da água e pelo grau de superaquecimento do refrigerante. O grau de superaquecimento do refrigerante não deve exceder 6°C .

REFERÊNCIAS

- [1] ASHRAE Handbook & Product Directory - Fundamentals, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc., 1977.
- [2] BARCELLOS, K.M.; CORDIER, A.; GESSIN, G. & KOURY, R.N.N. - Grain drying with a Heat Pump using Ambient Energy Absorber, Proceedings of ISES-Solar World Congress, Pergamon Press, Sept., 1989, Kobe, Japan, p. 1746-1750.
- [3] BERNIER, J. - La Pompe à Chaleur, Mode d'Employ, vols. 1 e 2, Pyc Edition, Paris, 1979.
- [4] BULLETINS X-88F e X-88B1 - Freon Product Division, E.I. Du Pont de Nemours and Co., Wilmington, Delaware, 1969.
- [5] BURMEISTER, L.C. - Convective Heat Transfer, John Wiley, New York, 1983, 790p.
- [6] COLLIER, J.G. - Convective Boiling and Condensation, McGraw-Hill Book Company, 1972.

- [7] DHAR, M. - Transient Analysis of a Refrigeration System, Ph.D. Thesis, Purdue University, 313p., USA, May, 1978.
- [8] HABERSCHILL, P. - Étude et Modélisation d'une Pompe à Chaleur Entraînée par un Moteur Thermique de Faible Puissance, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, França, Outubro, 1983. (Thèse de Docteur-Ingenieur)
- [9] HOLMAN, J.P. - Transferência de Calor, McGraw-Hill do Brasil, 1983.
- [10] KAYS, W.M.; LONDON, A.L. - Compact Heat Exchangers, Califórnia, USA, McGraw-Hill Book Company Inc., 1958.
- [11] MARTINS, P.M. - Modelo Matemático de Bombas de Calor Água-Água operando em Regime Permanente, com Análise da Velocidade de Rotação do Compressor, Departamento de Engenharia Térmica da EEUFMG, outubro, 1987. (Tese de Mestrado)
- [12] McADAMS, W.H. - Heat Transmission, McGraw-Hill Book Company Inc., Fluid Edition, 1954.
- [13] ORDONES, S.M.; FORTES, M. & KOURY, R.N.N. - Modelamento Matemático de Evaporadores Aletados Tipo Serpentina Plana Ar-R12. Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM-87, Universidade Federal de Santa Catarina, 7-11 dez, 1987, p. 375-378, 1987.
- [14] ORDONES, S.M.; FORTES, M.; KOURY, R.N.N. & CORDIER, A. - Mathematical Modeling with Spatial Discretization of Air-Refrigerant Condensers, Proceedings of ISES-Solar World Congress, Pergamon Press, vol. 2, p. 2042-2047, 1987, Hamburg, Fed. Rep. of Germany.
- [15] ORDONES, S.M.; FORTES, M.; KOURY, R.N.N. & CORDIER, A. - Mathematical Modeling of Air-Refrigerant Evaporators Aiming at Design Optimization, Proceedings of ISES-Solar World Congress, Pergamon Press, vol. 2, p. 2037-2041, 1987, Hamburg, Fed. Rep. of Germany.
- [16] PATANKAR, S.V. - Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [17] PEREIRA NETO, B.; KOURY, R.N.N.; MARTINS, P.M. & CORDIER, A. - Estudo Teórico-Experimental de um Sistema de Bomba de Calor com Expansão do Refrigerante em um Coletor Solar, Anais do III Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria, julho, 1988, Guanajuato, México, p. 305-313.

- [18]STOECKER, W.F. & JONES, J.W. - Refrigeração e Ar Condicionado, McGraw-Hill do Brasil, S. Paulo, 1985, 481p.
- [19]TASSOU, S.A. - Modelling of Variable Speed Air-to-Water Heat Pump Systems, Journal of the Institute of Energy, (59), June, 1982.

UM TRATAMENTO MODERNO DA SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

A MODERN TREATMENT OF THE SECOND LAW OF THERMODYNAMICS

Márcio Arab Murad

Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento
Laboratório Nacional de Computação Científica - CNPq
Rua Lauro Muller, 455
22.290 Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Rubens Sampaio Filho

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica - PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225

RESUMO

Este trabalho de revisão e críticas tem como objetivo elucidar as várias formas do segundo axioma da Termodinâmica que se encontram presentes nas respectivas versões que surgiram a partir da Termodinâmica Clássica. As diferentes formas que exprimem a segunda lei da Termodinâmica, as quais não são claramente equivalentes, surgem como decorrência da não igualdade entre as grandezas consideradas primitivas nas respectivas estruturas. Por conseguinte, torna-se interessante abordá-las com detalhes, elucidando claramente os conceitos primitivos envolvidos, mostrando suas semelhanças e diferenças como também compará-las com os princípios clássicos, os quais vêm sofrendo críticas pela sua falta de generalidade.

Palavras-chave: Teoria Clássica ■ Teorias Tipo Clausius-Duhem ■ Teorias sem Entropia à Priori ■ Termodinâmica de Processos Irreversíveis

ABSTRACT

The aim of this review is to criticize and clarify the various forms of the second axiom of Thermodynamics, presented in the correspondent versions, which came from Classical Theory. The several forms that express the second law of Thermodynamics, which are not obviously equivalent, arise from the fact that different quantities are postulated a priori in each structure. Therefore a detailed approach of them is interesting, allowing to clarify the primitive concepts involved, showing their similarities and differences, and to compare these various forms to the classical principles, criticized by their lack of generality.

Keywords: Classical Theory ■ Clausius-Duhem Theories ■ Entropy Free Thermodynamics ■ Irreversible Thermodynamics

INTRODUÇÃO

A Termodinâmica Clássica é mais apropriadamente denominada Termostática pois seu objeto de estudo, quando não tratando de sistemas físicos com mais de uma fase, é restrito a estados termodinâmicos homogêneos, em equilíbrio. Os processos são associados a caminhos no espaço de estados de dimensão finita do sistema e por esta razão recebem o nome de "quase-estáticos". Além disso, a classe de sistemas abordada nos livros de Termodinâmica Clássica é a de Sistemas Simples. Um sistema simples é qualquer sistema macroscopicamente homogêneo e isotrópico, cujas propriedades termodinâmicas não são praticamente afetadas por efeitos de tensão superficial, força de campo (elétrica, magnética e gravitacional) e cisalhamento.

Na quase totalidade dos casos abordados no contexto da Termodinâmica Clássica, quando não se trata de misturas, os sistemas são fluidos simples para os quais cada estado termodinâmico é descrito por duas variáveis. Por conseguinte, seu espaço de estados é um aberto do plano.

Com o passar dos anos houve necessidade de se desenvolverem novas teorias que abrangessem uma classe mais ampla de sistemas físicos como, por exemplo, materiais elásticos, plásticos, viscoelásticos, meios porosos, etc. Estas classes de sistemas geralmente estão sujeitas a processos não homogêneos, o mesmo podendo ocorrer com sistemas simples, em que as vezes, os processos não são uma sucessão de estados em equilíbrio, como por exemplo em Dinâmica de Gases.

O diagrama à seguir mostra as várias versões que surgiram a partir da Termostática.

A Termodinâmica de Processos Irreversíveis estende as grandezas já deduzidas na Termostática para estados vizinhos ao equilíbrio. Já a Termodinâmica Racional postula a existência de determinadas grandezas primitivas associadas mesmo à estados de não equilíbrio, introduz uma nova forma de pensar axiomatizando a sua estrutura e propõe uma forma mais geral para as equações constitutivas.

Na Termodinâmica Racional existem algumas divisões. As chamadas "Teorias sem Entropia a Priori" restringem o uso indiscriminado de conceitos tais como; entropia, energia interna e temperatura absoluta. A existência de tais conceitos deve ser demonstrada matematicamente após hipóteses constitutivas e só vale para o meio em questão. Ao contrário das "Teorias sem Entropia a Priori", entropia e energia interna, nas "Teorias tipo Clausius-Duhem" são considerados conceitos primitivos, cuja existência é aceita para qualquer meio, esteja ele em equilíbrio ou não.

Por conseguinte surgem várias formas distintas expressando a segunda lei, cada uma no contexto da respectiva estrutura desenvolvida.

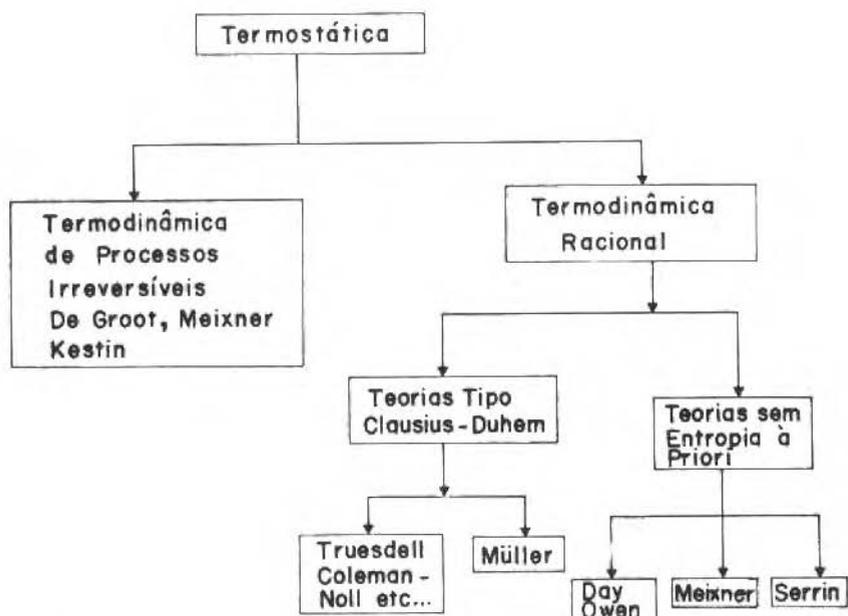


Figura 1. Versões da Termodinâmica dos Meios Contínuos que surgiram a partir da Termostática

No início do trabalho, apresentaremos os princípios que expressam o segundo axioma na Termodinâmica Clássica. Em seguida, enunciaremos a Teoria Racional, abordaremos suas divisões, exploraremos algumas conseqüências da desigualdade de Clausius-Duhem nos processos termodinâmicos valendo-se de uma hipótese de desacoplamento da função dissipação gerada por efeitos térmicos e intrínsecos, e faremos uma comparação da segunda lei nas Teorias sem Entropia a Priori, expressa para processos cíclicos na versão de Serrin, com os Princípios Clássicos. Ainda na versão de Serrin, apresentaremos uma forma forte da segunda lei conhecida como Teorema de Acumulação, válida num universo termodinâmico mais restrito de sistemas físicos que satisfaz determinadas condições de compatibilidade com um gás ideal. Os corolários desta forma serão em seguida apresentados, a saber, a conhecida desigualdade de Clausius e o Teorema da Eficiência de um Ciclo Termodinâmico.

Na última seção abordaremos as hipóteses feitas pela Termodinâmica de Processos Irreversíveis. Desenvolveremos o conceito de função dissipação à luz de exemplos

clássicos utilizando como ferramenta a equação de Gibbs que no presente contexto é estendida a partir da forma apresentada na Termostática.

TEORIA CLÁSSICA

Na teoria clássica o conteúdo da segunda lei está expresso sob duas formas distintas. A primeira, criada por Carnot, Kelvin e Clausius, baseia-se na formulação Kelvin-Planck ou em seu equivalente, o enunciado de Clausius. A segunda, introduzida por Caratheodory foi apresentada em seu axioma na primeira década do séc. XX.

O procedimento usual para se obter as conseqüências dos Princípios de Kelvin-Planck e Clausius é primeiramente definir o ciclo reversível para depois provar que todos os ciclos reversíveis que operam entre dois reservatórios possuem o mesmo rendimento que é máximo e independe do fluido de trabalho. A partir deste resultado define-se a escala Kelvin de temperatura absoluta, obtém-se a forma matemática da segunda lei conhecida como desigualdade de Clausius e a partir desta mostra-se a existência de função entropia.

Caratheodory alterou drasticamente a situação ao propor uma nova forma para a segunda lei completamente diferente das anteriores. As mesmas conseqüências obtidas através dos Princípios de Kelvin-Planck e Clausius também podiam ser deduzidas a partir da idéia da inacessibilidade por adiabáticas apresentada em seu axioma.

Apresentaremos a seguir o conteúdo dos enunciados clássicos da segunda lei e da desigualdade de Clausius.

Princípios de Kelvin-Planck e Clausius. Na realidade os princípios a serem agora apresentados são equivalentes sendo portanto uma questão de escolha a utilização de um ou outro em particular.

● *Princípio de Kelvin-Planck*

“É impossível construir um dispositivo que opere num ciclo termodinâmico e que não produza outros efeitos além do levantamento de um peso e troca de calor com um único reservatório térmico”.

● *Princípio de Clausius*

“É impossível construir um dispositivo que opere num ciclo termodinâmico e que não produza outros efeitos além da passagem de calor de um corpo frio para um corpo quente”.

Nova abordagem para os presentes princípios no contexto de uma teoria racional pertencente as "Teorias sem Entropia a Priori", será feita mais adiante neste trabalho elucidando alguns aspectos particulares dos mesmos.

Princípio de Caratheodory.

O axioma a ser agora enunciado apresenta profundas alterações com relação aos enunciados anteriores.

● *Princípio de Caratheodory*

"Nas vizinhanças de todo estado de equilíbrio de um sistema com um número qualquer de variáveis termodinâmicas, existem estados que não podem ser alcançados mediante processos adiabáticos reversíveis".

Tal como nos enunciados anteriores será dado um novo enfoque no contexto da mesma estrutura racional ao presente axioma apresentando seus aspectos particulares.

Desigualdade de Clausius. Conforme foi mencionado anteriormente, uma escala universal absoluta de temperatura é definida a partir de um corolário advindo dos princípios anteriores (ver [15]). Valendo-se desta definição, a dedução clássica da desigualdade de Clausius é procedida por intermédio do esquema a ser agora apresentado e que pode ser também encontrado em [15].

O esquema consiste em considerar um sistema que executa um processo cíclico o qual uma parte está a temperatura T , e que recebe calor de uma fonte a temperatura T_0 por meio de um motor reversível conforme a figura a seguir.

Sendo δW e $\delta W'$ respectivamente os trabalhos realizados pelo motor reversível e pelo sistema, e δQ , o calor rejeitado pelo motor e cedido ao sistema, da definição da escala de temperatura absoluta, e da primeira lei aplicada ao sistema expressa da forma:

$$\oint \delta Q = \oint \delta W' \quad (1)$$

obtemos a relação (ver [15]):

$$\delta W = \left(\frac{T_0}{T} - 1\right) \delta Q \quad (2)$$

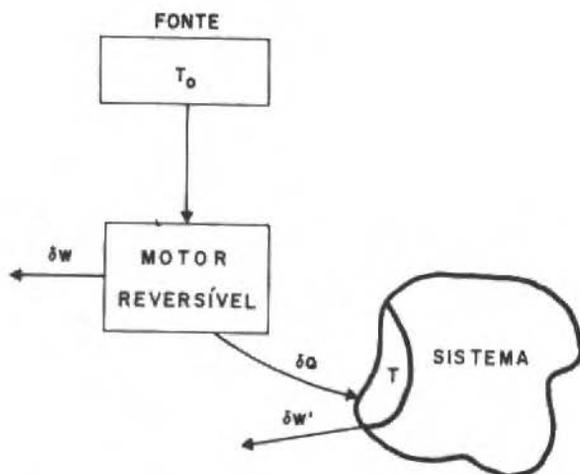


Figura 2. Esquema para a dedução clássica da desigualdade de Clausius

Considerando um novo sistema composto pelo anterior e pelo motor reversível o qual realiza um trabalho W'' temos que:

$$W'' = \oint (\delta W + \delta W'') = \oint (\delta W + \delta Q) = T_0 \oint \frac{\delta Q}{T} \quad (3)$$

Para que o processo cíclico no sistema composto não viole o princípio de Kelvin-Planck devemos ter:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (4)$$

Obtendo então a conhecida desigualdade de Clausius.

Na próxima seção também será dado um novo enfoque a presente desigualdade mostrando algumas hipóteses particulares feitas nesta dedução.

TEORIA RACIONAL

A Termodinâmica Racional assegura que a introdução de conceitos termodinâmicos no campo de corpos contínuos em movimento requer uma completa reformulação da Termodinâmica Clássica, a qual está preocupada, na maioria dos casos, com sistemas homogêneos em equilíbrio.

GERMAIN em [8] classifica os seguidores da Termodinâmica Racional como pertencentes a “escola dos audaciosos”, que querem introduzir uma verdadeira termodinâmica, uma termodinâmica racional, com a mesma característica de racionalidade encontrada na mecânica qualificada de racional.

O procedimento é axiomatizar a estrutura, postulando a existência de determinadas grandezas primitivas (o número é função da subclasse o qual a teoria pertence) associadas mesmo para estados de não equilíbrio. Esta idéia difere daquelas contidas na Termodinâmica de Processos Irreversíveis, a qual considera por exemplo, temperatura absoluta e entropia, com grandezas já deduzidas na Termostática e que podem ser estendidas para estados “próximos” ao equilíbrio. Conseqüentemente, a equação de Gibbs obtida por diferenciação da equação fundamental, numa teoria racional, deve ser demonstrada e não estendida tal como se procede nas teorias intermediárias situadas entre a visão conservadora (clássica) e a progressista (racional).

Teorias Tipo Clausius-Duhem. Temos o propósito agora de apresentar as grandezas consideradas primitivas e enunciar o segundo axioma na presente subclasse.

Denominamos β um meio contínuo que é definido como uma parte de uma variedade diferenciável isomorfa ao espaço euclidiano tridimensional (E). Os elementos do corpo β , denominados partículas, são denotadas por X' . Uma configuração (β_t) de β é um homeomorfismo x de β em E . O movimento de β é uma família uni-paramétrica de configurações x , aonde o parâmetro é o tempo, o qual pertence a um certo intervalo da reta (I). A posição da partícula X' no tempo t é dada por:

$$x: K(\beta) \times I \rightarrow E$$

$$(X, t) \rightarrow x(X, t) \quad (5)$$

aonde $K(\beta)$ é a configuração de referência ocupada pelo corpo β . Postulamos a existência de funções tais como temperatura absoluta (T), energia interna (U) e entropia (S), definidas da forma:

$$T: \beta_t \times I \rightarrow R^+$$

$$(x, t) \rightarrow T(x, t) \quad (6)$$

$$U: \beta_t \times I \rightarrow R$$

$$(x, t) \rightarrow U(x, t) \quad (7)$$

$$S: \beta_t \times I \rightarrow R$$

$$(x, t) \rightarrow S(x, t) \quad (8)$$

aonde R são os reais e R^+ os reais positivos.

Um processo termodinâmico (C) no corpo β é definido como uma coleção de funções de x e t compatíveis com as leis de momento linear e energia. São elas: movimento x , energia interna específica u , entropia específica s , temperatura T , fluxo de calor q , tensor simétrico de Cauchy T .

Definimos o espaço de estados (Σ) do corpo β como um conjunto cujos elementos são estados termodinâmicos do sistema. Para processos não homogêneos, os elementos de Σ são funções de x .

Matematicamente um processo termodinâmico pode ser representado como um caminho em Σ , parametrizado pelo tempo da forma:

$$C: I \rightarrow \Sigma$$

$$t \rightarrow (x(t), u(t), s(t), T(t), q(t), \tilde{T}(t)) \quad (9)$$

aonde s e u são as propriedades específicas associadas a S e U .

Associado ao meio contínuo β podemos definir a taxa de calor \dot{Q} e potência mecânica \dot{W} da forma:

$$\dot{Q} = - \int_{\partial\beta_t} q \cdot n \, dA + \int_{\beta_t} \rho r \, dV \quad (10)$$

$$\dot{W} = - \int_{\partial\beta_t} \tilde{T}n \cdot v \, dA + \int_{\beta_t} \rho b \cdot v \, dV \quad (11)$$

aonde V é o volume de β_t , A é a área da fronteira de β_t ($\partial\beta_t$) cuja normal é \mathbf{n} e \mathbf{V} o campo de velocidades associado ao movimento \mathbf{x} , \mathbf{b} a parcela de força de corpo específica, r a geração interna de energia por unidade de volume e ρ a massa específica.

O 1º axioma também chamado de 1ª lei da termodinâmica, impõe uma restrição sob os dois tipos de potência. Sendo E a energia total do corpo β , a qual é dada por:

$$E = U + E_c \quad (12)$$

aonde E_c é a energia cinética, podemos exprimir esta equivalência entre calor e trabalho da forma:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \quad (13)$$

A forma integral do 1º axioma é então dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\beta_t} (\rho u + \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) dV + \int_{\partial\beta_t} \rho (u + \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \\ = \int_{\beta_t} \rho (r + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}) dV + \int_{\partial\beta_t} (\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned} \quad (14)$$

Sob hipótese de regularidade das funções envolvidas, a forma pontual é então obtida valendo-se dos métodos clássicos:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \frac{du}{dt} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} + \rho r \quad (15)$$

aonde $\tilde{\mathbf{D}}$ é a parte simétrica do gradiente de velocidades.

O conteúdo do segundo axioma exprime que embora trabalho e energia possam sempre ser convertidos em calor, existe um limite para a conversão de calor em energia sem realização de trabalho. Matematicamente tal conteúdo pode ser expresso por intermédio da desigualdade:

$$\dot{Q} \leq \dot{Z} \quad (16)$$

aonde \dot{Z} representa a cota superior para a taxa \dot{Q} que é convertida em energia num processo isocórico.

Para obtermos a forma clássica do segundo axioma conhecida como forma integral da desigualdade de Clausius-Duhem, introduzimos as seguintes definições:

i) O fluxo de entropia (φ) associado ao meio β definido por:

$$\varphi = - \int_{\delta\beta_r} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA}{T} + \int_{\beta_r} \frac{\rho r dV}{T} \quad (17)$$

ii) Um fator σ , que no caso de processos homogêneos é simplesmente a temperatura absoluta do corpo β , definido por:

$$\sigma = \frac{\dot{Q}}{\varphi} \quad (18)$$

iii) A taxa de variação de entropia \dot{S} do meio β definida por:

$$\dot{S} = \frac{\dot{Z}}{\sigma} \quad (19)$$

Logo de (16), (18) e (19) obtemos que:

$$\varphi \leq \dot{S} \quad (20)$$

A desigualdade acima exprime que a taxa de variação de entropia de um meio contínuo é sempre maior ou igual que seu fluxo. Sendo \dot{S} dada por:

$$\dot{S} = \int_{\beta_r} \rho \frac{ds}{dt} dV \quad (21)$$

Então de (17), (20) e (21) a forma integral da desigualdade de Clausius-Duhem é então obtida:

$$\int_{\beta_t} \rho \frac{ds}{dt} dV \geq - \int_{\partial\beta_t} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\beta_t} \frac{\rho r dV}{T} \quad (22)$$

Sob hipótese de regularidade das funções envolvidas, a forma pontual de (22) é obtida pelo Teorema de Divergência:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (23)$$

A desigualdade acima é conhecida como forma local da desigualdade de Clausius-Duhem.

Definindo a dissipação $\dot{\sigma}$ por:

$$\dot{\sigma} = \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (24)$$

Então de (23) e (24) vem que:

$$\dot{\sigma} \geq 0 \quad (25)$$

Desigualdade de Clausius-Duhem. Temos interesse agora em enunciar algumas conseqüências de desigualdade de Clausius-Duhem. Valendo-se da forma pontual da primeira lei (15) e da relação:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} (\operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \operatorname{grad} T) \quad (26)$$

É conveniente expressá-la da forma:

$$\rho T \frac{ds}{dt} - \rho \frac{du}{dt} + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (27)$$

Definindo:

$$\dot{\sigma}_1 = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} + \rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{du}{dt} \right) \quad (28)$$

$$\dot{\sigma}_2 = - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad } T \quad (29)$$

$\dot{\sigma}_1$ é denominada dissipação intrínseca, cujo valor mede a geração de entropia advinda da natureza dissipativa do sistema, ou seja, esta é inerente ao sistema.

$\dot{\sigma}_2$ é denominada dissipação térmica. Ao contrário da dissipação intrínseca está relacionada com o processo em questão sendo que seu valor mede a geração de entropia devido a existência de gradientes de temperatura no sistema.

Uma vez que a natureza das dissipações intrínseca é térmica difere completamente entre si surge como conseqüência o desacoplamento entre as mesmas. Tal fato consiste na formulação da hipótese de Planck.

Hipótese de Planck. "Desacoplamento entre as dissipações intrínseca e térmica de um meio contínuo".

Segue como conseqüência da segunda lei e da presente hipótese que:

$$\dot{\sigma}_1 \geq 0 \quad (30)$$

$$\dot{\sigma}_2 \geq 0 \quad (31)$$

A potência da deformação ($\dot{W}d$) é definida da forma:

$$\dot{W}d = - \int_{\beta_t} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} dV \quad (32)$$

A primeira conseqüência da desigualdade de Clausius-Duhem juntamente com a hipótese de Planck é apresentada num processo aonde a potência de deformação é nula. Tal processo é denominado de deformação mecanicamente perfeita e é caracterizado pelo fato de todo trabalho realizado sobre o sistema ser convertido em energia cinética não deformando-o portanto. Para uma deformação mecanicamente perfeita vale:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (33)$$

A desigualdade de Clausius-Duhem aplicada a este tipo de processo fornece:

$$T \frac{ds}{dt} \geq \frac{du}{dt} \quad (34)$$

E para uma deformação mecanicamente perfeita iso-energética vale:

$$\frac{ds}{dt} \geq 0 \quad (35)$$

ou seja, a entropia do sistema não pode decrescer.

Em termos da energia livre de Helmholtz específica (f), a qual é definida como:

$$f = u - Ts \quad (36)$$

a desigualdade de Clausius-Duhem assume a forma:

$$\frac{df}{dt} \leq \frac{\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}}{\rho} - s \frac{dT}{dt} \quad (37)$$

Em particular para uma deformação mecanicamente perfeita isotérmica vale:

$$\frac{df}{dt} \leq 0 \quad (38)$$

ou seja, a energia livre de Helmholtz não pode aumentar.

Tomemos agora um processo isotérmico no qual a energia livre de Helmholtz seja não decrescente. Da desigualdade de Clausius-Duhem obtemos que:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (39)$$

A inequação acima mostra que os processos termodinâmicos isotérmicos em que a energia livre é não decrescente são caracterizados pela não realização de trabalho de deformação pelo sistema.

Um processo termodinamicamente admissível é definido como aquele em que as funções envolvidas que satisfazem as equações de balanço e levam em conta as

equações constitutivas verificam a desigualdade de Clausius-Duhem. Portanto uma outra consequência advinda de desigualdade de Clausius-Duhem é a sua restrição nas equações constitutivas sendo somente possíveis aquelas que enquadram o processo em questão na categoria dos admissíveis.

Teorias sem Entropia a Priori. O objetivo principal nas chamadas "Teorias sem Entropia a Priori" é o de restringir o uso indiscriminado de grandezas tais como entropia, energia interna e temperatura absoluta. A existência destas grandezas é provada mediante hipóteses constitutivas, não podendo esta ser estendida para qualquer universo termodinâmico de sistemas físicos.

Nesta seção, analisaremos a versão de Serrin, cuja forma fraca do segundo axioma, expressa através de uma desigualdade para processos cíclicos, não contém a grandeza entropia, uma vez que esta função não é postulada a priori.

Nesta estrutura, definimos o universo termodinâmico U como um conjunto cujos elementos são sistemas físicos s , aos quais podemos associar à cada elemento um conjunto de processos termodinâmicos $P(s)$. Um processo P pertencente ao subconjunto $P_c(s)$ de $P(s)$ é dito ser cíclico se não podemos distinguir os estados inicial e final do sistema.

Uma escala empírica de temperatura é definida como um mapeamento injetivo definido numa linha topológica, denominada variedade de níveis térmicos, nos reais:

$$\tau : \nu \rightarrow R$$

$$N \rightarrow \tau(N) \quad (40)$$

aonde N pertencente a variedade é um nível térmico do sistema. Sejam N_1 e N_2 dois níveis térmicos, se $N_2 > N_1$ dizemos que N_2 é "mais quente" do que N_1 .

Definimos o trabalho $W(P)$ e o calor $Q(P)$ trocados pelo sistema físico s durante o processo P como funções reais da forma:

$$W : P(S) \rightarrow R$$

$$P \rightarrow W(P) \quad (41)$$

$$Q : P(s) \rightarrow R$$

$$P \rightarrow Q(P) \quad (42)$$

A informação qualitativa da troca de calor realizada pelo sistema físico s é dada pela função de acumulação $Q(P, N)$. Esta função mede o calor trocado por níveis térmicos inferiores ou iguais a N por um sistema físico s durante o processo P :

$$Q(\cdot, \cdot) : \mathbf{P}(s) \times \nu \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P, N) \rightarrow Q(P, N) \quad (43)$$

Os níveis térmicos inferior (N_i) e superior (N_s) do sistema são definidos como os extremos do intervalo de ν aonde ocorre troca de calor, ou seja, valem as relações:

$$Q(P, N) = 0 \quad ; \quad \text{para } N < N_i$$

$$Q(P, N) = Q(P) \quad ; \quad \text{para } N \geq N_s \quad (44)$$

Um processo $P, P \in \mathbf{P}(s)$ é dito ser adiabático se $Q(P, N) = 0$, para todo $N \in \nu$.

2ª Lei para Processos Cíclicos. Enunciamos agora as leis da Termodinâmica no presente contexto.

• **1ª Lei.** Seja $P \in \mathbf{P}_c(s)$,

$$\text{se } Q(P) > 0 \quad \text{então } W(P) > 0$$

$$\text{se } Q(P) = 0 \quad \text{então } W(P) = 0$$

$$\text{se } Q(P) < 0 \quad \text{então } W(P) < 0 \quad (45)$$

É importante salientar que ao contrário da Termodinâmica Clássica, não assumimos a priori a interconvertibilidade de calor em trabalho. Entretanto, se estivermos trabalhando num universo termodinâmico mais restrito de sistemas físicos, podemos obter a forma forte da 1ª lei que se apresenta de forma semelhante ao enunciado clássico. Tal fato será elucidado mais adiante neste trabalho quando apresentarmos a classe de sistemas ideais.

• **2ª Lei.** Seja $P \in \mathbf{P}_c(s)$, P não adiabático, então existe $N_o, N_o \in \nu$, tal que:

$$Q(P, N_o) < 0 \quad (46)$$

Novos Aspectos dos Princípios de Kelvin-Planck e Clausius. Comparando esta versão da 2ª lei com os princípios de Kelvin-Planck e Clausius obtemos as seguintes versões para os referidos princípios no presente contexto.

● *Princípio de Kelvin-Planck*

“Seja $P \in P_c(s)$, então a função de acumulação não pode ser monótona não decrescente”.

Graficamente $Q(P, N)$ não pode ter o seguinte comportamento:

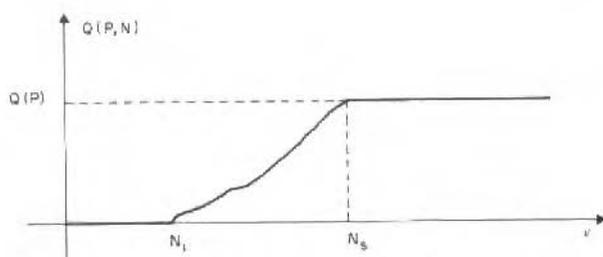


Figura 3. Comportamento da função de acumulação para um ciclo que viola o Princípio de Kelvin-Planck

Fisicamente temos um ciclo cujo fluido de trabalho recebe calor nos níveis térmicos $N_i \leq N < N_s$, aonde a função de acumulação é não decrescente, não rejeita calor, e realiza trabalho, pois $Q(P) > 0$ para $N \geq N_s$.

● *Princípio de Clausius*

“Seja $P \in P_c(s)$, então a função de acumulação não pode ter o seguinte comportamento”.

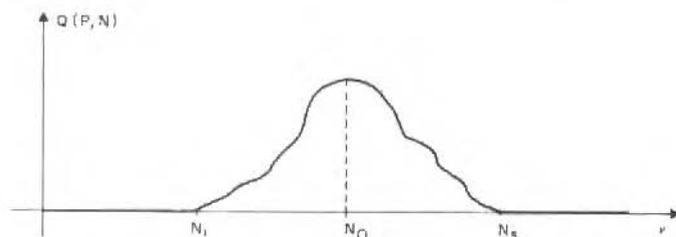


Figura 4. Comportamento da função de acumulação para um ciclo que viola o Princípio de Clausius

Fisicamente temos um ciclo cujo fluido de trabalho recebe calor nos níveis térmicos mais baixos $N_i \leq N < N_o$, aonde a função de acumulação é não decrescente, rejeita calor nos níveis térmicos mais altos $N_o \leq N < N_s$, aonde a função de acumulação é não crescente, e possui trabalho nulo, pois $Q(P) = 0$ para $N \geq N_s$.

Observamos que todo ciclo que viola um dos princípios clássicos, viola a 2ª lei dada por (46), uma vez que nas Figuras 3 e 4 não existe nenhum nível térmico na variedade topológica tal que a função de acumulação seja negativa.

Após estas comparações, é conveniente comentar que os enunciados clássicos da segunda lei vêm sofrendo críticas que são oriundas das restrições impostas pelos matemáticos a Termodinâmica Clássica. Na realidade, os princípios clássicos carecem de rigor e suficiência para descrever uma rigorosa teoria geral que explique o fenômeno de dissipação. Por exemplo, processos com geração viscosa irreversível de calor não podem ser abordados pelo contexto clássico. É por esta razão que a desigualdade de Clausius-Duhem prevalece na Mecânica do Contínuo como forma de expressar a segunda lei.

Novos Aspectos do Princípio de Caratheodory. O enunciado clássico proposto por Caratheodory também pode ser expresso no presente contexto da seguinte forma:

● *Princípio de Caratheodory*

“Considere um sistema físico s cujo comportamento pode ser descrito num espaço de estados Σ que constitui num aberto do R^n . Seja $x_o, x_o \in \Sigma$, um estado termodinâmico de s e seja $N, N \subset \Sigma$, uma vizinhança de x_o . Então existe em N um estado x tal que não existe processo adiabático que comece em x_o e termine em x ”.

Caratheodory ao alterar drasticamente a forma do segundo axioma apresenta em seu enunciado alguns aspectos particulares tais como: a suposição de que o estado termodinâmico do sistema físico possa ser representado num espaço de estados $\Sigma \subset R^n$ que por sua vez é suposto ser um espaço topológico mediante a hipótese da existência de uma “vizinhança”. Porém o erro mais grave cometido é a restrição da aplicação do seu enunciado para sistemas físicos que admitem processos reversíveis.

Em suma, a forma da segunda lei proposta por Serrin é mais abrangente do que aquelas propostas no contexto clássico uma vez que em (46) não é feita nenhuma hipótese a respeito do sistema físico em questão.

O Teorema de Acumulação. Temos o objetivo agora de enunciar uma forma forte da 2ª lei conhecida como Teorema de Acumulação, a qual é válida num universo termodinâmico mais restrito de sistemas físicos que satisfazem determinadas condições de compatibilidade com um gás ideal. Visando compreender o significado de um sistema ser "compatível" com um dado universo, enunciamos o Axioma da União a seguir.

● *O Axioma da União de Sistemas Físicos*

Conhecidos dois sistemas físicos s_1 e s_2 , ambos pertencentes a um dado universo U , dizemos que s_1 e s_2 são sistemas termodinamicamente compatíveis (a relação de compatibilidade é expressa pelo símbolo \oplus), se a estes corresponde um terceiro sistema s , notado por:

$$s = s_1 \oplus s_2$$

aonde s é denominado de união de s_1 e s_2 . Tomando um processo P_1 associado ao sistema s_1 e um processo P_2 associado ao sistema s_2 , dizemos que P é um processo associado a s , sendo P dado por:

$$P = P_1 \oplus P_2$$

Denominamos P como a união de P_1 e P_2 .

Se dois sistemas s_1 e s_2 , ambos pertencentes a um dado universo U , são sistemas termodinamicamente compatíveis então vale:

$$W(P) = W(P_1) + W(P_2) \quad (47)$$

$$Q(P) = Q(P_1) + Q(P_2) \quad (48)$$

$$Q(P, N) \leq Q(P_1, N) + Q(P_2, N) \quad (49)$$

$$Q(P, N) \geq 0 \quad \text{se} \quad Q(P_1, N) + Q(P_2, N) \geq 0 \quad (50)$$

Enunciamos agora algumas conseqüências do axioma da união.

- i) Um sistema s' é termodinamicamente compatível com um dado universo de sistemas U , se s' é termodinamicamente compatível com cada sistema pertencente a U .

- ii) Um sistema é autocompatível se ele é compatível consigo mesmo. Interpretamos a união $s \oplus s$ como o sistema cuja massa é o dobro da massa de s .

Exemplo. A Compatibilidade dos Sistemas Ideais. Visando mostrar que a condição matemática de compatibilidade entre sistemas físicos é freqüentemente utilizada pela Termodinâmica Clássica, demonstraremos que esta é satisfeita num universo termodinâmico particular de sistemas físicos; o universo dos sistemas ideais, os quais são objeto de estudo da referida teoria clássica.

Um sistema ideal é qualquer sistema macroscopicamente homogêneo e isotrópico, cujo estado termodinâmico é caracterizado pelos valores de suas propriedades para cada tempo num espaço de estados de dimensão finita. Os processos termodinâmicos são associados a caminhos no espaço de estados. Matematicamente um processo ideal pode ser descrito pelo mapeamento:

$$\begin{aligned} x: I &\rightarrow \Sigma \\ t &\rightarrow x(t) \end{aligned} \quad (51)$$

aonde I é o intervalo de tempo de duração do processo e x pode ser representado por uma n -upla de variáveis termodinâmicas x_i da forma:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

O calor e o trabalho trocados pelo sistema ideal no processo ideal P podem ser calculados através das expressões:

$$Q(P) = \int_I \dot{Q}(t) dt \quad \text{com} \quad \dot{Q}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(x(t)) \dot{x}_i \quad (52)$$

$$W(P) = \int_I \dot{W}(t) dt \quad \text{com} \quad \dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n W_i(x(t)) \dot{x}_i \quad (53)$$

aonde $\dot{Q}(t)$ e $\dot{W}(t)$ são respectivamente as taxas de calor e trabalho associadas ao processo ideal P , as quais possuem dependência linear em relação ao vetor velocidade do caminho \dot{x} , dependência esta expressa por intermédio dos coeficientes Q_i e W_i .

Portanto de posse das propriedades apresentadas, o teorema a seguir ratifica a hipótese de compatibilidade utilizada pela Termodinâmica Clássica mostrando sua validade no universo termodinâmico dos sistemas físicos ideais.

Teorema. Seja U o universo termodinâmico dos sistemas ideais, então U é compatível com um sistema físico s qualquer em U .

Prova. Sejam s_1 e s_2 sistemas de U . Temos que mostrar que existe $s = s_1 \oplus s_2$ denominado união de s_1 e s_2 , com $P = P_1 \oplus P_2$ um processo de s , aonde valem as relações:

$$W(P) = W(P_1) + W(P_2) \quad (54)$$

$$Q(P, \tau) \leq Q(P_1, \tau) + Q(P_2, \tau) \quad (55)$$

$$Q(P) = Q(P_1) + Q(P_2) \quad (56)$$

$$Q(P, \tau) \geq 0 \text{ se } Q_1(P_1, \tau) + Q_2(P_2, \tau) \geq 0 \quad (57)$$

Iremos provar (54) para os sistemas ideais. Assumimos que os intervalos de tempo associados aos processos ideais P_1 e P_2 sejam respectivamente $I_1 [t_0, t_1]$ e $I_2 [t_2, t_3]$. Existem quatro possibilidades para a interseção dos conjuntos I_1 e I_2 :

$$I_1 \cap I_2 = 0 \quad (58)$$

$$I_1 \cap I_2 \neq 0 \text{ sem que nenhum deles esteja inteiramente contido no outro} \quad (59)$$

$$I_1 \cap I_2 \text{ é não vazio e um deles contém o outro} \quad (60)$$

$$I_1 = I_2 \quad (61)$$

Supomos agora a possibilidade (58) e que sem perda de generalidade:

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned}
 W(P) &= \int_{I_1 \cup I_2} (\dot{W}_1(t) + \dot{W}_2(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{W}_1(t) + \dot{W}_2(t)) dt + \\
 &+ \int_{t_2}^{t_3} (\dot{W}_1(t) + \dot{W}_2(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n W_{i1}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}_i + \right. \\
 &\left. + \sum_{i=1}^n W_{i2}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}_i \right) dt \quad (62)
 \end{aligned}$$

aonde W_{i1} e W_{i2} são os coeficientes que surgem em (52) associados respectivamente aos processos P_1 e P_2 .

Temos que:

$$\dot{W}_1(t) = 0, \quad \text{fora de } I_1 \quad (63)$$

$$\dot{W}_2(t) = 0, \quad \text{fora de } I_2 \quad (64)$$

Então vale:

$$W(P) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n W_{i1}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}_i dt + \int_{t_2}^{t_3} \sum_{i=1}^n W_{i2}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}_i dt \quad (65)$$

Concluimos então que:

$$W(P) = W(P_1) + W(P_2) \quad (66)$$

As demonstrações das possibilidades (59), (60) e (61) serão omitidas por serem análogas.

Provaremos agora a propriedade (55) para a possibilidade (58), cada um dos intervalos I_1 e I_2 é dividido respectivamente em l e k subintervalos P_1^p e P_2^p tal que:

$$I_1 = \bigcup_{p=1}^l P_1^p \quad (67)$$

$$I_2 = \bigcup_{p=1}^k P_2^p \quad (68)$$

Definimos então os subintervalos $I_{1\tau}$ e $I_{2\tau}$ da forma:

$$I_{1\tau} = \bigcup_{p=1}^r P_1^p \quad e \quad I_{2\tau} = \bigcup_{p=1}^s P_1^p \quad (69)$$

aonde a união é tomada sobre todos os subintervalos de tempo os quais os sistemas se encontram em níveis térmicos inferiores a τ . Temos então que:

$$\begin{aligned} Q(P, \tau) = & \int_{I_{1\tau} \cup I_{2\tau}} (\dot{Q}_1(t) + \dot{Q}_2(t)) dt = \int_{\bigcup_{p=1}^r P_1^p} \sum_{i=1}^n Q_{i1}(x(t)) x_i dt + \\ & + \int_{\bigcup_{p=1}^s P_2^p} \sum_{i=1}^n Q_{i2}(x(t)) x_i dt \end{aligned} \quad (70)$$

aonde Q_{i1} e Q_{i2} são os coeficientes que surgem em (52) associados respectivamente aos processos P_1 e P_2 .

Portanto vale:

$$Q(P, \tau) = \int_{I_{1\tau}} \dot{Q}_1(t) dt + \int_{I_{2\tau}} \dot{Q}_2(t) dt \quad (71)$$

Concluimos então que:

$$Q(P, \tau) = Q(P_1, \tau) + Q(P_2, \tau) \quad (72)$$

Mostramos então que no caso de intervalos disjuntos vale a igualdade na propriedade (55). Neste caso vale (56) e tomando $\tau > \tau_s$, sendo τ_s o nível térmico superior vale também (57). A demonstração de (55), (56) e (57) quando ocorre as possibilidades (59), (60) e (61) também serão omitidas neste trabalho por serem análogas.

Temos interesse agora em apresentar as formas fortes da 1ª lei e 2ª lei conhecidas como Teorema do Calor-Trabalho e Teorema de Acumulação, os quais são válidos nos universos termodinâmicos compatíveis respectivamente com um sistema físico reversível e um gás ideal. A prova dos presentes teoremas pode ser encontrada em [6] e [30] não constituindo portanto objeto deste trabalho.

É pertinente apresentar o conceito de sistema físico reversível s_r , o qual nesta estrutura é definido por admitir uma subclasse de processos $P_r(s_r)$, $P_r(s_r) \subset P(s_r)$, a qual satisfaz a propriedade de dado $R \in P_r(s_r)$, existe $R_{rev} \in P_r(s_r)$ tal que:

$$W(R) + W(R_{rev}) = 0 \quad (73)$$

$$Q(R) + Q(R_{rev}) = 0 \quad (74)$$

aonde $W(R) \neq 0$.

Por esta definição o presente conceito é intrínseco ao sistema físico, ou seja, são as hipóteses que se fazem a respeito deste que permitem concluir a sua reversibilidade. Já na Termodinâmica Clássica este conceito possui sua definição inerente ao processo, e não ao sistema.

Enunciamos agora os referidos teoremas.

Teorema do Calor-Trabalho. Seja U um universo termodinâmico que contém um sistema físico reversível s_r . Se U é compatível com s_r então para todo $s \in U$ e qualquer $P \in P_c(s)$, existe uma constante J (a qual pode ser arbitrada igual a 1 ao ajustar-se as unidades de trabalho) aonde vale:

$$W(P) \leq JQ(P) \quad (75)$$

Em particular no universo termodinâmico dos sistemas físicos ideais vale a igualdade em (75) pois para $R \in P_c(s)$ sendo s um sistema ideal, tomamos $R_{rev} = -R$ e obtemos por intermédio do Teorema do Calor-Trabalho que:

$$W(R) \leq Q(R) \quad (76)$$

$$W(R_{rev}) \leq Q(R_{rev}) \quad (77)$$

como:

$$W(R_{rev}) = -W(R) \quad (78)$$

$$Q(R_{rev}) = -Q(R) \quad (79)$$

logo concluímos que:

$$W(R) = Q(R) \quad (80)$$

Teorema de Acumulação. Seja U um universo termodinâmico que contém um gás ideal G_I . Se U é compatível com G_I então para todo $s \in U$ e qualquer $P \in \mathcal{P}_c(s)$ existe T , denominada escala de temperatura absoluta, definida da forma:

$$\begin{aligned} T: \nu &\rightarrow R^+ \\ N &\rightarrow T(N) \end{aligned} \quad (81)$$

e vale a desigualdade:

$$\int_0^{\infty} \frac{Q(P, T)}{T^2} dT \leq 0 \quad (82)$$

Portanto é assegurada a existência de uma escala de temperatura absoluta no universo termodinâmico dos sistemas físicos compatíveis com um gás ideal.

Esta forma da segunda lei restringe a classe de processos admissíveis em relação a forma fraca, ou seja, neste universo termodinâmico de sistemas físicos processos que antes eram permitidos por (46) não serão mais.

A seguir apresentamos dois resultados conhecidos da Termodinâmica Clássica, os quais no presente contexto surgem como corolários do Teorema de Acumulação.

Novos Aspectos da Desigualdade de Clausius. Supomos que para cada processo podemos associar uma taxa de calor $\dot{Q}(t)$ tal que a função de acumulação é dada por:

$$Q(P, T) = \int_{I_T} \dot{Q}(t) dt \quad (83)$$

aonde $I_T = \{t \in I, T'(t) \leq T\}$.

Partindo do Teorema de Acumulação, aplicando (82) e o Teorema de Fuhini vem que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{Q(P, T)}{T^2} dT &= \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} \left(\int_{I_T} \dot{Q}(t) dt \right) dT = \\ &= \int_I \dot{Q}(t) \left(\int_{T(t)}^{\infty} \frac{dT}{T^2} \right) dt = \int_I \frac{\dot{Q}(t) dt}{T(t)} \leq 0 \end{aligned} \quad (84)$$

ou seja:

$$\int_I \frac{\dot{Q}(t) dt}{T(t)} \leq 0 \quad (85)$$

Elucidada claramente a hipótese de compatibilidade entre sistemas físicos expressa através do axioma da união, observamos que a dedução clássica da desigualdade de Clausius é restrita ao universo termodinâmico de sistemas físicos compatíveis com um sistema físico reversível. Esta restrição é advinda da aplicação do Princípio de Kelvin-Planck ao sistema composto pelo anterior e pelo motor reversível. A obtenção de (85) a partir do Teorema de Acumulação ratifica esta hipótese, visto que a validade do referido teorema é restrita ao universo termodinâmico dos sistemas físicos compatíveis com um gás ideal. Porém é importante salientar que o universo termodinâmico que constitui objeto de estudo da Termodinâmica Clássica, formado pelos sistemas ideais, contém um gás ideal. Tal fato assegura a injetividade da função temperatura absoluta, propriedade esta que não é obtida imediatamente a partir dos princípios clássicos (ver [33]).

Teorema da Eficiência de um Ciclo Termodinâmico. Analisemos agora sobre outro aspecto o resultado frequentemente apresentado nos livros de Termodinâmica Clássica da eficiência máxima de um ciclo termodinâmico.

As funções de acumulação de calor absorvido e rejeitado $Q^+(P, N)$ e $Q^-(P, N)$ ocorrem respectivamente nos subintervalos de tempo I^+ e I^- aonde ocorrem a absorção e rejeição de calor pelo sistema físico. Matematicamente $Q^+(\cdot, \cdot)$ e $Q^-(\cdot, \cdot)$ possuem o mesmo domínio de definição da função de acumulação $Q(\cdot, \cdot)$ e admitem as propriedades de serem estritamente positivas, monótonas não decrescentes, e para um determinado processo P satisfazem a seguinte relação em qualquer nível térmico N .

$$Q(P, N) = Q^+(P, N) - Q^-(P, N), \quad \forall N \in \nu \quad (86)$$

Sendo estas funções monótonas não decrescentes decorre que seu valor máximo é atingido para $N \geq N_s$ e os calores absorvidos e rejeitados $Q^+(P)$ e $Q^-(P)$ são dados pelas expressões:

$$Q^+(P) = \max(Q^+(P, T)) \quad (87)$$

$$Q^-(P) = \max(Q^-(P, T)) \quad (88)$$

De posse das definições apresentadas podemos definir a eficiência de um ciclo termodinâmico ($Efc(P)$) em que $W(P) > 0$ da forma:

$$Efc(P) = \frac{W(P)}{Q^+(P)} \quad (89)$$

Seja T_{\min} a maior temperatura absoluta que satisfaz $Q^-(P, T) = 0$ para $T < T_{\min}$ e T_{\max} a menor temperatura absoluta que satisfaz $Q^+(P, T) = Q^+(P)$ para $T \geq T_{\max}$ as quais não coincidem necessariamente com as temperaturas associadas aos níveis inferior e superior de calor T_i e T_s (ver Figura 5), enunciaremos agora o segundo corolário que surge a partir do Teorema de Acumulação.

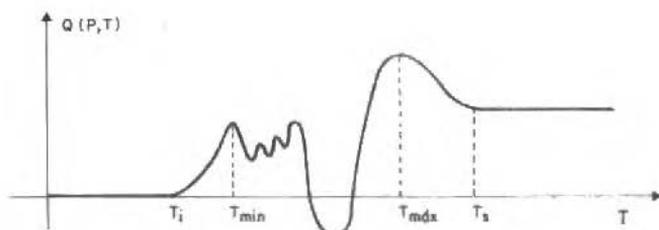


Figura 5. Comportamento da função de acumulação para um processo em que T_{\min} e T_{\max} não coincidem com as temperaturas associadas aos níveis térmicos inferior e superior T_i e T_s

Corolário. Seja $P \in P_c(s)$, aonde s pertence ao universo termodinâmico dos sistemas compatíveis com um gás ideal, com $W(P) > 0$ então vale:

$$Efc(P) \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \quad (90)$$

Prova. Partindo do Teorema de Acumulação temos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{Q(P, T) dT}{T^2} = \int_0^{\infty} \frac{Q^+(P, T) dT}{T^2} - \int_0^{\infty} \frac{Q^-(P, T) dT}{T^2} \leq 0 \quad (91)$$

Por outro lado vale:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{Q^+(P, T) dT}{T^2} &\geq \int_{T_{\max}}^{\infty} \frac{Q^+(P, T) dT}{T^2} = \int_{T_{\max}}^{\infty} \frac{Q^+(P) dT}{T^2} = \\ &= Q^+(P) \int_{T_{\max}}^{\infty} \frac{dT}{T^2} = \frac{Q^+(P)}{T_{\max}} \end{aligned} \quad (92)$$

Também:

$$\int_0^{\infty} \frac{Q^-(P, T) dT}{T^2} = \int_{T_{\min}}^{\infty} \frac{Q^-(P, T) dT}{T^2} \leq \int_{T_{\min}}^{\infty} \frac{Q^-(P) dT}{T^2} = \frac{Q^-(P)}{T_{\min}} \quad (93)$$

Logo obtemos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{Q(P, T)}{T^2} \geq \frac{Q^+(P)}{T_{\max}} - \frac{Q^-(P)}{T_{\min}} \leq 0 \quad (94)$$

$$\frac{Q^-(P)}{Q^+(P)} \geq \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \quad (95)$$

Logo concluímos da desigualdade acima, da definição de eficiência, e do Teorema do Calor-Trabalho que:

$$\begin{aligned} \text{Efc}(P) &= \frac{W(P)}{Q^+(P)} \leq \frac{Q(P)}{Q^+(P)} = \frac{Q^+(P) - Q^-(P)}{Q^+(P)} = 1 - \frac{Q^-(P)}{Q^+(P)} \leq \\ &\leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \end{aligned} \quad (96)$$

A igualdade na expressão acima é obtida nas condições em que s é um sistema ideal, aonde vale o Teorema do Calor-Trabalho na forma forte, e também $Q^+(P, T) = 0$ para $T < T_{\max}$ e $Q^-(P, T) = Q^-(P)$ para $T \geq T_{\min}$. Nesta situação impomos que a troca de calor absorvido e rejeitado pelo sistema ideal ocorra em níveis térmicos T_{\max} e T_{\min} constantes acarretando portanto a analogia do processo cíclico em questão com o ciclo de Carnot.

Obtemos então que o resultado obtido no presente contexto para a eficiência máxima de um ciclo termodinâmico em que $W(P) > 0$ coincide com o conhecido resultado clássico da eficiência máxima obtida no ciclo de Carnot que opera entre dois reservatórios a temperaturas constantes.

A seguir esboçamos o comportamento das funções de acumulação $Q^+(\cdot, \cdot)$ e $Q^-(\cdot, \cdot)$ para o processo cíclico em um sistema ideal cuja eficiência é máxima (ciclo de Carnot).

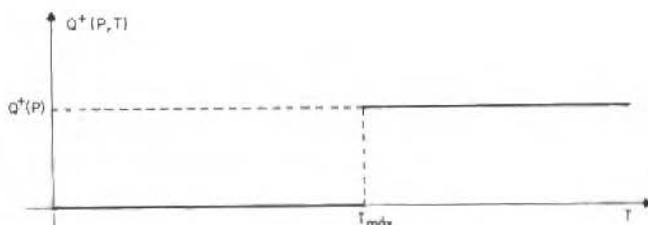


Figura 6. Comportamento da função de acumulação de calor absorvido para o ciclo de Carnot em um sistema ideal

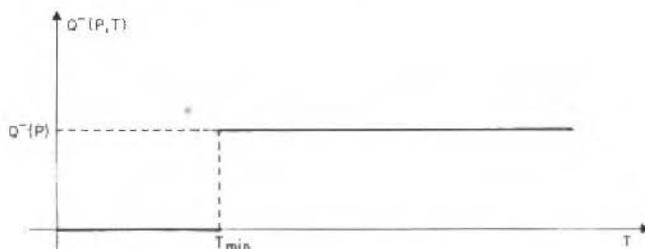


Figura 7. Comportamento da função de acumulação de calor rejeitado para o ciclo de Carnot em um sistema ideal

De maneira análoga podemos definir a eficiência de um ciclo termodinâmica de conversão ($Conv\ Efc(P)$) em que $W(P) < 0$ da forma:

$$Conv\ Efc(P) = \frac{Q^+(P)}{|W(P)|} \quad (97)$$

Sendo T_A a menor temperatura absoluta que satisfaz $\underline{Q}^+(P, T) = Q^+(P)$ para $T \geq T_A$ e T_R a maior temperatura absoluta que satisfaz $\underline{Q}^-(P, T) = 0$ para $T < T_R$, enunciaremos agora o terceiro corolário que surge a partir do Teorema de Acumulação.

Corolário. Seja $P \in \mathbf{P}_c(s)$, aonde s pertence ao universo termodinâmico dos sistemas compatíveis com um gás ideal, com $W(P) < 0$ então vale:

$$\text{Conv Efc}(P) \leq \frac{T_R}{T_R - T_A} \quad (98)$$

aonde $T_R > T_A$.

Prova. Partindo do Teorema de Acumulação, obtemos analogamente ao procedimento anterior que:

$$\frac{Q^+(P)}{Q^-(P)} \leq \frac{T_A}{T_R} \quad (99)$$

Logo decorre dos resultados anteriores que:

$$\begin{aligned} \text{Conv Efc}(P) &= \frac{Q^-(P)}{|W(P)|} \leq \frac{Q^-(P)}{|Q(P)|} = \frac{Q^-(P)}{Q^-(P) - Q^+(P)} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{Q^+(P)}{Q^-(P)}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_A}{T_R}} = \frac{T_R}{T_R - T_A} \end{aligned} \quad (100)$$

Analogamente ao caso em que $W(P) > 0$, a condição de igualdade em (98) é obtida mediante as mesmas hipóteses apresentadas anteriormente.

TERMODINÂMICA DE PROCESSOS IRREVERSÍVEIS

Kestin, que para P. Germain faz parte da “escola dos prudentes”, procurou não mudar drasticamente os conceitos introduzidos na Termodinâmica Clássica, mas introduzir certas generalizações básicas.

A Termodinâmica de Processos Irreversíveis vale-se do chamado “Axioma de Estado Local”, que consiste numa visão intermediária entre aquelas apresentadas nas versões clássica e racional. Sendo caracterizado pela sua elegância e simplicidade, seu conteúdo consiste de dois pontos fundamentais.

- i) O conceito de potencial termodinâmico é preservado sendo este expresso constitutivamente pela equação fundamental. Conseqüentemente, a equação de Gibbs prevalece, havendo porém necessidade de se introduzir um número adicional de variáveis que descrevam o comportamento do sistema, se este

possuir mecanismos dissipativos internos como é o caso, por exemplo, de materiais viscoelásticos, plásticos, etc. Tais variáveis são denominadas "Variáveis Internas de Estado" e serão discutidas mais adiante.

ii) Um novo potencial é introduzido para descrever a dissipação.

Portanto o axioma básico da presente teoria é então enunciado.

● *Axioma de Estado Local*

É possível selecionar um conjunto de variáveis $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, denominadas de variáveis normais, tal que o comportamento de um meio contínuo pode ser descrito essencialmente por duas funções reais. Um potencial termodinâmico e uma função dissipação.

O conteúdo do princípio exprime que um estado de não equilíbrio pode ser aproximado por um estado de equilíbrio descrito por $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ denominado "estado de acompanhamento". A este estado podemos associar uma entropia de acompanhamento e uma temperatura de acompanhamento cujo sentido físico será apresentado mais adiante.

É importante agora elucidar o significado físico das variáveis adicionais introduzidas. Conforme foi apresentado tais variáveis descrevem os vários mecanismos de dissipação interna no material. Tais mecanismos não participam da troca de trabalho entre o sistema e o meio, entretanto ao introduzirmos forças fictícias (A_i) , podemos associar a cada variável interna (α_i) um trabalho mecânico dissipativo δW_i dado por:

$$\delta W_i = A_i d\alpha_i \quad (101)$$

Logo a potência dissipada (\dot{W}_i) é proporcional a taxa $\dot{\alpha}_i$, a qual não é controlável por condições de contorno, sendo puramente característica do comportamento constitutivo do material.

Portanto o procedimento apresentado foi o de estender o espaço de estados num outro de dimensão maior e descrever o processo termodinâmico pelos métodos clássicos da Termostática. Sendo assim um sistema dissipativo pode sofrer um processo reversível mesmo que a sua realização na prática não seja possível.

Especificando de uma maneira mais clara as variáveis $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ que descrevem o potencial termodinâmico, temos que a equação fundamental pode ser expressa da forma:

$$u = u(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (102)$$

aonde:

- s é a entropia de acompanhamento, a qual constitui a única variável termodinâmica que contém informações a respeito do comportamento térmico do sistema. No caso desta variável ser, por exemplo, a temperatura, o potencial termodinâmico é a energia livre de Helmholtz, cuja equação fundamental pode ser obtida a partir de (102) por meio de uma transformação de Legendre.
- (x_2, \dots, x_n) são variáveis que descrevem a deformação do sistema, podendo ser, por exemplo, as componentes do gradiente de deformação \bar{F} em cada ponto.
- $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ são as variáveis internas de estado, já mencionadas que aparecem nos diversos trabalhos dissipados internamente.

Associado a equação fundamental (102) podemos obter por diferenciação a equação de Gibbs da forma:

$$du = Tds + \sum_{i=2}^n \eta_i dx_i - \sum_{i=1}^m A_i d\alpha_i \quad (103)$$

com:

$$T = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \eta_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}; \quad A_i = - \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \quad (104)$$

aonde T é a temperatura de acompanhamento, η_i a força associada a respectiva variável de deformação x_i e A_i já apresentado como força associada a respectiva variável interna de estado α_i .

Temos o objetivo agora de interpretar fisicamente as grandezas termodinâmicas inerentes ao estado de acompanhamento e de estabelecer um critério matemático que forneça informações sobre "em que sentido" um estado de acompanhamento constitui uma boa aproximação para o estado de não equilíbrio.

A caracterização física para o estado de acompanhamento pode ser obtida ao envolvermos cada elemento por uma parede rígida adiabática, que move-se com a mesma velocidade deste. Como a parede é rígida e adiabática, a energia interna e a deformação do elemento são preservadas. Introduzimos então um número m de

variáveis internas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, com respectivas forças fictícias A_1, \dots, A_m associadas, caracterizando assim os trabalhos dissipados internamente e conseqüentemente a entropia de acompanhamento, a qual pode ser expressa constitutivamente em cada elemento pela inversa da equação fundamental da forma:

$$s = s(u, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (105)$$

Para sabermos se o estado de acompanhamento obtido pelo processo adiabático isocórico está "próximo" ao estado de não equilíbrio, associamos a cada estado de não equilíbrio $k + 1$ estados de acompanhamento ($k < m$), b_i ($i = 0, \dots, k$) cujo potencial termodinâmico u juntamente com a deformação x_i permanecem constantes devido a natureza do processo, e as equações fundamentais associadas são:

$$\begin{aligned} u &= u(s_k, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k), \quad \text{para } b_k \\ u &= u(s_{k-1}, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}), \quad \text{para } b_{k-1} \\ u &= u(s_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1), \quad \text{para } b_1 \\ u &= u(s_0, x_2, \dots, x_n), \quad \text{para } b_0 \end{aligned} \quad (106)$$

Definimos o tempo de relaxação s_i associado a variável α_i da forma:

$$s_i = \alpha_i \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \right)^{-1} \quad (107)$$

aonde t é o tempo de duração do processo isocórico adiabático em questão.

Podemos associar o tempo de relaxação τ_i dado por (107) ao estado b_i mediante uma escolha ordenada das variáveis internas de tal forma que:

$$\tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_{k-1} > \tau_k \quad (108)$$

Portanto no processo adiabático isocórico, o estado b_i é alcançado pelo elemento após o tempo de relaxação τ_i . Devido a ocorrência dos mecanismos de dissipação

os valores da entropia de acompanhamento aumentam a medida que o tempo passa e o estado termodinâmico do elemento caminha de b_k a b_0 . A figura a seguir exemplifica o que foi afirmado.

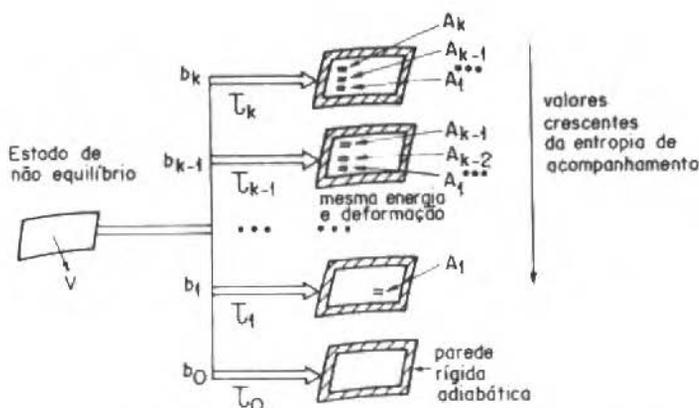


Figura 8. Seqüência de estados de acompanhamento em equilíbrio com mesma energia e deformação, e com diferentes tempos de relaxação, obtidos a partir do estado de não-equilíbrio por intermédio de um processo adiabático isocórico

Como temos que:

$$s_k < s_{k-1} < \dots < s_1 < s_0$$

Logo os processos adiabáticos fictícios que levam:

$$b_k \rightarrow b_{k-1}$$

$$b_{k-1} \rightarrow b_{k-2}$$

⋮

$$b_2 \rightarrow b_1$$

$$b_1 \rightarrow b_0$$

são irreversíveis. Por fim a seqüência de temperaturas de acompanhamento é então obtida através das expressões:

$$T_i = \frac{\partial u(s_i, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)}{\partial s_i} \quad (109)$$

Portanto um sentido físico pode ser atribuído a temperatura T_i associada ao estado de acompanhamento b_i . Esta seria medida no elemento após o tempo de relaxação τ_i contado a partir do início do processo termodinâmico fictício adiabático isocórico.

Estamos aptos a compreender agora o significado de "distância do equilíbrio". Na moderna literatura de Termodinâmica de Processos Irreversíveis encontram-se frases tais como "estados de não equilíbrio que estão longe do "ou perto do" equilíbrio. Tais frases carecem de sentido ao menos que o estado de equilíbrio seja adequadamente definido. Para atender a este objetivo definimos o tempo de relaxação τ_m associado a evolução cinemática e dinâmica do sistema da forma:

$$\tau_m = \min \left(a \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \right) \quad (110)$$

aonde a é uma variável externa que descreve o potencial fundamental (por exemplo deformação). Neste sentido um estado termodinâmico de não equilíbrio está "perto do equilíbrio" de um estado de acompanhamento em equilíbrio b_i se:

$$\tau_m \gg \tau_{i+1} \quad (111)$$

Logo a seqüência de estados de acompanhamento b_0, b_1, \dots, b_k aproxima o estado de não-equilíbrio.

A equação fundamental (102) juntamente com o conhecimento da dependência constitutiva para a dissipação $\dot{\sigma}$ caracterizam o sistema. É suposto que $\dot{\sigma}$ é da forma:

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^L X_i(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, Y_1, \dots, Y_L) Y_i \quad (112)$$

aonde Y_i são variáveis de "fluxo" (fluxo de calor, derivada temporal das componentes do gradiente de deformação, derivada temporal das variáveis internas

de estado) e X_i são variáveis de "força" (gradiente de temperatura, componentes do tensor de Cauchy, forças fictícias associadas as variáveis internas).

Portanto o conhecimento das variáveis $(s, x_2, \dots, x_n, \alpha, \dots, \alpha_m, Y_1, \dots, Y_L)$ caracterizam completamente o sistema através do conhecimento do potencial fundamental e da dissipação.

Grandezas expressas através das equações de estado obtidas por derivação da equação fundamental tais como temperatura, pressão, tensão num material elástico, são determinadas unicamente pelo estado atual do sistema, o qual é descrito por $(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Entretanto as grandezas X_i dependem de taxas. O conhecimento das equações $X_i = X_i(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, Y_1, \dots, Y_L)$, denominadas equações complementares, completam a caracterização do sistema.

Adotando as relações complementares de ONSAGER-CASIMIR (ver [10]), supomos dependência linear com relação as variáveis Y_i :

$$X_i = \sum_{j=1}^n L_{ij}(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) Y_j \quad (113)$$

aonde L_{ij} é uma matriz simétrica.

Logo a dissipação é dada por:

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_{ij}(s, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) Y_j Y_i \quad (114)$$

Conhecidos o estado atual do sistema é possível introduzir um potencial de dissipação $D(Y_1, \dots, Y_n)$ satisfazendo as condições de convexidade definido por:

$$D(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_{ij} Y_j Y_i \quad (115)$$

aonde num processo termodinâmico real as grandezas X_i associadas a um dado Y sejam um subgradiente de φ , ou seja:

$$X_i = \frac{\partial \varphi}{\partial Y_i} \quad (116)$$

Como nesta teoria podemos associar a um elemento de um meio contínuo uma entropia de acompanhamento, conseqüentemente a segunda lei fica expressa em função desta grandeza sob a forma da desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\dot{\sigma} = \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho T}{T} \geq 0 \quad (117)$$

uma primeira conseqüência oriunda de (114) e (117) é que a matriz L_{ij} é semi-positiva definida.

Outra forma da desigualdade de Clausius-Duhem pode ser obtida no presente contexto. Como postulamos a equação de Gibbs associada ao estado de acompanhamento, podemos combiná-la com (27) para obtermos:

$$\dot{\sigma} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \rho \left(- \sum_{i=2}^n \eta_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^m A_i \dot{\alpha}_i \right) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (118)$$

Portanto, neste contexto as dissipações intrínsecas e térmica são dadas por:

$$\dot{\sigma}_1 = \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \rho \left(- \sum_{i=2}^n \eta_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^m A_i \dot{\alpha}_i \right) \quad (119)$$

$$\dot{\sigma}_2 = - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (120)$$

Exemplos. Apresentamos agora algumas situações aonde o sistema físico apresenta um determinado comportamento constitutivo e os conceitos apresentados nesta versão podem ser ilustrados.

1) *Fluido Simples*

Um fluido simples, o qual constitui objeto de estudo da Termodinâmica Clássica, é um meio contínuo aonde a equação fundamental é descrita a duas variáveis da forma:

$$u = u(s, v) \quad (121)$$

aonde v é o volume específico o qual constitui a variável de deformação do sistema.

Os mecanismos de dissipação interna associados as variáveis internas de estado são ausentes em um fluido simples. Também não existe dissipação térmica devido a ausência de gradientes de temperatura, fato este advindo da propriedade de infinita condutividade térmica do meio.

A equação de estado para o tensor de Cauchy é da forma:

$$\tilde{\mathbf{T}} = -p \tilde{\mathbf{I}} \quad (122)$$

E a equação complementar pode ser expressa da forma:

$$\tilde{\mathbf{T}}^v = 0 \quad (123)$$

aonde $\tilde{\mathbf{T}}^v$ é a parte viscosa do tensor de Cauchy.

Associado a equação fundamental (121), temos a equação de Gibbs expressa da forma:

$$du = Tds - pdv \quad (124)$$

aonde vale:

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_v \quad e \quad -p = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s \quad (125)$$

Portanto a partir das hipóteses feitas para um fluido simples e das expressões (119) e (120) para as dissipações intrínseca e térmica temos que:

$$\dot{\sigma}_2 = 0 \quad (126)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} + \rho p \dot{v} = \text{tr}(-p \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{D}}) - \frac{\rho \dot{p}}{\rho} = -p (\text{div } \mathbf{V} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}) = 0 \quad (127)$$

aonde $\dot{\rho} + \rho \text{div } \mathbf{V} = 0$ é a forma pontual da equação da continuidade.

Decorre portanto que para um fluido simples vale:

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (128)$$

ou seja, para processos termodinâmicos regulares aonde vale as forças pontuais das equações de balanço, a variação de entropia de um fluido simples é balanceada pelo fluxo de calor q e pela geração interna r .

2) Fluido Newtoniano

Um fluido Newtoniano é caracterizado por possuir a mesma equação fundamental associada a um fluido simples, porém diferente equação complementar para o tensor de Cauchy. Sua condutividade térmica é finita podendo assim ocorrer gradientes de temperatura e conseqüentemente dissipação térmica.

Sendo a parte reversível (não viscosa) do tensor de Cauchy dada por (122), a equação complementar para a parte viscosa é:

$$\tilde{T}^v = (\lambda \text{tr} \tilde{D}) \tilde{I} + 2\mu \tilde{D} \quad (129)$$

aonde λ e μ são os dois índices de viscosidade.

Decorre de (119) e (129) que a dissipação intrínseca é dada por:

$$\dot{\sigma}_1 = \lambda (\text{tr} \tilde{D})^2 + 2\mu \text{tr} (\tilde{D}^2) \quad (130)$$

Para um fluido Newtoniano incompressível temos que pela equação da continuidade:

$$\text{tr} \tilde{D} = \text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (131)$$

Logo a dissipação intrínseca é dada por:

$$\dot{\sigma}_1 = 2\mu \text{tr} (\tilde{D}^2) \quad (132)$$

3) Meio Rígido

Um meio rígido é caracterizado por sua deformação ser nula. Sendo este intrinsecamente não dissipativo, logo na ausência de variáveis de deformação e internas de estado sua equação fundamental é descrita somente a uma variável, podendo ser a temperatura. Portanto temos que:

$$u = u(T) \quad (133)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (134)$$

A variável de fluxo constitutiva neste caso é o fluxo de calor, cuja equação complementar que descreve seu transporte é a lei de Fourier:

$$\mathbf{q} = -\tilde{\mathbf{K}} \text{grad } T \quad (135)$$

aonde \mathbf{K} é o tensor condutividade térmica.

De (119), (120), (133), (134) e (135) obtemos que as dissipações intrínseca e térmica valem:

$$\dot{\sigma}_1 = 0 \quad (136)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{1}{T} \tilde{\mathbf{K}} \text{grad } T \cdot \text{grad } T \quad (137)$$

Como a dissipação térmica é não negativa vem que:

$$\tilde{\mathbf{K}} \text{grad } T \cdot \text{grad } T \geq 0 \quad (138)$$

ou seja o operador linear condutividade térmica quando aplicado ao vetor gradiente de temperatura não pode girá-lo de um ângulo obtuso.

Se o meio for isotrópico vale:

$$\tilde{\mathbf{K}} = K\mathbf{I} \quad (139)$$

aonde K é a condutividade térmica, no caso um escalar associado a cada material.

Portanto a dissipação térmica para um meio rígido isotrópico é dada por:

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{K}{T} \|\text{grad } T\|^2 = \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{KT} \quad (140)$$

Restrições impostas pela segunda lei acarretam:

$$K \geq 0 \quad (141)$$

4) Meio Hiperelástico

Um meio hiperelástico é caracterizado pelo tensor de Cauchy ser derivado de um potencial termodinâmico, e o seu estado mecânico ser puramente descrito pela sua deformação, não havendo necessidade portanto de se introduzir variáveis internas de estado.

Portanto a equação fundamental pode ser expressa da forma:

$$u = u(s, \tilde{\epsilon}) \quad (142)$$

aonde $\tilde{\epsilon}$ é o tensor de Green-St. Vennant.

A equação de Gibbs associada a equação fundamental (142) assume a forma:

$$du = Tds + \frac{\partial u}{\partial \tilde{\epsilon}} \cdot d\tilde{\epsilon} \quad (143)$$

sendo que restrições impostas pela desigualdade de Clausius-Duhem nas equações constitutivas implicam que (ver [1]):

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\epsilon}} \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (144)$$

aonde $\tilde{\mathbf{F}}$ é o gradiente de deformação.

Portanto em termos de tensor de Cauchy, a equação de Gibbs pode ser escrita da forma:

$$du = Tds + \frac{\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot d\tilde{\epsilon}}{\rho} \quad (145)$$

Valendo-se da relação:

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} \quad (146)$$

Logo a dissipação intrínseca é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} = \\ &= \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} = 0\end{aligned}\quad (147)$$

concluimos então que na ausência de gradientes de temperatura, um meio hiperelástico é intrinsecamente não dissipativo.

Sendo \mathbf{u} o campo de deslocamentos associado ao movimento, vale a relação:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{I}} + \text{grad } \mathbf{u} \quad (148)$$

sob a hipótese de pequenas deformações, substituindo (147) em (145) e linearizando, obtemos a equação de Gibbs da forma:

$$du = T ds + \frac{\tilde{\mathbf{T}} \cdot d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\rho} \quad (149)$$

Temos agora o interesse em obter uma equação de estado para o tensor de Cauchy num processo mecânico (temperatura constante) em um material hiperelástico isotrópico. O potencial termodinâmico adequado para este caso é a energia livre de Helmholtz, o qual é obtido por intermédio de uma transformação de Legendre de (142) (ver [3], [6]), e é descrito localmente pela equação fundamental:

$$f = f(T, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (150)$$

De maneira análoga aquela utilizada para a obtenção de (144), restrições termodinâmicas impostas pela desigualdade de Clausius-Duhem implicam que (ver [1]):

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (151)$$

Em materiais hiperelásticos isotrópicos, para $f = f(\cdot, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ ser uma função isotrópica devemos ter (ver [11]):

$$f = f(T, I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon) \quad (152)$$

onde $I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon$ são os três invariantes de $\tilde{\varepsilon}$ dados por:

$$I_\varepsilon = \text{tr } \tilde{\varepsilon} \quad (153)$$

$$II_\varepsilon = \frac{1}{2} ((\text{tr } \tilde{\varepsilon})^2 - \text{tr } (\tilde{\varepsilon}^2)) \quad (154)$$

$$III_\varepsilon = \det \tilde{\varepsilon} \quad (155)$$

Portanto o tensor de Cauchy é dado por:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \tilde{\mathbf{F}} \left(\frac{\partial f}{\partial I_\varepsilon} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial II_\varepsilon} \frac{\partial II_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial III_\varepsilon} \frac{\partial III_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right) \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (156)$$

o que acarreta por meio das relações:

$$\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{I}} \quad (157)$$

$$\frac{\partial II_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} = (\text{tr } \tilde{\varepsilon}) \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\varepsilon} \quad (158)$$

$$\frac{\partial III_\varepsilon}{\partial \tilde{\varepsilon}} = (\det \tilde{\varepsilon}) \tilde{\varepsilon}^{-1} \quad (159)$$

a equação de estado:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \left(\frac{III_\varepsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial III_\varepsilon} \tilde{\mathbf{I}} + \left(\frac{\partial f}{\partial I_\varepsilon} + \left(I_\varepsilon + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial II_\varepsilon} - \frac{III_\varepsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial III_\varepsilon} \right) \tilde{\mathbf{B}} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial III_\varepsilon} \tilde{\mathbf{B}}^2 \right) \quad (160)$$

A equação complementar neste caso se reduz a:

$$\tilde{\mathbf{T}}^v = 0 \quad (161)$$

No caso de um material hiperelástico linear, na ausência de efeitos térmicos a equação de estado para o tensor de Cauchy é:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (162)$$

aonde $\tilde{\mathbf{C}}$ é um tensor de 4ª ordem. Neste caso, sob hipótese de pequenas deformações, de (151) e (162) o potencial termodinâmico f é dado por:

$$f = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (163)$$

Sob a hipótese de isotropia a equação de estado (162) é simplificada para (ver [1]):

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\lambda \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (164)$$

aonde λ e μ são as constantes de Lamé.

MEIO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT

O meio viscoelástico de Kelvin-Voigt pode ser modelado como sendo constituído em cada ponto por uma mola ligada em paralelo com um amortecedor, os quais representam respectivamente a parte elástica e viscosa do tensor de Cauchy.

Seu estado mecânico é inteiramente descrito pela deformação (e sua derivada) sendo que no caso linear as equações de estado e complementar são dadas respectivamente por:

$$(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{T}}^v) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (165)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}^v = \tilde{\mathbf{G}} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (166)$$

aonde $\tilde{\mathbf{G}}$ é um tensor de 4ª ordem.

Neste caso sob a hipótese de pequenas deformações o potencial f ainda é dado por (163) e a dissipação intrínseca vale:

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (167)$$

MEIO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL

O meio viscoelástico de Maxwell pode ser modelado como sendo constituído em cada ponto por uma mola ligada em série com um amortecedor, os quais representam respectivamente a parte elástica e viscosa do tensor de Cauchy. Como a ligação é em série, não exercemos controle sob a deformação viscosa mediante condições de contorno. Portanto, neste caso, há necessidade de introduzirmos uma variável interna $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ da mesma natureza da deformação $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

As equações de estado e complementar são:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{C}} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (168)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} \quad (169)$$

aonde $\tilde{\mathbf{M}}$ é um tensor de 4ª ordem.

E os potenciais termodinâmicos são:

$$f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \cdot (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (170)$$

$$\dot{\sigma}_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} \quad (171)$$

CONCLUSÕES

O objetivo principal das versões pertencentes as chamadas "Teorias sem Entropia a Priori" é o de minimizar o número de grandezas consideradas primitivas. Sendo

assim, a forma do segundo axioma nestas estruturas apresenta maior generalidade pois não houve necessidade de se postular a existência de grandezas tais como entropia e energia interna. Tal fato não se aplica às "Teorias Tipo Clausius-Duhem", que postulam a existência dessas funções e apresentam a segunda lei através da desigualdade de Clausius-Duhem, cujo conteúdo exprime, basicamente, a existência de uma fonte não negativa de entropia denominada dissipação.

A Termodinâmica de Processos Irreversíveis consiste numa posição intermediária entre a Termodinâmica Clássica e a Racional. Para descrever estados "perto" do equilíbrio esta utiliza a desigualdade de Clausius-Duhem, como base de análise e vale-se, ainda, do "Axioma de Estado Local", que preserva o conceito de potencial fundamental introduzido na Termostática, aumentando porém a dimensão do espaço de estados em cada ponto do sistema mediante a introdução de um número adicional de variáveis internas. Conseqüentemente a equação de Gibbs é estendida para a nova situação.

Um outro potencial termodinâmico é introduzido para fornecer informações sobre a dissipação em cada ponto do sistema. O conhecimento de um determinado número de variáveis normais que caracterizem constitutivamente os dois potenciais, fornecem informações completas a respeito deste.

Com relação a teoria clássica ao introduzirmos a versão de Serrin enfocamos alguns aspectos particulares dos Princípios de Kelvin-Planck, Clausius e Caratheodory. Os dois primeiros, carecem de generalidade suficiente para descrever com abrangência processos com dissipação interna. Esta classe de processos pode ser descrita com extrema eficácia empregando-se a segunda lei sob a forma da desigualdade de Clausius-Duhem. Com relação ao terceiro Princípio Clássico, proposto por Caratheodory, este ao representar o sistema num espaço de estados topológico de dimensão finita e ao associar o processo termodinâmico a um caminho em $\Sigma \subset R^n$, restringe o seu axioma para o universo termodinâmico dos sistemas físicos reversíveis. A forma (46) proposta por Serrin, não impõe tais condições possuindo esta portanto, suficiente abrangência e generalidade para expressar o segundo axioma.

Com relação a desigualdade de Clausius apresentamos uma generalização desta, válida no universo termodinâmico dos sistemas físicos compatíveis com um gás ideal, conhecida como Teorema de Acumulação. É de vital importância salientar aqui que as deduções da presente desigualdade, encontradas nos livros de Termodinâmica Clássica como, por exemplo, a apresentada por KEENNAN [15], valem-se da hipótese de compatibilidade entre sistemas físicos fato este não elucidado claramente pelos autores.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação Alexandre von Humboldt enquanto o segundo autor estava como professor visitante na Universidade de Augsburg.

REFERÊNCIAS

- [1] BILLINGTON, E.W. & TATE, A. - The Physics of Deformation and Flow, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [2] BRIDGMAN, P.W. - The Nature of Thermodynamics, Harvard University Press, 1941.
- [3] CALLEN, H.B. - Thermodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [4] CHANDRASEKHAR, S. - An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover, New York, 1967.
- [5] COOPER, J.L.B. - The Foundations of Thermodynamics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 17, pp. 172-193, 1967.
- [6] FONSECA, A.J. - Uma Estrutura Axiomática para a Termodinâmica Clássica e Aplicações, Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1984.
- [7] GERMAIN, P. - Cours de Mécanique des Milieux Continus, Masson-Cre, Paris, 1973.
- [8] GERMAIN, P. - Thermodynamique des Milieux Continus, Entropie, vol. 55, pp. 7-14, 1974.
- [9] GERMAIN, P.; NGUYEN, Q.S. & SUQUET, P. - Continuum Thermodynamics, Journal of Applied Mechanics, vol. 105, pp. 1010-1020, 1983.
- [10] GROOT, S.R. & MAZUR, P. - Non-equilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [11] GURTIN, M.E. - An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York, 1981.
- [12] GYARMATY, I. - Non-equilibrium Thermodynamics, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [13] HAYWOOD, R.W. - Equilibrium Thermodynamics, Wiley-Chichester, 1980.
- [14] HUTTER, K. - The Foundations of Thermodynamics, Its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics, Acta Mechanica, vol. 27, pp. 1-54, 1977.
- [15] KEENNAN, J.H. - Thermodynamics, John Wiley & Sons, London, 1947.
- [16] KESTIN, J. - The Second Law of Thermodynamics, Dowdwn, Hutchinson & Ross Inc., 1976.
- [17] KESTIN, J. - A Course in Thermodynamics, vol. II, Blaisdell, New York, 1968.
- [18] KESTIN, J. & BATAILLE, J. - L'Interpretacion Physique de la Thermodynamique Rationnelle, Journal de Mécanique, vol. 14, n^o 2, pp. 364-383, 1975.
- [19] KESTIN, J. & BATAILLE, J. - Thermodynamics of Solids, Continuum Models of Discrete Systems, university of Waterloo Press, J. Provan, 1980.
- [20] LIU, I.S. - Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Inequality, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 46, pp. 131, 1972.
- [21] MANDEL, J. - Variables Chachées Puissance Dissipée Dissipativité Normale, Sciences et Techniques de L'Armement, 4^o fascicule, pp. 525-537, 1979.
- [22] MÜLLER, I. - Entropy in Non-equilibrium - A Challenge to Mathematicians, Trends in Applications of Pure Mathématiques of Mechanics, vol. 2, pp. 281-295, 1977.
- [23] MUNSTER, A. - Classical Thermodynamics, Wiley, Interscience, London, 1970.
- [24] MURAD, M.A. - As Várias Faces da Termodinâmica dos Meios Contínuos e Aplicações, Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1986.
- [25] OWEN, D.R. - An Introduction to the Mathematical Foundations of Thermodynamics, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [26] REYNOLDS, W.C. - Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [27] SAMPAIO, R. - Introdução a Termomecânica dos Meios Contínuos, Mini-curso, IX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC, 1986.
- [28] SCHMIDT, E. - Thermodynamics, Oxford University Press, London, 1949.

- [29] SEARS, F.W. - *Thermodynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1959.
- [30] SERRIN, J. - *Conceptual Analysis of the Classical Second Law of Thermodynamics*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 70, pp. 355-371, 1979.
- [31] SERRIN, J. - *Lectures on Mathematical Thermodynamics*, University of Minnesota, 1982.
- [32] SERRIN, J. - *New Perspectives in Thermodynamics*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [33] TRUESDELL, C.A. - *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [34] WHAPLES, G. - *Caratheodory's Temperature Equation*, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 1, pp. 301-307, 1952.
- [35] ZEMANSKY, M.W. - *Heat and Thermodynamics*, 5th Edition, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, 1968.

UM PIRANÔMETRO PORTÁTIL COM SENSORES TERMORRESISTIVOS

A PORTABLE PYRANOMETER WITH THERMALRESISTIVE SENSORS

Maria G.V. Sesso

Departamento de Engenharia Química
Universidade Federal de Uberlândia
Rua Duque de Caxias, 285 - Caixa Postal 593
38.400 Uberlândia, MG - Brasil

Lutero Carmo de Lima

Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Duque de Caxias, 285 - Caixa Postal 593
Universidade Federal de Uberlândia
38.400 Uberlândia, MG - Brasil

RESUMO

Um piranômetro portátil, com sensores termorresistivos não convencionais, é apresentado e analisado. Relações teóricas são derivadas para descrever a operação do instrumento e comparadas com respostas experimentais. Características como resposta cosseno, azimute e de inclinação, efeito de temperatura ambiente, linearidade e resolução foram investigadas. Os resultados estão dentro daqueles esperados pelo Centro Mundial de Radiação.

Palavras-chave: Piranômetro ■ Medição de Radiação Solar ■ Sensores Termorresistivos

ABSTRACT

A portable pyranometer with non conventional thermoresistive sensors is presented and analyzed. Theoretical relationships are derived to describe the instrument operation and compared with experimental responses. Characteristics such cosine, azimuth, tilting and ambient temperature effects, linearity and resolution were investigated. The results are within the agreement expected by the World Radiation Center.

Keywords: Pyranometer ■ Solar Radiation Measurements ■ Thermalresistive Sensors

INTRODUÇÃO

A partir da constatação de que a importação de uma quantidade apreciável de piranômetros (instrumentos para medir radiação solar global), para atender a necessidade de se tê-los para a efetiva caracterização de qualquer dispositivo que utiliza energia solar e também para diluir a crescente demanda de uma infinidade de postos meteorológicos espalhados pelo território nacional, pesquisadores têm-se esforçado no sentido de manufaturar piranômetros com especificações, as mais próximas dos importados, com redução de custos. O problema principal para a manufatura de um piranômetro é essencialmente o sensor, pois os piranômetros já consagrados no mercado internacional têm sensores constituídos de termopilhas as quais exigem equipamentos e condições especiais para fabricação, não obstante pesquisadores em alguns institutos nacionais [1] já possuïrem condições para produzi-los.

A proposta do presente estudo é apresentar o protótipo de um piranômetro portátil, desenvolvido por SESSO [2], com sensores do tipo termorresistivo, série ETG-50B, produzidos pela Micro-Measurements, Romulus, Michigan-USA, disponíveis no mercado nacional, piranômetro este, cujo lay-out é mostrado na Figura 1, devidamente calibrado, equacionado e avaliado em todas as características preconizadas pelo Centro Mundial de Radiação.

O instrumento, que em seu exterior é constituído de um cilindro de alumínio pintado de branco de 15 cm de diâmetro por 13 cm de altura, acomodando o sensor solar e uma cúpula em seu interior, apresenta um circuito simples (conforme Figura 2) em ponte com outro sensor funcionando como compensador, sendo alimentado por uma bateria comum de 9V.

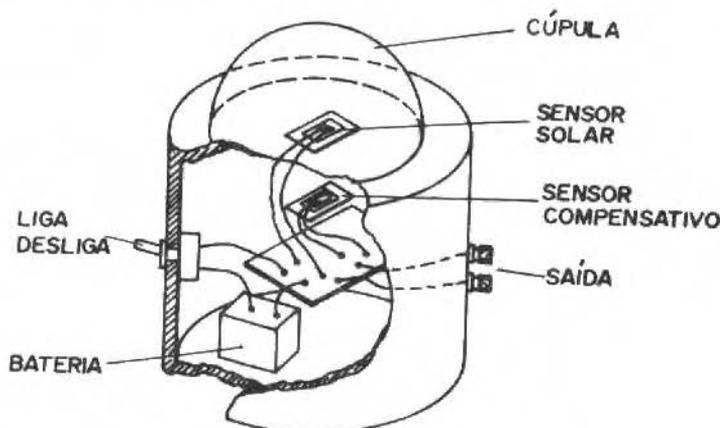


Figura 1. Detalhes do piranômetro proposto

TEORIA DE OPERAÇÃO

Feitas as considerações próprias da primeira da lei da termodinâmica e considerando que a energia dissipada no elemento sensor solar é praticamente desprezível em relação à energia solar absorvida, temos:

$$(\tau\alpha)_s HA_s - U_s A_s (t_s - t_a) - C_s \frac{d}{d\theta} (t_s - t_a) = 0 \quad (1)$$

sendo A a área do sensor no plano de medida, C capacidade térmica do sensor, U coeficiente global de troca térmica entre o sensor e o ambiente, H intensidade da radiação solar incidente, t temperatura do sensor, τ transmissividade da cúpula, α absorvidade da tinta preta fosca no sensor, θ tempo, t_s temperatura do sensor solar e t_a temperatura ambiente.

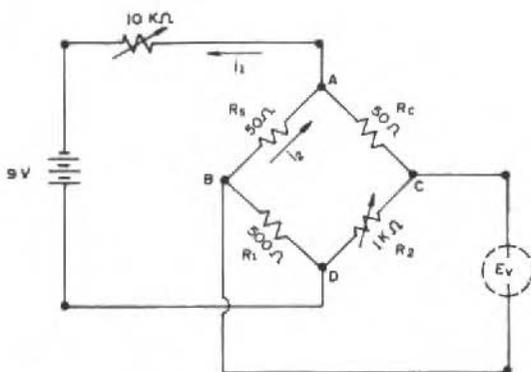


Figura 2. Esquema elétrico do instrumento

Denotando a resistência do elemento sensor por R_s , tem-se:

$$R_s = R_{sa} [1 + \beta (t_s - t_a)] \quad (2)$$

sendo β o coeficiente térmico de resistência do sensor solar e R_{sa} sua resistência à temperatura ambiente. Denotando por E_v a voltagem de desbalanceamento da ponte, pela Figura 2, tem-se:

$$E_v = E \left[\frac{R_s}{R_s + R_1} - \frac{R_c}{R_c + R_2} \right] \quad (3)$$

sendo E a voltagem aplicada na ponte, R_s o sensor solar, R_1 o resistor adjacente a R_s , R_c o sensor de compensação e R_2 o resistor adjacente a R_c na ponte.

Utilizando-se da equação (2) para cada um dos sensores as suas temperaturas explicitadas serão:

$$t_s - t_a = \frac{R_s - R_{sa}}{R_{sa} \beta_s} \quad e \quad (4)$$

$$t_c - t_a = \frac{R_c - R_{ca}}{R_{ca} \beta_s} \quad (5)$$

Considerando-se o uso de sensores selecionados de um mesmo lote, fixados em substrato do mesmo material com a mesma geometria e admitindo-se que a temperatura ambiente permaneça constante no instante da medição, pode-se supor que:

$$R_c \approx R_{ca} \approx R_{sa} \quad (6)$$

$$R_c + R_2 \approx R_s + R_1 \quad e \quad (7)$$

$$\beta_c \approx \beta_s \quad (8)$$

Aplicando a equação (7) na equação (3) e as equações (3) e (4) na equação (1), pela consideração de que a voltagem E aplicada à ponte seja constante, obtém-se a equação diferencial característica do piranômetro em estudo, relacionando a voltagem de saída da ponte E_v , com a intensidade de radiação solar incidente H , representada pela seguinte expressão:

$$\frac{dE_v}{d\theta} + \frac{U_s A_s}{C_s} E_v = \frac{(\tau\alpha)_s A_s \beta_s E R_{sa}}{C_s (R_c + R_2)} H \quad (9)$$

com T , a constante de tempo do sensor, na forma:

$$T = \frac{C_s}{U_s A_s} = \frac{M_s c_p}{U_s A_s} \quad (10)$$

sendo M_s a sua massa e c_p o seu calor específico.

A sensibilidade estática do piranômetro é definida como:

$$K_1 = \frac{(\tau\alpha)_s R_{sa} \beta_s E}{U_s (R_c + R_2)} \quad (11)$$

Como em todos os outros radiômetros, a sensibilidade aumenta com o produto da transmissividade τ da cúpula pela absorvidade da tinta preta α do sensor solar. A combinação de valores maiores de resistência para os detectores, coeficiente térmico, níveis maiores de tensão, assim como valores menores de resistências compensativas, também contribuem para o aumento da sensibilidade embora limitante quanto ao coeficiente global de troca térmica, pois o seu aumento provoca maior rapidez de resposta do instrumento entretanto menor sensibilidade.

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E RESULTADOS

Conforme LIMA e MONTEIRO [3], com exceção do fator de calibração todas as outras características foram realizadas em laboratório, usando uma fonte de energia artificial, uma montagem para calibração angular e um sistema computacional para aquisição de dados, conforme SESSO [2].

Para se determinar o tempo de resposta e constante de tempo, o procedimento foi, por diversas vezes, submeter o instrumento à radiação de 900 W/m^2 , com intervalo de aquisição de sinais de 0,5 segundo entre as leituras. A Figura 3 apresenta as relações entre sinal e tempo de resposta para as condições de aquecimento e resfriamento.

Para a fase de aquecimento a constante de tempo T foi de 17,75s e o tempo de resposta T_R de 88,75s contra o valor calculado para T de 16,76s, apresentando um erro relativo de 5,9%. Pelo CMR - Centro Mundial de Radiação, neste quesito, este piranômetro enquadra-se na classificação de 1ª classe.

A Figura 4 apresenta a resposta cosseno do piranômetro. Entende-se por resposta cosseno a correspondência entre o sinal produzido pelo piranômetro com a lei de Lambert em função da variação do ângulo de incidência da radiação.

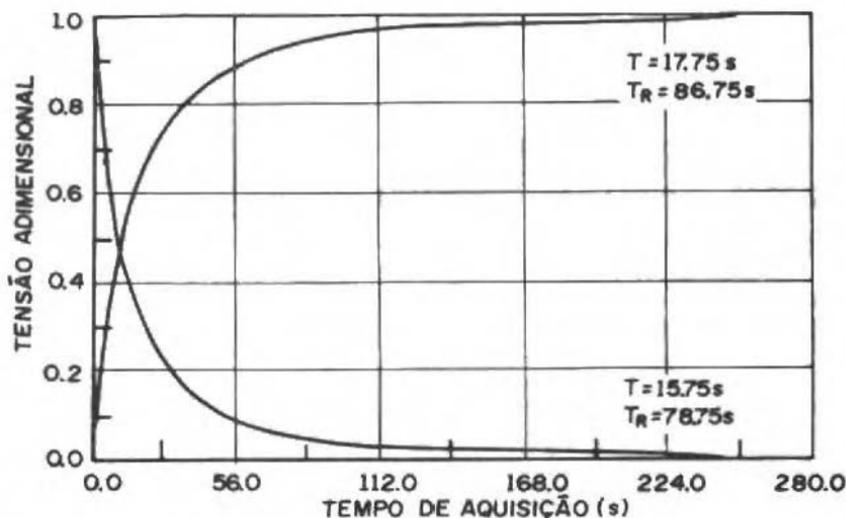


Figura 3. Tempo de resposta

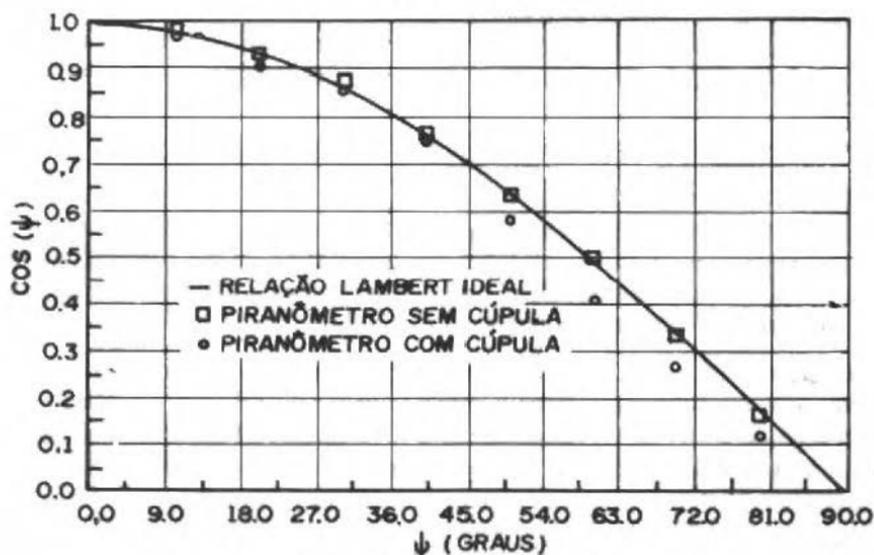


Figura 4. Resposta cosseno

Em concordância com a análise de muitos pesquisadores [2], o piranômetro proposto também apresentou desvios mais significativos a partir de 60° , atingindo um máximo de -18% para o ângulo zenital de 80° . Entre outros fatores, destaca-se a influência da não-homogeneidade da cúpula usada, pois, em condições especiais de controle e sem a cúpula o desvio reduz-se para -5%.

A Figura 5 apresenta a resposta azimute no piranômetro. Neste caso, a dependência da resposta dos piranômetros com o azimute da fonte de radiação torna-se relativamente acentuada principalmente em grandes ângulos de incidência. A descontinuidade superficial da cúpula e o posicionamento do sensor, geralmente, são os fatores responsáveis pelos maiores desvios apresentados. Para inclinação de 10° da fonte ao plano do sensor, em passos de 10° , os desvios mais acentuados estiveram entre 11 e 17% do valor esperado, correspondendo exatamente à posição dos terminais de contato do sensor solar.

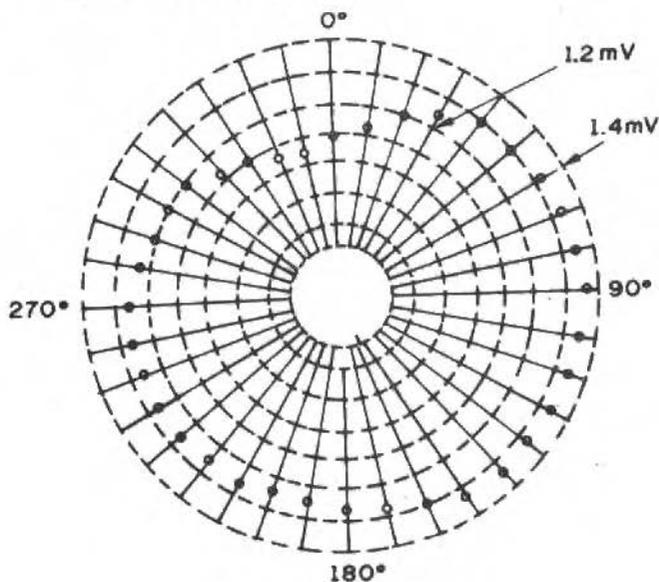


Figura 5. Resposta azimute

Devido às possíveis mudanças de fluxos convectivos no interior da cúpula de alguns piranômetros, tem-se observado variações da sensibilidade desses medidores quando operados com sensores inclinados. A Figura 6 apresenta o efeito de inclinação no piranômetro ora em estudo.

Desvios máximos aproximados de 3% demonstram a pequena variação da sensibilidade do piranômetro proposto, em relação à inclinação do sensor.

A dependência, algumas vezes significativa, da sensibilidade em relação à temperatura do instrumento, tem sido observada até mesmo em alguns piranômetros comerciais. Este tipo de erro torna-se mais pronunciado em piranômetros com princípios de funcionamento à base de termojunções. Desta forma monitorou-se o sinal do instrumento para uma radiação aproximada de 750 W/m^2 , na faixa de -10°C à 40°C , conforme se vê na Figura 7.

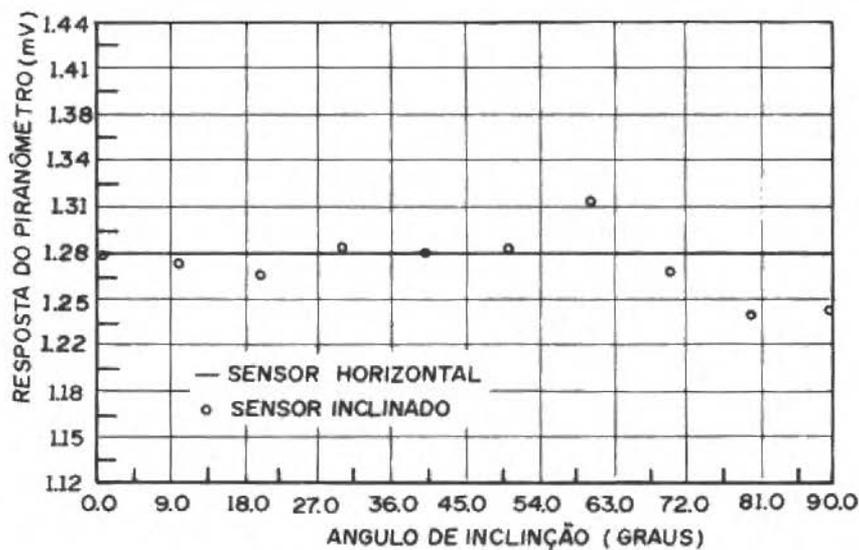


Figura 6. Efeito inclinação no piranômetro

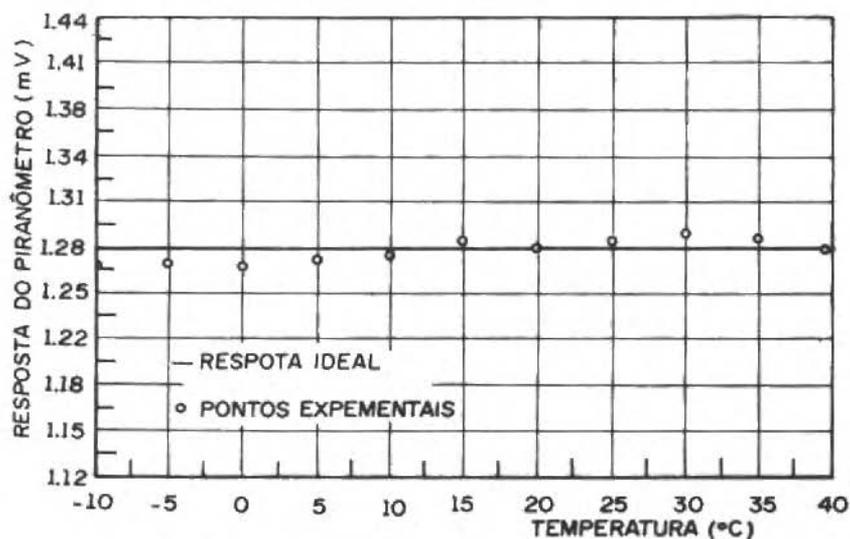


Figura 7. Efeito da temperatura ambiente

Observa-se pelos dados apresentados que o piranômetro proposto não apresenta variações significativas de sensibilidade com a temperatura ambiente, em condições de regime permanente para cada medida, justamente porque no seu projeto foi previsto um sensor para promover a compensação desse efeito.

A sensibilidade estática e a linearidade foram obtidas de ensaios realizados tanto em laboratório quanto em campo, na comparação com sinais gerados fornecidos por um piranômetro PSP da Eppley, conforme se depreende das Figuras 8 e 9.

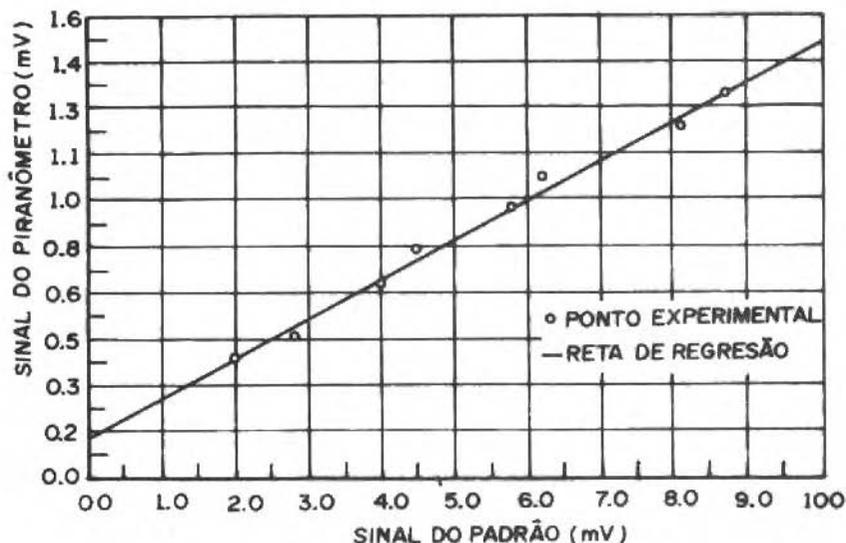


Figura 8. Calibração do piranômetro em laboratório

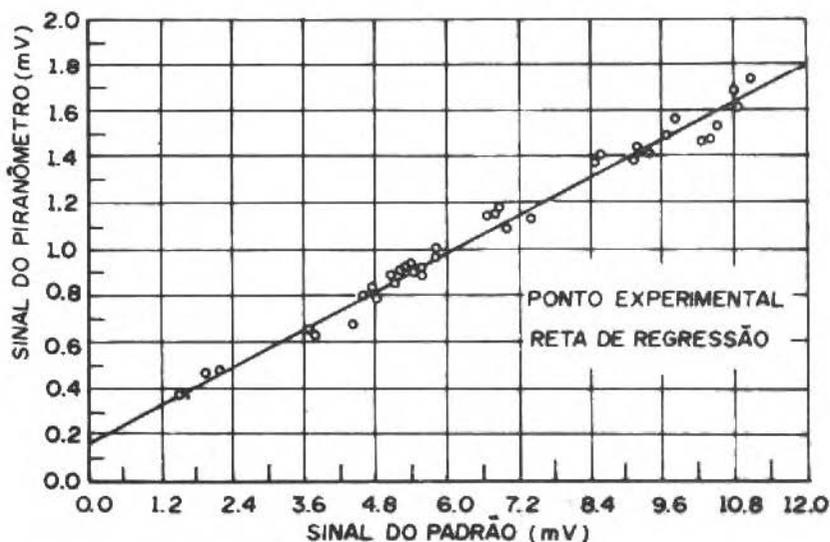


Figura 9. Calibração do piranômetro em campo

Os fatores de calibração do instrumento para os ensaios em laboratório foi de $1,46 \times 10^{-6} \text{ V/M} \cdot \text{m}^{-2}$ e para os ensaios de campo foi de $1,43 \times 10^{-6} \text{ V/W} \cdot \text{m}^{-2}$, com erros prováveis de $\pm 2\%$ e $\pm 3\%$, em fundo de escala, respectivamente. Estas sensibilidades acusam uma diferença média de 15% em relação àquelas preditas teoricamente pela equação (6). Através de análise estatística foi permitido determinar o desvio de linearidade máximo inferior à 1% e a resolução em torno de 7% quando o milivôltagem usado adquire sinais com resolução em $10 \mu\text{V}$.

CONCLUSÕES

A validade do modelo teórico para o piranômetro proposto foi confirmada pelos pequenos erros relativos apresentados pelos valores experimentais da constante de tempo e da sensibilidade estática, considerando-se que as incertezas das medições primárias dos parâmetros usados nesses cálculos teóricos não foram computadas. A alteração da sensibilidade do piranômetro com a queda de tensão no terminal da bateria ao longo do tempo de uso é um dos inconvenientes apresentados pelo medidor, entretanto de um modo geral o instrumento proposto satisfaz a maioria dos requisitos exigidos pelo Centro Mundial de Radiação.

Uma estimativa superficial do custo do piranômetro foi realizada obtendo-se um resultado final de aproximadamente US\$ 50,00 por unidade.

As propostas de aperfeiçoamento se concentrariam na substituição da sua cúpula, no aumento de sua sensibilidade, no ajustamento de sua voltagem de saída para ser precisamente zero quando nenhuma radiação fosse incidente e na possibilidade de transformá-lo num instrumento digital, proporcionando leitura direta da radiação solar.

REFERÊNCIAS

- [1] ESCOBEDO, J.F.; PASSOS, E.F. e VIEIRA, A.C. - Construção de Termopilhas para Radiômetros Solares e de Lasers, II Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT 88, Águas de Lindóia, SP, pp. 113-116, 1988.
- [2] SESSO, M.G.V. - Desenvolvimento de um Piranômetro Portátil com Sensores Termorresistivos, Dissertação de Mestrado, Engenharia Mecânica, UFU-MG, Uberlândia, 1989.

- [3] LIMA, L.C. e MONTEIRO, F.C. - Procedimento para Avaliação das Características de um Piranômetro Compensado, *Ciência e Cultura*, 39(3): 313-315, 1987.
- [4] LIMA, L.C. e LOBO, P.C. - Um Piranômetro de Compensação Elétrica, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, Anais do COBEM 87, pp. 259-262, 1987.
- [5] LIMA, L.C. and LOBO, P.C. - An Electrical Compensated Pyranometer with Plane Sensors, First International Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Dubrovnik, Iugoslávia, pp. 392-396, 1988.

FLOW FIELD INSIDE TURBINE-TYPE FLOWMETER

ESCOAMENTO NO INTERIOR DE MEDIDORES DE FLUXO TIPO TURBINADOS

Vilson C. da S. Ferreira

UFRGS - Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Prof. Sarmiento Leite, 425
90.050 Porto Alegre, RS - Brasil

Richard A. Furness

SGS - Moore, Barret & Redwood Ltd.
Cheshire - UK

ABSTRACT

The flow field inside a turbine meter was investigated using Laser Doppler Velocimetry (LDV). Many axial and circumferential velocity profiles have been taken at inlet, in the blade passage and at the outlet of helical and straight bladed turbine flowmeters. An Argon-ion laser in a back scatter arrangement, a synchronization measuring system and signal processing equipment were used to measure two components of velocity. The measured velocity distributions at various positions are shown and the operating behaviour of both types of flowmeters is discussed.

Keywords: Turbine type flowmeters ■ Turbine meter

RESUMO

O escoamento no interior de uma turbina de medição foi investigado usando-se Laser Doppler Velocimetria (LDV). Diversos perfis de velocidade, axial e circunferencial, foram medidos na região de entrada, no interior da passagem entre pás e na região de saída de medidores turbinados com pás tipo helicoidal e tipo reta. Um sistema de laser ion Argônio numa montagem tipo reflexão de sinal (back scatter), um sistema de sincronização de medição e um equipamento de processamento de sinal foram empregados para medirem-se duas componentes de velocidade. As distribuições de velocidade em vários pontos de medição são aqui apresentadas e se discute o comportamento operacional dos dois tipos de turbinas analisados.

Palavras-chave: Medidores turbinados ■ Turbinas de medição

NOMENCLATURE

I_1, I_0	- Laser beam intensity
$N, N(\varphi)$	- Number of samples
r	- Radial coordinate
R_0	- Internal radius of the pipe
TI_j	- Turbulence intensity
U^*	- Friction velocity Ref. [6]
u_j'	- Fluctuating component of velocity
V_j	- Mean velocity
V_z, V_φ	- Axial and circumferential component (absolute)
W_z, W_φ	- Axial and circumferential component of velocity related to the blades
SV_z, SV_φ	- Standard deviation of the velocity
STI_z, STI_φ	- Standard deviation of the turbulence intensity
y	- Distance from the wall ($R_0 - r$)
z	- Axial coordinate
$\alpha(r)$	- Flow directional angle
$\beta(r)$	- Blade angle
φ	- Circumferential coordinate
$\theta/2$	- Half laser beam angle
ν	- Fluid kinematic viscosity
ω	- Rotational speed

INTRODUCTION

The commercial turbine flowmeter appeared in the late 30's with the main application being in airborne fuel flow measurement [1]. Before that, many attempts were made to measure local fluid velocity using an earlier version, called "propeller current-meter" [2].

It is a common knowledge that it was the aerospace industry development at the beginning of the World War II, that made possible for turbine meter to become a widespread instrument. Since then its use in many different sorts of applications has increased.

Soon after turbine meter appearance the necessity for improvements became apparent. The early turbine meters acquired a reputation for limited life [1]. Initially, steady development followed more from the technological point of view than in terms of physical understanding.

The first significant improvement was related to the bearing performance. Long bearing life was required for an accurate continuous flow measurement. This achievement was accomplished by the combination of new design and new materials. Sleeve bearings plus thrust ball shafts, made from hard materials like tungsten-carbide, chromium and stellite was one of the solutions employed. Very soon long life plus tolerance to dirty flows were characteristics easily achieved for most of the turbine meters available on the market.

New designs introduced straight bladed rotors as opposed to the traditional helical one. The aim was to allow an easier and more precise manufacturing process with reduction of the rotor inertia. The benefits were apparent, high production, low cost and better time response for transient phenomena.

Modern improvements have been directed towards a better pickup, more durable materials and incorporation of microelectronics for signal processing.

With the advance of the electronics in flow metering processes, the fluid-dynamics inside the meter passage has become less significant. However, it is important to emphasize that the meter's primary characteristic comes from the interaction between the flow and the mechanics inside the meter. The electronics transforms the primary signal, speeding up the flow information and allowing more versatile operation. But success is only achieved if a good quality signal is input to the electronic processor.

A deep knowledge of the flow behaviour inside the meter can certainly provide good information for a better product. This is in fact one of the main goals of present work.

TEST RIG AND EQUIPMENT

A Laser Doppler Velocimeter (LDV) was used for the measurements. This is a non-intrusive instrument which can reach points inside the blade passage, with a very fast response necessary to measure a periodical movement imposed by the rotating blades.

The internal flow field was defined by three components of the velocity vector, the axial (V_z), the circumferential (V_φ) and the radial one (V_r). Only two components were measured, the axial and the circumferential. The radial component, apart from the natural difficulties in measuring it inside the blade passage, was expected to have very small values.

Measuring the inlet and outlet region, away from the rotor, where the flow can be considered axisymmetric, that is $V_z = f(z, r)$ and $V_\varphi = f(z, r)$, it does not require sophisticated equipment. A simple forward scatter laser system can be satisfactorily adopted. However when measuring the flow field in the blade-to-blade passage, additional complexity arises. Now the rotor and the blades themselves obstruct the laser path. A powerful laser source in a backscatter arrangement must be used. Moreover, inside the rotor passage the flow can no longer be considered axisymmetric. It is expected that the velocity vector be a function of the circumferential coordinate φ . This coordinate is defined in a frame of reference which rotates with the blades. Therefore, it will be necessary to have a synchronization measuring system (SMS) to provide the new coordinate.

Experimental measurements were carried out in a especial rig designed to run a 2" diameter turbine flowmeter. The water circuit consisted of a radial pump, two sump tanks, a reference turbine meter (type A) and a test section. Many other accessories such as suction filters, valves by-pass and flowstraightener were used to condition and control the flow through the test section. Fig. 1 shows the layout of the test rig.

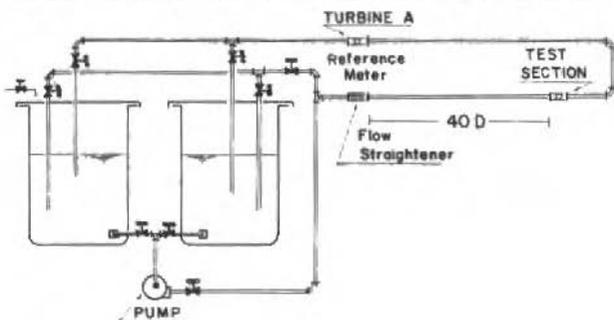


Figure 1. Layout of the test rig

The measurement equipment consisted of a LEXEL 10 W Argon-Ion laser source, operating at 514.5 nm green wavelength, transmitting and receiving optics and a signal processing system. The transmitting optics polarize and split the incoming laser beam in two parallel beams of equal path and intensity and 50 mm apart. The frequency of each parallel beam is then shifted to overcome one of the most common difficulties faced in laser velocimetry: the signal ambiguity due to the reverse flow. Two acousto-optic modulators, one for each laser beam, were used. The output from the modulators consists of the first two order $\pm I_1$ diffracted beams and the zero order non-diffracted beam I_0 . All the three outgoing beams are physically apart and can be easily isolated one from each other. Each cell can be rotated and fixed in a proper position so that it is possible to produce an intensity maximum in only one of $+I_1$, $-I_1$ or I_0 . Each modulator cell has a separate radio frequency power supply, driven at 40 MHz and at 37.6 MHz. A binary combination between the output of the two modulators can give four useful frequency shifts of 2.4 MHz, 37.6 MHz, 40 MHz and 77.6 MHz. In the present work, due to the relative low velocity, the 2.4 MHz shift frequency was always used. Figure 2(a,b) shows the physical arrangement of the equipment. More about the equipment and the operation can be found in GOULAS and al. [3] and FERREIRA [4].

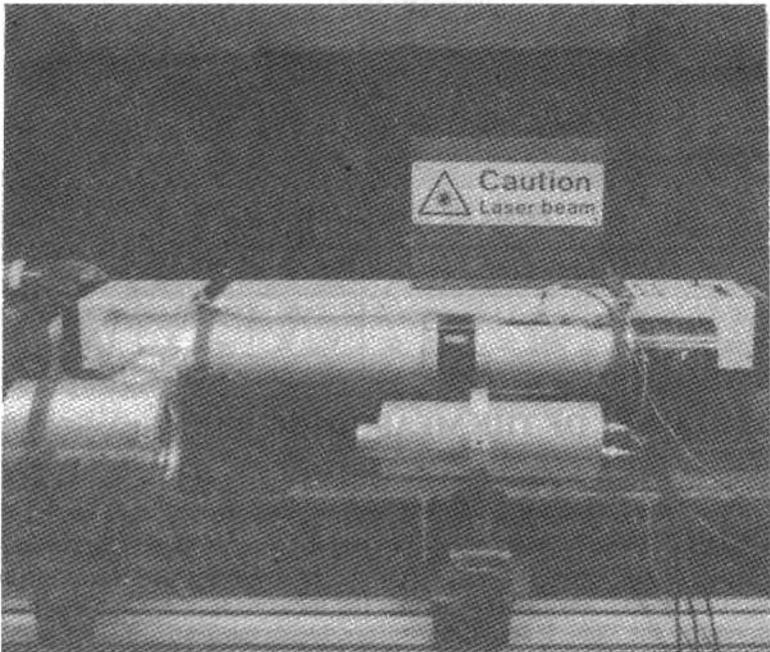


Figure 2a. Laser source, transmitting and receiving equipment

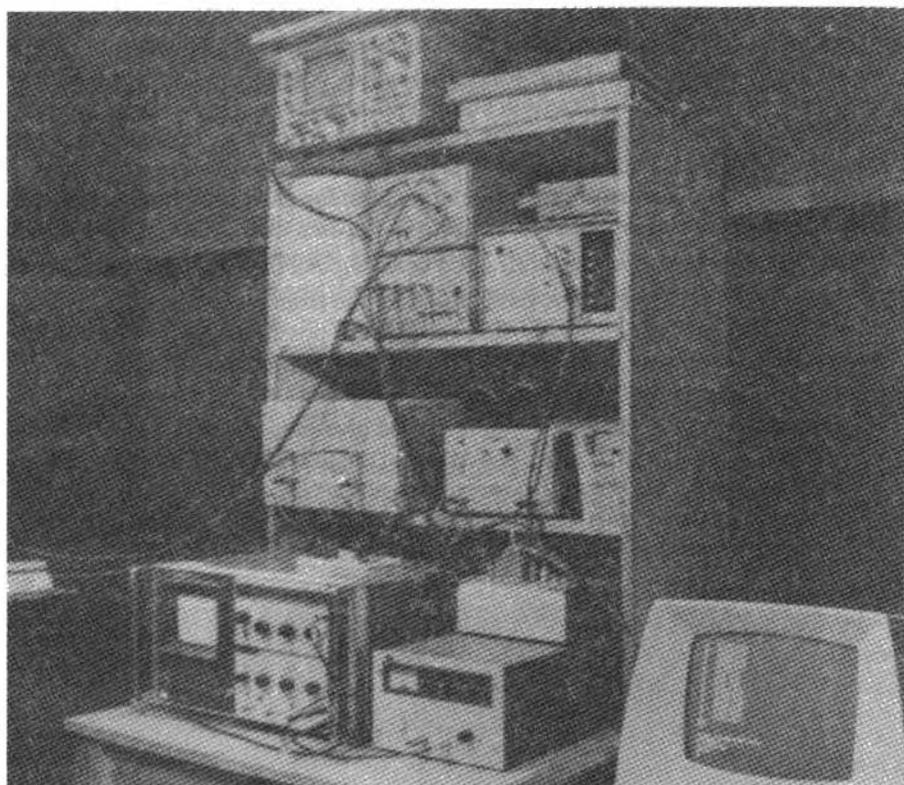


Figure 2b. Electronic equipment

UNCERTAINTY OF THE MEASUREMENTS

The laser source and the transmitting and receiving optics were mounted on an indexing table which allows movements along the three axes x , y and z (Figure 3). Because of the changes in the refractive index along the laser beam path (air-perspex-water), any distance due to the movement of the table in air do not correspond to the same length in the water. Using geometrical relationships and optical principles of the light (reflection and refraction laws), any point in the flow is related to the main coordinate system fixed on the laser table.

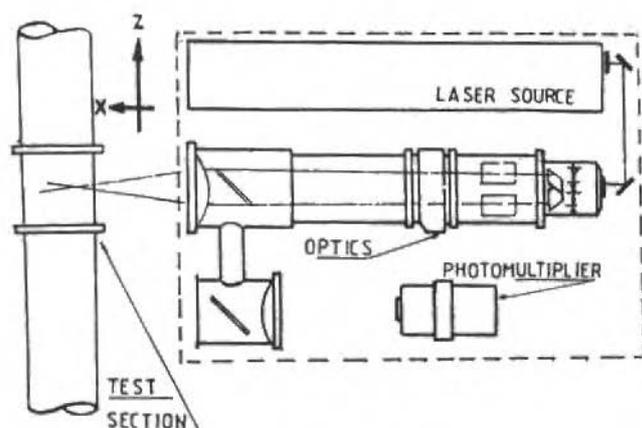


Figure 3. Indexing table and test section

Two sets of linear equations were numerically solved for the axial and circumferential measurements. In order to evaluate the uncertainty of the measurements the "propagation theory" [5] was applied to these equations. Table 1 summarizes maximum values for the uncertainties obtained.

Table 1. Maximum values for the uncertainty - Coordinates of measuring point

Axial				Circumferential			
x (mm)	y (mm)	z (mm)	$\theta/2$	x (mm)	y (mm)	z (mm)	$\theta/2$
$\pm .594$	$\pm .133$	$\pm .054$	$\pm .169$	$\pm .706$	$\pm .186$	$\pm .060$	$\pm .306$

where $\theta/2$ is half the angle between two laser beams.

The maximum absolute uncertainties of $\pm .151$ m/s for axial component and $\pm .02$ m/s for circumferential component were calculated. The uncertainty analysis included effects of misalignment, drift of the electronic equipments and the uncertainty of the reference meter. This section is only a brief summary of the large amount of analysis performed to achieve an estimate of the experimental errors. A full analysis of the uncertainties can be seen in Ref. [4].

TESTED TURBINES

Four different 2" diameter turbine meters were used for measurement purpose: two helical blade shape, defined as type B and C and two straight blade, defined as type D and E. All turbine meters have the same flowrate range and can perfectly fit inside the same test section using the same supports. Table 2 shows the main geometrical characteristics.

Table 2. Characteristics of the turbine meters

Characteristic	Turbine B (helical)	Turbine C (helical)	Turbine D (straight)	Turbine E (straight)
Nº Blades	10	10	10	10
Blade thickness (mm)	.6 to 1.3	.6 to 1.3	.5	.5
Blade angle (degree)	20.5/40.3	20.5/40.3	30	30
Tip radius (mm)	22.25	22.25	22.21	22.21
Hub radius (mm)	9.75	9.75	9.75	9.75
Hub length (mm)	15.6	15.6	15.4	15.4
Outer meter radius (mm)	22.65	22.65	22.65	22.65
Helical pitch (mm)	164.4	164.4	—	—
Chamfered angle	30°	30°	30°	0°
	(inlet)	(inlet)	(inlet)	—

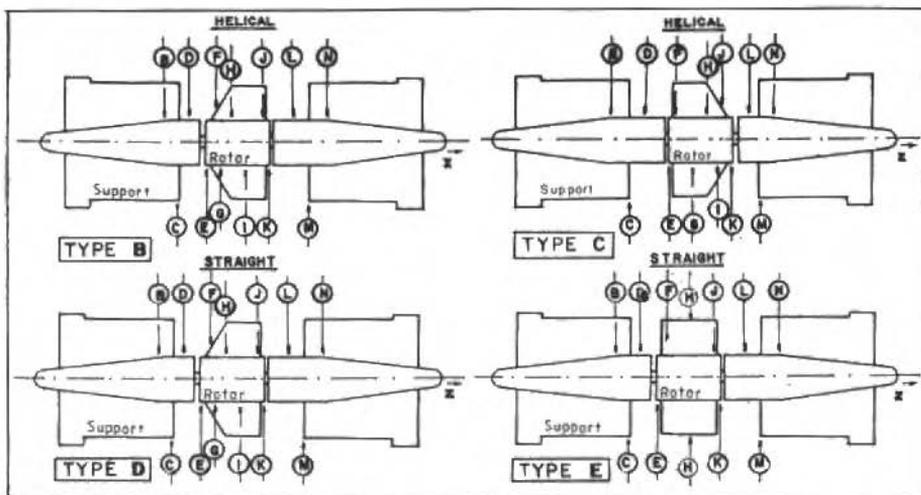


Figure 4. Measured stations and test points

Several radial planes of measurement (stations) were chosen along the test section defined by z -coordinate. Figure 4 shows these planes for each turbine meter and Figure 5 the test section where the rotors were assembled. At each station two profiles of velocity were taken. Every single profile comprised a maximum of 12 points from hub to tip. Two different flowrates, both in the linear range of the calibration curve, were tested: flowrate 2 of $6 \text{ m}^3/\text{h}$ and flowrate 2 of $20 \text{ m}^3/\text{h}$.

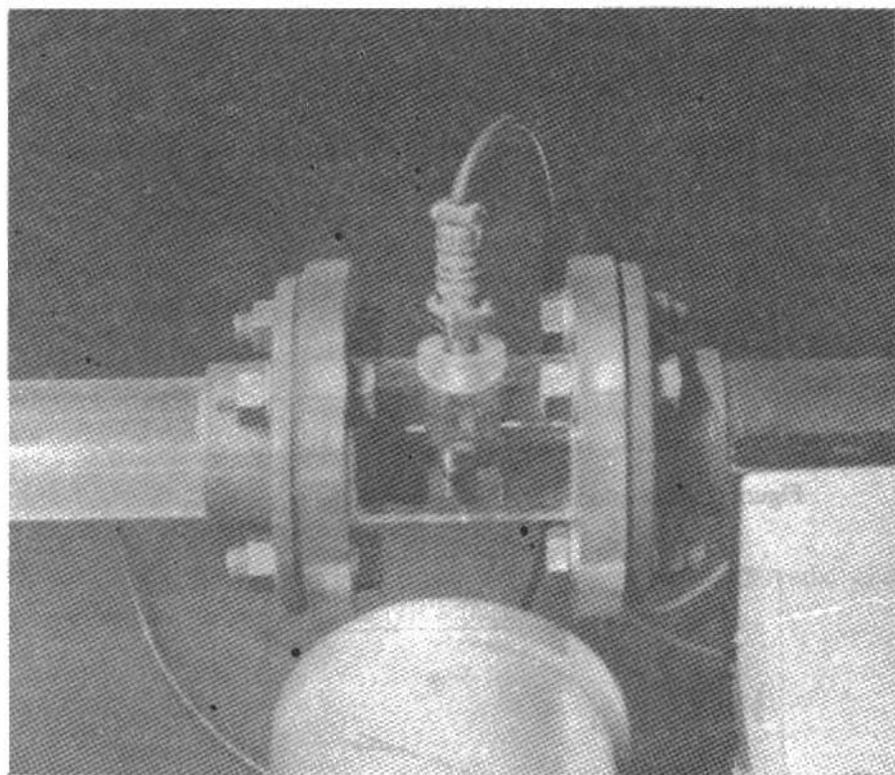


Figure 5. Test section

RESULTS

The first step towards the experimental study was to ensure that the flow entering the test section was axisymmetric and free of any swirl due to the rig geometry or any accessory in the hydraulic circuit. This was confirmed by measuring the axial and the circumferential velocity profiles few diameters upstream the test section.

The axial velocity profiles are shown in Figure 6. The flowrate measured by the reference meter (turbine A) differed from the calculated one (assuming an axisymmetric flow pattern) by less than 3%.

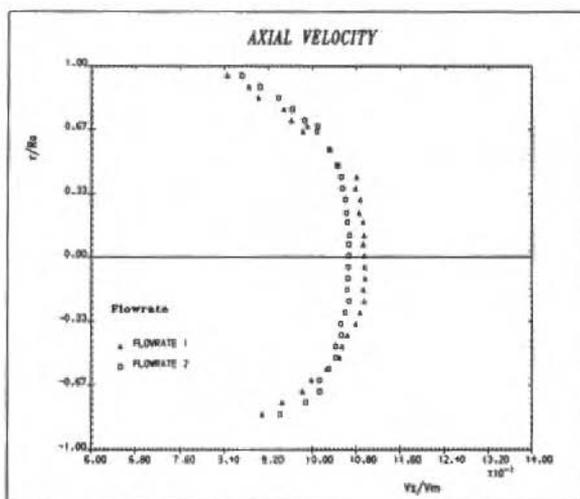


Figure 6. Axial velocity profiles upstream the test section

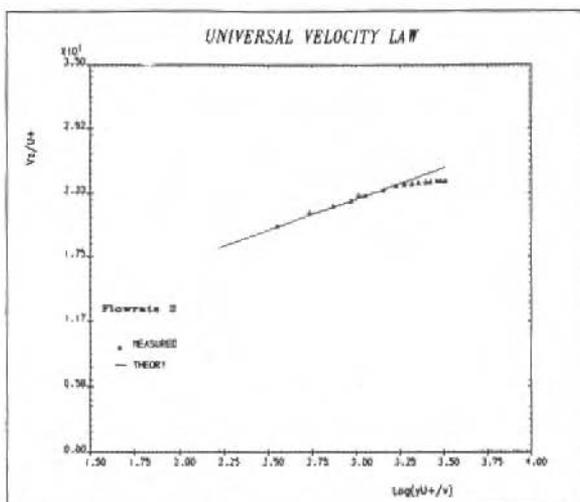


Figure 7. Universal velocity law

As indicated in Figure 6 the flow is not fully developed at the test section. There is still a flat region near the tube center. The lower flow (flowrate 2), which was expected from the boundary layer theory [6]. The universal velocity law for large Reynolds number was compared with the experimental results in Figure 7. The discrepancy with the theory, at the top of the plot (Figure 7), is attributed to the flat region at the tube center which is unlikely to follow the universal law.

The measurements inside the turbine meters were classified into two types: axisymmetric and non-axisymmetric.

Axisymmetric Measurements. The flow was considered axisymmetric some distance away from the rotor, stations *B, C, D, L, M* and *N* (Figure 4). At these situations the influence of the blades was expected to be negligible. No circumferential coordinate was registered. A single test was formed by three data set: total number of samples (*N*), mean velocity component (V_j) and turbulence intensity (TI_j). The mean velocity is given by:

$$V_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_{ij} \quad (1)$$

where index *j* can be either *z*, for axial or φ , for circumferential velocity component. Turbulence intensity is defined as:

$$TI_j = \frac{u_j'}{\sqrt{\sum_{j=1}^2 \bar{V}_j^2}} \quad (2)$$

where

$$u_j' = \left(\frac{\sum_{j=1}^N (V_{ij} - V_j)^2}{N} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Non-Axisymmetric Measurements. The flow was considered non-axisymmetric near the rotor and inside the blade passage, stations *E, F, G, H, I, J* and *K*. At these stations the influence of the rotating blades is expected to be present.

The circumferential coordinate (φ) was registered simultaneously. A single test was now formed by a set of three arrays: number of samples, $N(\varphi)$, the mean velocity, $V_j(\varphi)$ and turbulence intensity $TI_j(\varphi)$. The mean velocity and the turbulence intensity were calculated using the same previous equations by only replacing N for $N(\varphi)$. Table 3(a,b) shows axial data of profile 2HZ/B (The number 2 states for flowrate 2 ($20 \text{ m}^3/\text{h}$), *H* for station *H*, *Z* for the axial profile and *B* for Turbine *B*). Sixty-four φ -coordinates represent the whole width of the blade passage including the blade thickness. The φ -coordinate related to the blade position depends on two factors: the relative distance between the measuring station and the point where the optic-tachometer detects the blade tips. Table 3(a,b) roughly allows the blade location, somewhere between $\varphi = 43$ and $\varphi = 54$. The angular space near the blade position was always greater than the blade thickness. This is called "blinded region" and no measurement was taken there. The blind region has a width bigger than the blade thickness in order to overcome the manufacturing tolerance of the blades and the minimum distance from the blade wall necessary for a LDV measurement. Hence small part of the blade passage, near the pressure and the suction side, produced no data.

From Table 3 one can conclude that at the measuring region there was no dependence of φ -coordinate on velocity component. This was also confirmed with different flowrates, different velocity components and different turbine meters. The variation of any data was within the order of magnitude of the uncertainty of the measurements.

Based on this, all the non-axisymmetric measurements could be represented by a mean value at the central passage. In order to substantiate this argument a statistical analysis for these two Tables was performed. The mean value and the standard deviation for velocities and for turbulence intensities were taken. This analysis is summarized in Tables 4 and 5 for axial and circumferential measurements, respectively.

Final Remarks. Based on previous section all the non-axisymmetric data are represented by the mean value of the non-zero data among the 64 points. The results are then simpler, and the same table can contain both situations, inside and outside the blade passage. Following figures present some experimental results (Figures 8 to 12).

Table 3a. Non-axisymmetric measurements. Axial velocity component. (Profile 2HZ/B)

φ	2HZ05		2HZ06		2HZ07		2HZ08		2HZ09		2HZ10		2HZ11	
	$N(\varphi)$	$V_r(\varphi)$												
1	58	5.033	60	5.000	29	5.056	89	5.089	36	5.033	84	4.944	50	4.50
2	46	5.062	41	5.000	31	5.113	85	5.060	27	4.986	56	4.906	39	4.83
3	50	4.995	60	5.000	28	4.969	84	5.089	25	5.005	68	4.954	52	4.74
4	38	4.995	34	4.884	21	5.085	75	5.070	28	5.081	57	4.868	31	4.63
5	52	5.100	39	5.010	26	5.142	54	5.128	18	5.033	54	4.897	45	4.67
6	47	5.100	56	5.106	22	5.104	84	5.099	29	5.053	61	4.954	42	4.74
7	46	4.938	52	5.058	30	5.056	59	5.089	19	5.062	62	4.830	43	4.74
8	42	5.033	47	5.077	25	5.113	82	5.099	17	4.967	45	4.868	48	4.80
9	46	5.005	31	5.038	25	5.017	75	5.041	14	5.062	61	4.916	42	4.70
10	55	5.014	54	4.990	28	5.046	94	5.128	23	4.938	53	4.954	47	4.89
11	42	4.996	48	5.048	27	4.998	62	5.128	25	5.014	61	4.935	36	4.78
12	42	5.062	32	5.067	14	4.988	62	5.031	25	5.024	58	4.916	43	4.70
13	33	5.005	38	5.067	30	5.113	63	5.041	20	5.024	53	4.878	44	4.75
14	47	5.062	38	5.077	23	5.046	59	5.080	10	5.157	47	4.868	32	4.67
15	38	4.986	40	5.010	16	5.104	64	5.089	23	5.053	52	4.849	47	4.68
16	39	4.919	33	5.096	20	5.142	57	5.051	22	4.995	40	4.906	38	4.80
17	39	5.091	29	5.067	22	5.181	80	5.089	25	5.100	47	4.859	33	4.70
18	46	4.966	37	5.048	14	5.094	62	5.060	17	5.072	43	4.887	41	4.67
19	45	5.072	42	5.106	29	5.133	63	5.080	17	5.062	46	4.887	47	4.72
20	44	5.072	44	5.067	17	5.094	63	5.109	20	5.033	63	4.925	49	4.73
21	42	5.005	49	5.058	16	5.162	55	5.070	19	4.928	49	4.906	36	4.70
22	42	5.062	32	5.067	24	5.085	51	5.119	13	5.005	47	4.868	40	4.74
23	44	4.881	45	5.116	20	5.085	65	5.022	24	5.014	44	4.840	40	4.69
24	31	4.966	41	4.942	19	4.969	60	5.060	24	5.014	41	4.868	47	4.67
25	54	5.033	42	5.077	23	4.988	58	5.080	30	5.005	51	4.925	24	4.69
26	34	5.033	40	5.038	23	4.921	50	5.089	30	4.804	36	4.925	34	4.69
27	50	4.976	30	4.846	18	5.075	63	5.060	22	5.062	58	4.868	27	4.60
28	30	5.043	34	5.010	16	5.056	71	5.119	18	5.052	38	4.840	33	4.62
29	30	4.986	35	5.106	13	4.979	46	5.099	13	5.014	38	4.954	27	4.72
30	41	5.081	41	4.962	20	5.017	53	5.099	24	5.053	28	4.944	30	4.67
31	29	4.986	47	5.010	28	5.094	65	5.109	20	4.957	41	4.878	35	4.76
32	43	5.024	40	5.096	19	5.093	49	5.070	23	5.005	39	4.906	34	4.69
33	37	4.957	43	5.125	26	5.152	42	5.051	20	5.053	37	4.868	38	4.64
34	45	4.909	39	5.058	28	5.094	67	5.128	23	5.053	65	4.887	45	4.69
35	44	4.919	31	5.096	22	5.113	60	4.993	21	4.899	40	4.878	58	4.63
36	30	5.167	38	5.048	17	5.142	54	5.099	20	4.986	35	5.001	33	4.74
37	40	4.995	41	5.019	16	5.113	58	5.022	20	4.986	44	4.935	45	4.74
38	46	5.014	37	5.077	15	5.094	53	5.051	21	5.100	42	4.897	29	4.66
39	40	5.110	43	5.029	20	5.046	55	5.099	20	4.954	35	4.954	28	4.75
40	39	4.928	55	5.010	11	5.085	50	5.089	23	4.871	37	4.916	1	4.59
41	35	4.919	28	5.029	14	5.056	38	5.070	14	5.005	22	4.935	0	0.00
42	8	5.052	12	4.962	9	5.094	6	5.080	4	4.928	8	4.897	0	0.00
43	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
44	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
45	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
46	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
47	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
48	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
49	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
50	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
51	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
52	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
53	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
54	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
55	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	2	5.029	4	4.80
56	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	7	4.916	21	4.69
57	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	18	4.887	48	4.77
58	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	56	4.830	46	4.69
59	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	31	4.679	36	4.74
60	1	5.138	3	5.097	0	0.00	0	0.00	0	0.00	28	4.632	56	4.69
61	11	5.072	16	5.106	2	4.661	15	5.022	2	5.014	28	4.887	42	4.57
62	23	5.043	24	5.000	10	5.036	31	5.128	11	4.957	44	4.906	35	4.70
63	61	4.966	71	5.087	28	5.094	104	5.089	22	5.072	57	4.887	63	4.73
64	59	4.976	58	5.039	17	4.853	95	5.128	29	5.043	71	4.897	24	4.58

Table 3b. Non-axisymmetric measurements. Turbulence intensities for axial velocity

φ	2HZ05		2HZ06		2HZ07		2HZ08		2HZ09		2HZ10		2HZ11	
	$N(\varphi)$	$V_r(\varphi)$												
1	58	.070	60	.072	29	.105	89	.037	36	.037	84	0.41	50	.153
2	46	.060	41	.068	31	.029	85	.068	27	.044	56	.050	39	.039
3	50	.098	60	.055	28	.119	84	.068	25	.041	68	.050	52	.058
4	38	.075	34	.105	21	.031	75	.063	28	.035	57	.098	31	.061
5	52	.043	39	.067	26	.029	54	.033	18	.065	54	.051	45	.079
6	47	.058	56	.034	22	.042	84	.034	29	.036	61	.044	42	.068
7	46	.105	52	.036	30	.037	59	.037	19	.033	62	.089	43	.066
8	42	.104	47	.056	25	.037	82	.037	17	.047	45	.056	48	.056
9	46	.089	31	.041	25	.031	75	.064	14	.034	61	.051	42	.099
10	55	.081	54	.068	28	.031	94	.034	23	.047	53	.052	47	.057
11	42	.107	48	.048	27	.051	62	.034	25	.042	61	.052	36	.055
12	42	.063	32	.050	14	.071	62	.081	25	.035	58	.055	43	.106
13	33	.111	38	.032	30	.037	63	.077	20	.053	53	.045	44	.082
14	47	.046	38	.049	23	.032	59	.031	10	.058	47	.085	32	.070
15	38	.075	40	.065	16	.061	64	.040	23	.048	52	.082	47	.064
16	39	.097	33	.053	20	.026	57	.087	22	.039	40	.046	38	.045
17	39	.033	29	.063	22	.038	80	.030	25	.044	47	.043	33	.057
18	46	.118	37	.053	14	.037	62	.038	17	.027	43	.065	41	.075
19	45	.049	42	.045	29	.035	63	.044	17	.031	46	.041	47	.050
20	44	.050	44	.059	17	.037	63	.029	20	.058	63	.062	49	.056
21	42	.052	49	.038	16	.038	55	.042	19	.121	49	.044	36	.092
22	42	.045	32	.069	24	.052	51	.034	13	.045	47	.044	40	.063
23	44	.115	45	.052	20	.028	65	.100	24	.068	44	.089	40	.098
24	31	.087	41	.106	19	.042	60	.038	24	.029	41	.050	47	.075
25	54	.071	42	.025	23	.103	58	.034	30	.109	51	.057	24	.076
26	34	.060	40	.046	23	.123	50	.034	30	.105	36	.045	34	.069
27	50	.097	30	.162	18	.039	63	.029	22	.045	58	.054	27	.133
28	30	.046	34	.058	16	.058	71	.027	18	.044	38	.066	33	.099
29	30	.102	35	.033	13	.024	46	.038	13	.041	38	.044	27	.072
30	41	.046	41	.064	20	.042	53	.046	24	.041	28	.068	30	.057
31	29	.053	47	.062	28	.029	65	.033	20	.037	41	.049	35	.114
32	43	.065	40	.038	19	.028	49	.034	23	.042	39	.049	34	.055
33	37	.081	43	.044	26	.035	42	.089	20	.038	37	.048	38	.135
34	45	.094	39	.040	28	.034	67	.041	23	.038	65	.054	45	.091
35	44	.105	31	.028	22	.028	60	.109	21	.105	40	.050	58	.079
36	30	.035	38	.042	17	.044	54	.037	20	.047	35	.047	33	.085
37	40	.082	41	.069	16	.041	58	.044	20	.079	44	.048	45	.073
38	46	.080	37	.038	15	.037	53	.078	21	.032	42	.043	29	.076
39	40	.061	43	.071	20	.041	55	.076	20	.057	35	.051	28	.112
40	39	.128	55	.052	11	.049	50	.036	23	.115	37	.036	1	0.00
41	35	.098	28	.055	14	.055	38	.038	14	.034	22	.032	0	0.00
42	8	.066	12	.097	9	.020	16	.044	4	.029	8	.044	0	0.00
43	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
44	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
45	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
46	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
47	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
48	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
49	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
50	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
51	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
52	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
53	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
54	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
55	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	2	.009	4	.052
56	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	7	.051	21	.070
57	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	18	.049	48	.061
58	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	56	.050	46	.050
59	0	0.00	1	.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	31	.115	36	.053
60	1	0.00	3	.044	0	0.00	2	0.14	0	0.00	28	.153	56	.081
61	11	.040	16	.023	2	.002	15	.058	2	.011	28	.037	42	.118
62	23	.055	24	.080	10	.038	31	.022	11	.029	44	.093	35	.064
63	61	.087	71	.039	28	.093	104	.036	22	.034	57	.065	63	.058
64	59	.098	58	.043	17	.120	95	.032	29	.049	71	.074	24	.078

Table 3c. Circumferential velocity component (m/s) and turbulence intensities.

φ	2HU03			2HU05			2HU07			2HU09			2HU11		
	$N(\varphi)$	$V_c(\varphi)$	$TI(\varphi)$												
1	67	.062	.111	50	.246	.034	161	.270	.044	88	.183	.077	83	.122	.089
2	29	.201	.092	30	.280	.050	56	.177	.088	31	.222	.083	36	.198	.061
3	49	.253	.094	47	.289	.043	78	.301	.053	48	.141	.084	47	.117	.067
4	43	.252	.040	33	.261	.034	72	.235	.063	32	.210	.055	35	.127	.060
5	40	.197	.057	33	.321	.037	87	.276	.038	49	.183	.096	45	.185	.068
6	54	.306	.090	56	.264	.065	60	.274	.043	38	.094	.130	36	.39	.103
7	38	.192	.081	41	.250	.030	60	.262	.065	49	.150	.059	46	.197	.080
8	55	.258	.069	36	.296	.041	58	.219	.061	43	.189	.116	37	.235	.074
9	48	.256	.090	51	.317	.044	69	.272	.036	40	.221	.076	42	.148	.110
10	39	.221	.132	54	.233	.068	75	.238	.076	33	.175	.084	37	.056	.081
11	44	.130	.107	49	.251	.076	55	.216	.064	38	.221	.092	39	.161	.076
12	37	.121	.102	56	.277	.037	64	.170	.092	39	.093	.089	45	.100	.087
13	46	.243	.096	43	.281	.033	59	.221	.061	41	.202	.073	37	.100	.072
14	42	.243	.064	38	.256	.069	47	.266	.050	25	.286	.072	38	.219	.077
15	43	.215	.092	52	.271	.051	70	.249	.064	48	.183	.082	39	.184	.064
16	35	.256	.088	30	.292	.027	60	.230	.076	32	.305	.068	30	.268	.082
17	38	.143	.107	59	.342	.039	64	.221	.036	31	.224	.070	32	.100	.085
18	38	.176	.096	26	.254	.065	65	.217	.054	46	.196	.091	37	.154	.078
19	40	.222	.113	50	.346	.038	60	.263	.038	48	.211	.054	40	.103	.100
20	43	.244	.074	31	.233	.061	69	.253	.042	30	.224	.054	40	.163	.056
21	52	.173	.122	42	.245	.088	50	.265	.035	40	.218	.070	36	.042	.069
22	34	.248	.090	53	.322	.046	42	.218	.037	29	.180	.041	43	.209	.052
23	38	.245	.119	26	.264	.062	54	.253	.042	49	.250	.055	25	.065	.100
24	34	.259	.075	41	.249	.038	59	.242	.058	28	.117	.086	34	.167	.069
25	48	.271	.065	46	.241	.039	65	.276	.054	40	.257	.045	34	.088	.097
26	38	.212	.117	42	.259	.039	51	.220	.068	44	.106	.098	33	.085	.085
27	38	.148	.114	54	.298	.063	46	.163	.094	30	.212	.063	27	.151	.099
28	31	.325	.118	48	.278	.041	59	.274	.034	27	.183	.097	33	.093	.113
29	35	.124	.146	37	.313	.056	56	.259	.039	28	.169	.065	38	.126	.097
30	43	.244	.055	49	.320	.044	47	.269	.032	32	.217	.054	41	.170	.088
31	41	.220	.084	51	.237	.076	54	.270	.065	35	.175	.048	39	.150	.065
32	34	.296	.099	40	.279	.081	54	.230	.067	26	.293	.065	26	.182	.073
33	50	.236	.055	29	.225	.033	69	.265	.046	37	.242	.051	35	.102	.081
34	40	.198	.099	45	.267	.038	68	.282	.031	34	.070	.128	44	.126	.066
35	43	.234	.091	53	.268	.051	68	.273	.035	35	.068	.103	41	.057	.085
36	31	.240	.055	47	.332	.036	55	.265	.038	33	.227	.047	29	-.06	.133
37	34	.203	.130	32	.265	.063	51	.261	.034	37	.229	.065	38	.078	.120
38	24	.150	.122	21	.277	.026	51	.297	.042	30	.256	.039	42	.153	.090
39	2	.220	.026	0	.000	.000	15	.176	.106	35	.057	.082	28	.094	.075
40	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	37	.188	.074	32	.206	.065
41	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	36	.068	.135	42	.149	.048
42	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	38	.198	.092	42	.175	.055
43	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	25	.218	.050	30	.071	.095
44	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	16	.160	.055	23	.037	.104
45	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	4	.119	.027
46	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
47	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
48	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
49	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
50	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
51	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
52	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
53	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
54	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
55	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000	0	.000	.000
56	6	.295	.022	3	.278	.035	3	.342	.020	0	.000	.000	0	.000	.000
57	15	.304	.039	6	.333	.038	3	.253	.029	0	.000	.000	0	.000	.000
58	27	.304	.112	14	.282	.036	13	.337	.037	18	.221	.125	2	.843	.198
59	43	.225	.104	37	.218	.083	36	.256	.038	50	.249	.068	15	.324	.054
60	47	.251	.107	53	.286	.080	67	.258	.055	37	.174	.063	25	.138	.074
61	55	.222	.086	33	.330	.026	87	.243	.061	52	.230	.067	51	.136	.069
62	55	.236	.076	33	.309	.056	88	.234	.046	40	.167	.056	50	.132	.067
63	52	.242	.077	64	.316	.050	85	.256	.042	41	.269	.061	58	.164	.083
64	46	.258	.045	47	.342	.039	75	.238	.064	41	.209	.095	47	.060	.12

Table 4. Mean Axial Velocity (m/s) and Mean Turbulence Intensity (Turbine B, flowrate 2) - (from Table 3(a,b))

Point	Test	Samples	\bar{V}_z	SV_z	$\bar{T}I_z$	STI_z
11	2HZ11	1909	4.709	$\pm .078$.077	$\pm .024$
10	2HZ10	2328	4.894	$\pm .053$.058	$\pm .019$
09	2HZ09	950	5.012	$\pm .063$.052	$\pm .025$
08	2HZ08	2842	5.082	$\pm .032$.047	$\pm .021$
07	2HZ07	951	5.070	$\pm .066$.048	$\pm .028$
06	2HZ06	1871	5.041	$\pm .054$.055	$\pm .022$
05	2HZ05	1884	5.010	$\pm .060$.077	$\pm .024$

Table 5. Mean circumferential velocity (m/s) and mean turbulence intensity (Turbine B, flowrate 2) - (from Table 3(c) *for profile 2HU/B*)

Point	Test	Samples	\bar{V}_φ	SV_φ	$\bar{T}I_\varphi$	STI_φ
11	2HU11	1908	.137	$\pm .057$.081	$\pm .019$
09	2HU09	1909	.191	$\pm .057$.074	$\pm .023$
07	2HU07	2850	.249	$\pm .030$.052	$\pm .016$
05	2HU05	1911	.281	$\pm .034$.050	$\pm .016$
03	2HU03	1904	.221	$\pm .054$.090	$\pm .024$

DISCUSSION

A turbine flowmeter is a simple turbomachine which produces no external work. All the energy collected from the main flow is used only to overcome the internal resistance such as bearing friction, pick up resistance and hydrodynamic drag on blades, on the hub and at the blade tip gap. All these resistances are very small compared with the overall amount of energy available in the flow.

The total resisting torque can be treated, as in Ref. [7], as consisting of two groups of different types: the mechanical friction (non-fluid resistance) and the fluid drag resistance. The experimental measurements were designed to minimize the effects of mechanical friction. The pick up resistance was virtually eliminated by adopting an optic-tachometer and the bearing friction reduced by using ball bearing types. The prototypes tested had similar ball bearings mounted inside the hub with same geometry. This procedure reduced the mechanical frictions to allow level. It is possible to admit and explain different behaviour between the types tested being due to only hydrodynamic effects.

There are many geometrical parameters which affect the fluid drag resistance. The main ones are: number of blades, blade shape (twisted or straight), blade dimensions (thickness, chord, hub and tip radii, tip clearance), etc... Ideally to identify precisely each effect only one parameter should be changed at a time. Practically, however, this is not possible. Some of these parameters are not independent and a change of one, inevitably, produces variations in the others.

This discussion investigates the flow patterns of two different blade designs: helical blade shape, turbines *B* and *C* and straight blade shape, turbines *D* and *E*, already commented.

Axial Component. The following conclusions seem to be apparent for the flow inside turbine meters:

The axial component was much more sensitive to the flowrate variation and to the position where the measurements were taken. Its variation was linearly dependent on the flowrate as was to be expected. For the same turbine at different flowrates, the non-dimensional velocity profiles were practically unchanged (Figure 8(a,b)). At inlet, upstream the rotor, the small difference is attributed to the overall uncertainty of the measurements. At those stations the main conditioning of the flow was effectively performed by the supports and the central part of the meter.

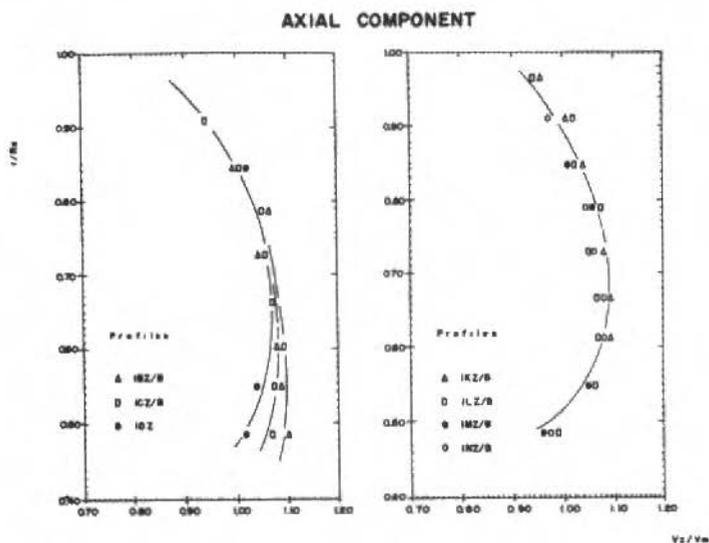


Figure 8a. Axisymmetric velocity profiles (Turbine *B*, flowrate 1)

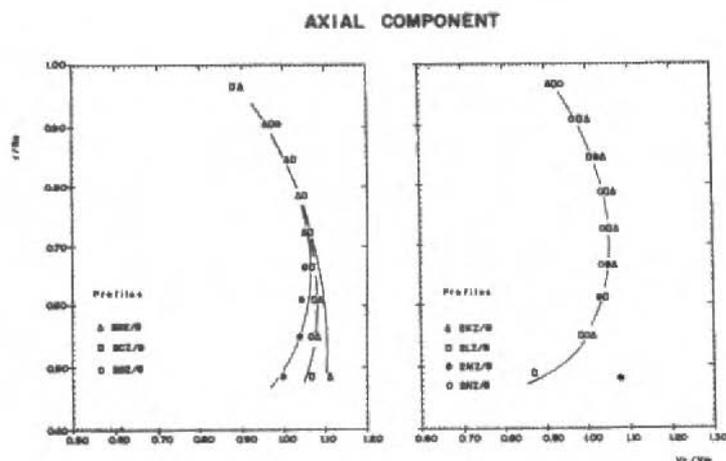


Figure 8b. Axisymmetric velocity profiles (Turbine B, flowrate 2)

Closer to the rotor, within distances less than one chord length, the shape of the blades produced distortions in the incoming flow, Figures 9 and 11. At the leading edge the most significant effect was the blockage caused by the blades. The flow acceleration (local acceleration) depends on the blade shape, blade thickness and on the blade chamfer angle.

In the blade passage there was a remarkable difference between the helical and straight blade shape turbines. Inside helical blades the axial flow was practically unchanged, Figure 9. The blade shape quickly compensates the distortion caused by the leading edge acceleration by keeping the flow profile flatter than at the inlet. Inside the straight blade passage the axial flow is driven towards the tip producing a radial cross-flow, Figure 11. This fact was visually confirmed after several hours of test. Small streak lines were noticeable running from hub to tip as the flow developed axially.

At the trailing edge the deceleration caused by the absence of the blades works in the opposite way to the leading edge. In the outlet region, as far as it could be measured, the flow pattern was kept similar to inside the blade passage.

The turbulence intensity for the axial component was higher (7% to 12%) at the wall than at the center of the passage (2% to 6%). Closer to the leading edge the turbulence intensity was nearly constant and high ($\approx 12\%$). This is probably because the blades introduced some disturbances in the inlet flow. At the outlet

region (exit region) the turbulence intensity was even higher ($> 17\%$) than at the inlet due to the influence of the wake.

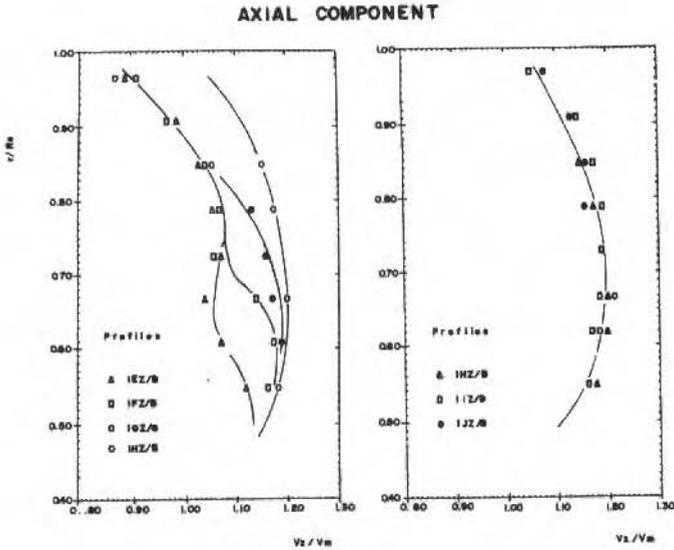


Figure 9. Axial velocity profiles (Turbine B, flowrate 1)

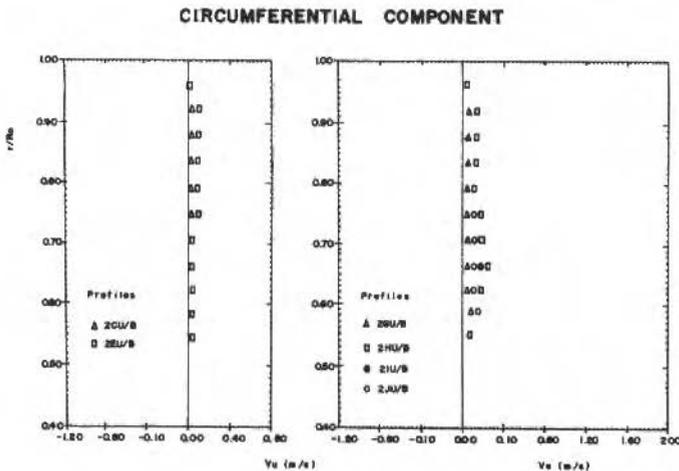
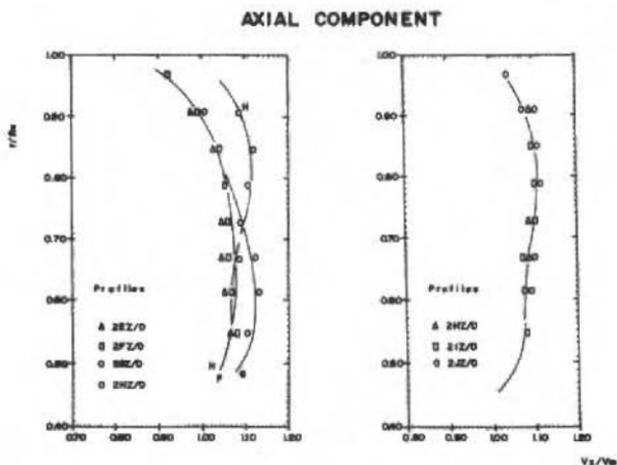
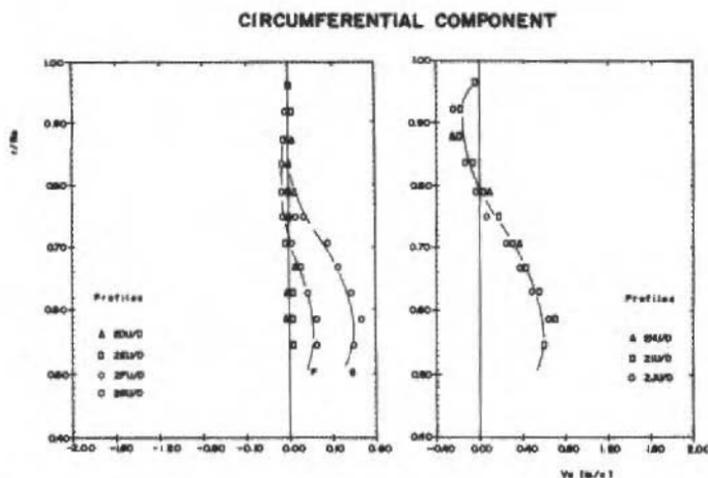


Figure 10. Circumferential velocity profiles (Turbine B, flowrate 2)



Circumferential Component. The circumferential component was much more sensitive than the axial one to the blade shape. Its value showed to be positive or negative depending on the blade shape. The helical blade shape turbines always showed positive values, Figure 10, whereas the straight ones had values ranging from positive to negative, Figure 12. The positive values were in the hub to nearly mid-radius region and negative in the tip region.



Although the magnitude of the circumferential component was very small, the influence of the rotor on the incoming fluid was noticeable. A pre-rotation of the incoming flow was always present.

There was no linear dependence of the circumferential component with the flowrate. An increasing percentage on the flowrate did not correspond to the same amount (in percentage) for the circumferential component.

The turbulence intensity for circumferential measurements showed similar values and trends to those obtained in axial measurements.

Effective Momentum Angle (EMA). The distribution of the flow energy throughout the blade passage is now analysed. Processing the axial and circumferential measurements a new parameter defined as Effective Momentum Angle (EMA) is obtained. EMA is valid all over the blade passage and it is an indicative factor for the flow energy distribution. EMA differs from angle of attack because it is defined inside the blade passage, so $EMA = f(z, r, \varphi)$. It is a kind of slip angle valid inside the whole passage.

Combining the axial and circumferential components we produce a combined velocity vector whose angle, relative to the turbine axis, is called absolute flow angle. The flow angle relative to the rotating frame, $\alpha(r)$, is obtained by subtracting the rotational movement of the blades. The differential angle between the blade angle, $\beta(r)$ and the relative flow direction angle is defined as EMA (Figure 13).

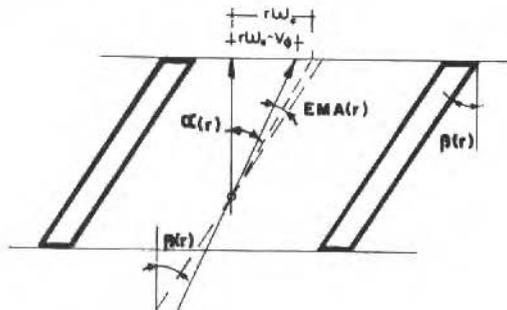


Figure 13. Effective momentum angle (EMA)

The value of EMA can be positive or negative. Where EMA is positive the flow delivers energy to the rotor and where EMA is negative the blades drive the flow. Because inside the blade passage of any turbine meter tested the velocity components did not change much with z and φ -coordinates, EMA was calculated

based in mid-passage (mean EMA). Its value then will depend only on r . EMA (r) is given by:

$$\overline{\text{EMA}}(r) = \beta(r) - \alpha(r) \quad (4)$$

where $\beta(r)$ is related to the axis of the turbine and $\alpha(r)$ defined as:

$$\alpha(r) = \tan^{-1} \left(\frac{W_{\varphi}(r)}{V_z(r)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{r_a^{\omega} - V_{\varphi}(r)}{V_z(r)} \right) \quad (5)$$

For a straight blade shape turbines the angle *betha* is independent of r -coordinate. The following Figures (Figs. 14, 15) show EMA versus radius for helical and straight blade turbines.

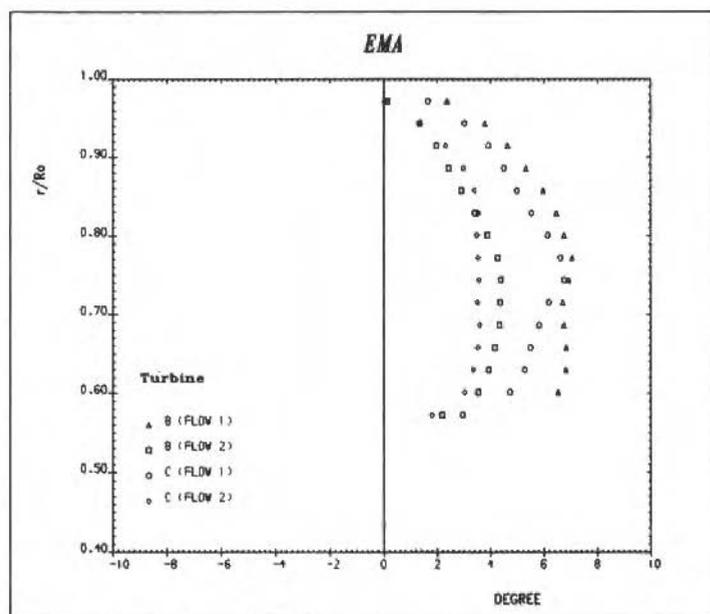


Figure 14. EMA versus radius (helical blade shape)

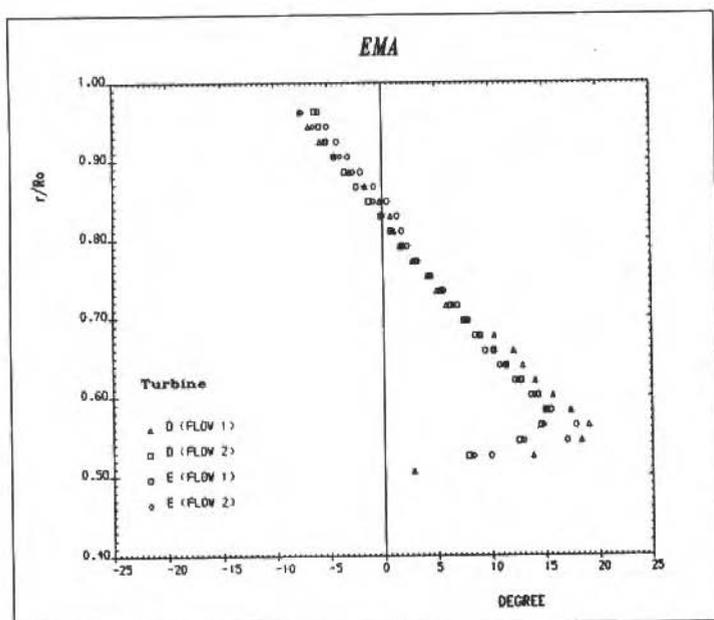


Figure 15. EMA versus radius (straight blade shape)

CONCLUSIONS

Turbine meters main desirable attributes are:

- a) high accuracy represented by small uncertainty with high confidence level,
- b) high linear range of operation, and
- c) calibration curve independent of the fluid and flow characteristics such as viscosity, temperature, flow fluctuations, etc.

High accuracy is much more dependent on the standard procedure of the calibration than on the interaction between the flow and the physical characteristics of the meter. The remaining attributes (b and c) are more likely to be related to the flow behaviour. The conclusions taken so far are summarized as:

- 1) The flow field inside both types (helical and straight blade shape) can be considered as a two-dimensional one, $V = f(z, r)$. This explains why two basic

theories, airfoil and angular momentum, used since the early stage of turbine meter development, could simulate reasonably well the meter factor in the linear region. Apart from the limitations caused by the simplifying assumptions, both models are essentially of two-dimensional nature. At the rising portion of the calibration curve, though, both models have failed, sistematically. Presumably because in that range the three-dimensional effects are predominant.

- 2) The shape of the blade affects the distribution of the energy along the radius ($EMA \times r$). The helical blade turbines have predominantly positive EMA with maximum value at the center of the passage. Lower flowrates produced higher value of EMA which seems to confirm that the retarding effects (mainly bearing friction) are more significant at low flowrates. The straight blade turbines produce a maximum positive value of EMA close to the hub and a maximum negative at the tip. Between both extremes EMA varies almost linearly. The big values near the hub (between 15° to 20°) suggest that separation should occur at the blade suction side. The negative region of the EMA (at the tip) proves that there, the blades drive the flow instead of being driven. This region is known as a "pumping effect region" which was expected prior to these studies, [8].
- 3) The helical-shaped blade turbine produces less disturbance in the flow so less energy is taken from the main flow and higher rotational speed is achieved. This can be seen comparing the calibration curve of both types (Figure 16).

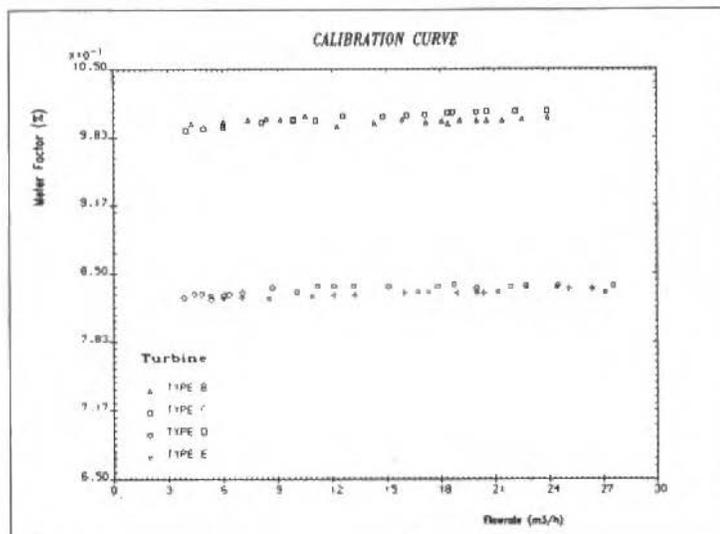


Figure 16. Calibration curves

- 4) Assuming that the mechanical friction for both types are almost the same, the fluid drag resistance for the helical shape is less than for the straight one.
- 5) It is interesting to note that, although both blade shapes have completely different flow patterns, they both operate linearly over the same range.

With respect to viscosity the following comments seem to be appropriate:

- 1) HUTTON [9] has shown that in the linear range of operation the helical bladed turbine meters are much less affected by variation of the viscosity than the straight blade ones, (Figure 17(a,b)). This is probably because the helical types have a more uniform and always positive energy distribution along the radius. The fact that the straight blade turbines have increased the meter factor with an increment of viscosity pointed by FAKOUHI [10], as well as HUTTON [9], is because as the viscosity increases the incoming velocity profile changes to a more parabolic shape, becoming peaked near the hub. The boundary layer at the wall is now even thicker than for the flow with low viscosity. So there was an increment of axial velocity in the region of positive effect and a decrement of axial velocity in the negative one. As a result the rotor should speed up.

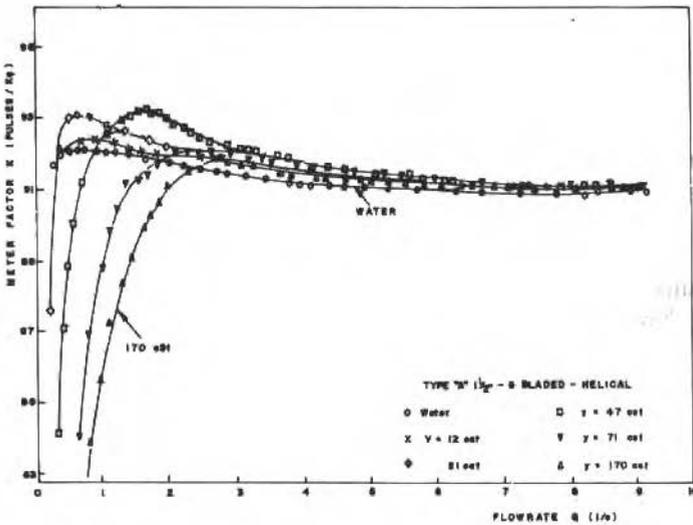


Figure 17a. Effect of viscosity on meter calibration (helical blade shape - from Ref. [9])

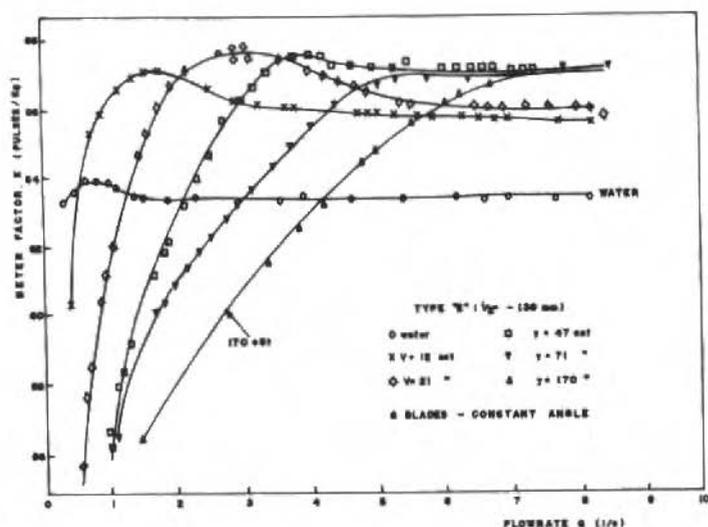


Figure 17b. Effect of viscosity on meter calibration (straight blade shape - from Ref. [9])

- The tip angle of attack for the straight bladed rotor was always negative, which confirms the conclusion obtained by FAKOUHI [10]. The backwards flow, though, was not noticed in any case tested. Although no "very viscous" flow was used, it is hard to believe that axial velocity component should become negative in any point inside the flow.

With respect to the tip clearance effect, the comments are:

- The results obtained by TAN [11] and BLOWS [12] for straight bladed rotor seems to have a plausible explanation. As commented by TSUKAMOTO and HUTTON [13] an increase in the tip clearance produces a reduction of the tip area, region of pumping effect, with a consequent reduction of the resisting torque. The rotational speed and the meter factor should, consequently, increase.
- The same conclusion seems to be valid for the helical bladed rotor. Although not verified during experimental measurements, is quite possible to have a pumping effect at the tip of a helical turbine. It is only necessary to have the blade angle at the tip not matching with the flow velocity angle. This is probably the reason why TAN [11] found trends of pumping effect with helical blade rotor.

All the conclusion presented so far are strictly speaking, valid only within the linear region of the calibration curve, where all the experimental data were taken. Further conclusions beyond these limits should be regarded as an extrapolation from the basic results.

FINAL REMARKS

The important conclusion of this work is centered on the flow behaviour within two types of turbine flowmeters studied. Different flow patterns were found for the two types. The helical type showed better interaction with the flow and the main important parameter was blade angle *betha*.

Although only one helical ($20^\circ \leq \beta \leq 40^\circ$) and one straight blade geometry ($\beta = 30^\circ$) were analysed, extrapolation may be valid at this stage. The straight blade can be imagined having a process of twisting in such a way that the blade angle at the tip increases and at the hub decreases. Eventually the transformation ends up with the same helical bladed shape already studied. In between both limits it is fair to admit that the flow patterns change smoothly from one configuration to another. As a consequence of this transformation there are improvements in the interaction "blade x flow" with the elimination of the pumping effect at the top and increment of the rotational speed. Out of these two geometrical limits the transformation may proceed with further twist. The angle at the top becomes now bigger than 40° . Intuitively, it is easy to admit that there must be an upper limit (optimum twist) for improvements. High angles at the top certainly lead to separation with consequent disturbances of the internal flow.

It seems important to determine the "optimum twist" for each case because it certainly defines better performance for any turbine meter with small dependency on variation of the fluid properties. This is in fact a new aim for further studies.

REFERENCES

- [1] FURNESS, R.A. - Developments in Flow Measurement 1 - Chapter 6, Turbine Flowmeter, Ed. by R.W.W. Scott, Applied Science Publishers LTD, Essex, UK, 1982.
- [2] HUTTON, S.P. - Introduction to Turbine Meters, ShortCourse Notes, DFEI, Cranfield Institute of Technology, Jun. 1986.

- [3] GOULAS, A. and VERSTEEG, H.K. - A Guide and Operating Instructions to Argon-ion LDA System, Internal Report 87/HKV/IR/12, DFEI, Cranfield Institute of Technology, Sept. 1987.
- [4] FERREIRA, V.C.S. - Flow Patterns inside a Turbine Type Flowmeters, Ph.D. Thesis, DFEI, Cranfield Institute of Technology, May 1988.
- [5] HERSCHY, R.W. - Streamflow Measurement, Elsevier Applied Science Publishers, UK, 1985.
- [6] SCHLICHTING, H. - Boundary Layer Theory, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York, 1960.
- [7] LEE, W.F.Z. and KARLBY, H. - A Study of Viscosity Effect and its Compensation on Turbine-type Flowmeters, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, pp. 717-728, Sept. 1960.
- [8] FERREIRA, V.C.S.; FURNESS, R.A. and GOULAS, A. - The Design of Turbine Meters, Theory and Practice, NEL Conference 1986, Flow Measurement in the mid 80's, Glasgow, paper 7.1.
- [9] HUTTON, S.P. - The Effects of Fluid Viscosity on Turbine Meter Calibration, Dept. of Mechanical Engineering, University of Southampton, UK, 1986.
- [10] FAKOUHI, A. - The Influence of Viscosity on Turbine Flow Meter Calibration Curves, Ph.D. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Southampton, 1977.
- [11] TAN, P.A.K. - Theoretical and Experimental Studies of Turbine Flowmeter, Ph.D. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Southampton, 1973.
- [12] BLOWS, L.G. - Towards a Better Turbine Flowmeter, International Conference on Advances in Flow Measurement Techniques, Paper L3, University of Warwick, UK, Sept. 1981.
- [13] TSUKAMOTO, H. and HUTTON, S.P. - Theoretical Prediction of Meter Factor for Helical Turbine Flowmeter, Fluid Control and Measurement, Meiji University, Tokio, Sept. 1985.

OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the english title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from english, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.

ÍNDICE / CONTENTS

P.M.Martins et al.	Modelagem Matemática e Testes de Campo de Evaporadores Água- Refrigerante	113
M.A.Murad and R.Sampaio F ^o	Um Tratamento Moderno da Segunda Lei da Termo- dinâmica	137
M.G.V.Sesso and L.C.Lima	Um Piranômetro Portátil com Sensores Termo- resistivos	187
V.C.S.Ferreira and R.A.Furness	Flow Field inside Turbine- Type Flowmeter	199