

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITOR: Hans Ingo Weber

Deptº Projeto Mecânico; FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

Álvaro Toubes Prata

Deptº Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPO

Carlos Alberto de Almeida

Deptº Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,  
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UF RJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UF RJ)

Moysés Zindeluk (COPPE/UF RJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UF RJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UF RJ)

Samir N.Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

---

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /  
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

---

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



## MHD FLOW AND HEAT TRANSFER IN A ROTATING CHANNEL OF A RAREFIED GAS BETWEEN INFINITELY CONDUCTING PLATES

### TRANSFERÊNCIA DE CALOR E ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO DE GASES RAREFEITOS EM UM CANAL ROTATIVO FORMADO POR PLACAS PARALELAS INFINITAMENTE CONDUTORAS

V.M. Soundalgekar  
31A-12, Brindavan Society  
Thane (400 601)  
India

J.P. Bhat  
Department of Mathematics  
Goa Engineering College  
Farmagudi (Goa) India

#### ABSTRACT

*An exact analysis of the MHD flow in a rotating flat plate channel of rarefied gas is presented. The channel rotates about an axis perpendicular to the plates which are assumed to be infinitely electrically conducting. Velocity profiles, magnetic field profiles and the temperature profiles are shown on graphs and the numerical value of the axial and transverse skin-friction, axial and transverse components of the mass flux and the function affecting the rate of heat transfer are entered in tables. The results are discussed in terms of the parameters  $M$  (Hartmann number)  $\alpha$  (Ekman number),  $\lambda$  (Slip-parameter) and  $\Gamma$  (the temperature jump parameter).*

Keywords: MHD ■ Rotating Channel ■ Rarefied Gas

#### RESUMO

*Uma análise exata do escoamento magnetohidrodinâmico de gases rarefeitos em um canal rotativo formado por placas paralelas é apresentada. O canal roda em torno de um eixo perpendicular as placas que são admitidas possuir condutividade elétrica infinita. Perfis de velocidade, campos magnéticos e temperatura são mostrados em gráficos. Valores numéricos dos coeficientes de atrito axial e transversal, componentes do fluxo de massa axial e transversal, e da função que afeta a taxa de transferência de calor, são mostrados em forma tabular. Os resultados são discutidos em termos dos parâmetros  $M$  (número de Hartmann),  $\alpha$  (número de Ekman),  $\lambda$  (parâmetro de deslizamento) e  $\Gamma$  (parâmetro associado ao salto de temperatura).*

Palavras-chave: MHD ■ Canal Rotativo ■ Gás Rarefeito

## INTRODUCTION

A large number of papers are being published on channel flows because of their industrial applications. In most cases, the flow of Newtonian fluids at normal pressure and temperature is considered. However, in many industrial applications of channel flow, there is sometimes an increase in temperature of the gas or a decrease in the absolute pressure and hence this leads to a slight decrease in the density of the gas which then gets rarefied. The first effect of rarefaction of the gas is seen in the slip and the temperature jump of the gas at the surface of the plate. Channel flows under such conditions are studied by [1] under first order velocity slip and temperature jump boundary conditions. The effects of the second order velocity slip and temperature jump boundary conditions on the channel flow of rarefied gas were studied by [2].

The flow of an electrically conducting, viscous rarefied gas in a channel was studied by [3] and the heat transfer of the channel flow under first-order temperature jump boundary conditions was studied by [4].

Another physical situation of interest in industrial applications is the study of the secondary flow in a straight channel rotating about an axis normal to the plates. This was studied by [5] in case of a continuum medium. Similar problem under first-order velocity slip and temperature jump boundary conditions was solved by [6]. It is now proposed to study the effects of a transversely applied magnetic field on the flow and heat transfer in the flow of a rarefied gas in a straight rotating channel.

## MATHEMATICAL ANALYSIS

Consider the steady flow of an incompressible viscous electrically conducting rarefied gas between two parallel plate in a rotating frame of reference  $O' X' Y' Z'$ . Chandrasekhar [7] has shown that the flow is governed by the following equations of motion coupled with corresponding Maxwell's equations of electromagnetism:

$$\rho(\bar{u}' \cdot V') \bar{u}' - 2\rho(\bar{u}' \times \Omega') = -V'P' + \rho\nu V^2 \bar{u}' + \mu_c(\bar{V}' \times \bar{H}') \times \bar{H}' \quad (1)$$

$$V' \cdot \bar{u}' = 0 \quad (2)$$

$$V' \cdot \bar{H}' = 0 \quad (3)$$

$$V' X(\bar{u}' X \bar{H}') + \frac{1}{\mu_c \sigma} V'^2 \bar{H}' = 0 \quad (4)$$

$$\bar{B} = \mu_c \bar{H}' \quad (4a)$$

Here  $P' = p' - \frac{1}{2} \rho |\Omega' X \bar{r}'|^2$  and  $\bar{u}'$ ,  $\Omega'$ ,  $\bar{r}'$  are the velocity vector, angular velocity vector and the position vector, respectively. Also  $\mu_c$  is the magnetic permeability,  $\rho$  the density,  $\sigma$  the scalar electrical conductivity of the fluid and  $\bar{H}'$  is the magnetic field vector. The channel is assumed to be rotating about  $Z'$ -axis which is normal to the motion of the rarefied gas flowing under a constant pressure gradient  $-\partial P'/\partial x'$ , acting along the  $X'$ -axis taken along the centreline of two parallel plates  $z' = \pm L$ .

The components of velocity, rotation and the magnetic field are now assumed as follows:

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= (u'(z'), v'(z'), 0) \\ \bar{\Omega}' &= (0, 0, \Omega') \\ \bar{H}' &= (h'_x(z'), h'_{y'}(z'), H_0) \end{aligned} \quad (5)$$

In view of (5), the fully-developed flow of a MHD rarefied gas is governed by the following equations of motion:

$$-2\rho \Omega' v' = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{B_0}{\mu_c} \frac{\partial B'_{x'}}{\partial z'} \quad (6)$$

$$2\rho \Omega' u' = \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{B_0}{\mu_c} \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 B'_{x'}}{\partial z'^2} + \sigma \mu_c B_0 \frac{\partial u'}{\partial z'} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 B'_{y'}}{\partial z'^2} + \sigma \mu_c B_0 \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (9)$$

and the energy equation is

$$0 = K \frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial z'} \right)^2 \right] + \frac{1}{\sigma \mu_c^2} \left[ \left( \frac{\partial B'_{x'}}{\partial z'} \right)^2 + \left( \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'} \right)^2 \right] \quad (10)$$

The first-order velocity-slip and temperature jump boundary conditions are

$$\begin{aligned}
 u'(\pm L) &= \mp \xi_u \left. \frac{du'}{dz'} \right|_{z'=\pm L}, \quad \frac{dB'_{x'}}{dz'} = 0 \quad \text{at } z' = \pm L \\
 v'(\pm L) &= \mp \xi_u \left. \frac{dv'}{dz'} \right|_{z'=\pm L}, \quad \frac{dB'_{y'}}{dz'} = 0 \quad \text{at } z' = \pm L \\
 T_{g,1} - T_{w,1} &= -\xi_T \left( \frac{dT_{g,1}}{dz'} \right)_{z'=L} \\
 T_{g,2} - T_{w,2} &= -\xi_T \left( \frac{dT_{g,2}}{dz'} \right)_{z'=-L}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Here  $(u', v')$  are the velocity components along  $x'$  and  $y'$  directions,  $\mu$  the viscosity,  $K$  the thermal conductivity of the gas,  $T_{w,1}$  is the wall temperature at  $z' = L$ ,  $T_{g,1}$  is the gas temperature adjacent to the wall at  $z' = L$  with similar definitions for  $T_{w,2}$ ,  $T_{g,2}$  at the wall  $z' = -L$ . Also  $\xi_u$  is the slip-velocity coefficient given by

$$\xi_u = \frac{2 - \beta}{\beta} \bar{\ell}$$

where  $\bar{\ell}$  is the mean free path given by

$$\bar{\ell} \equiv (\sqrt{\pi/8}/0.499) \mu (\sqrt{R_g T}/p')$$

Here  $\beta$  is the Maxwell's reflection coefficient and  $R_g'$  is the gas constant.  $\xi_T$  is the temperature jump coefficient and is defined by

$$\xi_T = \frac{2 - \bar{a}}{\bar{a}} \frac{2\lambda'}{\lambda' + 1} \frac{\bar{\ell}}{P}$$

where  $\bar{a}$  is the accommodation coefficient,  $\lambda'$  the ratio of the specific heats and  $P$  is the Prandtl number.

On introducing the following non-dimensional quantities

$$\begin{aligned}
 z &= z'/L, \quad u = uL/\nu, \quad v = vL/\nu, \quad B_x = B'_x/\sigma\mu_c\nu B_0, \\
 B_y &= B'_y/\sigma\mu_c\nu B_0, \quad R = L^3 \left( -\frac{\partial P'}{\partial x'} \right) / \rho\nu^2, \quad \alpha^2 = \Omega' L^2/\nu, \\
 M^2 &= L^2 B_0^2 \sigma / \rho\nu, \quad P = \mu c_p / K, \quad E = 2(\nu/L)^2 / c_p (T_{w,1} - T_{w,2})
 \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{T - T_{w,m}}{T_{w,1} - T_{w,m}}, T_{w,m} = \frac{T_{w,1} + T_{w,2}}{2},$$

$$\lambda = \xi_u/L, \quad \Gamma = \xi_T/2L \quad (12)$$

in equations (6) - (11), and combining these by introducing

$$q = u + iv, \quad H = B_x + iB_y, \quad i = \sqrt{-1} \quad (13)$$

we have

$$\frac{d^2 q}{dz^2} + M^2 \frac{dH}{dz} - 2\alpha^2 iq = -R \quad (14)$$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{dq}{dz} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + PE \left\{ \frac{dq}{dz} \frac{d\bar{q}}{dz} + M^2 \frac{dH}{dz} \frac{d\bar{H}}{dz} \right\} = 0 \quad (16)$$

where  $\bar{\phantom{x}}$  now denotes a complex conjugate.

The boundary conditions are

$$q(\pm 1) = \mp \lambda \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=\pm 1}; \quad \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=\pm 1} = 0$$

$$\theta(\pm 1) = \pm 1 \mp 2\Gamma \left( \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=\pm 1} \quad (17)$$

The solutions of these equations are

$$q/R = \Phi \left\{ \Psi - \frac{\cosh Az}{\cosh A} \right\} \quad (18)$$

$$H/R = \Phi \left\{ \frac{\sinh Az}{A \cosh A} - z \right\} \quad (19)$$

$$\theta = \frac{z}{1 + 2\Gamma} + PER^2 F(z) \quad (20)$$

where

$$F(z) = G(z) - 2\Gamma G'(1)$$

$$A = \sqrt{(M^2 + 2\alpha^2 i)}, \quad \alpha_1 = \text{Re}[A], \quad \beta_1 = \text{Im}[A]$$

$$\Psi = 1 + \lambda A \tanh A, \quad \Phi = 1/(M^2 + 2\alpha^2 i \Psi), \quad B_1 = M^2 \Phi \bar{\Phi}/2$$

$$\begin{aligned}
 C &= \Phi\bar{\Phi}/8 \cosh A \cosh \bar{A}, \quad B_2 = C(A\bar{A} + M^2)/\alpha_1^2 \\
 B_3 &= C(A\bar{A} - M^2)/\beta_1^2, \quad B_4 = -2M^2 \Phi\bar{\Phi}/A^2 \cosh A \\
 G(z) &= B_1(1 - z^2) + B_2(\cosh 2\alpha_1 - \cosh 2\alpha_1 z) + \\
 &\quad B_3(\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_1 z) + Re[B_4(\cosh A - \cosh Az)]
 \end{aligned}$$

Here primes denote derivative with respect to  $z$ .

Particular cases.

1) When  $\lambda = 0$ ,  $\Gamma = 0$ , we have a continuum MHD case as

$$q/R = \frac{1}{A^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh Az}{\cosh A} \right\} \quad (21)$$

$$H/R = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\sinh Az}{A \cosh A} - z \right\} \quad (22)$$

$$\theta = z + PER^2 G(z) \quad (23)$$

2) For stationary MHD channel,  $\alpha \rightarrow 0$  and we get

$$u/R = \frac{1}{M^2} \left\{ \Psi_1 - \frac{\cosh Mz}{\cosh M} \right\}, \quad v = 0 \quad (24)$$

$$B_x/R = \frac{1}{M^2} \left\{ \frac{\sinh Mz}{M \cosh M} - z \right\}, \quad B_y = 0 \quad (25)$$

$$\theta = \frac{z}{1 + 2\Gamma} + PER^2 \{G(z) - 2\Gamma G'(1)\} \quad (26)$$

where

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= 1 + \lambda M \tanh M, \\
 G(z) &= \frac{1 - z^2}{2M^2} + \frac{\cosh 2M - \cosh 2Mz}{4M^4 \cosh^2 M} - \frac{2(\cosh M - \cosh Mz)}{M^4 \cosh M}
 \end{aligned}$$

3) For non-magnetic case,  $M = 0$  and we have

$$q/R = \frac{1}{A^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh Az}{\Psi \cosh A} \right\} \quad (27)$$

$$\theta = \frac{z}{1 + 2\Gamma} + PER^2 \{G(z) - 2\Gamma G'(1)\} \quad (28)$$



where

$$G(z) = A\alpha^4\Psi\bar{\Psi}\left\{1 - \frac{\cosh 2\alpha z + \cos 2\alpha z}{\cosh 2\alpha + \cos 2\alpha}\right\}, \quad A = (1+i)\alpha$$

## DISCUSSION

In order to gain a physical insight into the problem, we have carried out the numerical calculations and the velocity profiles are shown on Figures 1-2. On Fig. 1, the axial velocity profiles  $u$  are shown. The axial velocity profiles are observed to be symmetric about  $x$ -axis. An increase in  $M$  leads to a decrease in the values of  $u$  and at large value of  $M = 4$  say, the velocity becomes flat which was also observed by [8]. But due to an increase in the value of  $\lambda$ , the slip-parameter, the axial velocity is observed to increase. However, when the value of the Ekman number increases, the shape of the axial velocity changes such that the velocity decreases at the centre of the channel and with further increase in  $\alpha$ , the velocity profile cuts the  $z$ -axis more often. This has been observed by [5] and [9] also.

On Fig. 2, the transverse velocity profiles  $\{-v\}$  are shown. We observe from this figures that  $\{-v\}$  increases due to an increase in  $\lambda$  when  $M$  and  $\alpha$  are constant. Also an increase in  $\alpha$  or  $M$  leads to a decrease in  $\{-v\}$ .

The induced magnetic field is shown on Figure 3 and 4. On Fig. 3,  $B_x$  is shown and we observe from this figure that at large values of  $\alpha$ , the shape of the magnetic field profile is completely changed. Due to rarefaction of the medium,  $B_x$  is found to decrease. On figure 4,  $B_y$  is shown. Due to increase in  $\lambda$ , there is a rise in  $B_y$  but corresponding to an increase in the rotation of the channel, there is observed to be a decrease in  $B_y$ . On Fig. 5, the values of the function  $F(z)$  are shown. We observe from this figure that an increase in  $\Gamma$  leads to an increase in  $F(z)$ , but  $F(z)$  decreases with increasing  $\lambda$ . An increase in  $M$  leads to a decrease in the temperature. For a rise in the value of  $\alpha$ , there is a fall in the temperature.

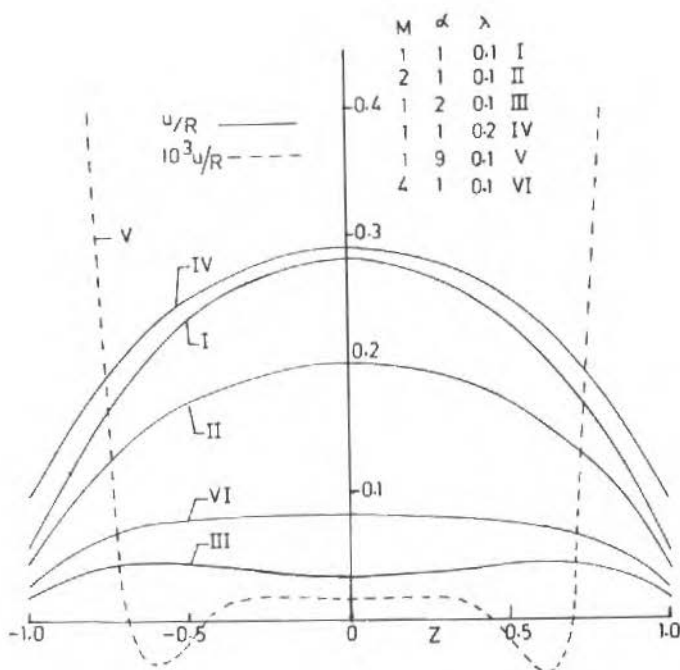


Figure 1. Axial velocity profiles

We now study the effects of rotation on the shearing stress. It is given by

$$\frac{\tau}{R} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{R} \frac{dq}{dz} \Big|_{z=-1} = \Phi A \tanh A \quad (29)$$

The real and imaginary parts of  $\tau$  are denoted by  $\tau_x$  and  $\tau_y$ . Numerical values of  $\tau_x/R$  and  $\tau_y/R$  are calculated and they are entered in Table I. We observe from this table that  $\tau_x$  decrease with increasing  $M$ ,  $\lambda$  or  $\alpha$ . Thus, when  $M = 1$ ,  $\lambda = 0.1$ , an increase in  $\alpha$  from 1 to 2 leads to 67% decrease in the value of  $\tau_x$ . But  $\tau_y$  increases with increasing  $M$  or  $\alpha$  and decreases with increasing  $\lambda$ , the slip parameter.

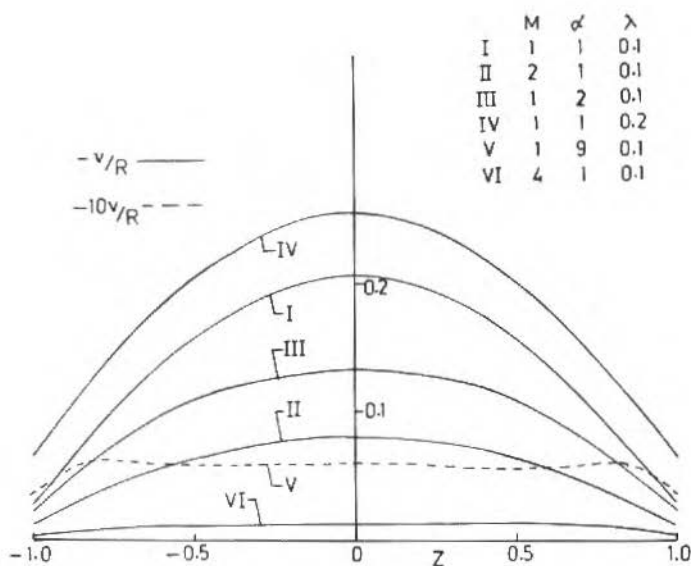


Figure 2. Transverse velocity profiles

Table I - Values of  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $F'(-1)$ 

M	$\alpha$	$\lambda$	$\Gamma$	$\tau_x/R$	$\tau_y/R$	$Q_x/R$	$Q_y/R$	$F'(-1)$
1	1	0.1	0.2	0.5502	-0.3103	0.4254	-0.2921	0.1605
2	1	0.1	0.2	0.4344	-0.1314	0.3115	-0.1163	0.1133
1	2	0.1	0.2	0.1809	-0.2357	0.0780	-0.1995	0.0280
1	1	0.2	0.2	0.4826	-0.3422	0.4646	-0.3816	0.1408
1	1	0.2	0.4	0.4826	-0.3422	0.4646	-0.3816	0.1408
1	9	0.1	0.2	0.0126	-0.0352	0.0005	-0.0122	0.00008
4	1	0.1	0.2	0.2463	-0.0275	0.1410	-0.0197	0.0460

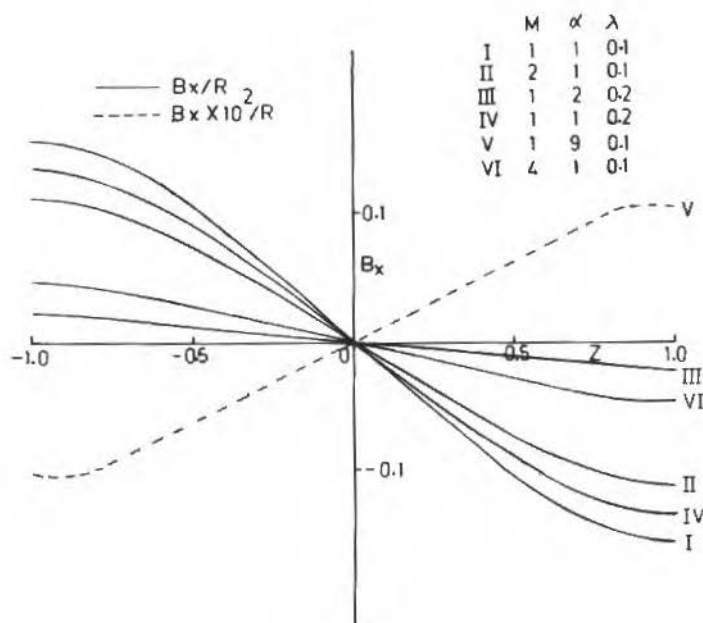


Figure 3. Induced magnetic field

Another quantity of interest is the volume flux. It is given by

$$Q_x = \int_{-1}^1 u \, dz \quad \text{and} \quad Q_y = \int_{-1}^1 v \, dz \quad (30)$$

The numerical values of  $Q_x$ ,  $Q_y$  are calculated and these are entered in Table I. An increase in  $M$  or  $\alpha$  leads to a decrease in  $Q_x$  but  $Q_x$  increases with increasing  $\lambda$ . But  $Q_y$  increases with increasing  $M$  or  $\alpha$  and decreases with increasing  $\lambda$ .

From the temperature field, we now study the rate of heat transfer. In dimensionless form, it is given by

$$\left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=-1} = \frac{1}{1+2\Gamma} + PER^2 F'(-1) \quad (31)$$

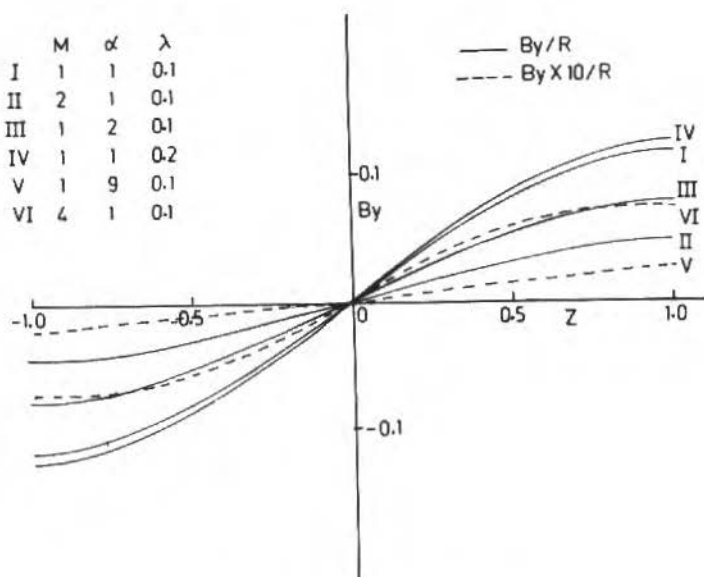


Figure 4. Induced magnetic field

We have calculated the numerical values for  $F'(-1)$  and these are entered in Table I. We observe from this table that when  $\alpha$  is large, say  $\alpha = 9$ , the contribution from  $F'(-1)$  is almost negligible and hence the contribution from  $PER^2F'(-1)$  is also negligible. Then in this case, the rate of heat transfer is given by  $1/1 + 2\Gamma$  i.e. it is inversely proportional to  $1 + 2\Gamma$ . For constant values of  $\alpha, \lambda, \theta'(-1)$  decreases with increasing  $M$ . It also decreases with increasing  $\lambda$ .

## CONCLUSIONS

- 1) An increase in  $M$  leads to a decrease in the axial velocity  $u$  and at large values of  $M$ , the axial velocity becomes flat.
- 2) An increase in  $\lambda$  increases the axial velocity and for large values of the

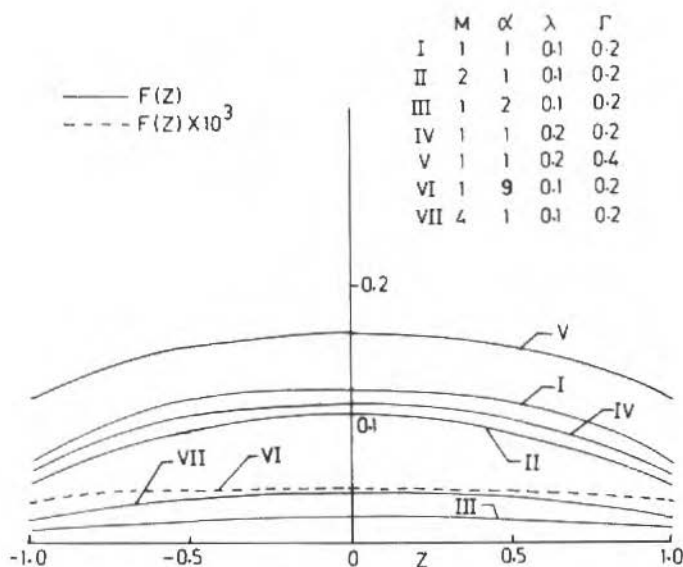


Figure 5. Temperature profiles

Ekman number  $\alpha$ , the axial velocity crosses the  $z$ -axis and for still larger values, it crosses the  $z$ -axis and for still larger values, it crosses the  $z$ -axis more often.

- 3) The transverse velocity  $v$  increases numerically when  $\lambda$  increases but decreases with an increase in  $\alpha$  or  $M$ .
- 4) Due to rarefaction of the medium, the axial component  $B_x$  of the induced magnetic field decreases and the transverse component  $B_y$  increases due to an increase in  $\lambda$  but decreases when  $\alpha$  increases.
- 5) An increase in  $\Gamma$  leads to an increase in  $F(z)$  and the temperature decreases with increasing  $\lambda$ ,  $M$  or  $\alpha$ .

- 6) When  $M = 1$ ,  $\lambda = 0.1$  an increase in  $\alpha$  from 1 to 2 leads to 67% decrease in the value of  $\tau_x$ .
- 7)  $\tau_y$  increases with increasing  $M$  or  $\alpha$  but decreases with increasing  $\lambda$ .
- 8)  $Q_x$  decreases with increasing  $M$  or  $\alpha$  but increases with increasing  $\lambda$ , whereas  $Q_y$  increases with increasing  $M$  or  $\alpha$  and decreases with increasing  $\lambda$ .
- 9) For high values of the Ekman number  $\alpha$ , the rate of heat transfer is inversely proportional to  $1 + 2\Gamma$ .
- 10) For constant values of  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\theta'(-1)$  decreases with increasing  $M$ . It also decreases with increasing  $\lambda$ .

## REFERENCES

- [1] SPARROW, E.M.; LUNDGREN, J.S. & LIN, S.H. Slip Flow in the Entrance Region of a Parallel Plate Channel, Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., p. 223, Stanford University Press, 1962.
- [2] DEISSLER, R.G. An Analysis of Second order Slip Flow and Temperature-Jump Boundary Conditions for Rarefied Gases, Int. Journ. Heat and Mass Transfer, 7, p. 681, 1964.
- [3] INMAN, R.M. Laminar Slip-flow of an Electrically Conducting Incompressible Rarefied-Gas in a Channel with a Transverse Magnetic Field, Appl. Sci. Res., 11B, pp. 391-400, 1965.
- [4] SOUNDALGEKAR, V.M. On Heat Transfer in MHD Channel Flows in Slip-Flow Regime, Proc. Nat. Inst. Sci., vol. 35, no.3, pp. 439-445, 1969.
- [5] VIDYANIDHI, V. & NIGAM, S.D., Secondary Flow in a Rotating Channel, Journ. of Math. and Phys. Sciences, 1, pp. 85-94, 1967.
- [6] SOUNDALGEKAR, V.M. & BHAT, J.P., Secondary Flow and Heat Transfer in Rarefied Gas in a Rotating Channel, to be published, Latin American Applied Research, 1990.
- [7] CHANDRASEKHAR, S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, p. 197, 1961.

- [8] HARTMANN, J. Hydrodynamics I. Theory of the laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Math.-Fys. Med., vol.15, no.6, Copenhagen, 1937.
- [9] VIDYANIDHI, V. Secondary Flow of a Conducting Liquid in a Rotating Channel, Journ. of Math. and Phys. Sciences, 3, pp. 193-199, 1969.



## EVALUATION OF INTERFERENCE LIFT FACTORS BY THE INTERSECTING BODIES TECHNIQUE

### AVALIAÇÃO DE FATORES DE INTERFERÊNCIA AERODINÂMICA PELA TÉCNICA DOS CORPOS INTERSECTANTES

P.A.O. Soviero & R.M. Girardi

Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
12225, São José dos Campos SP Brasil

L.C.C. Santos

EMBRAER - Empresa Brasileira de Aeronáutica  
12225, São José dos Campos SP Brasil

#### ABSTRACT

*The Intersecting Bodies Technique is studied by application of the Panel Method, in order to estimate the aerodynamic characteristics of complex configurations by direct superposition of isolated simpler parts that compose the body, including in this way, intrinsically, interference effects.*

*The simpler parts are independently discretized and by the establishment of a constant internal velocity potential, the pressure distribution over the external boundary of the body is obtained.*

*Results from the application to two-dimensional problems are presented, beginning with simpler ones in order to validate the technique and finishing with a classical problem of a wing-body interference in planar configuration. (at the framework of the Slender Body Theory)*

*Finally, the usefulness of the Intersecting Bodies Technique is analysed for aerodynamic design purposes.*

**Keywords:** Panel Methods ■ Aerodynamic Interference ■ Two-Dimensional Potential Flow ■ Green Theorem ■ Missile Aerodynamic

#### RESUMO

*Neste trabalho estuda-se, através do Método dos Painéis, a chamada Técnica dos Corpos Intersectantes, a qual permite avaliar as características aerodinâmicas de configurações complexas pela superposição de partes isoladas mais simples que as compõem, incluindo de maneira intrínseca os efeitos de interferência.*

*As partes mais simples que compõem o corpo em estudo são discretizadas independentemente e, pelo estabelecimento do mesmo valor para o potencial de velocidade interno as mesmas, obtém-se a distribuição de pressão externa à configuração completa.*

*Apresentam-se resultados da aplicação da técnica a problemas bidimensionais. Inicialmente, configurações simples são utilizadas para a validação da técnica e em seguida, estuda-se um problema clássico da Teoria dos Corpos Esbeltos o qual trata da interferência asa-fuselagem de configurações planares.*

*Finalmente, analisa-se a utilidade da Técnica dos Corpos Intersectantes para fins de projeto aerodinâmico.*

**Palavras-chave:** Método dos Painéis ■ Interferência Aerodinâmica ■ Escoamento Potencial Plano ■ Teorema de Green ■ Aerodinâmica de Mísseis

## INTRODUCTION

With the development of computer methods and resources, the Panel Method [1] has become an important design tool. However, during the technical development of a modern aircraft, the time and consequently the money spent in pressure distribution computations still represents a considerable amount of the total project cost. For this reason, there is an increasing trend in reducing computer costs without compromising the accuracy of the results, which requires new techniques for treating complete aerodynamic configurations.

In a rather simplified way we can distinguish three major numerical design phases, with certain distinct requirements:

### 1. Preliminary Design Phase

Here, performance and flying requirements indicate some configuration alternatives.

### 2. Final Concept

Considering manufacturing, maintenance and aesthetical constraints, the more adequate configuration is selected to be detailed.

### 3. Optimization

This is the phase for detailing and refining the project. The configuration suffers certain specific, local changes, to reach the final design, suggested by early wind tunnel tests. From a time-schedule view point (which means cost) this is the critical phase.

From the numerical solution point of view phases 1 and 2 are critical in terms of algorithm efficiency (speed), while in phase 3, the critical factor is accuracy.

During the design phases, when the configuration suffers a host of changes, one of the critical problems is to generate a suitable numerical mesh. In the first two phases, where some configuration alternatives are analysed, the generation of surface panels spends a great percentage of time. When it becomes necessary

to evaluate the local effects, where high accuracy of the algorithm is required, the refinement of the panel distribution is the most time consumer.

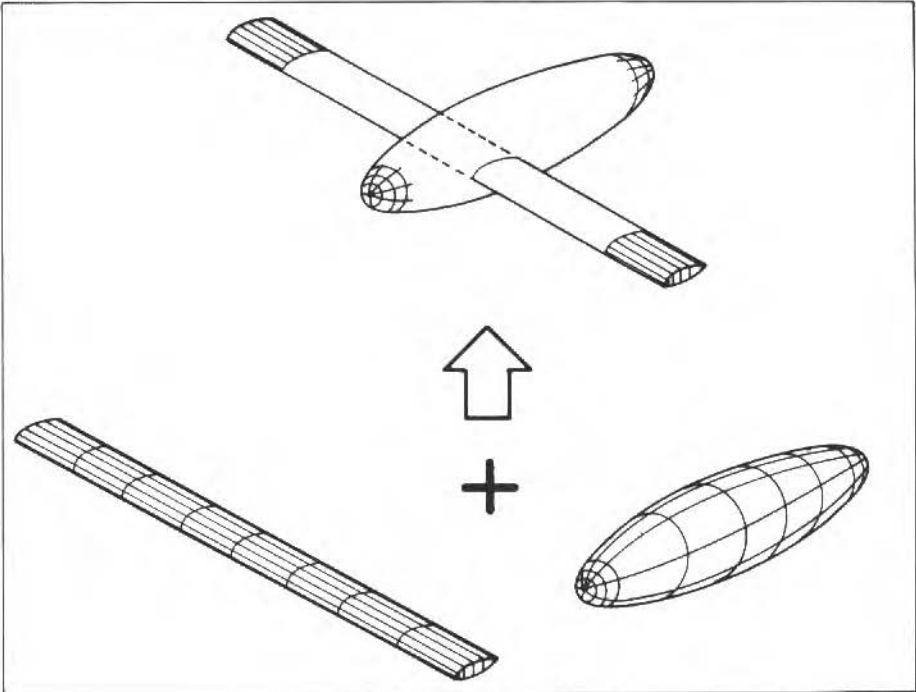


Figure 1. Intersecting Bodies Technique concept.

The isolated configuration elements, wing, fuselage, empennage, etc. are normally generated and refined without difficulties because of their natural discretizing directions. However, the generation and refinement of a suitable numerical mesh for intersecting regions, such as wing-fuselage junctions, require a long and tedious work of an experienced professional. This latter problem could be avoided by using the Intersecting Bodies Technique.

In this technique, pioneered by Ryan & Morchoisne [6], each part, such as wing, fuselage, empennage, etc. is independently discretized and then joined together to form the complete configuration, as shown in Figure 1.

One arrive then to the present work main objectives:

1. Based on Green's second theorem [1], it is demonstrated that the incompressible potential flow over a complex configuration can be calculated by superposing the potential of its simpler parts. The consequent geometrical superposition guarantees, then, the desired external form.
2. The two-dimensional flow over externally simple bodies are studied in order to evaluate the Intersecting Bodies Technique, comparing its results with analytical and standard panel method solutions.
3. The two-dimensional code, after having been "calibrated" by the previous applications, is used to analyse wing-body interference lift factors for a missile configuration.
4. Using the Intersecting Bodies Technique, an integrated aerodynamic design is proposed in order to optimize an aircraft design procedure.

## THEORETICAL BASIS

Incompressible potential flow problems over complex bodies, like the one shown in Figure 2, are analysed in the present work.

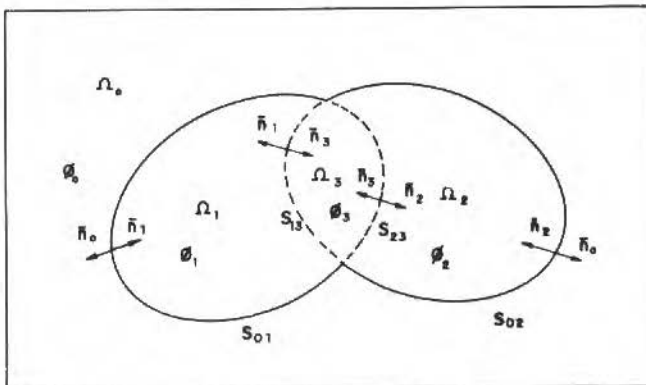


Figure 2. Scheme of intersecting problem.

These problems are ruled by the Laplace equation,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

which is solved in the  $\Omega_0$  domain, subjected to the Neumann boundary condition, i.e., zero normal velocity on the surfaces  $S_{01} \cup S_{02}$ . Far from the body the perturbation potential is zero.

After obtaining the total potential  $\Phi$ , the flow velocity  $\vec{V}$  and the pressure coefficient  $C_P$ , in each point of  $\Omega_0$ , can be determined by equations (2) and (3)

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi \quad (2)$$

$$C_P = 1 - (V/V_\infty)^2 \quad (3)$$

where  $V_\infty$  is the undisturbed flow velocity.

The solution of this problem can be obtained by using the second Green theorem [1], [3]. Each potential  $\Phi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) may be expressed as a function of  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  and  $\Phi_3$ , which are the potentials inside  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$ , respectively.

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon\Phi_i = & 4\pi\Phi_\infty + \int \int_{S_{01}} [K_1 \vec{n}_0 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_0 - \vec{\nabla}\Phi_1) + K_2(\Phi_0 - \Phi_1)] dS + \\ & + \int \int_{S_{02}} [K_1 \vec{n}_0 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_0 - \vec{\nabla}\Phi_2) + K_2(\Phi_0 - \Phi_2)] dS + \\ & + \int \int_{S_{13}} [K_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_1 - \vec{\nabla}\Phi_3) + K_2(\Phi_1 - \Phi_3)] dS + \\ & + \int \int_{S_{23}} [K_1 \vec{n}_2 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_2 - \vec{\nabla}\Phi_3) + K_2(\Phi_2 - \Phi_3)] dS, \quad (4) \end{aligned}$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are the scalar kernel functions defined by

$$K_1 = -\frac{1}{r}, \quad (5.a)$$

$$K_2 = \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (5.b)$$

and  $\epsilon$  equals 1 or 1/2, for  $\Phi_i$  calculated at an interior point of  $\Omega_i$  or on its boundary, respectively.

The parameter  $r$  is the distance between a variable point over the boundary and the point where  $\Phi_i$  is being calculated. The normal vector  $\vec{n}_i$  points into the  $\Omega_i$  domain bounded by the  $S_{ij}$  surface.

Equation (4) was written considering that the complex body (continuous line), shown in Figure 2, is a superposition of simpler ones, whose boundaries are  $S_{01} \cup S_{23}$  and  $S_{02} \cup S_{13}$ .

It is well known that terms like  $\sigma_i = \vec{n}_i \cdot (\vec{\nabla}\Phi_i - \vec{\nabla}\Phi_j)$  represent a jump in normal velocity across  $S_{ij}$ , and they are directly associated with a source surface distribution. Terms like  $\mu_i = (\Phi_i - \Phi_j)$  are the velocity potential jump, associated with a dipole surface distribution.

The surface functions  $\sigma_i$  and  $\mu_i$  are the unknowns of the problem, which must be determined by the boundary conditions.

Assuming a constant internal potential  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$  in the three subdomains  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), equation (4) reduces to

$$4\pi\epsilon\Phi_i = 4\pi\Phi_\infty + \int \int_{S_{01}} [K_1 \vec{n}_0 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_0 - \vec{\nabla}\Phi_1) + K_2(\Phi_0 - \Phi_1)] dS + \\ + \int \int_{S_{02}} [K_1 \vec{n}_0 \cdot (\vec{\nabla}\Phi_0 - \vec{\nabla}\Phi_2) + K_2(\Phi_0 - \Phi_2)] dS. \quad (6)$$

As can be seen from the above procedure, i.e., by assuming constant internal potentials on the internal domains of the simpler bodies, one is lead to the classical formulation, where only the external boundary of the complex body is considered.

The physical situation studied in this work can be analysed using source or/and dipole formulations. The best way to do this is the source-only formulation, since a dipole distribution, with normal velocity as boundary condition, would lead to a badly posed problem [1], because the  $\mu_i$  surface distribution is undetermined up to an additive constant. However, there is another way to solve the same problem. Since the laplacian operator is self adjoint, the associated Dirichlet internal problem (the boundary conditions are in terms of potential) can be considered. In this case, the dipole-only formulation is more adequate.

From the above considerations, one can state that the dipole is the suitable distribution to be used in the problem, where the potential inside the bodies should be considered.

The above formalism is suitable for general three-dimensional flows, and its application to two-dimensional ones requires slight modifications in equations (4) and (6): the surface integrals are replaced by line ones;  $4\pi$  is replaced by  $2\pi$  and the kernel functions  $K_1$  and  $K_2$  become

$$K_1 = -\log r, \quad (5.c)$$

$$K_2 = \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla}(\log r). \quad (5.d)$$

## NUMERICAL METHOD

Considering that the  $\Phi_i$  potential is evaluated on the surface of the simpler bodies (which form the complex body), equation (4), with  $\varepsilon = 1/2$ , is the integral equation that must be solved in order to determine the unknown function  $\mu_i$  (dipole-only formulation).

In this work, the above integral equation is solved numerically using the Panel Method [1]. In each panel the dipole surface density is assumed constant and the middle point is assumed to be a control point, where boundary conditions are enforced.

Assuming a discretization of  $N_1$  panels for one of the simpler bodies and  $N_2$  for the other, a system of  $N_1 + N_2$  linear equations is obtained, and may be written as

$$[A] [\mu] = [B], \quad (7)$$

where  $[A]$  is the influence coefficient matrix,  $[\mu]$  is the unknown vector, whose components are the constant dipole densities of each panel. Finally, the constant total potential ( $\Phi_k$ ) in the internal region of each body is described by the vector  $[B]$ .

Solving equation (7) for  $[\mu]$ , the potential at any point of the flow field can be calculated. In particular, one determines the potential at the control points,

and by means of a central finite difference scheme the tangential velocity is determined and, in consequence, the pressure coefficient ( $C_P$ ) is obtained.

In order to test the Intersecting Bodies Technique, two simple plane potential flows over bodies with known analytical or numerical solutions are studied.

### Flow over two circular cylinders partially intersected

The two-dimensional incompressible potential flow over two circular cylinders in tandem are calculated with the Intersecting Bodies Technique and compared with the standard Panel Method resolution. The later was solved in two ways: using source-only formulation developed by Hess & Smith [2] and the dipole-only formulation from Maskew [4].

The external boundary was discretized in 96 panels and each cylinder of the intersected configuration was divided in 64 equal panels. It is worth to note that the discretization density is the same in all resolutions.

One can verify that the pressure coefficient of the three numerical solutions are indistinguishable [7].

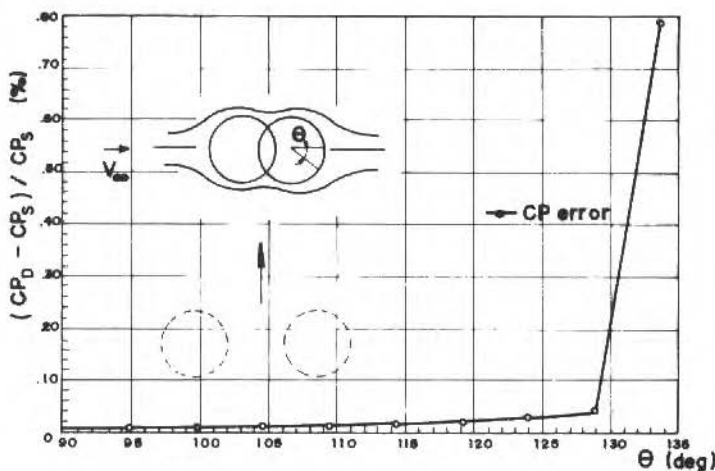


Figure 3a. Pressure coefficient percentual error. Pair of intersecting cylinders. Source and dipole solutions error.



In order to stand out the differences between the numerical methods, Figure 3a is presented above.

The percentual error of the pressure coefficient is very low around the body, excepting the control point of the panel nearest the junction. This can be explained by blowing up the junction region as shown in Figure 3b. In this region, the distances between neighbouring control points are smaller than the panels' lengths, resulting in localized numerical errors. Another source of errors is the numerical differentiation used to obtain the velocity potential distribution, as is shown in the Figure 5a.

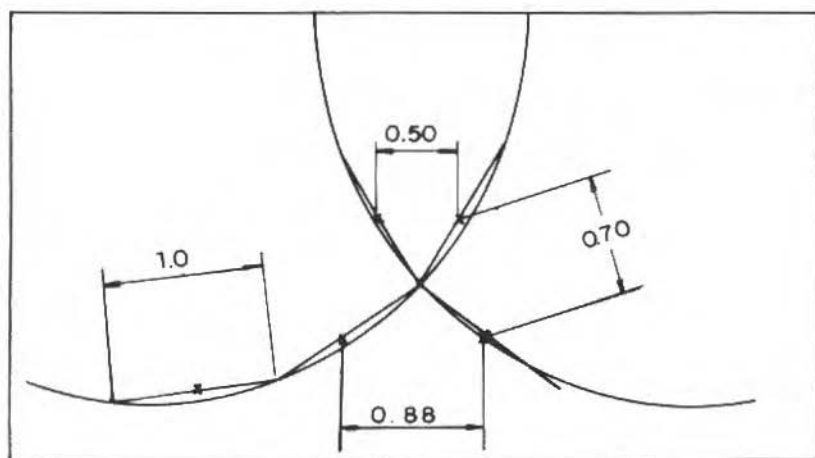


Figure 3b. Intersecting cylinders - junction region.

#### Flow over a circular cylinder generated by two intersecting bodies

The circular cylinder analysed in this sub-section was generated by the intersection of the two bodies shown in Figure 4.

Each body is discretized in 64 panels, in such a way that the external boundary of the resulting circular cylinder has the same number of external panels as each isolated body (i.e., in this case 64 panels).

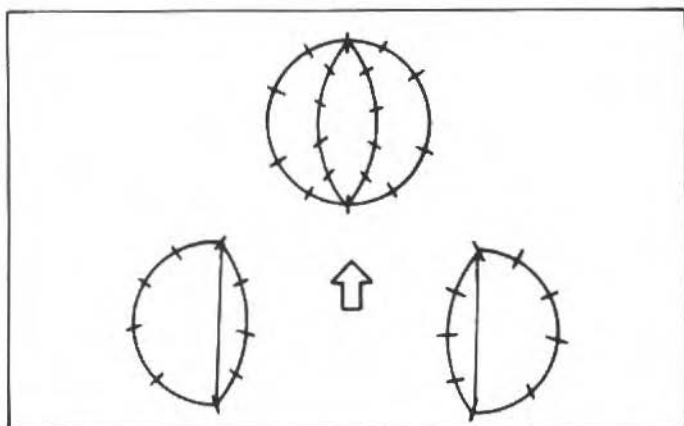


Figure 4. Circular cylinder generated by superposition.

The pressure coefficient distribution along the circular cylinder surface was compared to the analytical solution and good agreement is observed up to  $75^\circ$ . From that position up to  $90^\circ$ , what involves three panels in the present discretization, some discrepancies are verified [7]. This behavior can be observed in the Figure 5a, where the pressure coefficient error is presented together with the potential velocity error (these discrepancies are again due to numerical differentiation).

The errors for the flow over the circular cylinder are greater than the ones for the flow over the intersecting circular cylinders (see Figures 3a and 5a). This error increase, relative to the previous configuration, is due to the smaller distances between the control points of neighboring panels nearly the junction, as it can be seen by comparing Figures 3b and 5b.

Based on the previous examples the Intersecting Bodies Technique has proved to be very effective yielding errors lower than 10% (at the worst control point). The constant internal potential, which is the basis of the technique, is also numerically verified at internal points (at the control points this condition is assumed via enforcement of the boundary conditions).

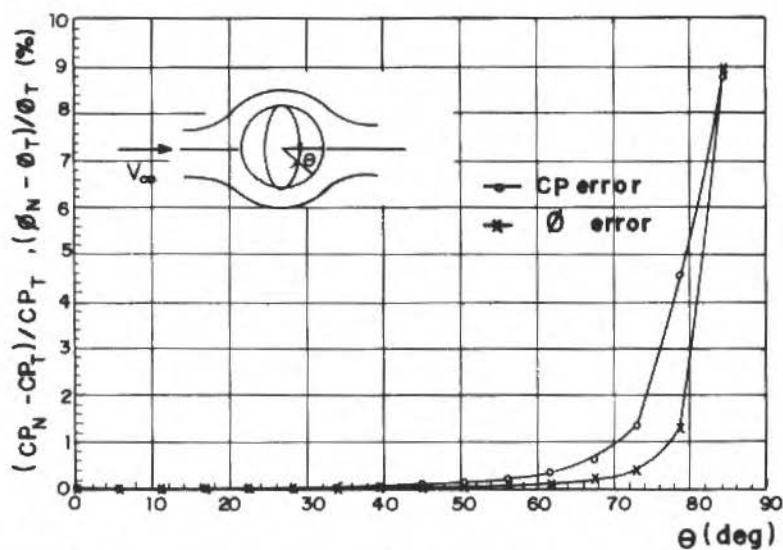


Figure 5a. Pressure coefficient and potential velocity percentage error. Circular cylinder generated by intersection. Theoretical and numerical solutions error.

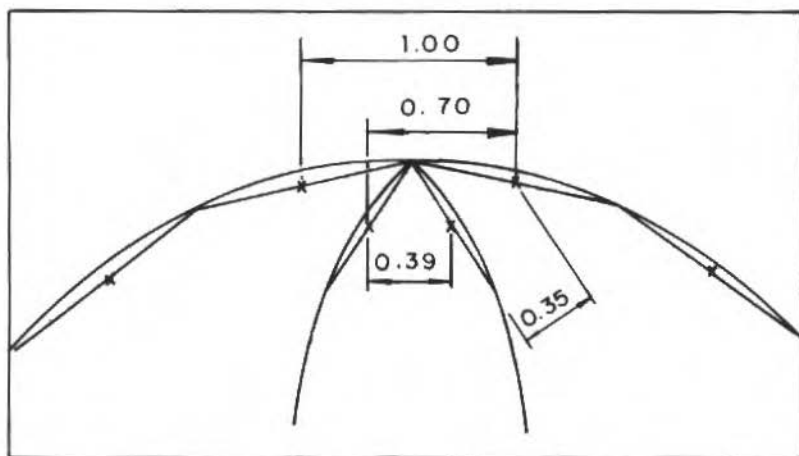


Figure 5b. Circular cylinder generated by intersection junction region.

## MISSILE INTERFERENCE LIFT FACTORS

The validation of the two-dimensional code was done in the previous section. Now, an important aspect of missile design, the problem of aerodynamic wing-body interference, can be studied.

Particularly, the interference effects in missiles are responsible by a considerable portion of the total normal force ( $Z$  direction force as in Figure 6), and this is comparable to the lift of the wing alone.

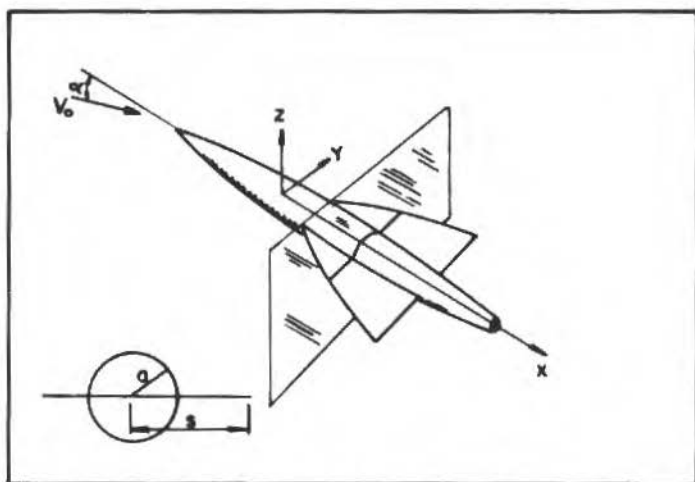


Figure 6. Planar configuration without roll.

In this section, the Slender Body Theory [5] is used to analyse the flow over a missile configuration at small angle of attack and without roll.

The total normal force ( $N_T$ ) of such planar configuration can be divided in four parts,

$$N_T = N_b + N_w + \Delta N_{b(w)} + \Delta N_{w(b)}, \quad (8)$$

where  $N_b$  and  $N_w$  are, respectively, the fuselage and wing alone normal forces. The last two terms represent additional normal forces acting, respectively, on

the fuselage due to the presence of the wing ( $\Delta N_{b(w)}$ ), and on the wing due to the presence of the fuselage ( $\Delta N_{w(b)}$ ).

Considering practical applications, the equation (8) can be rewritten in the following form

$$N_T = (K_b + K_w) \cdot N_w, \quad (9)$$

where the interference lift factors  $K_b$  and  $K_w$  are defined by

$$K_b = (\Delta N_{b(w)} + N_b) / N_w, \quad (10a)$$

$$K_w = (\Delta N_{w(b)} + N_w) / N_w, \quad (10b)$$

It is worth to note that the total normal force ( $N_T$ ) is a function only of  $N_w$ . The interference lift factors, as will be seen, depend only on the ratio between the fuselage radius ( $a$ ) and the wing semi-span ( $s$ ), (see Figure 6).

According to reference [5], it can be shown that there is a relationship between  $K_b$  and  $K_w$ , given by

$$K_b = (1 + a/s) - K_w \quad (11)$$

and therefore only one of the interference lift factors needs to be calculated.

The flow parameters of a slender body are obtained by means of solutions of two-dimensional flows over successive transversal planes along the fuselage axis [5].

Mathematically, the problem consists of the resolution of the Laplace equation in the transversal plane ( $Y, Z$ ) with Neumann boundary conditions. In order to use the Intersecting Bodies Technique, it is necessary to consider the equivalent problem, where internal Dirichlet boundary conditions are used. Therefore, the flat plate in the transversal plane must be changed to a plate with a very small thickness ( $t = 0.5\%$  of the plate span); see Figure 7.

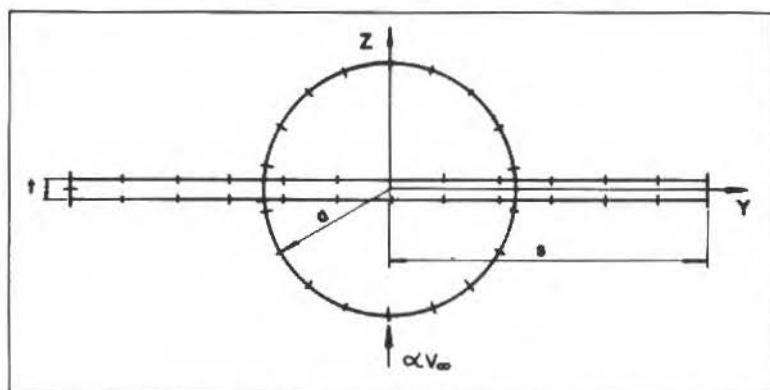


Figure 7. Discretized cross section.

The small thickness wing with  $s = 1.0$  are discretized in 104 panels (50 in the upper side, 50 in the lower side and two in each lateral sides) and the circular cylinders of radius 0.2, 0.4, 0.6 and 0.8 were discretized in 32, 64, 96 and 128 panels, respectively, in order to maintain the same discretization density.

The dipole densities are obtained from the solution of the matrixial equation (7). As the internal total potential was conveniently set equal to zero, it can be stated that the external total potential at each control point is equal to the dipole density [1].

In order to calculate the interference lift factor ( $K_w$ ), the numerical solutions for  $(\Delta N_{w(b)} + N_w)$  and  $N_w$  must be obtained.

As the perturbation potential ( $\varphi$ ) on the surface of the intersecting bodies are easily obtained from the total potential, the normal force  $(\Delta N_{w(b)} + N_w)$  can be determined by [5]

$$\Delta N_{w(b)} + N_w = q_0 \text{Im}[-2i \oint \varphi dW], \quad (12)$$

where  $W = Y + iZ$ ,  $q_0$  is the free-stream dynamic pressure and the contour  $C$  is the outline of the wing.

To obtain the normal force  $N_w$ , the previous procedure is adopted but now, only the plane flow over the wing alone is considered (what constitutes a simpler

numerical problem).

Table 1. Comparison between numerical and analytical solutions

$a/s$	$K_w$ (analytical)	$K_w$ (numerical)
0.2	1.162	1.161
0.4	1.349	1.347
0.6	1.555	1.552
0.8	1.774	1.781

The results of the several configurations mentioned above are in the reference [7]. The classical analytical solution [5] is obtained by the Conformal Mapping Theory, and its results, shown in the Table 1, are used for comparisons purposes. As can be seen, there is an excellent agreement between numerical and analytical results.

In Figure 8, a typical distribution of normal force is presented, where it might be observed a numerical error, called in this paper, a "leak" of normal force

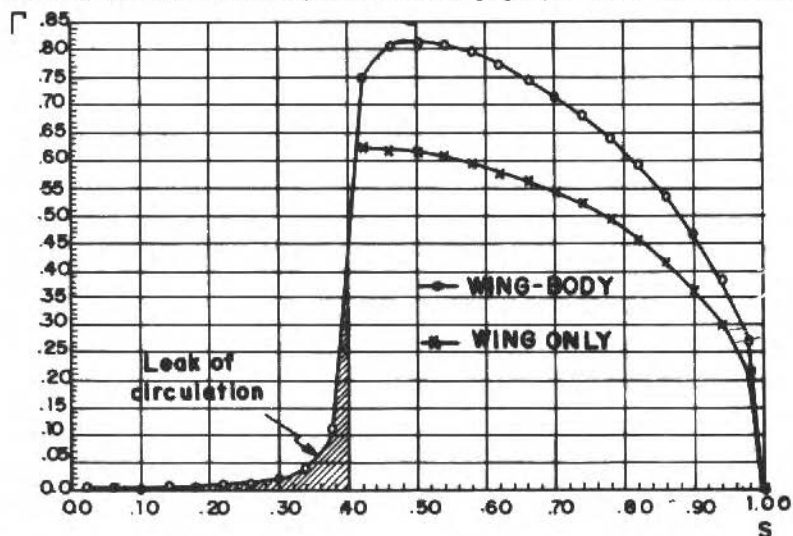


Figure 8. Circulation distribution. Missible planar configuration. Wing-body interference  $a/s = 0.4$ .

from the wing to the body. Nevertheless, this leakage is taken into account due to the way that the force is calculated (see equation (12)).

The above mentioned numerical error is shown in Figure 9, where it can be verified a maximum error of 0.7% for a case in which the external portion of the wing is discretized in 5 panels. This error decreases with the increase of the discretization.

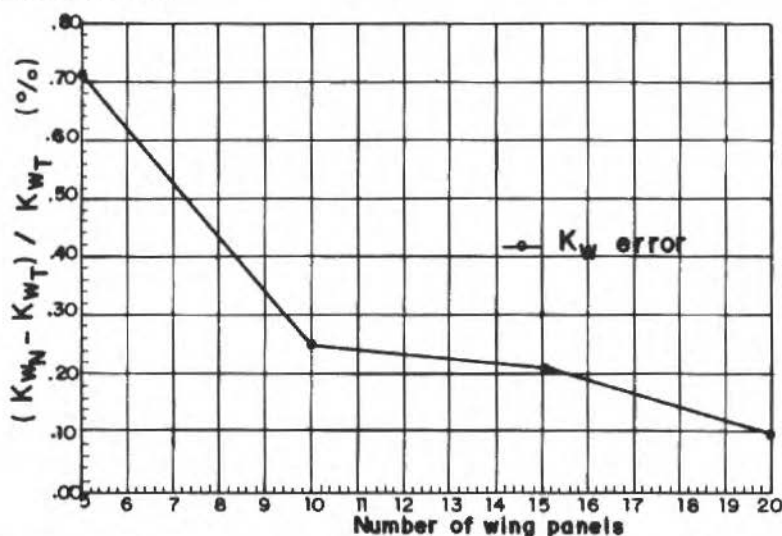


Figure 9. Interference lift factor. Theoretical and numerical solution error.

## FINAL REMARKS

The results shown in this work indicate that the Intersecting Bodies Technique has some advantages in aerodynamic design, stimulating once more the use of the panel Method, considering eventual limitations on computational resources.

The existence of local errors, in  $C_P$  or  $\Phi$ , in fact have no influence on global characteristics, for instance  $K_w$ , what has been shown by the excellent results, even in the case of poor discretizations. An increase in the number of panels tends to reduce this error, in such a way that the error level is finally a function of computer storage.



The wing-fuselage interference problem constitutes an important case for testing Intersecting Bodies Technique performance. The evaluation of missile interference lift factors, under a numerical point of view, is a critical case, for it deals with a thick body (circular cylinder) in the presence of a wing with very small thickness.

The obtained results open the way to explore the technique presented here for three dimensional practical cases.

The Intersecting Bodies Technique leads to a more general design framework, what can be called "Integrated Aerodynamic Design", which is described below.

During an aircraft aerodynamic design, changes must be introduced in order to satisfy constraints imposed by other design groups, like structural or hydraulic systems teams.

Sometimes the external aircraft shape must be changed and then the aerodynamic parameters must be recalculated. These aerodynamic changes are done in two phases:

(i) First of all the changed part is discretized and the aerodynamic parameters are determined for that part, isolated from the rest of the airplane. For example, if the nacelle's intake must be changed, an study considering the isolated nacelle is performed in order to optimize its shape.

(ii) After this initial analysis, the changed part is incorporated to the whole aircraft for a global aerodynamic study. In the above example, a global aerodynamic calculation must be redone considering, now, the optimized nacelle's intake.

In the classical procedure the discretization used in the first phase must, usually, be changed to perform the second phase. The Intersecting Bodies Technique avoids this change in the discretization from the first phase to the second one.

Taking into account this feature of the technique presented in this work, a data bank can be built, where the several discretized parts of an aircraft are saved. When one of these parts is changed the data bank is modified only locally, reducing the time for configuration studies. As another advantage one

can apply this technique to configuration parametric studies, for instance the search for the best position of a nacelle along the wing span.

### ACKNOWLEDGMENTS

The third author (L.C.C.S.) would like to acknowledge the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) for sponsoring the research which gave origin to this work.

### REFERENCES

- [1] HUNT, B. "The Panel Methods for Subsonic Flows: a Survey of Mathematical Formulations and an Outline of a New British Aerospace Scheme". von Kármán Institute Lecture Series, n. 4, 1978.
- [2] HESS, J.L. & SMITH, A.M.O. "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies". Progress in Aeronautical Sciences, vol. 8, pp. 1-138, 1968, ed. Kucheman, Pergamon Press, New York.
- [3] LAMB, H. "Hydrodynamics". Dover Publications, New York, 1945.
- [4] MASKEW, B. "Prediction of Subsonic Aerodynamic Characteristics: A Case for Low-Order Panel Methods", J. Aircraft, vol. 19, n. 2, 1982.
- [5] NIELSEN, J.N. "Missile Aerodynamics", McGraw-Hill, New York, 1960.
- [6] RYAN, J. & MORCHOISNE, Y. "Étude du Potentiel des Vitesses autour des Corps Intersectants". La Recherche Aérospatiale, n. 2, 1986.
- [7] SANTOS, L.C.C. "Estudo da Interferência Aerodinâmica através do Método das Singularidades", Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S.J. dos Campos, SP, 1988.

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE INSTALAÇÕES DE VENTILAÇÃO NATURAL

### NUMERICAL SIMULATION OF NATURAL VENTILATION PROCESS IN BUILDINGS

C. Melo e H.C. Caldeira Filho

NRVA - Núcleo de Refrigeração, Ventilação e Condicionamento de Ar  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC  
Cx. Postal 476  
88049 Florianópolis, SC Brasil

#### RESUMO

*O presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo matemático capaz de simular processos de infiltração e ou ventilação de ar em edificações. Para tanto o modelo leva em consideração a variação do perfil da camada limite atmosférica em função do tipo de terreno, a direção e a velocidade do vento, as dimensões da edificação, a diferença de temperatura entre o ar interno e o externo, a estratificação da temperatura interna, etc. Tal modelo é capaz ainda de analisar o efeito da vazão de ar induzida sobre a umidade relativa, a temperatura e a concentração de poluentes no interior de um determinado ambiente.*

**Palavras-chave:** Infiltração ■ Ventilação Natural ■ Comportamento Térmico de Edificações

#### ABSTRACT

*The objective of this work is to present a numerical model to simulate air infiltration/ventilation process in buildings. The model accounts for the nature and roughness of the surrounding terrain and the consequent atmospheric boundary layer, the wind speed and direction, the building dimensions, the temperature difference between the internal and the external air, the internal air temperature stratification, etc. This model is also able to analyse the effect of the induced air infiltration ventilation rates on the internal air relative humidity, temperature and pollutant concentration.*

**Keywords:** Air Infiltration ■ Natural Ventilation ■ Thermal Behaviour of Buildings

## INTRODUÇÃO

A temperatura, a umidade relativa e a concentração de poluentes, no interior de edificações são algumas das variáveis afetadas pela presença de uma vazão maior ou menor de ar externo.

Tal vazão pode ser induzida por um processo denominado infiltração, onde o ar move-se de uma maneira não controlada através de orifícios e frestas, induzido por um diferencial de pressão, resultante da ação combinada do vento e da diferença de temperatura entre o meio ambiente interno e externo. Um outro processo, denominado ventilação natural, consiste em utilizar o mesmo diferencial de pressão, em conjunto com aberturas estrategicamente colocadas. Obviamente tais processos podem ocorrer simultaneamente e ainda sob a presença de um sistema de ventilação mecânica.

Atualmente, encontram-se disponíveis técnicas experimentais, tais como a utilização de gases traçadores e de pressurização, que permitem a medição da vazão de ar induzida e a identificação das características de vazamento da edificação.

A utilização de tais técnicas, contudo, oferece uma série de inconvenientes. Por exemplo, a utilização da técnica dos gases traçadores exige a realização de medições durante um período de tempo relativamente longo, para estabelecer a relação entre a infiltração de ar e os parâmetros climáticos. Além disto, as técnicas experimentais podem, obviamente, ser empregadas apenas em edificações já existentes sendo, portanto, de pouca valia na fase inicial de projeto.

Dentro deste contexto as técnicas de modelação matemática, quando convenientemente validadas, vem a se constituir num forte instrumento para a avaliação e análise dos processos de trocas de ar por infiltração/ventilação.

A estrutura computacional, denominada FLOW2, a ser apresentada neste trabalho combina as características da edificação no que tange a penetração/exaustão de ar, com dados climáticos e com dados sobre o terreno, oferecendo assim um processo alternativo para estimar as trocas de ar por infiltração/ventilação em edificações (Figura 1). Tal programa apresenta ainda

como potencialidades o estudo da influência de tais trocas de ar sobre a umidade relativa, temperatura e sobre o teor de poluentes no interior de um determinado ambiente.

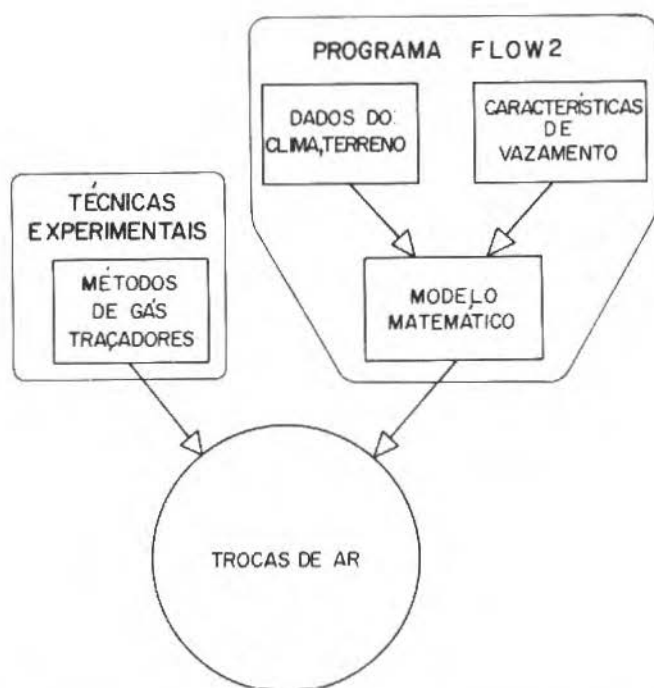


Figura 1. Técnicas alternativas para a estimativa das trocas de ar em edificações [7].

## FUNDAMENTOS BÁSICOS DO MODELO DESENVOLVIDO

Ao se modelar uma edificação com o objetivo de estimar as trocas de ar devido a infiltração/ventilação de ar externo, pode-se, em função dos dados disponíveis e dos resultados requeridos, optar por uma abordagem do tipo zona única ou de zonas múltiplas.

Uma modelação do tipo zona única é aquela na qual assume-se que o ar interno encontra-se bem misturado e a uma pressão uniforme. Por outro lado, na modelação do tipo zonas múltiplas, assume-se que o ar interno é particionado por repartições internas, apresentando assim pressões diferentes em cada zona.

Um estudo de validação realizado pelo A.I.V.C. (Air Infiltration and Ventilation Centre) [1], baseado em três conjuntos padrões de dados experimentais, correspondentes a uma edificação sem proteção, com proteção média, e com bastante proteção a ação do vento, concluiu que, dentre os modelos testados, o modelo desenvolvido pelo L.B.L. (Lawrence Berkeley Laboratory-USA) [2], apresentava o melhor desempenho. Tal modelo, entretanto, apresenta como principal desvantagem a dependência em relação a testes de pressurização. Isto faz com que o mesmo possa ser empregado apenas em edificações já existentes, revelando-se assim de pouca valia na fase inicial de projeto.

A falta de um modelo, baseado na técnica de modelação de zonas múltiplas, e a dependência do modelo do LBL em relação a testes de pressurização, originou o desenvolvimento do programa FLOW [3]. Tal programa foi desenvolvido especificamente para estimar as trocas de ar por infiltração em edificações, tanto com a técnica de zona única como de zonas múltiplas.

Melo [3,4] realizou um exercício de validação de programa FLOW, onde comprovou, ser o mesmo o de maior confiabilidade entre os modelos existentes.

Como extensão do trabalho de Melo [3], Caldeira Filho [5], desenvolveu uma nova versão do programa FLOW, denominada FLOW2, visando possibilitá-lo a :i) estimar as trocas de ar através de grandes aberturas; ii) calcular mais precisamente os coeficientes de pressão; iii) analisar a influência das trocas de ar sobre a concentração de poluentes; iv) analisar a influência das trocas de ar na variação das condições psicrométricas do ar interno e v) analisar o efeito de gradientes de temperatura entre zonas adjacentes sobre as vazões de ar induzidas.

A seguir, apresentar-se-ão os fundamentos matemáticos do programa FLOW2, tendo em vista as hipóteses simplificativas apresentadas por Melo [6].

**Equação da vazão.** A equação básica que rege o fenômeno é a equação clássica para escoamento através de orifícios:

$$Q = C \cdot \Delta P^n \quad (1)$$

onde  $Q$  corresponde a vazão de ar induzida,  $C$  ao coeficiente de vazão e  $\Delta P$  ao diferencial de pressão resultante da ação do vento e da diferença de temperatura entre o ar interno e externo.

O expoente  $n$  é relacionado com o regime do escoamento, variando entre os limites de 0,5 para regime turbulento e 1,0 para fluxo laminar.

A equação (1) é adequada, principalmente, para estimativas de vazão de ar através de pequenas aberturas, tais como orifícios e fendas. Para aberturas do tipo comumente encontrado em instalações de ventilação natural, o escoamento tende a ser turbulento e pode ser melhor representado pela equação a seguir [7]:

$$Q = K \cdot A \cdot (2\Delta P/\rho)^{0,5} \quad (2)$$

onde  $K$  refere-se ao coeficiente de descarga,  $A$  a área da abertura e  $\rho$  a densidade do ar.

Para aberturas de grandes dimensões, tais como portas de carga e descarga em pavilhões industriais, uma abordagem diferente é empregada, já que as mesmas podem conter o plano neutro [7]. Isto significa dizer que pode ocorrer, por exemplo, que o ar entre pela parte inferior e saia pela parte superior da mesma abertura. Uma solução conveniente consiste em reescrever a equação (2), da seguinte forma:

$$Q_x = K_x A_x (2\Delta P/\rho)^{0,5} \quad (3)$$

onde o subscrito  $x$  refere-se a uma faixa horizontal da abertura.

**Infiltração de ar induzida pela ação do vento.** A pressão exercida sobre as paredes de uma edificação, pela ação do vento, varia de um modo complexo, devido principalmente ao perfil da camada limite atmosférica, a presença de corpos vizinhos e às características, aerodinâmicas do fluxo de ar ao redor da edificação. A Figura 2, mostra uma distribuição típica de pressão, encontrada em edificações de formato retangular.

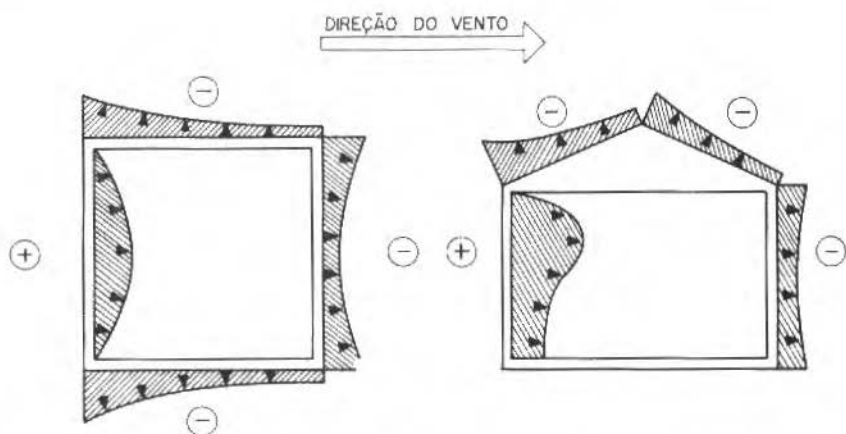


Figura 2. Distribuição de pressão devido a incidência do vento sobre uma edificação. a) Planta baixa e b) Secção transversal [7].

Tal pressão,  $P_v$ , pode ser expressa matematicamente pela equação a seguir:

$$P_v = C_p \cdot \rho V^2 / 2 \quad (4)$$

onde  $C_p$  corresponde ao coeficiente de pressão e  $V$  a velocidade do vento.

Uma prática tradicional em programas de infiltração/ventilação é considerar a velocidade,  $V$ , na equação (4), como sendo a velocidade do vento, registrada em uma estação meteorológica próxima, geralmente no nível de 10 metros.

De acordo com Melo [8], tal procedimento mostra-se inadequado devido, principalmente, a variação do perfil da camada limite atmosférica em função do tipo de terreno.

No programa FLOW2, assume-se um perfil exponencial para a camada limite atmosférica, de acordo com a seguinte equação:

$$V_z / V_g = (Z / Z_g)^\alpha \quad (5)$$

onde  $V_z$  refere-se a velocidade média do ar, numa altura  $Z$ ,  $V_g$  a velocidade livre (velocidade não afetada pela rugosidade do terreno) e  $Z_g$  refere-se a altura na qual a velocidade livre é atingida.



Para determinar os valores da constante  $\alpha$  e de  $Z_g$ , utilizam-se as recomendações de Davenport [9], mostradas graficamente na Figura 3.

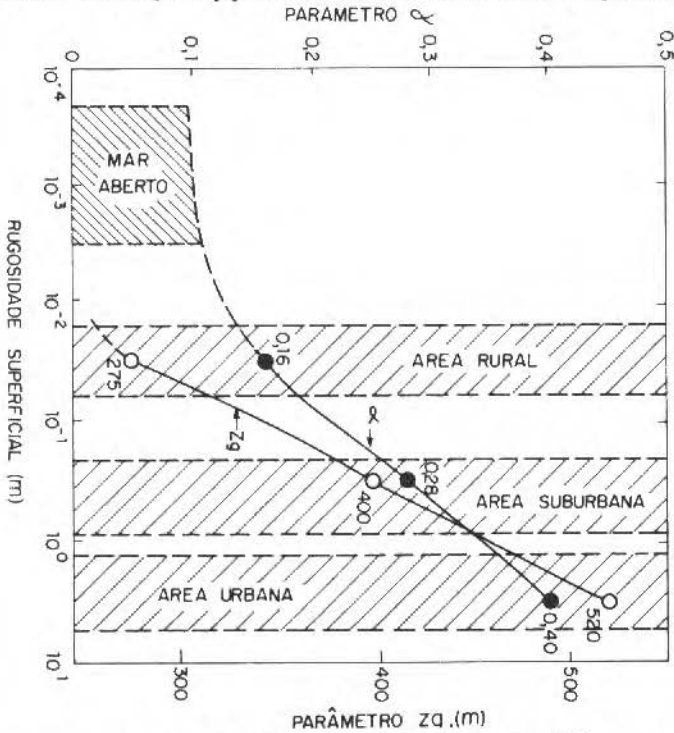


Figura 3. Parâmetros do perfil da camada limite atmosférica para diferentes superfícies [9].

Como as medições meteorológicas são usualmente, realizadas em locais com pouca ou nenhuma obstrução à ação do vento como por exemplo, em aeroportos, enquanto as edificações encontram-se, geralmente, em regiões urbanas, torna-se necessário corrigir os valores registrados em estações meteorológicas, em decorrência da variação do perfil da camada limite atmosférica.

Assumindo que a velocidade livre,  $V_g$ , independe do tipo de terreno, a velocidade do vento, em qualquer posição e no local em consideração, pode ser estimada através da seguinte equação:

$$V_z = (Z_g^*/Z^*)^{\alpha^*} (Z/Z_g)^{\alpha} V_z^* \tag{6}$$

onde as variáveis com asterisco referem-se ao local onde as medições foram realizadas e as variáveis sem asterisco, ao local em consideração.

A velocidade,  $V$ , a ser empregada na equação (4), no programa FLOW2, depende do tipo de expressão empregada para avaliar os coeficientes de pressão. No caso de edificações com relativa proteção a ação do vento, a equação (6) é empregada fazendo-se  $Z$  igual a altura da edificação e, em caso contrário, utiliza-se a velocidade média sobre a área de interesse, calculada de acordo com a seguinte equação:

$$V = \int_{Z_1}^{Z_2} V dZ / \int_{Z_1}^{Z_2} dZ \quad (7)$$

onde  $Z_1$  e  $Z_2$  referem-se, respectivamente, ao nível inferior e superior da parede em consideração. Substituindo-se a equação (6) na equação (7) e integrando-se obtém-se:

$$V = V_g \left\{ (Z_2^{\alpha+1} - Z_1^{\alpha+1}) / [Z_g^\alpha (\alpha + 1) (Z_2 - Z_1)] \right\} \quad (8)$$

Uma das maiores restrições aos programas que tem como objetivo estimar as trocas de ar por infiltração, reside no fato dos mesmos empregarem os coeficientes de pressão como dados de entrada [1]. Isto faz com que, para cada edificação a ser simulada, torne-se necessário a realização de testes experimentais com modelos, em túneis de vento. Para evitar tais testes, muitos autores empregam dados de normas de construção civil e depois, considerando que tais dados representam os valores máximos para cada face da edificação, fazem hipóteses sobre o valor a ser adotado como valor médio. Tal procedimento, confere, obviamente, muitos graus de liberdade para a simulação.

Numa tentativa de evitar tal procedimento procurou-se desenvolver uma metodologia, descrita em [3], para estimar os valores médios para os coeficientes de pressão. Assim, em edificações não protegidas da ação do vento, adotou-se o procedimento sugerido por Allen [10], e expresso através das equações (9) e (10).

$$C_p = a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i \cos(i\theta) \quad (9)$$

$$a_i = D_0 + D_1 \ln R + D_2 (\ln R)^2 + \dots + D_j (\ln R)^j \quad (10)$$

onde  $\theta$  refere-se ao ângulo formado entre a normal a superfície e a direção do vento, e  $R$  refere-se a relação entre o comprimento da superfície perpendicular a superfície em consideração e o comprimento desta última. Os coeficientes  $D_j$  são apresentados em [10].

Para edificações com relativa proteção à ação do vento, utilizou-se em [3] um processo de interpolação de Lagrange a partir dos coeficientes de pressão, apresentados na Ref. [11]. Tais coeficientes foram obtidos para um grau de proteção de 1/6, onde o numerador refere-se a altura média das edificações vizinhas e o denominador a altura da edificação em questão. Para outros graus de proteção é apresentada uma equação de correção da vazão, calculada utilizando-se os coeficientes para o grau de proteção de 1/6. Baseado neste procedimento, uma equação para corrigir diretamente o valor do coeficiente de pressão é desenvolvida na Ref. [3].

Com o acesso aos dados experimentais de Bowen [12], os quais formam a base do trabalho na Ref. [11], em [5] foram testadas as equações de correção apresentadas por Show [11] e por Melo [3], e verificou que as mesmas, mostravam-se tanto mais inadequadas, quanto maior o grau de proteção requerido. Desta forma em [5] foi desenvolvido um novo algoritmo de cálculo, utilizando todos os pontos experimentais fornecidos por Bowen [12] e utilizando um processo de regressão linear para correlacioná-los.

**Infiltração de ar induzida pela ação do efeito chaminé.** O efeito chaminé surge como resultado de um diferencial de temperatura e, conseqüentemente, de um diferencial de densidade entre o interior e o exterior da edificação. Isto cria uma diferença entre os gradientes de pressão do ar interno e externo, fazendo com que surja um diferencial de pressão vertical.

Quando a temperatura do ar interno é maior do que a do ar externo, o fluxo de ar entra através das aberturas situadas na parte mais baixa da edificação e sai através das aberturas situadas na parte mais alta. O sentido do fluxo é inverso quando a temperatura do ar interno é menor do que a do ar externo (Figura 4).

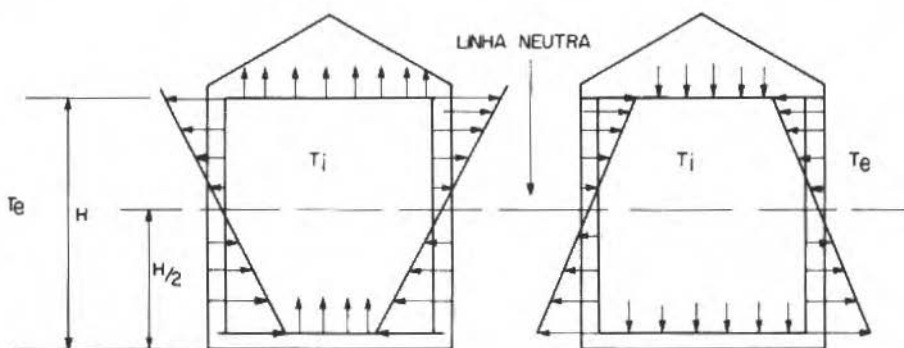


Figura 4. Diferenças de pressão induzidas por efeito chaminé: a)  $T_i > T_e$  e b)  $T_i < T_e$ .

O nível, sobre o eixo vertical, onde a pressão interior se iguala com a pressão exterior é chamado linha neutra. A linha neutra ficará localizada a meia altura da edificação quando a distribuição de aberturas for uniforme (Figura 4). Entretanto, se a passagem de ar é denominada por uma determinada abertura, a linha neutra ficará localizada mais próxima desta abertura. Considerando ainda que a ação do vento pode modificar a posição da linha neutra, conclui-se que, na realidade, tal posição é raramente conhecida com precisão.

A equação apresentada em [3,4,6], para calcular o diferencial de pressão devido ao efeito chaminé, em um ambiente com temperatura interna uniforme, apresenta como restrição, o fato de depender da especificação da posição da linha neutra. Para resolver este problema, Caldeira Filho [5] considerou o efeito chaminé sempre em referência ao nível da abertura mais baixa. Este procedimento faz com que os valores absolutos das pressões nas aberturas sejam diferentes dos valores reais, mas não afeta as diferenças de pressão que continuarão com os seus valores inalterados.

Assim, para um ambiente com temperatura interna,  $T_i$ , uniforme a equação que estabelece o diferencial de pressão, devido ao efeito chaminé,  $P_c$ , entre duas aberturas situadas nas alturas  $h_1$  e  $h_2$ , tal que  $h_1 < h_2$ , pode se dada pela equação a seguir

$$P_c = -0,0342 P_b(h_2 - h_1)[1/T_e - 1/T_i] \quad (11)$$

onde  $P_b$  corresponde a pressão atmosférica e  $T_e$  a temperatura absoluta de ar externo.

Para calcular o diferencial de pressão, devido ao efeito chaminé, em ambientes que apresentam uma estratificação térmica vertical, a equação (11) deve ser modificada, pois o gradiente de pressão interno será não linear, em decorrência da variação da densidade com a temperatura. Assim,

$$P_i = P_o - g \int_{h_0}^h \rho dh \quad (12)$$

onde  $P_i$  corresponde a pressão do ar interno no nível de referência  $h$  e  $P_o$  corresponde a pressão no nível de referência  $h_0$ .

Assumindo uma variação linear para a temperatura do ar interno,  $T_i$ , do tipo

$$T_i = b \cdot h + T_o \quad (13)$$

e considerando o ar como um gás perfeito, obtém-se,

$$P_c = 0,0342 P_b \left[ \frac{(h_2 - H_2)}{T_e} - 1/b \ln \left( \frac{bh_2 + T_o}{bh_1 + T_o} \right) \right] \quad (14)$$

**Ação combinada do vento e do efeito chaminé.** Apesar dos efeitos do vento e do efeito chaminé terem sido apresentados separadamente, as edificações estão sujeitas simultaneamente a ambos efeitos. Isto se expressa, calculando a diferença de pressão total,  $P_t$ , sobre uma abertura, através da soma algébrica das diferenças de pressão criadas pela ação do vento, e pelo efeito chaminé, ou seja:

$$P_t = P_v + P_c \quad (15)$$

**Determinação das pressões internas.** A pressão do ar interno, em uma determinada zona, é determinada através da equação da continuidade. Ou seja, para uma zona com " $N$ " passagens de ar, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i Q_i = 0 \quad (16)$$

onde  $Q_i$  refere-se a vazão através da  $i$ -ésima passagem de ar.

Para diferenças de temperatura, entre o ar interno e externo, inferiores a  $20^{\circ}\text{C}$ , o primeiro termo da equação (16) pode ser desprezado, já que a diferença de densidade resultante é desprezível em relação ao valor absoluto da densidade do ar [7]. Assim,

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0 \quad (17)$$

No caso de existir um sistema de ventilação mecânica adiciona-se/subtrai-se, na equação (17), a vazão de ar fornecida/extraída mecanicamente.

Para edificações com zonas múltiplas, ter-se-á uma equação da forma da equação (17), para cada zona. Isto faz com que torne-se necessária a solução simultânea de um sistema de equações não lineares. A solução de tal sistema é obtida, no programa FLOW2, através da utilização do método iterativo de Newton-Raphson, para múltiplas equações e incógnitas, e da técnica da matriz esparsa [13].

**Avaliação do impacto do sistema de ventilação sobre a concentração de poluentes.** Após a determinação das trocas de ar, em cada zona de uma edificação, pode-se utilizar tais informações para avaliar a variação temporal da concentração de um determinado poluente. Para tanto admitem-se condições de mistura perfeita, ou seja, que o ar admitido mistura-se uniformemente com a massa de ar interno [5]. Para equacionar este problema, considera-se a Figura 5.

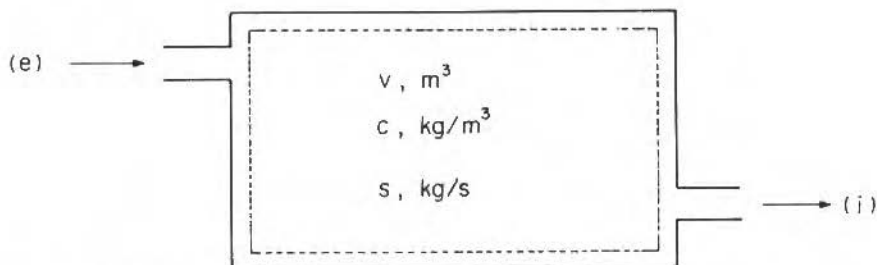


Figura 5. Volume de controle para a dedução da equação de diluição.

Aplicando a equação da continuidade, obtém-se:

$$dm/dt = \dot{m}_e - \dot{m}_i + S \tag{18}$$

ou

$$V\ell dC/dt + Q(C_i - C_e) = S \tag{19}$$

onde  $\dot{m}$  refere-se ao fluxo de massa de poluente,  $V\ell$  ao volume do ambiente considerado,  $S$  a taxa de emissão de poluente e  $C$  a concentração de poluente. Integrando a equação (19), obtém-se:

$$C_i(t) = (C_e + S/Q)(1 - e^{-nt}) + C_0 e^{-nt} \tag{20}$$

onde  $C_0$  refere-se a concentração inicial de poluente,  $n$  a taxa de trocas de ar, e  $t$  ao tempo.

Para edificações com zonas múltiplas, a equação (19) toma a seguinte forma:

$$V\ell_j dC_j/dt = \sum_{k=1}^{N_j} Q_{kj} C_{kj} + S_j \tag{21}$$

onde  $N_j$  refere-se ao número de passagens de ar na  $j$ -ésima zona e  $C_{kj}$  a concentração do poluente no ar adentrando ou saindo a  $j$ ésima zona.

Assim, para analisar uma edificação com zonas múltiplas torna-se necessário resolver, simultaneamente, um conjunto de equações diferenciais, o que é feito através do método de Runge-Kutta [14].

**Avaliação do impacto do sistema de ventilação sobre as condições psicrométricas do ar interno.** Para determinar a variação temporal das condições psicrométricas do ar interno, decidiu-se estabelecer equações que permitam o cálculo da umidade absoluta e da entalpia do ar em cada intervalo de tempo. Com estas propriedades determinadas, e considerando que a pressão interna é, praticamente, idêntica a pressão atmosférica, pode-se calcular as demais propriedades psicométricas [5].

Assim, para determinar a variação temporal da umidade absoluta, em cada zona de uma edificação,  $W_j$ , utiliza-se a seguinte equação

$$d(M_j W_j)/dt = \sum_{k=1}^{N_j} \dot{m}_{kj} W_{kj} + S w_j \tag{22}$$

onde  $M_j$  refere-se a massa de ar seco na  $j$ -ésima zona,  $\dot{m}_{kj}$  ao fluxo de massa de ar seco, através da passagem  $k$ , para ou da  $j$ -ésima zona,  $W_{kj}$  a umidade absoluta do ar adentrando ou saindo da  $j$ -ésima zona e  $Sw_j$  a geração de vapor d'água na  $j$ -ésima zona.

A variação temporal da entalpia,  $h_j$ , é obtida a partir da equação da energia, como indicado a seguir:

$$d(M_j h_j)/dt = \sum_{k=1}^{N_j} \dot{m}_{kj} h_{kj} + H_j \quad (23)$$

onde  $h_{kj}$  refere-se a entalpia do ar adentrando ou saindo da  $j$ -ésima zona e  $H_j$  a geração de calor na  $j$ -ésima zona.

O conjunto de equações resultantes, da aplicação das equações (22) e (23) a cada zona de uma edificação é resolvido simultaneamente através do método de Runge-Kutta [14].

## ANÁLISE DAS POTENCIALIDADES DO PROGRAMA

Com o objetivo de demonstrar as potencialidades do programa FLOW2, montaram-se dois conjuntos de dados padrões, referidos como edificação tipo A e edificação tipo C [5]. A edificação tipo A, cujos dados construtivos são fornecidos detalhadamente na referência [5], é adequada para ressaltar as potencialidades do programa no que se refere ao cálculo das vazões de ar induzidas. Já a edificação tipo C destina-se mais a demonstrar as potencialidades do programa, referentes a influência das taxas de trocas de ar sobre o teor de poluentes e sobre as condições psicrométricas do ar interno. Assim, as Figuras 7 e 8 referem-se a edificação tipo A e as Figuras 9, 10, 11 e 12 a edificações tipo C.

A Figura 6 mostra a influência da diferença de temperatura entre o ar interno e externo no nível do piso, na ausência completa de vento, sobre a vazão de ar induzida. As curvas apresentadas são, ainda, função do coeficiente angular,  $b$ , admitido para considerar uma estratificação linear da temperatura do ar interno. Verifica-se, portanto, que a vazão de ar induzida é tanto maior quanto maior a diferença de temperatura entre o ar interno e externo, no nível do piso, e quanto maior a estratificação vertical da temperatura interna.



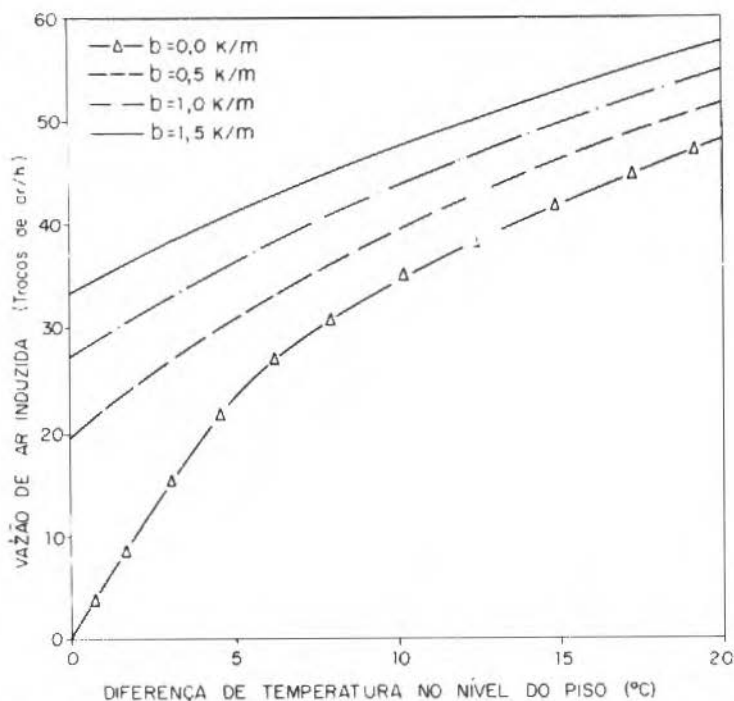


Figura 6. Vazão de ar induzida em função da diferença de temperatura entre o ar interno e externo.

A Figura 7 ilustra o efeito da diferença de altura entre as aberturas inferiores e superiores, sobre a vazão de ar induzida, na ausência da ação do vento e sob uma diferença, de  $3^{\circ}\text{C}$ , entre as temperaturas do ar interno e externo na zona de ocupação. A exemplo da Figura 6, pode-se, também, observar que tal vazão é tanto maior, quanto maior for a diferença de altura, entre as aberturas e quanto maior for a estratificação térmica.

A Figura 8 ilustra o efeito da velocidade e da direção do vento, na ausência de efeito chaminé, sobre a vazão de ar induzida. Convém ressaltar que a orientação de  $0^{\circ}$ , corresponde a posição na qual o vento incide paralelamente sobre as aberturas inferiores e superiores (vide esquema na Figura 7) e a posição de  $90^{\circ}$  corresponde a uma incidência normal. Como esperado, tal vazão aumenta com

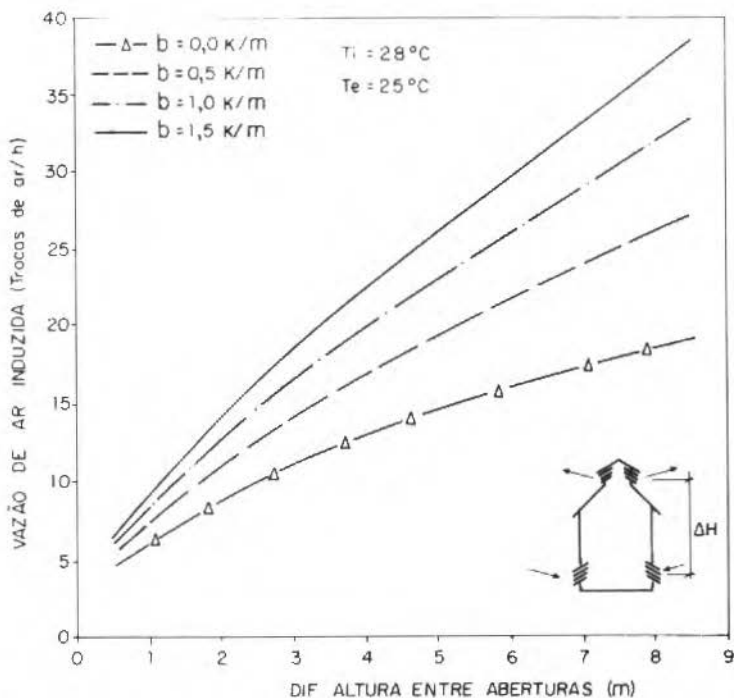


Figura 7. Vazão de ar induzida em função da diferença de altura entre as aberturas inferiores e superiores.

o aumento da velocidade do vento. Por outro lado, o efeito da direção do vento depende da distribuição de aberturas e da orientação da edificação em questão. Para a edificação sob análise (tipo A [5]), a vazão de ar induzida aumenta até a direção de  $60^\circ$ , quando então começa a decrescer levemente até orientação de  $90^\circ$ .

A Figura 9 demonstra a potencialidade do programa desenvolvido na análise da influência do sistema de ventilação sobre o teor de poluentes em um determinado ambiente. No caso em questão, a edificação tipo C [5], quando submetida a um diferencial de temperatura entre o ar interno e externo de  $3^\circ\text{C}$  e na ausência de estratificação da temperatura interna e da ação do vento, apresentou uma vazão de ar induzida de 1,3 trocas de ar/h. Admitindo-se esta vazão constante ao

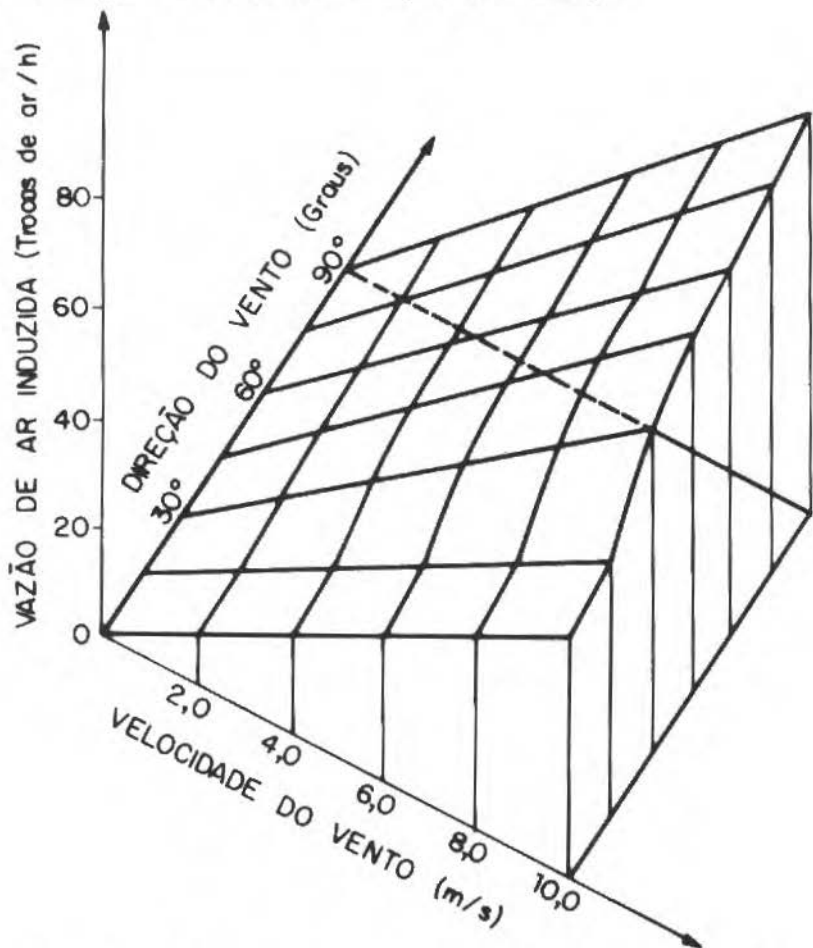


Figura 8. Efeito da velocidade e da direção do vento sobre a vazão de ar induzida.

longo do tempo, pode-se avaliar a variação da concentração de um determinado poluente em função do tempo e em diversas condições, como ilustrado na Figura 9.

Para facilitar a interpretação dos resultados, resolveu-se trabalhar com a concentração expressa em p.p.m. (partes por milhão). Para tanto tornou-se necessário exprimir a taxa de geração de poluente,  $S$ , em  $m^3/s$  e multiplicar

a relação  $(S/Q)$ , na equação (20) por  $10^6$ . Desta forma, obteve-se a solução da equação (20) para os seguintes casos:

- i)  $C_e = 0$ ,  $C_0 = 1200\text{ppm}$ ,  $S = 0$ ,
- ii)  $C_e = 300\text{ppm}$ ,  $C_0 = 0$ ,  $S = 0$ ,
- iii)  $C_e = 1300\text{ppm}$ ,  $C_0 = 0$ ,  $S = 11 \times 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$  e
- iv)  $C_e = 300\text{ppm}$ ,  $C_0 = 1200\text{ppm}$ ,  $S = 11 \times 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$

Considerando-se a equação (20) e os casos apresentados anteriormente, verifica-se que a medida que o tempo aumenta a concentração deve tender para os seguintes valores: i) zero, ii) 300ppm, iii) e iv)  $10^6 S/Q$  (o que é igual, no caso em questão, a 1040ppm).

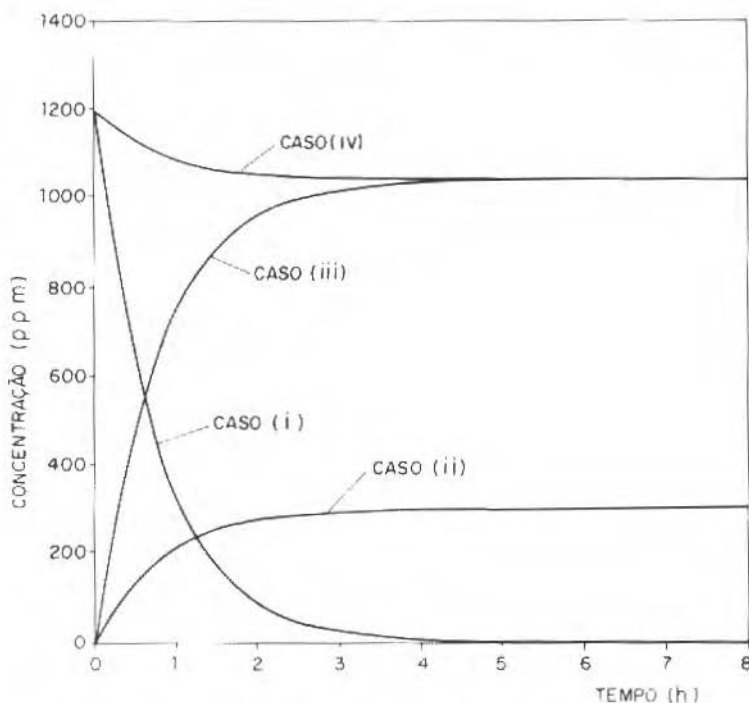


Figura 9. Variação temporal da concentração de poluentes do ar interno.

A Figura 10 mostra o efeito das vazões de ar induzidas sobre a temperatura e a umidade relativa de um ambiente (edificação tipo C sem repartições internas [5]), quando o mesmo está sujeito a uma geração de calor sensível interno de 60kW. São apresentados dois casos, ambos com condições internas e externas iguais a 25°C e 50%, mas com velocidades do vento iguais a 2m/s e 6m/s. Nestas condições, as vazões de ar resultantes foram, respectivamente, de 2,9 e 6,9 trocas de ar/h. Conforme pode-se observar na Figura 10, o aumento da taxa de ventilação diminui a elevação de temperatura, decorrente da existência de uma geração de calor interno. Como, neste caso, a umidade absoluta do ar interno e externo são iguais e não há geração interna de vapor d'água, a elevação da temperatura causa uma redução na umidade relativa do ar, a qual é tanto maior quanto menor for a vazão de ar induzida.

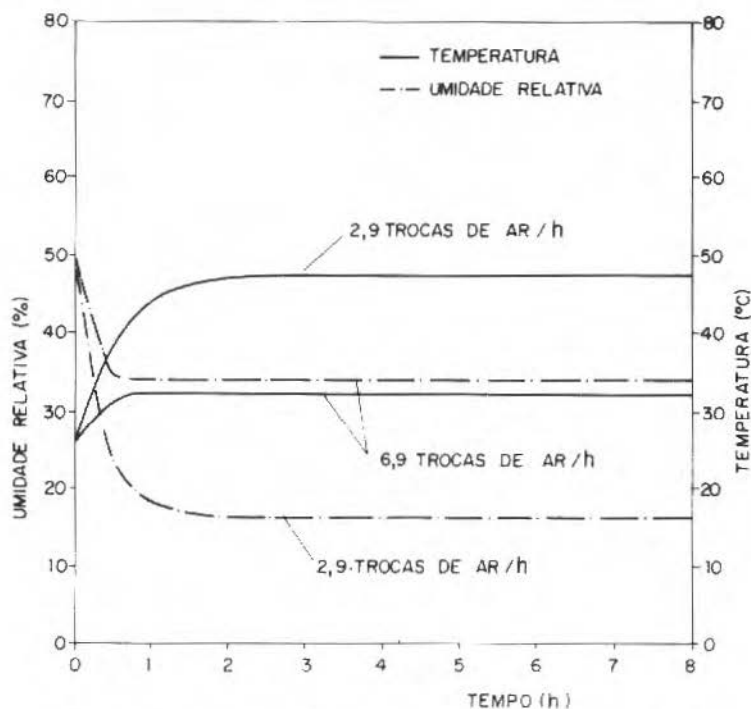
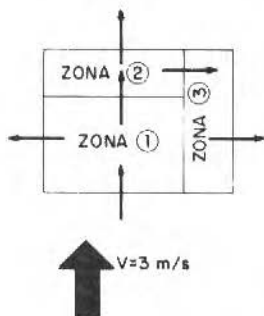
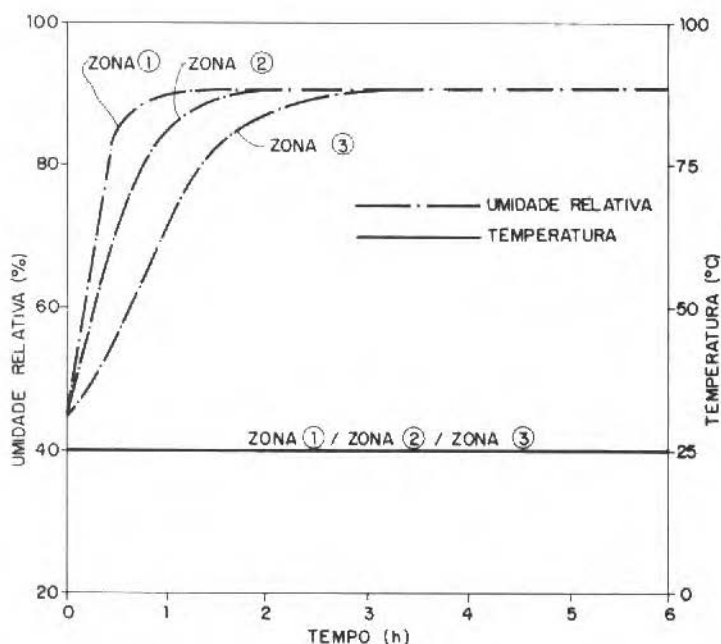


Figura 10. Variação temporal da temperatura e da umidade relativa do ar interno em função da vazão de ar induzida, na presença de uma geração de calor sensível de 60kW.

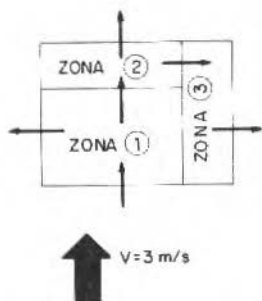
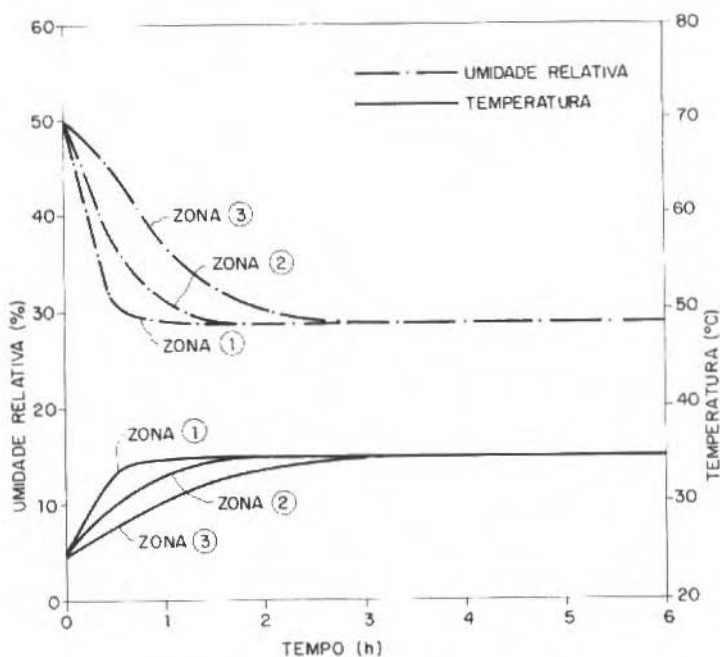
A Figura 11 ilustra, para a edificação tipo C com repartições internas [5], o comportamento da umidade relativa do ar interno, quando a transferência de calor ocorre somente em decorrência de trocas de calor latente com o ar externo e com zonas adjacentes (geração de vapor d'água nas zonas é desprezada).



ZONA	U.R.(%) (INICIAL)	Ti (°C) (INICIAL)	Trocas de ar/h
①	45	25	4,8
②	45	25	3,2
③	45	25	2,1
UR <sub>e</sub> = 90 %		T <sub>e</sub> = 25°C	

Figura 11. Variação temporal da temperatura e da umidade relativa do ar interno em decorrência de trocas de calor latente com o ar externo.

Conforme pode-se observar devido a maior umidade absoluta do ar externo, a umidade relativa nas zonas consideradas é aumentada do valor inicial até uma condição limite, sendo esta variação tanto mais rápida quanto maior o número de trocas de ar na zona em questão. Pode-se observar também que a umidade adentra a edificação, através da zona 1, sendo posteriormente transferida às outras zonas, devido a movimentação do ar interno.



ZONA	U R (%) (INICIAL)	Ti (°C) (INICIAL)	Trocas de ar/h
①	50	25	4,8
②	50	25	3,2
③	50	25	2,1
U Re = 50%		Te = 25°C	

Figura 12. Variação temporal da temperatura e da umidade relativa do ar interno em decorrência de uma geração de calor sensível de 30 kW na zona 1.

A Figura 12 mostra para a mesma edificação, o comportamento da umidade relativa e da temperatura do ar interno nas diversas zonas em decorrência de uma geração de calor sensível de 30 kW na zona 1. O efeito, apresentado nesta figura é similar ao apresentado na Figura 11 mas, nesta oportunidade demonstra-se a potencialidade do programa em considerar os efeitos da movimentação do ar interno, em edificações com zonas múltiplas, sobre as condições psicrométricas do ar interno.

## CONCLUSÕES

Os fundamentos básicos de um programa computacional, capaz de estimar as trocas de ar por infiltração/ventilação em edificações, foram apresentados.

Tal programa, denominado FLOW2, leva em consideração a maior parte dos fatores capazes de afetar o processo de infiltração/ventilação de ar, tais como: perfil da camada limite atmosférica, dimensões da edificação, velocidade e direção do vento, diferença de temperatura entre o meio ambiente externo e interno, características das aberturas, estratificação térmica, etc.

Como característica adicional, o programa permite a avaliação do impacto da vazão de ar induzida sobre o teor de poluentes e as condições psicrométricas de ar interno.

Apesar do programa ter sido validado para situações em que as trocas de ar ocorrem por infiltração, torna-se necessário, ainda, validá-lo para situações de ventilação-natural. Isto não foi feito devido a falta de um conjunto de dados padrões que possibilite tal exercício de validação no momento.

O programa FLOW2, a exemplo de outros programas existentes, depende das características do escoamento do ar nas aberturas. Assim, tanto maior será a sua aplicabilidade, quanto maior for a disponibilidade de tais dados.

## REFERENCES

- [1] LIDDAMENT, M. & ALLEN, C. The Validation and Comparison of Mathematical Models of Air Infiltration, Air Infiltration Centre Technical Note AIC-11, Bracknell, U.K. (1983).



- [2] SHERMAN, M.T. & GRIMSRUD, D.T. Infiltration-Pressurization Correlation: Simplified Physical Modelling, ASHRAE Transactions, vol. 86, part II, pp. 778-807 (1980).
- [3] MELO, C. Improved Convective Heat Transfer and Air Infiltration Models for Building Thermal Simulation, Ph.D. Thesis, Cranfield Institute of Technology, Bedford, U.K. (1985).
- [4] MELO, C. Flow - An Algorithm for Calculating Air Infiltration into Buildings, 3rd International Congress on Building Energy Management, Lausanne, Switzerland, 28/9 - 2/10/87. In Proceedings of ICBEM'87 (1987).
- [5] CALDEIRA FILHO, H.C. FLOW2 - Um Modelo Matemático para a Análise de Sistemas de Ventilação Natural em Edificações, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC (1989).
- [6] MELO, C. Development and Validation of a Model for Air Infiltration Rates into Buildings, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC. Anais do COBEM 87, pp. 427-430 (1987).
- [7] LIDDAMENT, M.W. Air Infiltration Calculation Techniques - an Application Guide, AIVC, U.K., June (1986).
- [8] MELO, C. Development and Validation of a Model for External Convection from Buildings, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC. Anais do COBEM 87, pp. 431-434 (1987).
- [9] DAVENPORT, A.G. The Relationship of Wind Structure to Wind Loading. Proceedings of the National Laboratory Symposium No. 16 - Wind effects on building structures, vol. 1, HMSO, London, pp. 54-111 (1965).
- [10] ALLEN, C. Wind Pressure Data Requirements for Air Infiltration, A.I.V.C. Technical note AIC-13, Bracknell, U.K. (1984).
- [11] SHAW, C.Y. A Method for Predicting Air Infiltration Rates for a Tall Building Surrounded by Lower Structures of Uniform Height, ASHRAE Transactions, vol. 85, part I, pp. 72-84 (1979).
- [12] BOWEN, A.J. A Wind Tunnel Investigation Using Simple Building Models to Obtain Mean Surface Wind Pressure Coefficients for Air Infiltration

Estimates, National Aeronautical Establishment Report LTR-LA-209, N.R.C.C., Canadá (1976).

- [13] STOECKER, W.F. Design of Thermal Systems, 3rd edition, McGraw Hill, New York (1989).
- [14] WHITE, F.M. Viscous Fluid Flow, McGraw Hill, New York (1974).

## SIMULTANEOUS THERMAL CONDUCTIVITY AND DIFFUSIVITY DETERMINATION USING PARAMETER ESTIMATION TECHNIQUES

### OBTENÇÃO SIMULTÂNEA DA DIFUSIVIDADE E CONDUTIVIDADE TÉRMICA USANDO ESTIMATIVAS DE PARÂMETROS

Gilmar Guimarães

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica  
38400, Uberlândia MG, Brasil

#### ABSTRACT

*An experimental technique for simultaneous determination of the thermal conductivity and diffusivity of non metallic materials is presented. The method developed uses parameter estimation techniques and is based on the Flash Method. In this method the heat pulse at the frontal face of the sample is generated by a laser or xenon flash lamp. A guarded hot plate, simple and easily constructed, substitute these high cost apparatus. The mathematical model developed, then, obtains the solution with a time dependent heat flux input. The conductivity and diffusivity are determined by comparing the experimental temperatures and the temperatures estimated by the mathematical model. The difference in temperatures was less than 0.3<sup>o</sup> Celsius.*

**Keywords:** Heat Conduction ■ Parameter Estimation ■ Experimental Heat Transfer ■ Thermal Diffusivity ■ Thermal Properties Measurements

#### RESUMO

*Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma técnica experimental para a determinação simultânea da condutividade e difusividade térmica. O método desenvolvido utiliza a técnica de estimativas de parâmetros e se baseia no método Flash. A modificação deste método consiste na substituição do pulso de calor na superfície da amostra, usualmente laser ou lâmpada Xenônio, ambos equipamentos de difícil acesso devido ao seu alto custo, por um aparato simples e de fácil execução, como uma placa quente compensada. O modelo matemático desenvolvido permite então a previsão da utilização do calor imposto na superfície frontal da amostra como uma função do tempo. A condutividade e a difusividade térmica são determinadas, a partir da comparação entre temperaturas obtidas experimentalmente e estimadas através do modelo matemático, obtendo-se um desvio inferior a 0.3<sup>o</sup> C entre as curvas.*

**Palavras-chave:** Estimativas de Parâmetros ■ Medição de Propriedades Térmicas ■ Transferência de Calor Experimental ■ Condução de Calor ■ Difusividade Térmica

## INTRODUCTION

The development of experimental techniques for determining thermal parameters, e.g., thermal conductivity and diffusivity and contact resistance of non metallic materials have interested many researchers due to their large application in engineering problems [1-6]. Standardized procedures using guarded hot plate in steady state are used to determine thermal conductivity [7]. However, there are no standardized techniques to obtain thermal diffusivity, since transient techniques are necessary. There are many ways to build mathematical models for the heat diffusion. In all cases, the experimental apparatus is constructed based on the practical boundary conditions that can be obtained. Taylor [1], in a recent work presents the state-of-the-art of experimental techniques that have been developed for thermal diffusivity identification in solid materials. In this work, based on temperatures-time history, Taylor classified the methods in two main classes: periodic and non-periodic heat flow methods. The flash method which is a non-periodic heat flux method is one of the most widely used. In this method the front surface of a sample is submitted to a very short burst of radiant energy. The source of radiant energy is usually a laser or a xenon flash lamp and irradiation time is of the order of one millisecond or less. The resulting temperature rise of the rear surface of the sample is measured, and thermal diffusivity values are computed from these temperature-versus-time data [1]. The development of an alternative method to investigate thermophysical properties, using a simple, easy and feasible experimental apparatus was the main motivation for this work. The major difficulty, however, was to establish the mathematical model that should be able to compute the transient time dependence heat flux input by the Joule effect instead of a heat pulse.

In this sense [9] have presented a mathematical model to measure thermal diffusivity with linear heat input at the front surface of a sample keeping constant the rear surface temperature. The interior transient temperature of the sample was measured by an automatic data acquisition system and the boundary conditions, i.e., the heat flux input and constant temperature was assured through a guarded hot plate. Thus, the thermal diffusivity could be obtained by comparing the mathematical model and the experimental temperature time histories.

The present work, uses the same experimental apparatus as described in [9], however, the heat flux input at the front face of the sample is obtained by logarithmic adjustment. This work uses the parameter estimation technique described in [10] that permit simultaneous thermal conductivity and diffusivity determination. In this way, the error related to the conductivity values that appear in the mathematical model developed in [9] is minimized.

## EXPERIMENTAL DESIGN AND APPARATUS

The experimental apparatus shown in figure 1 was used to obtain the boundary conditions.

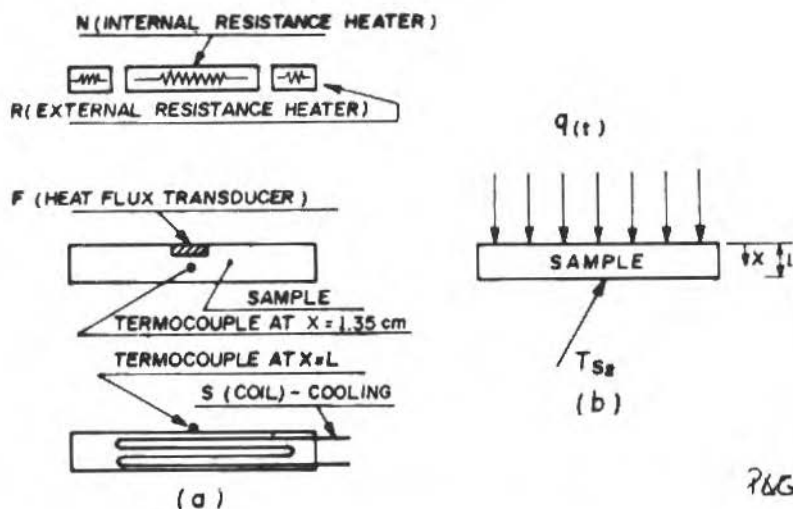


Figure 1. a) Exploded-view of experimental apparatus. b) Boundary conditions.

The technique involves a unidirectional and uniform heat flux input at initial time,  $t = 0$ , at the superior surface of the sample, subjected to a previous temperature distribution,  $F(x)$ , keeping constant the inferior surface at temperature,  $T_{s2}$ . The thermal conductivity and diffusivity is then calculated from the mathematical model, the acquired data and the sample dimensions.

The source of heat is an internal resistance heater,  $N$ , based on the Joule effect. An external resistance heater,  $R$ , controls the lateral heat flux loss to the surroundings. The heat flux applied is measured by a heat flux transducer,  $F$ , [9] and the internal temperature and the inferior surface temperature are monitored by thermocouples. The constant temperature  $T_{s2}$  at the inferior surface is maintained by using a water coil,  $S$ .

### MATHEMATICAL MODEL

Considering a plane sample subjected to an initial temperature distribution,  $F(x)$ . A pulse of heat is imposed instantaneously at the superior surface while the other surface is maintained at temperature  $T_{s2}$ . Under these conditions the appropriate boundary value problem is given by

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.a)$$

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) \quad (1.b)$$

$$T(x, t) = T_{s2} \quad \text{at} \quad x = L, \quad t > 0 \quad (1.c)$$

$$T(x, 0) = F(x) = (T_{s2} - T_{s1}) \cdot x/L + T_{s1} \quad (1.d)$$

where

$$q(t) = a_0 \quad \text{at} \quad x = 0, \quad 0 < t < t_0$$

$$q(t) = a_1 + b_1 \cdot \ln[t] \quad \text{at} \quad x = 0, \quad t > t_0$$

$a_1$  and  $b_1$  are obtained by logarithmic adjustment at the superior surface of the sample as shown in figure 2.

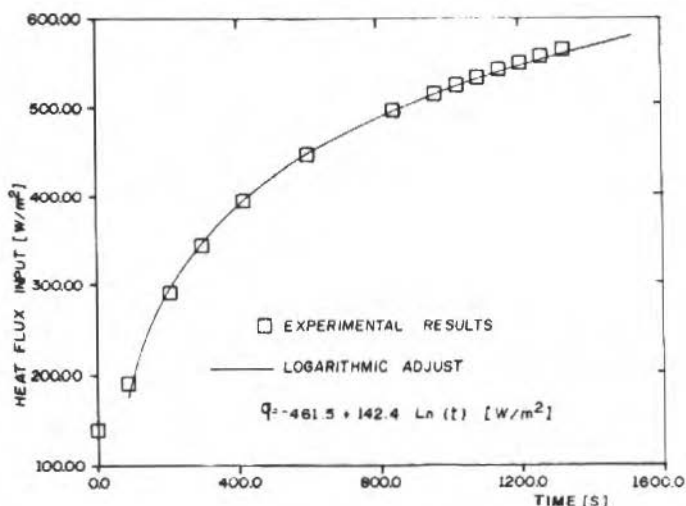


Figure 2. Logarithmic adjustment for heat flux input at front surface.

The partial time  $t_0$  is used to avoid the discontinuity at  $t = 0$  of the logarithmic adjustment.  $T_{s1}$  and  $T_{s2}$  are the superior and inferior temperature of the sample, respectively and  $a_0$  is the heat flux at time  $t_0$  and  $K$  and  $\alpha$  are the thermal conductivity and diffusivity. The solution to equation (1) is readily obtained using Green's function techniques and the resulting solution can be presented in the form

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & T_{s2} + (T_{s1} - T_{s2})/L \cdot (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 n \cdot t} \cdot (\cos \beta n x) / \beta^2 n + \\
 & + a_0(L - x) - a_0 \cdot (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 n \cdot t_0} \cdot (\cos \beta n x) / \beta^2 n + \\
 & + (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 n \cdot t} \cdot (\cos \beta n x) / \beta^2 n \{ a_1 (e^{\alpha\beta n \cdot t} - e^{\alpha\beta n \cdot t_0}) + \\
 & + b_1 [e^{\alpha\beta n \cdot t} \cdot \ln(t) - (e^{\alpha\beta n \cdot t_0} \cdot \ln(t_0) + \ln(t/t_0) + \\
 & + \alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0) + (\alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0)^2) / 24] \} \quad (2)
 \end{aligned}$$

where  $\beta n$  are the eigenvalues given by  $\beta n = 2\pi \cdot n/L$ , being  $n = 1, 2, \dots$

Having established the formal solution of the direct problem (1) we can estimate the parameter  $K$  and  $\alpha$  from the temperature measurements taken at the interior point of the sample ( $x = 0.0138$  m).

In the method described by [10], the thermal diffusivity and conductivity are found by minimizing the sum of squares function

$$S = \sum_{i=1}^n [Y_i - T_i]^2 \quad (3)$$

with respect to the parameter involved. In this case,  $K$  and  $\alpha$  are the parameters estimated in order to obtain the best agreement between measured ( $Y_i$ ) and estimated ( $T_i$ ) temperatures from equation 2. The index  $i$  refers to time ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). One way of minimizing  $S$ , which is given by equation (3) is to set the first partial derivatives with respect to the parameter equal to zero [10]. So that, we obtain a set of equation in  $K$  and  $\alpha$ . The set of equations is solved simultaneously for unknowns.

The partial derivatives of  $S$  are

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 2 \left( - \sum_{i=1}^k Y_i \cdot X_{1,i} + \sum_{i=1}^k T_i \cdot X_{1,i} \right) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \left( - \sum_{i=1}^k Y_i \cdot X_{2,i} + \sum_{i=1}^k T_i \cdot X_{2,i} \right) = 0 \quad (4b)$$

where sensitivity coefficients  $X_1$  and  $X_2$ , are respectively

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial T}{\partial K} = & (a_0/K^2) \cdot (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta^2 n \cdot t_0} (\cos \beta n x) / \beta^2 n + \\ & + (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta^2 n \cdot t} (\cos \beta n x) / \beta^2 n \{ (-a_1/K^2) (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} - e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0}) - \\ & - (b_1/K^2) [e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} \cdot \ln(t) - (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0} \cdot \ln(t_0) + \ln(t/t_0)) + \\ & + \alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0) + (\alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0)^2) / 24] \} \end{aligned} \quad (5a)$$



$$\begin{aligned}
X_2 = \frac{\partial T}{\partial \alpha} = & (a_0/K) \cdot t_0 \cdot (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta^2 n \cdot t_0} (\cos \beta n x) + \\
& - B_0 \cdot t \cdot (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta^2 n \cdot t} \cdot (\cos \beta n x) + \\
& - t(2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta n \cdot t} (\cos \beta n x) \{ (a_1/K) (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} - e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0}) + \\
& + (b_1/K) [e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} \cdot \ln(t) - (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0} \ln(t_0) + \ln(t/t_0) + \\
& + \alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0) + (\alpha \cdot \beta^2 n \cdot (t - t_0)^2)/24)] \} + \\
& + (2/L) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \beta^2 n \cdot t} (\cos \beta n x) \{ (a_1/K) (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} \cdot t - e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0} \cdot t_0) + \\
& + (b_1/K) [e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t} \cdot t \cdot \ln(t) - (e^{\alpha \cdot \beta n \cdot t_0} \cdot t_0 \cdot \ln(t_0) + \\
& + (t - t_0) + \alpha \cdot \beta^2 n (t - t_0)^2/12)] \} \tag{5b}
\end{aligned}$$

where  $B_0$  is a constant value, defined by  $B_0 = (T_{s1} - T_{s2})/L$ .

One of the simplest and most effective methods of minimizing the function  $S$ , is called the Gauss method [10]. Using the first two terms of a Taylor series in equation (4) we obtain

$$K^{n+1} = K^n + \sum_{i=1}^k X_{1i} \cdot (Y_i - T_i) / \Delta^n \tag{6.a}$$

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \sum_{i=1}^k X_{2i} \cdot (Y_i - T_i) / \Delta^n \tag{6.b}$$

where

$$\Delta^n = \sum_{i=1}^k X_{1i}^2 \cdot X_{2i}^2 - X_{1i} \cdot X_{2i} \tag{6.c}$$

Then the parameters  $K$  and  $\alpha$  can be estimated by an interactive procedure that continues until

$$\frac{K^{n+1} - K^n}{K^n} < \varepsilon \tag{7.a}$$

and

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\alpha^n} < \varepsilon \quad (7.b)$$

where  $\varepsilon$  is of the order of 0.001.

The dimensionless sensitivities  $X_1^*$  and  $X_2^*$  have been plotted and investigated before the experimental investigation in order to obtain a good accuracy in parameter estimation (figure 3). We noted that  $K$  and  $\alpha$  for the most times have linear dependence and the parameter can not be estimated. The optimal time is situated at dimensionless time interval  $t^* = 0.6$  to  $0.8$ .

## UNCERTAINTY ANALYSIS

Taylor [1] divided the errors of the experimental results in two types of errors: measurement error and non-measurement errors. Measurement errors are associated with uncertainties that exist in measured quantities contained in the equation used to compute the conductivity and diffusivity from experimental data. Non-measurement errors are associated with deviations of actual experiment from the boundary condition assumed in the model used to derive the equation for computing the parameters.

Measurement errors include errors related with the determination of the effective thickness of the sample, the internal thermocouple position, the measurement of the time of heating. In addition, the time constant of the thermocouple and heat flux transducer should also be considered. In the non-measurement errors, the non-uniformity and heat loss are the main problem. However, these errors represent deviations from an ideal situation in which these effects, are assumed to be negligible [1]. This is a disadvantage if compared with the flash method. However, if the heat flux is monitored and the sample is a low conductivity material these deviations are minimized. The transducer calibration constant presents an uncertainty of  $\pm 2.0 \text{ w/m}^2$  approximately. Considering this deviations in equation (2) and a uncertainty of 2 mm in the thickness and thermocouple position we obtain a deviation of less than  $0.3^\circ\text{C}$  in the estimated temperature. Conservatively, we can admit an error associated with voltage signals acquisition an uncertainty of less than  $0.1^\circ\text{C}$  using an automatic data acquisition control system/HP-3054, [1].

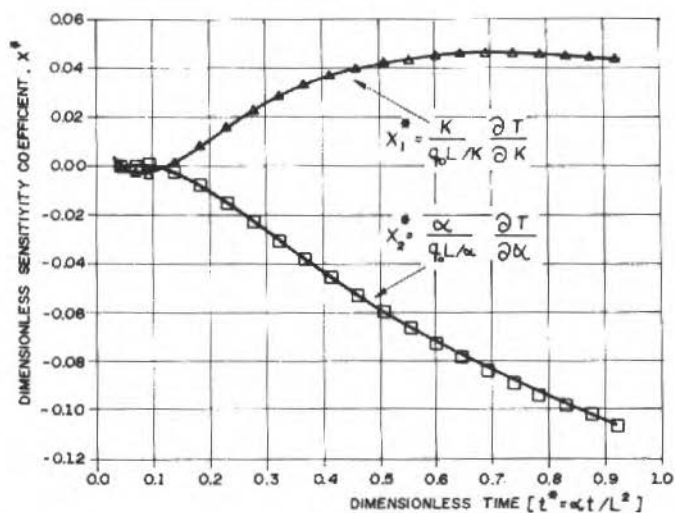


Figure 3a. Sensitivities for a sample submitted to a transient heat flux at front surface. Location  $x = 0.0138$  m.

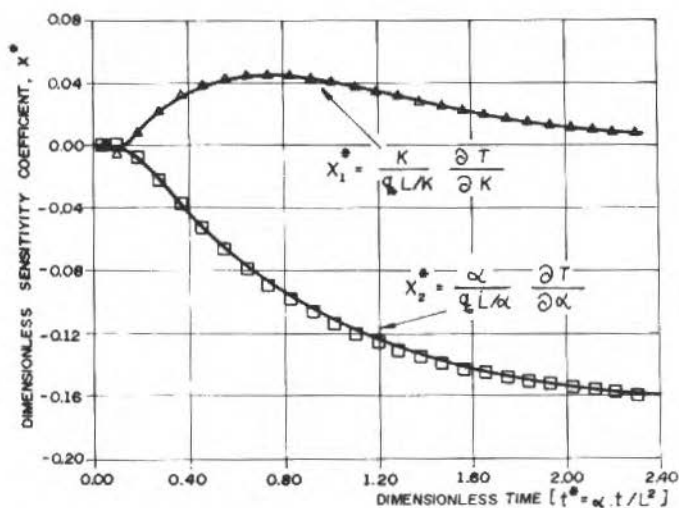


Figure 3b. Sensitivities for a sample submitted to a transient heat flux at front surface. Location  $x = 0.0138$  m.

## RESULTS AND DISCUSSION

The thermal diffusivity and conductivity estimated for the plywood sample presented a deviation compared with literature data [11] of less than 13% and 17.5%, respectively. However, we can note (figure 4) the power of the method. An excellent agreement between model and experimental data can be observed for time greater than 200 s. For lesser times, the logarithmic adjustment and initial condition can affect the solution due to the discontinuity at  $t = 0$ . The selection of the time interval  $t^*$  between 0.6 and 0.8 is of fundamental importance for optimization of the results. Previous knowledge of the behavior of sensitivities permitted us to choose the linear independence region of  $\alpha$  and  $K$ . In this case, few iterations,  $n$ , are needed to estimate the properties (Table I). Table II presents the temperatures ( $Y_i$ ) and times ( $t_i$ ) used to estimate the parameter, the sum of squares function ( $S_i$ ). The sum of squares function ( $S_i$ ) was obtained during the entire experiment. We observed a divergence in estimation of  $K$  and  $\alpha$  in the region of linear dependence (time less than 960 s - figure 3a). However, the best result for minimum  $S_i$  was obtained using all the experimental data. Good results can also be obtained if only time belonging to the linear independence region is used like the times a-b-c shown in the table III, (figure 3). The logarithmic adjustment appears to be indeterminate at  $t = 0$ . This difficulty can be alleviated by choosing a small time  $t_0$  and considering the heat flux constant until this time. The logarithmic adjustment can be obtained with correlation factor of about 0.999 (figure 2). In this sense, the alternative form of heat flux imposed can be inserted in the model with excellent approximation. The temperature at the other face suffered a variation of  $0.3^{\circ}\text{C}$  during all the experiment (figure 4). This variation did not affect the results and can be neglected.

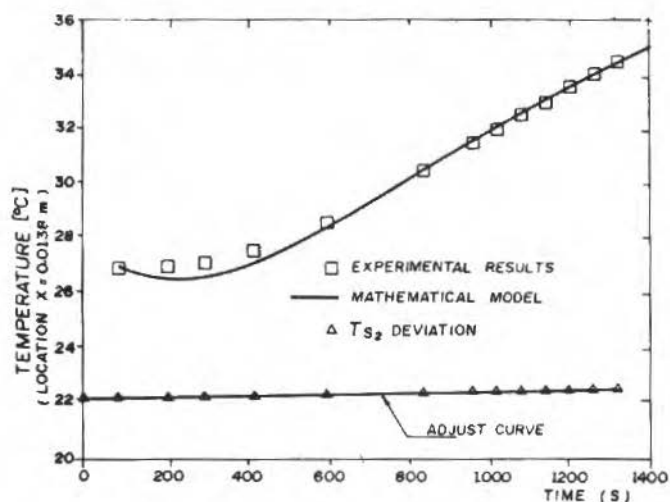


Figure 4. Temperature rise at  $x = 0.0138\text{m}$ : comparison of mathematical model with experimental results, variation of temperature at the rear surface ( $T_{s2}$ ) is also shown.

Table I. Interactions,  $n$ , in the diffusivity and conductivity estimation with  $Y_i$  obtained during the entire experiment (table III).

$n$	$K[w/mK]$	$\alpha[m^2/s]$	$St[K]$
0	0.01	2.0E-08	
1	0.1388	8.626E-08	
2	0.1551	1.446E-07	
3	0.1310	1.468E-07	
4	0.1405	1.561E-07	
5	0.1408	1.572E-07	
6	0.1410	1.574E-07	
7	0.1410	1.574E-07	7.126E-01

Table II. Diffusivity and conductivity estimation with  $Y_i$  obtained for times indicated in table III.

Time	$K[w/mK]$	$\alpha[m^2/s]$	$SI[K]$	$St[K]$
a	0.141	1.575E-07	7.129E-01	7.126E-01
b	0.135	1.478E-07	3.272E-04	7.195E-01
c	0.135	1.473E-07	1.644E-03	7.228E-01
d	0.134	1.462E-07	5.968E-03	7.278E-01
e	0.133	1.440E-07	1.972E-03	7.370E-01
f	0.145	1.622E-07	1.856E-03	7.677E-01
g	0.126	1.354E-07	6.487E-05	7.952E-01
h	*	*	*	*
i	*	*	*	*
j	*	*	*	*

\* - represents divergence in parameter estimation

Table III. Times used for  $Y_i$  acquisition, in seconds. III.

Time	Seconds
a	90-210-300-420-600-840-900-960-1020-1080-1140-1200-1260-1320
b	1080 - 1140 - 1200
c	1200 - 1260 - 1320
d	840 - 900 - 960 - 1100 - 1200 - 1280 - 1320
e	1080 - 1140 - 1200 - 1320
f	840 - 960 - 1020
g	960 - 1020 - 1080
h	90 - 210 - 300 - 420 - 600 - 840
i	210 - 300 - 420 - 600 - 840
j	300 - 420 - 600 - 840

## CONCLUSION

Determination of thermophysical properties using parameter estimation techniques have shown to be efficient, particularly in thermal diffusivity estimation.

The possibility of obtaining thermal conductivity simultaneously minimize the error related with its value inserted in the mathematical model and give a suitable technique for application in transient cases. The experimental apparatus used is an alternative that substitutes the use of costly equipment, like laser apparatus. The Green's function permits the mathematical model to consider time dependent heat flux. A future work should investigate the temperature dependence in conductivity and diffusivity in this case, a non-linear treatment in parameter estimation is necessary.

### ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to thank R.F. Miranda and L.C. Lima for encouraging this work and T.H. Ong for reviewing the manuscript.

### REFERENCES

- [1] TAYLOR, R.E., Heat Pulse Thermal Diffusivity Measurements, High - Temperatures - High Pressures, vol. 11, pp. 43-58, 1979.
- [2] TOULOUKIAN, Y.; POWELL, R.W.; HO, C.Y.; NICOLAU, M.C. Thermal Diffusivity, vol. 10, NY:IFI/ Plenum, 1973.
- [3] BITTLE, R.R. & TAYLOR, R.E. Step - Heating Technique for Thermal Diffusivity Measurements of Large - Grained Heterogeneous Materials, Journal of the American Ceramic Society, vo. 67, pp. 186-190, march 1984.
- [4] KAMIUTO, D. & IWAMOTO, M. Inversion Method for Determining Effective Thermal Conductivities of Porous Materials, Journal of Heat Transfer, vol. 109, pp. 831-834, 1987.
- [5] BECK, J.V., Combined Parameter and Function Estimation in Heat Transfer with Application to Contact Conductance, Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 1046-1058, nov. 1988.
- [6] ROOKE, S.P. & TAYLOR, R.E. Transient Experimental Technique for the Determination of the Thermal Diffusivity of Fibrous Insulation, Journal of Heat Transfer, vol. 110, pp. 270-273, feb. 1988.

- [7] GUIMARÃES, G.; CUNHA NETO, J.A.B.; PHILIPPI, P.C. & NICOLAU, V.P. A sample Transducer for Measuring Heat Flux in Building, I<sup>o</sup> Encontro Nacional de Ciências Térmicas, I ENCIT, pp. 155-158, RJ, dez. 1986.
- [8] Standard Test Method for Steady-State Thermal Transmission Properties by Means of the Guarded Hot Plate, ANSI/ASTM C177-76, vol. 18, 1980.
- [9] GUIMARÃES, G.; SANTOS, A.F.M. & LIMA, L.C. Uso de um Fluxmêtro Adaptado a um Dispositivo de Placa Quente Compensada para a Obtenção da Difusividade Térmica, X COBEM, RJ, dez. 1989.
- [10] BECK, J.V. & ARNOLD, K.J. Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, N.Y., 1977.
- [11] INCROPERA, F.P. & DEWITT, D.P. Fundamentals of Heat Transfer, John Wiley & Sons, NY, 1981.



## SOLUÇÃO SIMILAR PARA CONDENSAÇÃO PELICULAR EM MEIO POROSO SOBRE PLACA PLANA E CONE PERMEÁVEIS E NÃO ISOTÉRMICOS

### SIMILARITY SOLUTION FOR FILM CONDENSATION IN A POROUS MEDIUM OVER A PERMEABLE NON-ISOTHERMAL FLAT PLATE AND CONE

Carlos Daniel Ebinuma  
UNESP  
Campus de Guaratinguetá  
12500, Guaratinguetá, SP, Brasil

#### RESUMO

*Através de uma distribuição apropriada de fluxo lateral de massa no contorno das superfícies permeáveis, soluções similares podem ser obtidas para o problema da condensação pelicular em meio poroso sobre placa plana e cone, cujas temperaturas variem com a distância longitudinal da forma  $x^{1/2}$  e  $x^{3/2}$ , respectivamente. A espessura da película condensada, o perfil de temperatura e a transferência de calor nas superfícies podem ser obtidos através de soluções que dependem do fluxo lateral de massa.*

Palavras-chave: Condensação Pelicular ■ Meio Poroso ■ Camada Limite

#### ABSTRACT

*Under an appropriate distribution of located mass flux at the boundary, similarity solutions are obtained to the problem of film condensation in a porous medium over a flat plate and cone, where the temperature vary as  $x^{1/2}$  and  $x^{3/2}$ , respectively. The thickness of the liquid layer, the temperature profiles and the Nusselt number are calculated. It is found that the results depend strongly on the lateral mass flux at the boundary.*

Keywords: Film Condensation ■ Porous Medium ■ Boundary Layer

## NOMENCLATURA

$C$	calor específico
$f$	função de corrente adimensional
$g$	aceleração da gravidade
$h$	coeficiente local de transferência de calor
$h_{fg}$	calor latente de condensação
$k$	condutividade térmica do meio poroso preenchido com líquido
$K$	permeabilidade
$n$	= 0 para placa plana = 1 para cone
$Nu$	número de Nusselt local
$r$	distância radial do eixo de simetria à superfície do cone
$Ra$	número de Rayleigh local
$Sc$	parâmetro de subresfriamento adimensional
$T$	temperatura
$u$	velocidade de Darcy longitudinal
$v$	velocidade de Darcy normal
$x$	coordenada longitudinal
$y$	coordenada normal
$\alpha$	difusividade térmica do meio poroso preenchido com líquido
$\beta$	parâmetro de fluxo lateral de massa adimensional
$\gamma$	ângulo de inclinação da superfície em relação à linha vertical (ou eixo de simetria)
$\delta$	espessura da camada líquida
$\eta$	variável de similaridade
$\eta\delta$	espessura da camada líquida adimensional
$\Theta$	temperatura adimensional
$\lambda$	parâmetro que determina a variação da temperatura em relação à distância longitudinal
$\mu$	viscosidade dinâmica
$\rho$	densidade
$\Phi$	ângulo de inclinação da coordenada normal em relação à linha vertical (ou eixo de simetria)
$\Psi$	função de corrente

**Subscritos**

- s* estado de saturação  
*v* fase vapor  
*w* superfície

**INTRODUÇÃO**

Atualmente, como consequência do desenvolvimento tecnológico atingido por muitos processos de Engenharia, tem-se desenvolvido estudos referentes à transferência de calor na mudança de fase de um fluido puro, que ocorre sobre uma superfície impermeável e isotérmica em contato com um meio poroso preenchido com fluido puro na temperatura de saturação.

Quando o fluido puro se encontra na fase vapor, uma redução súbita na temperatura da superfície, abaixo da temperatura de saturação, provoca a formação de uma película de líquido condensado, adjacente à superfície impermeável (Condensação Pelicular) e, por outro lado, quando o fluido puro se encontra na fase líquida, um aumento súbito na temperatura da superfície acima da temperatura de saturação, provoca a formação de uma película de vapor, adjacente à superfície impermeável (Ebulição Pelicular).

Em ambos os casos, é possível a aplicação da teoria da camada limite e da Lei de Darcy para escoamento em meio poroso, na película formada adjacente à superfície, desde que introduzido o conceito da permeabilidade relativa, uma vez que os espaços vazios do meio poroso são parcialmente preenchidos com líquido e parcialmente preenchidos com vapor. Entretanto, devido à complexidade matemática das equações governantes resultantes, soluções analíticas para o problema somente podem ser obtidas levando-se em consideração a simplificação realizada por [1].

Parmentier [1], estudou o problema da transferência de calor na ebulição pelicular em meio poroso preenchido com líquido subresfriado, sobre uma superfície vertical impermeável superaquecida, mostrando com um diagrama Pressão  $\times$  Temperatura, que não ocorre uma região de mistura das fases líquida e vapor na transição de líquido subresfriado para vapor superaquecido

e, portanto, existe uma interface distinta entre as duas fases. Essa consideração resulta em uma considerável simplificação matemática que permite soluções por similaridade.

Baseado nesta consideração, juntamente com as simplificações usuais realizadas na teoria da camada limite, Cheng [2] obteve solução por similaridade para a condensação pelicular sobre uma superfície inclinada em contato com um meio poroso preenchido com vapor saturado.

Cheng, Chui and Kwok [3], estudaram os efeitos do líquido subresfriado na ebulição pelicular em meio poroso, ocorrendo sobre superfícies impermeáveis bidimensionais e axialmente simétricos e obtiveram, através de transformações similares generalizadas, soluções exatas tanto para a fase líquida como para a fase vapor, válidas para qualquer forma geométrica da superfície.

Com base nestes trabalhos, Liu et al. [4] analisaram o problema da condensação pelicular em meio poroso ocorrendo sobre superfície de configuração arbitrária, considerando-se um fluxo lateral de massa no contorno das superfícies, onde se determinou que, solução similar existe, quando o fluxo lateral de massa é proporcional à distância longitudinal (a proporção depende da configuração geométrica da superfície).

Mais recentemente, Ebinuma et al. [5], enfocam o mesmo problema analisado em [4], porém, considerando-se que a temperatura da superfície também varia com a distância longitudinal, sendo proporcional a um parâmetro  $\lambda$ . Nessas condições, solução exata não é possível e o problema foi resolvido através do desenvolvimento em série de potências e, as equações diferenciais ordinárias resultantes são resolvidas através do método numérico de Runge-Kutta.

Este trabalho analisa o mesmo problema considerado em [5] e mostra que, para a placa plana e cone, solução exata pode ser obtida para valores particulares do parâmetro  $\lambda$ .

## FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO

A figura 1 mostra modelo físico e sistema de coordenadas utilizados na formulação do problema de condensação pelicular em meio poroso sobre placa plana (1.a) e cone (1.b).

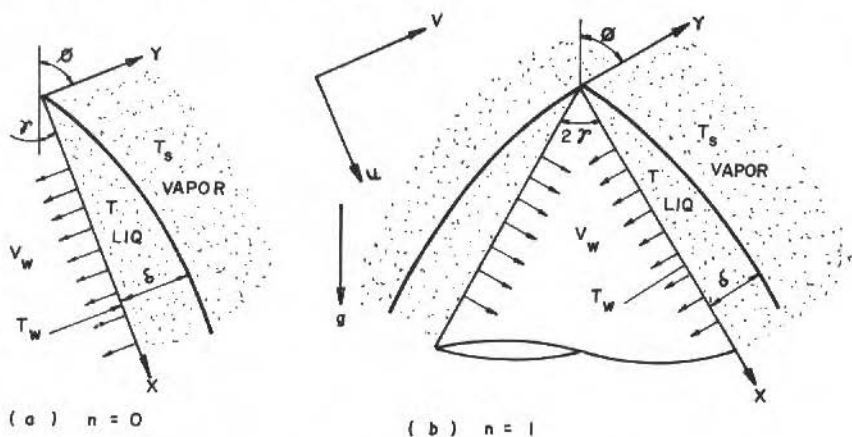


Figura 1. Sistemas de Coordenadas.

As superfícies permeáveis da placa plana e cone são mantidas a uma temperatura não constante  $T_w$  (função da distância longitudinal  $x$ ). Em contato com essas superfícies está um meio poroso preenchido com vapor saturado à temperatura de saturação  $T_s$ , para a respectiva pressão do sistema.

Para que condensação ocorra, a temperatura das superfícies deve ser menor que a temperatura de saturação do vapor. Assim, a temperatura das superfícies, em função da distância longitudinal pode ser definida através da relação  $T_w = T_s - Ax^\lambda$ , onde  $A$  é uma constante positiva e  $\lambda$  é um parâmetro constante que caracteriza a temperatura das superfícies em função da distância longitudinal  $x$ .

Nestas condições, o condensado resultante sobre as superfícies permeáveis, forma uma película contínua e com características de escoamento laminar em regime permanente devido à força de gravidade.

Como as superfícies são permeáveis, o condensado está sujeito a uma componente normal de velocidade  $V_w$ , devido ao fluxo lateral de massa nas superfícies (quando  $V_w < 0$  tem-se sucção, quando  $V_w > 0$  tem-se injeção e, quando  $V_w = 0$  tem-se o caso particular de superfície impermeável).

As aproximações padrões utilizadas na literatura sobre condensação pelicular em meio poroso são:

- A temperatura de saturação do vapor é constante;
- A espessura da película é fina, tal que as aproximações da camada limite são aplicáveis;
- O líquido condensado e o vapor saturado são separados por uma interface distinta, não ocorrendo região de mistura de fase líquida com a fase vapor;
- A lei de Darcy para escoamento em meio poroso é aplicável na camada líquida e;
- As propriedades físicas do vapor, do líquido condensado e do meio poroso são constantes.

Como base em tais considerações, as equações que expressam a conservação de massa, quantidade de movimento e energia na camada líquida são, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^n u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^n v) = 0 \quad (1)$$

$$u = \frac{K}{\mu} (\rho - \rho_v) g \sin \Phi \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Com as condições de contorno:

$$y = 0 \quad T = Tw = Ts - A \cdot x^\lambda \quad v = Vw(x) \quad (4.a, b)$$

$$y = 0 \quad T = Ts \quad (5)$$

E, o balanço de energia na interface líquido-vapor:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\delta} = \rho h_{fg} \left( u \frac{\partial \delta}{\partial x} - v \right)_{y=\delta} \quad (6)$$

Utilizando as variáveis de similaridade sugeridas em [4,5], para a placa plana ( $n = 0$ ) e cone ( $n = 1$ ):

$$\Psi = \alpha (Ra)^{1/2} \left\{ \frac{x^2 \sin^2 \gamma \cos \gamma}{3} \right\}^{n/2} f(n) - \int_0^x r^n Vw(x) dx \quad (7)$$

$$\Theta = \frac{T - T_s}{T_w - T_s} \quad (8)$$

onde

$$\eta = (Ra)^{1/2} \frac{Y}{x} (3 \cos \gamma)^{\frac{n}{2}} \quad (9)$$

$$Ra = \frac{K(\rho - \rho_y) g x}{\mu \alpha} \quad (9.b)$$

Ainda, de acordo com [4,5], a componente normal de velocidade que permite a adimensionalização das equações governantes é

$$V_w = \frac{\beta}{2} \frac{\alpha(Ra)^{1/2}}{x} (3 \cos \gamma)^{\frac{n}{2}} \quad (10)$$

onde o parâmetro  $\beta$  é uma constante adimensional que representa a componente normal de velocidade devido ao fluxo lateral de massa nas superfícies permeáveis. Desta forma, tem a mesma direção e magnitude de  $V_w$ , ou seja, quando  $\beta$  é negativo tem-se sucção, quando  $\beta$  é positivo tem-se injeção e, quando  $\beta$  é nulo tem-se o caso particular de superfícies impermeáveis.

Uma vez que a função de corrente  $\Psi$  definida pela equação (7) satisfaz a equação da continuidade (1), e, utilizando as equações (8, 9, 9.b, 10), as equações da conservação da quantidade de movimento (2) e energia (3) tornam-se, respectivamente:

$$\frac{df}{d\eta} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}(f - \beta) \frac{d\Theta}{d\eta} - \frac{\lambda}{3^n} \frac{df}{d\eta} \Theta = 0 \quad (12)$$

Com as condições de contorno (4a.,b,5) da forma:

$$\eta = 0 \quad \Theta = 1 \quad f = 0 \quad (13.a, b)$$

$$\eta = \eta\delta \quad \Theta = 0 \quad (14)$$

Onde  $\eta\delta$  representa a espessura da película condensada adimensional.

O balanço de energia na interface líquido-vapor (6) será:

$$Sc \left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=\eta\delta} = -\frac{1}{2}(f(\eta\delta) - \beta) \quad (15)$$

onde

$$Sc = \frac{C(T_w - T_s)}{h_{fg}} \quad (16)$$

A equação (11), juntamente com a condição (13.b) apresenta a solução da forma:

$$f = \eta \quad (17)$$

Substituindo as equações (11) e (17) na equação (12), verifica-se, para valores particulares dos parâmetros  $\lambda$  da forma  $\lambda = 1/2$  para a placa plana e  $\lambda = 3/2$  para o cone, a equação (12) resulta em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes variáveis da forma:

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}(\eta - \beta) \frac{d\Theta}{d\eta} - \frac{1}{2}\Theta = 0 \quad (18)$$

Esta equação, juntamente com as condições de contorno (13.a, 14), apresenta solução exata, segundo [6], da forma:

$$\Theta(\eta) = \frac{(\eta - \beta) \left( \frac{e(\eta)}{(\eta - \beta)} - \frac{E}{(\eta\delta - \beta)} \right) + \frac{1}{2} \left( \int_0^\eta e(\eta) d\eta - \int_0^{\eta\delta} e(\eta) d\eta \right)}{\left( 1 + \frac{\beta E}{(\eta\delta - \beta)} + \frac{\beta}{2} \int_0^{\eta\delta} e(\eta) d\eta \right)} \quad (19)$$

onde

$$e(\eta) = \exp \left\{ - \left( \frac{\eta^2}{4} - \frac{\beta\eta}{2} \right) \right\}$$

$$E = \exp \left\{ - \left( \frac{\eta\delta^2}{4} - \frac{\beta\eta\delta}{2} \right) \right\}$$

O número de Nusselt local ( $Nu$ ), que representa a transferência de calor nas superfícies permeáveis, é definida pela relação:

$$Nu = \frac{h x}{k} \quad (20)$$



Nesta equação,  $h$  é o coeficiente de película definido pela lei de Newton. Comparando com a lei de Fourier, tem-se:

$$Nu = \frac{x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_s - T_w)} \quad (21)$$

Que, utilizando-se as variáveis adimensionais definidas pelas relações (8,9,9.b) resulta, para a placa plana e cone:

$$Nu = -(3 \cos \gamma)^{\frac{n}{2}} (Ra)^{1/2} \left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (22)$$

## RESULTADOS

Com o auxílio da relação para o balanço de energia térmica na interface líquido-vapor (equação 15), a espessura da película condensada  $\eta\delta$  pode ser determinada para fixados valores do parâmetro de subresfriamento  $Sc$  e da componente normal de velocidade adimensional  $\beta$ .

A figura 2 mostra a relação entre  $\eta\delta$  e o parâmetro  $Sc$ , para três valores de  $\beta$ . O valor negativo de  $\beta$  representa sucção, o valor positivo, injeção e, o valor nulo representa o caso particular de superfície impermeáveis. A figura 3 mostra os perfis de temperatura para um valor fixado de  $Sc$  e os mesmos três valores de  $\beta$ . Os valores de  $\Theta$  diminuem da unidade até zero, quando  $\eta$  aumenta de zero até  $\eta\delta$ .

Como esperado, a espessura da película condensada  $\eta\delta$  é função decrescente do valor absoluto da sucção, ou seja, para um mesmo parâmetro  $Sc$ , a espessura  $\eta\delta$  é reduzida com o aumento da sucção. Analogamente, a espessura  $\eta\delta$  é função crescente do valor da injeção.

Quando a sucção é relativamente grande, a espessura  $\eta\delta$  torna-se muito pequena e o valor limite para a sucção pode ser obtido quando  $\eta\delta$  tende a zero.

Tal comportamento da espessura da película condensada  $\eta\delta$  exerce grande influência na Transferência de Calor através das superfícies, uma vez que a

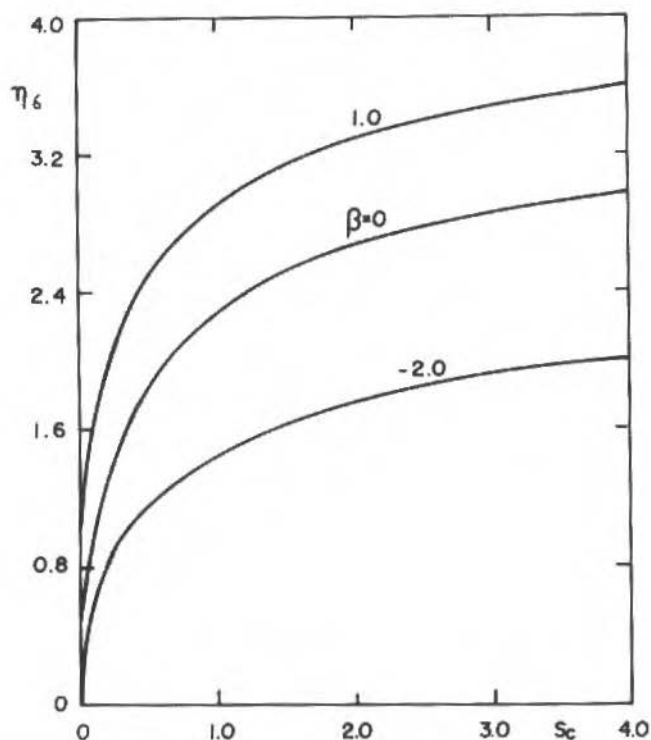


Figura 2. Variação da espessura da película condensada.

mesma atua como uma resistência térmica, como mostra a figura 4. Nesta figura observa-se que, para um mesmo valor do parâmetro  $Sc$ , a taxa de transferência de calor  $Nu$  é maior para a sucção e menor para a injeção, como resultado direto da diferença da espessura da película  $\eta\delta$ , e conseqüentemente, da diferença da resistência térmica atuante, que é aumentada com o aumento da espessura da película  $\eta\delta$ . Entretanto, é interessante observar ainda, o comportamento das curvas, provocados pelos efeitos da espessura da película  $\eta\delta$  (resistência térmica) e do parâmetro  $Sc$  (potencial térmico). Para o caso da sucção, para a região de baixos valores de  $Sc$ , um acréscimo em seu valor, aumenta bruscamente a espessura  $\eta\delta$ , reduzindo a taxa de transferência de calor  $Nu$ . Por outro lado, para a região de altos valores de  $Sc$ , um acréscimo em seu valor, provoca uma grande diferença de potencial térmico, resultando no aumento de  $Nu$ . O ponto mínimo da curva de sucção representa o ponto de

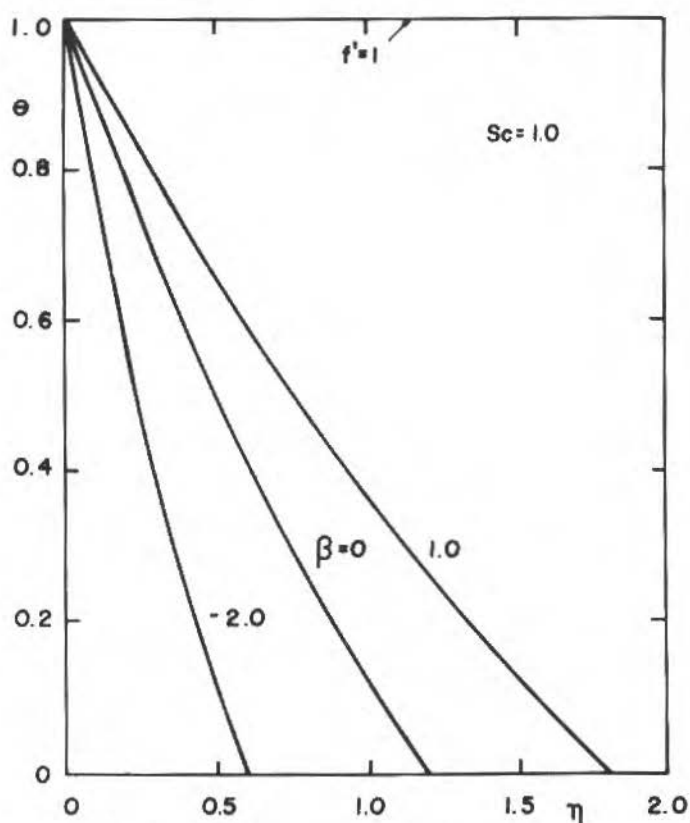


Figura 3. Perfis de temperatura e velocidade longitudinal.

equilíbrio entre os efeitos do acréscimo da resistência térmica e do acréscimo de potencial térmico. O mesmo comportamento não é verificado para as superfícies impermeáveis ( $\beta = 0$ ), onde, na região de baixos valores de  $Sc$ , ocorre equilíbrio entre os dois efeitos e, na região de altos valores de  $Sc$ , predomina o efeito do aumento de potencial térmico, resultando assim em um acréscimo mais acentuado no parâmetro  $Nu$ . E, finalmente, para a injeção, a predominância do efeito do aumento do potencial térmico é visível em ambas as regiões do parâmetro  $Sc$ , mais acentuadamente na região de altos valores de  $Sc$ .

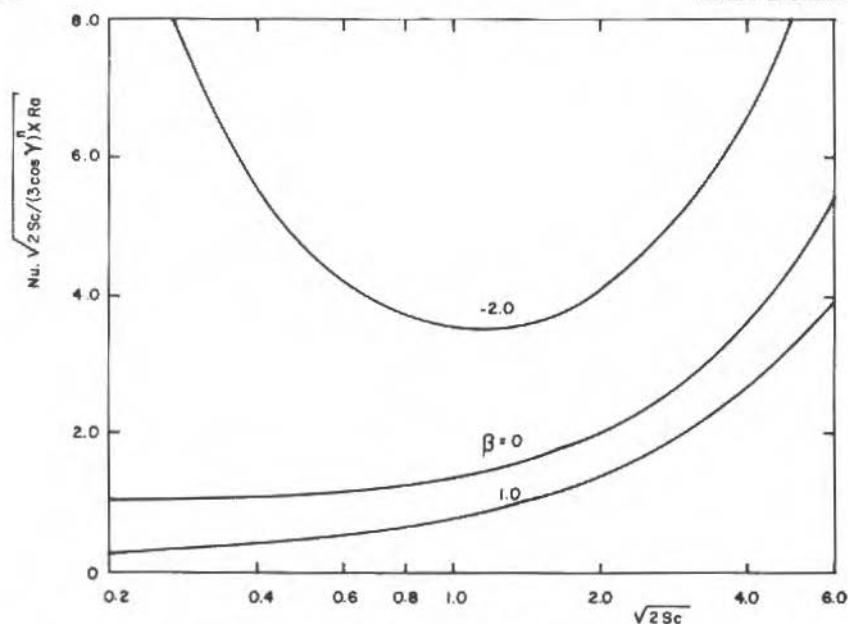


Figura 4. Variação do número de Nusselt.

## CONCLUSÃO

Para os valores particulares do parâmetro que define a relação entre a temperatura das superfícies permeáveis com a distância longitudinal,  $1/2$  e  $3/2$ , respectivamente, para a placa plana e cone, e também de uma relação apropriada de fluxo lateral de massa com a distância longitudinal, solução similar foi obtida.

Os resultados mostram que, a sucção de parte do líquido condensado, reduz a espessura da película condensada e aumenta a transferência de calor nas superfícies, para um dado valor do parâmetro de subresfriamento, enquanto que a injeção de parte de líquido, ao contrário, aumenta a espessura da película condensada e reduz a transferência de calor nas superfícies.

É interessante observar ainda que, a solução exata obtida neste trabalho, pode ser utilizada para o cilindro horizontal e esfera, como solução da equação resultante da aproximação de ordem zero [5], quando o parâmetro que define

a relação entre a temperatura das superfícies permeáveis com a distância longitudinal assumem valores 1 e 2, respectivamente.

## REFERÊNCIAS

- [1] PARMENTIER, E.M. Two Phase Natural Convection Adjacent to a Vertical Heated Surface in a Porous Medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 22, 849-855, 1979.
- [2] CHENG, P. Film Condensation Along in Inclined Surface in a Porous Medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24, 983-990, 1981.
- [3] CHENG, P.; CHUI, D.K. & KWOK, L.P. Film Boiling about Two-dimensional and Axisymmetric Isothermal Bodies of Arbitrary Shape in a Porous Medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 25, 1247-1249, 1982.
- [4] LIU, C.Y.; ISMAIL, K.A.R. & EBINUMA, C.D. Film Condensation with Lateral Mass Flux about a Body of Arbitrary Shape in a Porous Medium, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 11, 377-384, 1984.
- [5] EBINUMA, C.D. & LIU, C.Y. Film Condensation over a Permeable Non-Isothermal Body of Arbitrary Shape in a Porous Medium, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 16, 743-751, 1989.
- [6] HILDEBRAND, F.B. *Advanced Calculus for Applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1962.

## THERMAL ENTRY REGION SOLUTIONS IN LAMINAR FLOW OF PRANDTL-EYRING FLUIDS

### REGIÃO DE ENTRADA TÉRMICA PARA ESCOAMENTO LAMINAR DE FLUIDOS DO TIPO PRANDTL-EYRING

R.M. Cotta, S.R.R. Passos and C.A.C. Santos\*  
COPPE/UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Programa de Engenharia Mecânica  
Cx. Postal 68503 - Cidade Universitária  
21945, Rio de Janeiro RJ, Brasil

\*Permanent Address:  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal da Paraíba  
João Pessoa PB, Brasil

#### ABSTRACT

*Laminar forced convection of Prandtl-Eyring type non-newtonian fluids inside circular tubes and parallel-plate channels is theoretically studied. The related energy equation for the thermal entrance region is analytically solved and recently advanced Sign-count method utilized to efficiently compute eigenquantities of the associated Sturm-Liouville problem, to any desired order and accuracy, allowing for quite reliable numerical results along a wide range of the dimensionless axial distance. The analysis is performed for the more general third kind boundary condition, and several numerical results for quantities of practical relevance, such as bulk temperature and Nusselt numbers, are graphically presented.*

**Keywords:** Channel Flow ■ Forced Convection ■ Non-Newtonian Fluid ■ Analytical Solution ■ Graetz Problem

#### RESUMO

*Trata-se do estudo teórico da convecção forçada laminar de fluidos não-newtonianos do tipo Prandtl-Eyring no interior de tubos circulares e canais de placas paralelas. A equação de energia para a região de entrada térmica é resolvida analiticamente e o recém-desenvolvido método de contagem do sinal utilizado para computar com eficiência os autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville associado, até a ordem e precisão desejadas, permitindo a obtenção de resultados numéricos bastante confiáveis ao longo de uma ampla faixa da distância axial adimensionalizada. A análise é feita para a condição de contorno mais geral de terceiro tipo, e vários resultados numéricos são apresentados em forma gráfica para quantidades de interesse prático, como temperatura média de mistura e números de Nusselt.*

**Palavras-chave:** escoamento em Dutos ■ Convecção forçada ■ Fluido Não-Newtoniano ■ Solução Analítica ■ Problema de Graetz

## NOMENCLATURE

$h^*$	heat transfer coefficient between duct wall and the surroundings
$k$	fluid thermal conductivity
$\ell_0$	reference length for dimensionless normal coordinate
$\ell_0$	reference length for dimensionless axial distance
$\frac{dp(z)}{dz}$	longitudinal pressure gradient (constant)
$r$	radial (or normal) coordinate
$r_w, R_w$	tube radius or half the spacing between parallel-plates, dimensional and dimensionless
$T(r, z)$	temperature distribution
$T_\varepsilon$	fluid inlet temperature
$T_\infty$	temperature of the surroundings
$\bar{u}$	average fluid velocity
$z$	axial coordinate

## Greek letters

$\alpha$	fluid thermal diffusivity
$\mu_i$	eigenvalues in problem (5)
$\psi(\mu_i, R)$	eigenfunctions in problem (5)

## Sub and superscripts

$i$	order of eigenquantity
—	integral transformed quantity

## INTRODUCTION

Thermal entry region solutions in laminar forced convection inside circular tubes and parallel-plate channels are of major interest for a more refined design and performance analysis of various heat exchange equipments. Although quite reliable numerical results for quantities of practical interest, in the case of newtonian fluids [1,2], have been made widely available a few years ago, it wasn't until quite recently that more involved situations of non-newtonian fluids, such as power-law fluids [3,4] and Bingham plastics [5], were considered in a more definitive way. Much of the difficulty associated with establishing accurate numerical results within most of the thermal entrance length, is related to the appropriate solution of an eigenvalue problem, as required by analytical solution procedures, and which is here once more alleviated through the use of the so-called Sign-count method [6-8] for Sturm-Liouville type problems.

The present contribution is therefore part of a continuing effort aimed at providing benchmark results [3,4,8] to forced convection problems of various rheologically different fluids. At this point we are particularly concerned with Prandtl-Eyring fluid [9,10], which is yet described by a single parameter constitutive equation like the most frequently studied power law fluids. Apparently, the literature reveals a certain lack of information within most of the thermal entrance length for such class of fluids, and the very early work of [11] for circular tubes, remains as a major source of results, frequently referenced by textbooks on non-newtonian fluid flow and heat transfer. Here, we consider both circular tubes and parallel-plate channels, allowing for convection boundary condition at the duct wall, and, by evaluating as many eigenquantities as necessary, provide solutions for a quite wide range of the dimensionless axial coordinate. Bulk temperature profiles and both local and average Nusselt numbers are then accurately obtained and presented in graphical form for future reference.

## ANALYSIS

We consider thermally developing, hydrodynamically developed laminar flow of Prandtl-Eyring fluid inside simple shaped ducts such as circular tubes and parallel-plate channels. Assuming constant physical properties and neglecting



viscous dissipation, the associated energy equation is written in dimensionless form as:

$$W(R) \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial R} \left[ R^n \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right], \quad 0 < R < R_w, \quad Z > 0 \quad (1.a)$$

where

$$n = \begin{cases} 0, & \text{for parallel-plates duct} \\ 1, & \text{for circular tube} \end{cases}$$

and

$$W(R) = \left( \frac{\ell_0}{\ell_n} \right) R^n U(R) \quad (1.b)$$

with inlet and boundary conditions given respectively by:

$$\theta(R, 0) = 1 \quad 0 \leq R \leq R_w \quad (1.c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z > 0 \quad (1.d)$$

$$\frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} + Bi \theta(R, Z) = 0, \quad R = R_w, \quad Z > 0 \quad (1.e)$$

where various dimensionless groups are defined as:

$$\theta(R, Z) = \frac{T(r, z) - T_\infty}{T_e - T_\infty}, \text{ dimensionless temperature}$$

$$R = \frac{r}{\ell_0}, \text{ dimensionless normal (or radial) coordinate}$$

$$Z = \frac{\alpha z}{\bar{u} \ell_n^2}, \text{ dimensionless axial coordinate}$$

$$U(R) = \frac{u(r)}{\bar{u}}, \text{ dimensionless velocity profile}$$

$$R_w = \frac{r_w}{\ell_0}, \text{ dimensionless tube radius (or half the spacing} \\ \text{between parallel plates)}$$

$$Bi = \frac{h^* \ell_0}{k}, \text{ Biot number}$$

From the constitutive equation for the rate of deformation [10], the velocity profiles for a Prandtl-Eyring fluid are readily determined as:

$$U(R) = \frac{\cosh(b) - \cosh(bR)}{\cosh(b) - \frac{1}{b} \sinh(b)}, \text{ for parallel-plates} \quad (3.a)$$

$$U(R) = \frac{\cosh(b) - \cosh(bR)}{\cosh(b) - \frac{2}{b} \sinh(b) + \frac{2}{b^2} (\cosh(b) - 1)}, \text{ for circular tube} \quad (3.b)$$

where

$$b = \frac{r_w}{2A} \frac{dp}{dZ} \quad (3.c)$$

is the dimensionless pressure gradient and  $A$  is a constant in the constitutive relation. For decreasing  $b$  the newtonian fluid model is approached ( $b = 0$ ), while for increasing  $b$  the velocity profile is progressively flattened up (slug flow for  $b = \infty$ ).

Equations (1) are readily solved exactly through the integral transform technique [6] to yield the temperature profile:

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i} \bar{f}_i \psi(\mu_i, R) e^{-\mu_i^2 Z} \quad (4.a)$$

where the normalization integral,  $N_i$ , and transformed inlet condition,  $\bar{f}_i$ , are respectively given by:

$$N_i = \int_0^{R_w} W(R) [\psi(\mu_i, R)]^2 dR \quad (4.b)$$

$$\bar{f}_i = \int_0^{R_w} W(R) \psi(\mu_i, R) dR \quad (4.c)$$

while the eigenvalues,  $\mu_i$ 's, and eigenfunctions  $\psi(\mu_i, R)$  are obtained from the solution of the related eigenvalue problem:

$$\frac{d}{dR} \left[ R^n \frac{d\psi(\mu_i, R)}{dR} \right] + \mu_i^2 W(R) \psi(\mu_i, R) = 0, \quad 0 < R < R_w \quad (5.a)$$

$$\frac{d\psi(\mu_i, R)}{dR} = 0, \quad \text{at } R = 0 \quad (5.b)$$

$$\frac{d\psi(\mu_i, R)}{dR} + Bi \psi(\mu_i, R) = 0, \quad \text{at } R = R_w \quad (5.c)$$

The analysis of such a Sturm-Liouville problem is here assumed to be known, from direct application of the ideas in the so-called sign-count method [6-8],

providing accurate results for as many eigenquantities as needed to achieve the desired convergence in eq.(4.a).

Once the temperature profiles are obtainable, quantities of practical interest in heat exchanger analysis can be evaluated as follows:

### Dimensionless bulk temperature

$$\theta_{av}(Z) = \frac{n+1}{R_w^{n+1}} \cdot \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^2 \cdot \int_0^{R_w} W(R) \theta(R, Z) dR \quad (6.a)$$

### Local Nusselt number

$$Nu(Z) = \frac{h(z) \ell_n}{K} = \frac{\ell_n}{\ell_0} \cdot \frac{\partial \theta(R, Z) |_{R=R_w}}{\theta(R_w, Z) - \theta_{av}(Z)} \quad (6.b)$$

### Average Nusselt number

$$Nu_{av}(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(Z) dZ \quad (6.c)$$

For the case of  $Bi = \infty$  (prescribed temperature at the duct wall), the average Nusselt number can be alternatively evaluated through application of the energy balance in a length  $Z$  of the duct, to provide:

$$Nu_{av}(Z) = \frac{R_w}{n+1} \left(\frac{\ell_0}{\ell_n}\right) \frac{1}{Z} \ln \left(\frac{1}{\theta_{av}(Z)}\right) \quad (6.d)$$

Also of interest is the a priori establishment of limiting Nusselt numbers ( $Z \rightarrow \infty$ ) at the thermally fully developed region. By retaining the first terms only in the summations of eq. (6.b), one obtains:

$$Nu_{\infty} = \frac{1}{\left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right) \cdot \frac{n+1}{R_w} \cdot \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{\ell_0}{\ell_n} \cdot \frac{1}{Bi}} \quad (7)$$

The working formulae (6,7) were employed to provide the numerical results here presented.

## RESULTS AND DISCUSSION

In the results that follow the reference lengths were taken as:

$$\ell_n = D_h(\text{hydraulic diameter}) = \begin{cases} 2r_w, & \text{for circular tubes} \\ 4r_w, & \text{for parallel-plates} \end{cases}$$

$$\ell_0 = 2r_w \quad , \quad R_w = 0.5$$

Calculations were performed on a 16 bits microcomputer, and the Sign-count method utilized to yield over one hundred eigenvalues and until convergence was achieved at every each axial location chosen. In figs. (1.a-1.b), results are shown for the parallel-plates geometry as a function of the dimensionless axial distance and for different values of the parameter  $b = 1, 4, 10$  and  $20$ , respectively for dimensionless bulk temperature and local Nusselt number. Clearly, for more flattened up velocity profiles (larger values of  $b$ ), as the slug flow model is approached, it takes a shorter axial distance for thermal development to be reached and temperature levels are therefore lower. Higher heat transfer rates are then achieved at the same flow rate and fluid properties. Similar results for the circular tube geometry are presented in figures (2.a-2.b). Several additional sets of results for finite values of the Biot number were obtained, but their presentation is here avoided due to space limitations. In figures (3.a,b), however, limiting Nusselt number curves are shown for various values of  $Bi = 0.1, 1, 5, 10, 100$  and  $\infty$ , in terms of the parameter  $b$ , which depart from newtonian fluid values at  $b = 0$  and tend asymptotically to the slug flow results as  $b \rightarrow \infty$ . As the thermal resistance for heat exchange with the external ambient is increased (decreasing values of  $Bi$ ), the internal heat transfer coefficient also increases in order to compensate for the added resistance and achieve total heat exchange for sufficiently long ducts. It is also evident that the effects of the different velocity profiles (different values of  $b$ ) are less pronounced for the large values of Biot number, and the limiting slug flow results are reached for reasonably low values of the flow parameter,  $b$ .

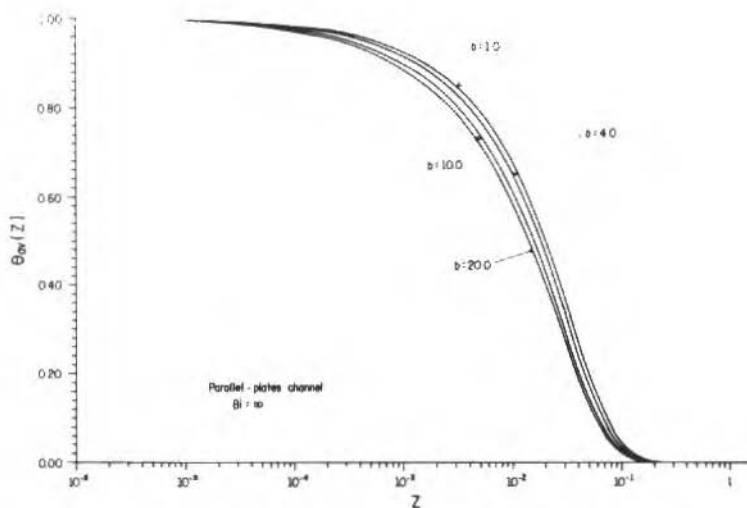


Figure 1a. Dimensionless bulk temperature profiles for the flow of a Prandtl-Eyring fluid inside parallel-plates channel ( $Bi = \infty$ ).

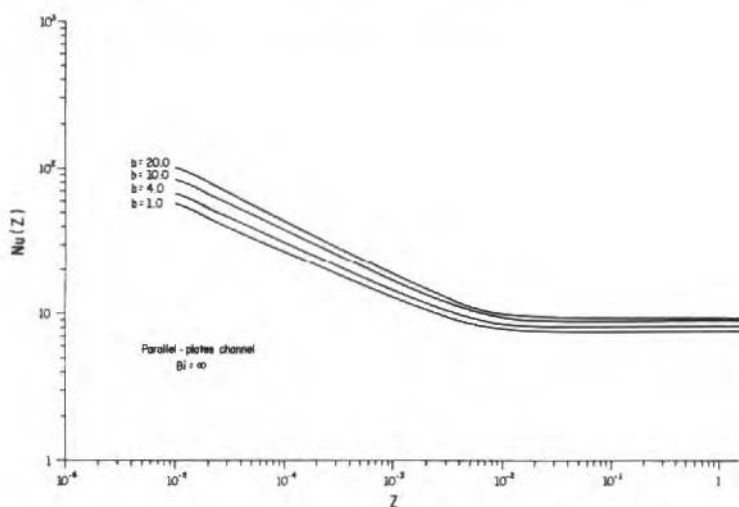


Figure 1b. Local Nusselt number for a parallel-plates channel ( $Bi = \infty$ ).

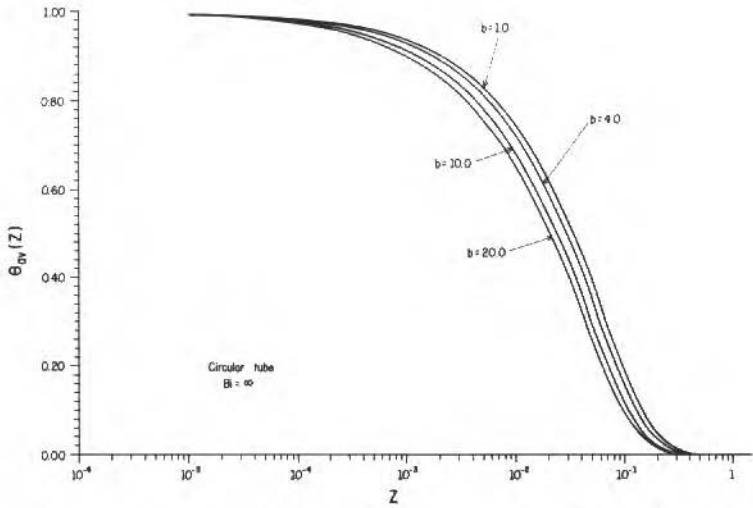


Figure 2a. Dimensionless bulk temperature profiles for the flow of a Prandtl-Eyring fluid inside a circular tube ( $Bi = \infty$ ).

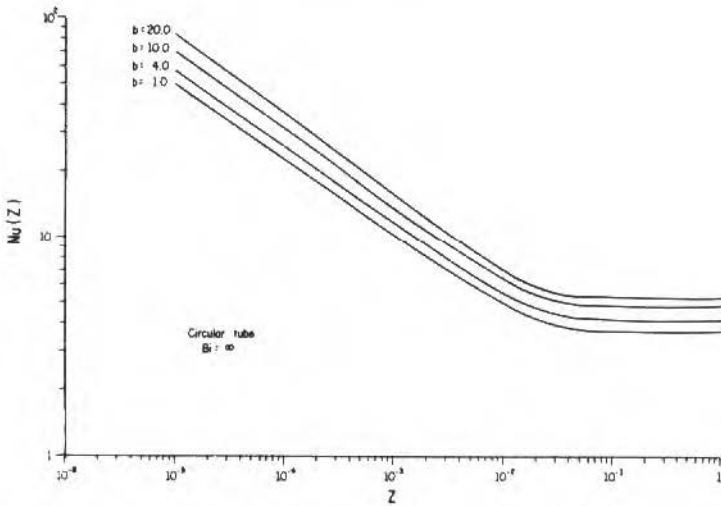


Figure 2b. Local Nusselt number for a circular tube ( $Bi = \infty$ ).

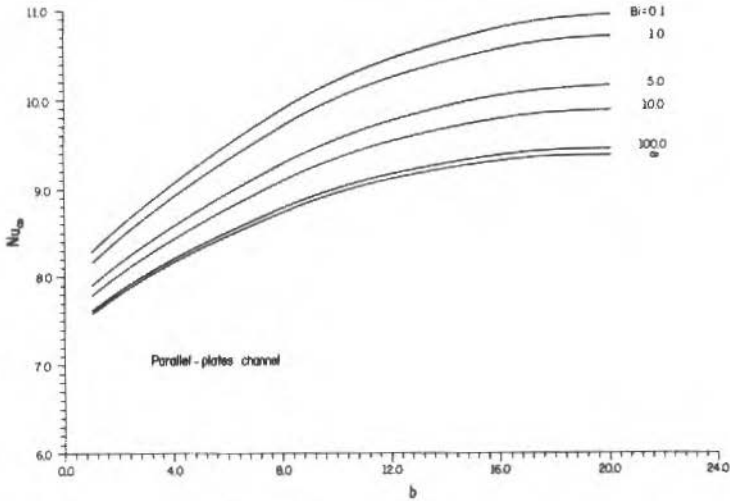


Figure 3a. Limiting Nusselt numbers as a function of dimensionless pressure gradient,  $b$ , and various Biot numbers (parallel-plates channel).

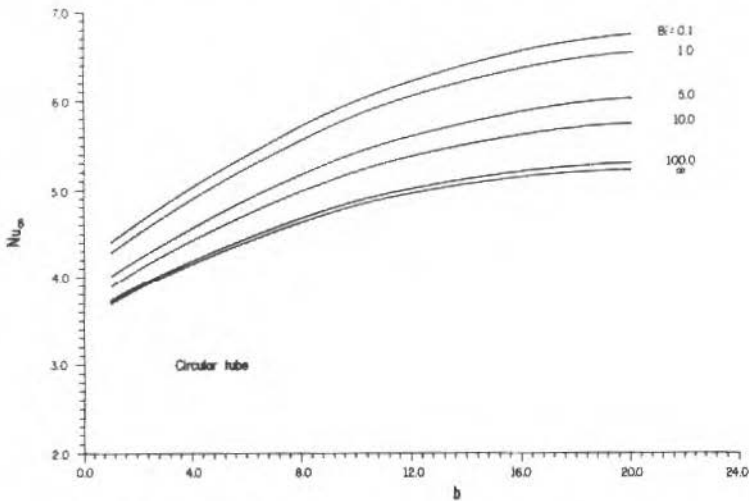


Figure 3b. Limiting Nusselt numbers as a function of dimensionless pressure gradient,  $b$ , and various Biot numbers (circular tubes).

The computer code generated can be readily modified to accommodate different flow situations, such as turbulent regime with algebraic models, annular channel geometry with various combinations of boundary conditions, and different types of fluids, allowing for highly accurate and low cost thermal entry region results for internal forced convection.

### ACKNOWLEDGEMENT

One of the authors (C.A.C.S.) wishes to acknowledge the financial support provided by CAPES and Universidade Federal da Paraíba, both from Brasil, during his stay at ITA. This work was partially supported by FAPESP/Brasil.

### REFERENCES

- [1] SHAH, R.K. & LONDON, A.L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts, *Adv. Heat Transfer*, Suppl. 1, 1978.
- [2] SHAH, R.K. Thermal Entry Solutions for the Circular Tube and Parallel-Plates, *Proc. Natl. Heat Mass Transfer Conf.*, 3rd, Indian Inst. Technol. Bombay, vol. 1, paper no. HMT-11-75, 1975.
- [3] COTTA, R.M. & ÖZISIK, M.N. Laminar Forced Convection of Power-Law Non-Newtonian Fluids Inside Ducts, *Wärme-und-Stoffübertragung*, v. 20, pp. 211-218, 1986.
- [4] COTTA, R.M. & ÖZISIK, M.N. Laminar Forced Convection to Non-Newtonian Fluids in Ducts with Prescribed Wall Heat Flux, *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, vol. 13, pp. 325-334, 1986.
- [5] BLACKWELL, B.F. Numerical Solution of the Graetz Problem for a Bingham Plastic in Laminar Tube Flow with Constant Wall Temperature, *J. Heat Transfer*, v. 107, pp. 466-468, 1985.
- [6] MIKHAILOV, M.D. & ÖZISIK, M.N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley, New York, 1984.
- [7] MIKHAILOV, M.D. & VULCHANOV, N.L. A Computational Procedure for Sturm-Liouville Problems, *J. Comp. Phys.*, v. 50, pp. 323-336, 1983.
- [8] COTTA, R.M. On the Eigenvalues Basic to Forced Convection of Non-Newtonian Fluids, *Rev. Bras. Ciências Mecânicas*, RBCM, vol. 10, no.1, pp. 25-41, 1988.
- [9] WILKINSON, W.L. *Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1960.



- [10] CAVATORTA, O.N. & TONINI, R.D. Dimensionless Velocity Profiles and Parameter Maps for Non-Newtonian Fluids, *Int. Comm. Heat & Mass Transfer*, v. 14, pp. 359-369, 1987.
- [11] SCHENK, J. & VAN LAAR, J. Heat Transfer in Non-Newtonian Laminar Flow in Tubes, *Appl. Sci. Res., Section A*, vol. 7, pp. 449-461, 1958.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

### Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the english title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from english, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excelent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.

ÍNDICE / CONTENTS

V.M. Soundalgekar and J.P. Bhat	MHD Flow and Heat Transfer in a Rotating Channel of a Rarefied Gas between Infinitely Conducting Plates	311
P.A.O. Soviero R.M. Girardi and L.C.C. Santos	Evaluation of Interference Lift Factors by the Intersecting Bodies Technique	325
C. Melo e H.C. Caldeira F <sup>o</sup>	Simulação Numérica de Instalações de Ventilação Natural	343
G. Guimarães	Simultaneous Thermal Conductivity and Diffusivity Determination Using Parameter Estimation Techniques	367
C.D. Ebinuma	Solução Similar para Condensação Pelicular em meio Poroso sobre Placa Plana e Cone Permeáveis e não Isotérmicos	381
R.M. Cotta S.R.R. Passos and C.A.C. Santos	Thermal Entry Region Solutions in Laminar Flow of Prandtl-Eyring Fluids	395