



REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

**REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
**JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

---

**EDITOR: Hans Ingo Weber**

Dept<sup>o</sup> Projeto Mecânico, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

**EDITORES ASSOCIADOS**

Álvaro Toubes Prata

Dept<sup>o</sup> Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPO

Carlos Alberto de Almeida

Dept<sup>o</sup> Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,  
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

**CORPO EDITORIAL**

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UF RJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UF RJ)

Moisés Zindeluck (COPPE/UF RJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UF RJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UF RJ)

Samir N.Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

---

Publicado pela / Published by

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /**  
**BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

---

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

**MCT**



## DISPOSITIVO PADRÃO DE MICRODESLOCAMENTOS†

### STANDARD RIG FOR THE MEASUREMENT OF MICRODISPLACEMENTS

Alice Ioshimi Kawasaki  
Walter Antônio Kapp  
Armando Albertazzi Gonçalves Jr.  
Laboratório de Metrologia e Automatização  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis SC, Brasil

#### RESUMO

*O objetivo deste trabalho é apresentar um dispositivo que possibilita viabilizar o uso de um novo método de autocalibração que permita trazer a técnica da holografia interferométrica dos centros de pesquisa para a indústria.*

*Este dispositivo denominado de dispositivo padrão de microdeslocamentos - DPM, deve apresentar elevada repetibilidade de deslocamento, na ordem de 10 nm.*

**Palavras-chave:** Holografia Interferométrica • Laser Interferométrico

#### ABSTRACT

*The aim of this paper is to present a device that makes possible the use of a new auto-calibration method which would bring interferometric holography techniques from research and development centers to industrial environment.*

*This device, named standard microdisplacement generator, is able to work within a 10 nm repeatability error.*

**Keywords:** Interferometric Holography • Interferometric Laser

---

†Prêmio Y. Numata, 1989

## INTRODUÇÃO

Para atender às características cada vez mais exigentes ditadas pelo mercado contemporâneo, é frequente o desenvolvimento de projetos cada vez mais arrojados em sua concepção, que exigem tecnologias bastante sofisticadas de fabricação e controle de qualidade.

É, portanto, fundamental que o desenvolvimento das técnicas de controle de qualidade também acompanhem este avanço tecnológico. Não somente o controle geométrico de características dimensionais dos componentes mecânicos devem ser verificados, mas também o seu desempenho.

A holografia interferométrica, está aos poucos trilhando um caminho pelo qual será possível efetuar um controle quantitativo sobre o desempenho de peças mecânicas submetidas a esforços mecânicos, tais como forças e momentos.

Esta técnica de medição sem contato, possui elevada sensibilidade o que a torna bastante adequada para aplicação em mecânica de precisão. Entretanto, seu uso ainda está quase restrito a laboratórios de centros de pesquisa.

Esforços têm sido efetuados no sentido de facilitar a aplicação desta importante técnica em situações mais gerais. Um novo método de autocalibração tem-se mostrado promissor para este propósito [1]. Entretanto, para que este seja possível, é necessário o desenvolvimento de um dispositivo padrão especial de elevadíssima precisão denominado Dispositivo Padrão de Microdeslocamentos (DPM).

O presente trabalho trata da concepção, desenvolvimento e qualificação da DPM, que uma vez aprovado, servirá como base para, juntamente com o método de autocalibração, constituir uma estação holográfica automatizada para medição de deslocamentos, deformações e tensões.

Para que possa ser usado para este propósito, este DPM deve gerar um deslocamento que deve atender aos seguintes requisitos:

- trabalhar num faixa de operação em torno de  $5,00 \mu\text{m}$ , com um erro de repetibilidade não superior a  $\pm 0,01 \mu\text{m}$ ;
- não ter histerese;

- ter boa estabilidade com o tempo;
- fácil operação, inclusive no escuro;
- ter características independentes de orientação pois pode ser posicionado em qualquer orientação;
- ser leve e portátil.

Nesta faixa de operação, uma possível alternativa são os cristais piezoelétricos [2] e [3] que possuem suficiente resolução no posicionamento e ótima linearidade. Porém, possuem o inconveniente da dificuldade na manutenção de carga e daí não serem próprios para aplicação em eventos estáticos.

## CONCEPÇÃO BÁSICA

Para atender aos requisitos exigidos optou-se pela utilização de princípios eletromagnéticos [4] aplicados, como mostra a figura 1, que consiste basicamente de uma placa de alumínio e 2 bobinas alimentadas por uma fonte de corrente.

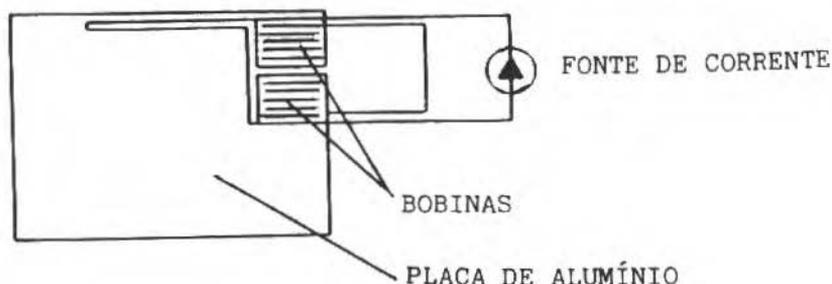


Figura 1. Dispositivo padrão de microdeslocamentos (DPM)

A placa de alumínio é a estrutura do DPM. É onde serão fixadas as bobinas que vão gerar a força que provocará o deslocamento desejado. Para isso, as bobinas foram fixadas na extremidade em balanço de uma viga engastada nesta placa, que funciona como mola.

Pensou-se em utilizar a viga pois uma força razoável (aproximadamente 62 mN) fornece o deslocamento micrométrico exigido com a vantagem de não ter peças móveis, que poderiam causar atrito e, conseqüentemente, histerese.

Foi escolhido o alumínio pois o campo magnético gerado pelas bobinas não é influenciado por este material, isto é, o alumínio não se magnetiza, apresentando com isso características magnéticas estáveis no tempo.

Para gerar a força sobre a viga, são utilizadas 2 bobinas devido à necessidade de se ter força de atração constante e estável. Inicialmente pensou-se em utilizar uma bobina e um imã permanente mas, com o tempo, o imã pode ter suas características magnéticas alteradas o que resultaria em uma força de atração instável.

A necessidade de ter uma força estável implicou também na utilização de uma fonte de corrente para alimentar as bobinas, pois numa fonte de tensão a corrente nas bobinas varia em função da resistência desta, que varia em função da temperatura que por sua vez varia em função do tempo. Com a fonte de corrente diminui-se esses problemas tendo corrente constante, o que resulta em força eletromagnética constante.

## MEDIÇÃO DO DESLOCAMENTO

Tratando-se de um dispositivo que gera deslocamentos tão reduzidos, a sua qualificação exige técnicas especiais não convencionais.

A seguir são relacionados os meios utilizados neste trabalho para medir o deslocamento e verificar a repetibilidade.

### Interferômetro de Michelson (IM)

Inicialmente foram feitas várias tentativas para medir o deslocamento desejado através do uso deste método, mas experimentalmente o mesmo não se mostrou confiável para medição de deslocamentos com tolerâncias tão pequenas. As principais dificuldades foram relacionadas com a sua instabilidade quando deslocamentos tão pequenos são envolvidos.

## Laser Interferométricos (LI)

Na figura 3 o feixe de luz do laser possui 2 componentes de frequência ( $f_1$  e  $f_2$ ) ligeiramente diferentes, sendo uma polarizada verticalmente e a outra horizontalmente.

Ao atingir o interferômetro, as frequências são separadas. A  $f_2$  é refletida apenas no retrorefletor fixo e retorna juntando-se  $f_1$ , que havia seguido em direção ao espelho móvel, retornando então com uma frequência ligeiramente diferente, devido à velocidade decorrente do deslocamento do espelho móvel. Quando a  $f_2$  e a ( $f_1 \pm \Delta f_1$ ) atingem o receptor, um fotodetector transforma  $f_2$  e ( $f_1 \pm \Delta f_1$ ) em sinal elétrico alternado de frequência ( $f_2 - (f_1 \pm \Delta f_1)$ ). Este sinal é amplificado e enviado a um conversor de pulsos, que recebe também um segundo sinal elétrico alternado de frequência ( $f_2 - f_1$ ) de referência, enviado pela fonte de laser. Estes dois sinais são tratados no conversor e deste sai um pulso para cada incremento de  $\lambda/2$  do caminho óptico ou  $\lambda/8$  de deslocamento do espelho móvel.

Porém como as condições de medição são bastante otimizadas: estabilidade de temperatura, bancada isolada de vibrações, deslocamento muito pequeno (na faixa de 0 a 10  $\mu\text{m}$ ), e com curso morto (distância entre o interferômetro e o espelho móvel) mínimo; pode-se usar recursos de interpolação eletrônica para obter uma resolução de  $\lambda/20$  do caminho óptico, ou uma resolução de  $\lambda/80$  (8 nm) no deslocamento do espelho móvel, como mostram as figuras 2 e 3.

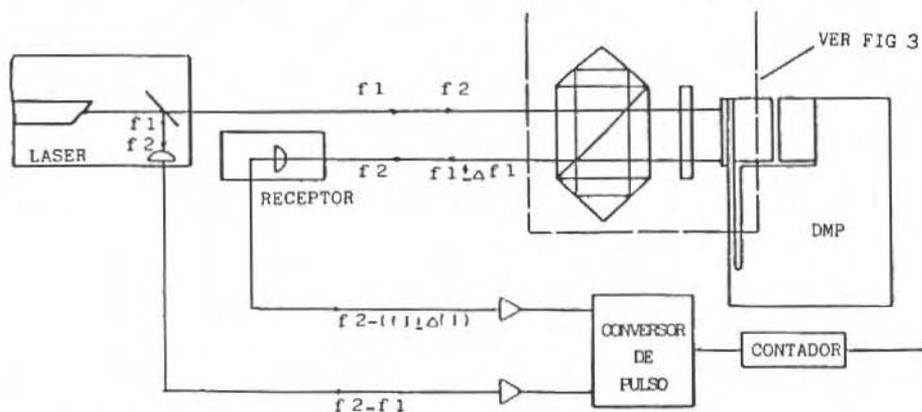


Figura 2. Esquema do laser interferométrico (LI) para obter resolução de 8 nm.

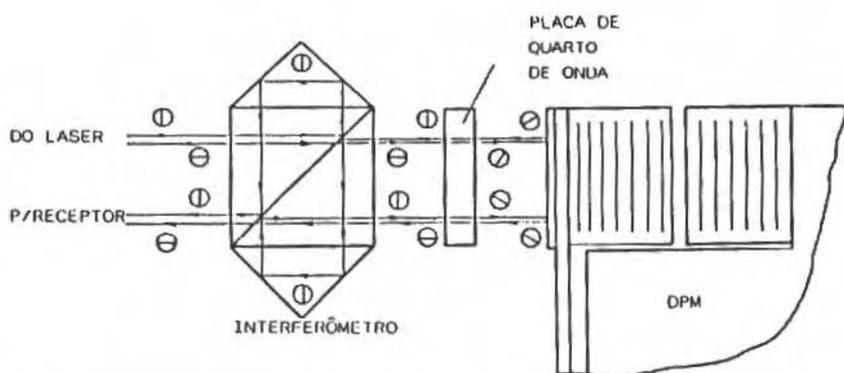


Figura 3. Detalhe interferômetro (observar a polarização do prisma:  $\ominus$  = Polarização vertical - feixe reflete;  $\oplus$  = Polarização horizontal - feixe passa).

As bobinas são alimentadas por uma fonte de corrente estabilizada. O LI é operado pelo microcomputador, que aplica um tratamento estatístico nos dados para redução dos erros aleatórios do SM.

Foram realizados vários ensaios e os resultados obtidos ficaram em torno de uma incerteza máxima de posicionamento de  $\pm 4$  nm, isto é,

$$V = 4,299 \pm 0,004\mu \text{ para corrente de } 10,0mA$$

onde  $V$  é o deslocamento do espelho móvel sobre a viga.

### Holografia interferométrica

Neste trabalho o tipo de holografia utilizado é o de dupla exposição [1].

Na figura 4 o feixe do laser é dividido ao atingir o divisor de feixe. A partir daí um feixe emite ondas de referência  $\vec{R}$  e o outro ilumina o objeto, que reflete a onda do objeto  $\vec{O}$ .

A placa fotossensível é exposta às ondas  $\vec{R}$  e  $\vec{O}$  por um determinado tempo. Após esta exposição é aplicada uma corrente nas bobinas que provoca o deslocamento da viga. Com este deslocamento o corpo emite ondas  $\vec{O}'$  diferentes da anterior  $\vec{O}$ . A mesma placa fotossensível é exposta novamente às ondas  $\vec{R}$  e  $\vec{O}'$ , pelo mesmo período de tempo da exposição anterior.

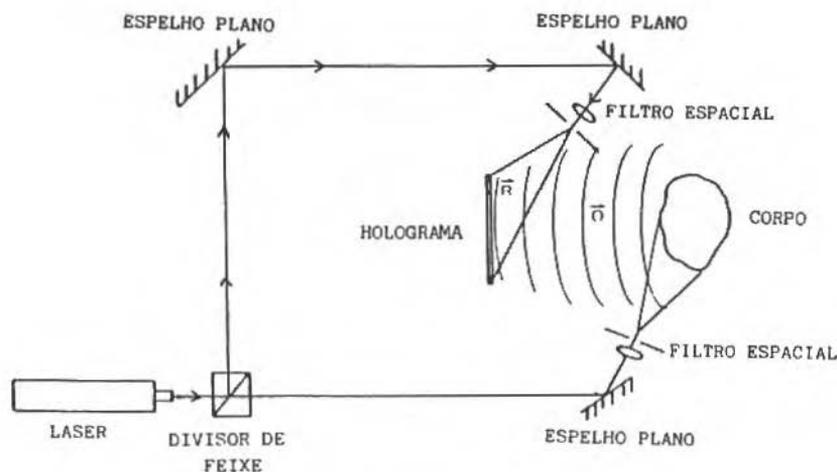


Figura 4. Gravação de um holograma

Quando a placa fotossensível é revelada e iluminada pela onda de referência  $\vec{R}$  é possível ver a imagem tridimensional de corpo resultante da interferência entre  $\vec{O}$  e  $\vec{O}'$ . Onde aparecem as franjas de interferência devido ao deslocamento.

A figura 5 mostra os vetores de orientação da Holografia que são responsáveis pela sensibilidade da Holografia.

Para obter-se a máxima sensibilidade da holografia, esta foi feita otimizando-se todos os parâmetros como mostra a figura 6, onde a orientação da fonte de iluminação e do ponto de observação é colinear, com isso obtêm-se o máximo módulo do vetor sensibilidade (valor próximo de 2). Também nessa montagem, o vetor deslocamento  $\vec{d}$  e o vetor sensibilidade  $\vec{p}$  formam entre si um ângulo muito pequeno ( $\theta$ ), sendo que este varia desde zero, no centro da peça, até um valor ainda pequeno nas laterais da peça.

Este ângulo foi corrigido considerando o eixo  $z$  com a direção do deslocamento daí:

$$\vec{d} \cdot \vec{p} = 2 \cos \theta \cdot [d] \quad (1)$$

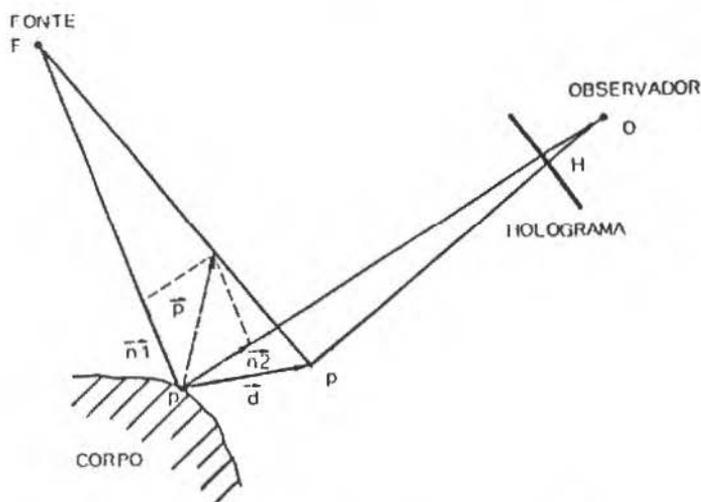


Figura 5. Vetores de orientação da holografia.

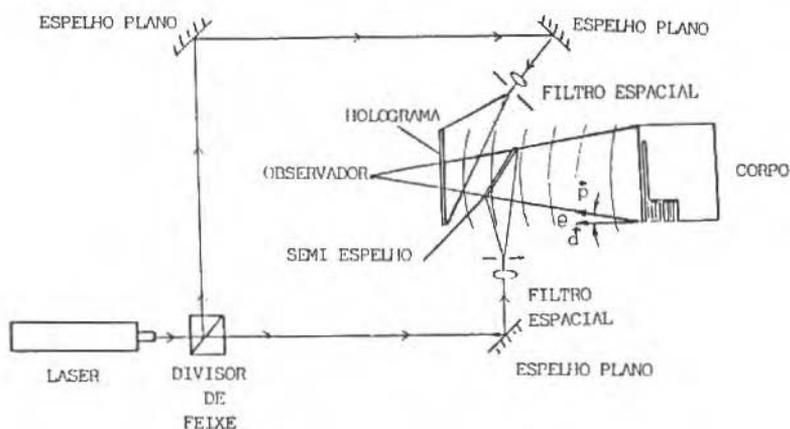
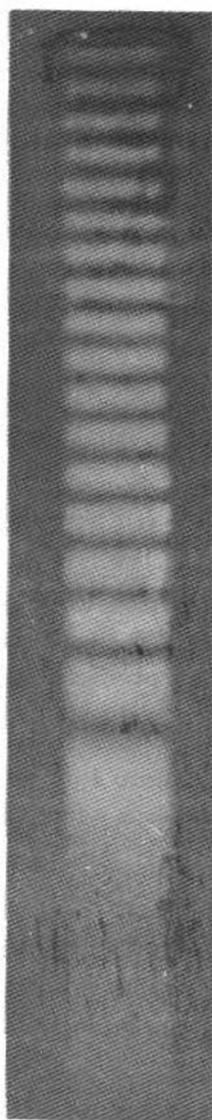


Figura 6. Montagem otimizada para holografia do dispositivo padrão de microdeslocamentos.

Das equações (2) e (3) tem-se:

$$\vec{d} = \frac{\lambda \cdot OF}{2 \cos \theta} \quad (2)$$



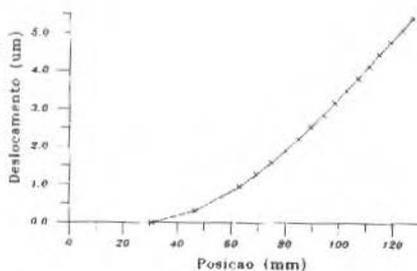
Nº	Pos. (mm)
17	130.88
16	127.39
15	123.31
14	118.23
13	114.87
12	111.88
11	107.81
10	102.71
9	98.48
8	94.23
7	89.52
6	84.95
5	80.16
4	74.93
3	69.23
2	63.95
1	55.86
0	46.67
0	30.48

Deslocamentos medidos

Of. n	Posição (mm)	Deslocamento ( $\mu\text{m}$ )
0	30.48	0.000
1	46.67	0.317
2	55.86	0.633
3	63.05	0.949
4	69.33	1.266
5	74.93	1.582
6	80.16	1.899
7	84.95	2.216
8	89.52	2.534
9	94.23	2.852
10	98.46	3.170
11	102.71	3.489
12	107.01	3.808
13	111.08	4.128
14	114.87	4.448
15	119.23	4.769
16	123.31	5.091
17	127.33	5.413

Incerteza de posição:  $\pm 25 \mu\text{m}$   
 Incerteza de desl. max:  $\pm 0.004 \mu\text{m}$

b) Quantificação dos Dados da HOLOGRAFIA.



a) Gráfico de deslocamentos.

a) Digitalização da HOLOGRAFIA (ampliação 1,769x)

Figura 7. Resultados da Holografia.

Como esta otimização, a resolução depende apenas de quanto se consegue interpolar entre uma OF e outra sendo que neste caso uma variação de uma OF corresponde a 316 nm, na região central do objeto.

Como a distribuição da intensidade luminosa de uma franja construtiva para a destrutiva é aproximadamente senoidal, dispo de um sistema de medição de intensidade luminosa e um plotter para digitalização, com aquisição de dados controlada por computador, se consegue interpolar valores entre uma OF e outra de forma muito confiável. Seguindo-se este procedimento chegou-se aos resultados apresentados na figura 7.

Para uma incerteza na determinação da OF de  $\pm 1/20$  de OF chegou-se à incerteza de 16 nm para a medição do deslocamento da viga com holografia.

## CONCLUSÃO

Após a definição geométrica do DPM, utilizou-se o laser interferométrico para verificar a repetibilidade de posicionamento e à holografia para verificar todo o campo de deslocamento, sendo que para os dois métodos tomou-se o cuidado de otimizar todos os parâmetros envolvidos para que fosse possível chegar aos resultados desejados.

Com o LI verificou-se que a repetibilidade de posicionamento é de  $\pm 4$  nm e com a holografia obteve-se o campo de deslocamentos em toda a face ativa da viga.

Analisando estes resultados conclui-se que com o DPM é perfeitamente viável gerar o deslocamento de 5m dentro da tolerância desejada de  $\pm 0,01 \mu\text{m}$ . Porém é necessário observar que estas especificações foram obtidas em condições controladas: temperatura estável em  $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$ , sistema isolado de vibrações e fonte de corrente estabilizada.

Tendo em conta que estas condições são frequentemente encontradas em ambiente de laboratório onde estão previstas as futuras aplicações do DPM, pode-se concluir que os objetivos pretendidos foram plenamente atingidos.

## REFERÊNCIAS

- [1] GONÇALVES JR., A.A. Automação da Medição de Deslocamentos pela Holografia Interferométrica. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1984.
- [2] DOEBELIN, E.O. Measurement Systems Application and Design. McGraw-Hill, EUA, 1983.
- [3] KISTLER INSTRUMENTE AO Quartz Load Washers, Charge Calibrator. Operating and Service Instructions CH-8408 Winterthur/Schweiz, jul/71.
- [4] RESNICK, R. & HALLIDAY, D. Física 3 e 4. LTC, Rio de Janeiro, 1984.
- [5] ZAJAC, A. & HECHT, E., Optics, Addison Wesley Pub. Co., Massachusetts, 1980.
- [6] HEWLET PACKARD COMPANY - HP 5501 Laser Transducer System. Operating and Service Manual 5301 Stevens Creek Blvd, Calif. 9505, september, 1977.

## DETERMINAÇÃO DA ABSORÇÃO SONORA DE MATERIAIS COM SISTEMA COMPUTADORIZADO

### SOUND ABSORPTION DETERMINATION USING A SINGLE MICROPHONE AND A DUAL CHANNEL FFT ANALYSER

Eduardo Giampaoli  
Divisão de Higiene do Trabalho  
Fundacentro - São Paulo

Samir N.Y. Gerges  
Lab. de Vibrações e Acústica  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
C.P. 476  
Florianópolis SC, Brasil

#### RESUMO

*Neste trabalho é feito o desenvolvimento dos fundamentos matemáticos envolvidos no método de determinação do coeficiente de absorção sonora de materiais, utilizando tubo de ondas estacionárias, com um microfone e um analisador digital de dois canais. São mostrados os detalhes construtivos do aparelho de ondas estacionárias projetado especialmente para a utilização deste método de medição. Também são apresentados a seleção e os ajustes dos parâmetros a serem adotados nas medições e as verificações preliminares do funcionamento do sistema de medição. Compara-se esta técnica com o método clássico.*

**Palavras-chave:** Medição de Absorção Sonora dos Materiais

#### ABSTRACT

*The standing wave method has been, for many years, the classical technique for measuring the sound absorption coefficient of small samples. This method, however, is very time consuming since it is based on pure tone excitation which produces a low resolution absorption curve. Also, at low frequency, a long tube is necessary to measure the sound wave ratio. The advent of FFT analysers has greatly increased the ability to measure rapidly and accurately with high resolution the sound absorption coefficients using a short tube. In this paper, the mathematical formulation for the determination of the sound absorption coefficient of materials, using a short tube, one microphone and a dual channel FFT analyser is presented. The construction and qualification of the measuring system is reported. The measuring results are compared with the classical method.*

**Keywords:** Measurement of the Sound Absorption of Materials

## INTRODUÇÃO

O método clássico para determinação do coeficiente de absorção de materiais, em um tubo de ondas estacionárias, utiliza um sistema de medição analógico, que fornece valores, apenas, para frequências discretas. Este método foi padronizado pela "American Society for Testing and Materials" - ASTM, através da norma C 384-85 [1].

Com o advento da técnica digital de análise de sinais, tornou-se possível determinar o coeficiente de absorção de materiais cobrindo-se simultaneamente uma banda de frequência, utilizando-se o mesmo tubo de ondas estacionárias mencionado anteriormente. A técnica consiste, basicamente, em excitar o tubo com um ruído "branco" de banda larga e medir a pressão sonora no seu interior, em duas posições pré-determinadas. Os sinais obtidos são processados por um analisador digital de frequência, com dois canais, através do qual se determina a curva de absorção acústica do material, em função da frequência. O primeiro método baseado nesta técnica utiliza dois microfones, um em cada posição de medição. Os sinais dos dois microfones são simultaneamente, processados pelo analisador digital e a curva de absorção é determinada. Mais informações sobre esta técnica podem ser encontradas nas publicações de Chung [2,3] e Gerges [4].

Em trabalhos publicados recentemente nas Refs. [5, 6, 7 e 10] os autores, assumindo que o processo pode ser considerado estacionário, concluem que os sinais dos microfones não precisam ser simultaneamente processados. Assim, propôs eliminar um dos microfones e utilizar, apenas, um único microfone para efetuar as medições nas duas posições selecionadas. Em cada medição é obtida a função de transferência entre o sinal do microfone e o sinal do gerador, responsável pelo campo acústico no interior do tubo. Objetiva-se com esta nova técnica, eliminar qualquer erro sistemático de diferença de amplitude e de fase ou outros possíveis erros devidos a eventuais diferenças entre os dois microfones. Desta forma, torna-se desnecessária a aplicação de funções de correção, normalmente utilizadas na técnica de dois microfones que, na prática, geram algumas dificuldades computacionais adicionais.

## DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

O princípio de operação do tubo de ondas estacionárias é baseado na interação de duas ondas planas, uma incidente e a outra refletida. O esquema de montagem utilizado nesta técnica é mostrado na figura 1.

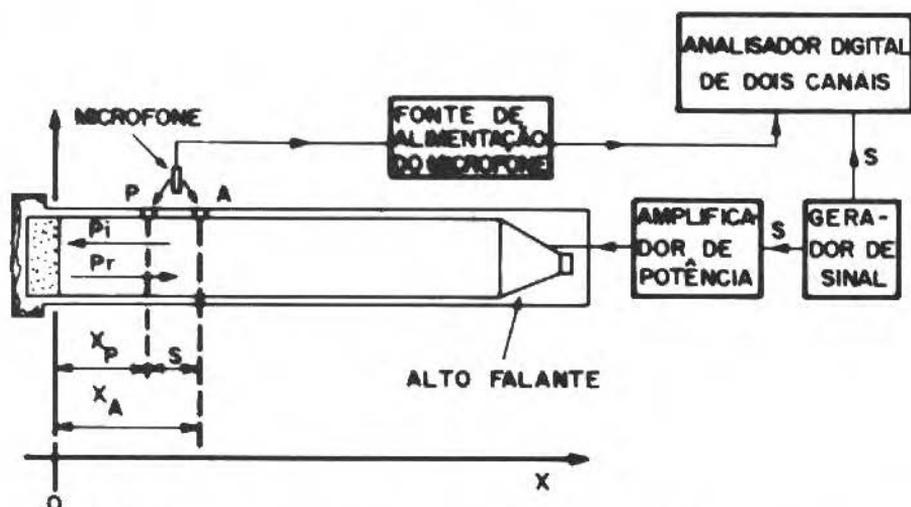


Figura 1. Esquema de montagem do sistema de medição para a determinação do coeficiente de absorção, usando a técnica de um microfone.

Nestas condições, no interior do tubo tem-se:

$$P_i = A \cdot e^{i(\omega t + kx)} \quad (1)$$

$$P_r = B \cdot e^{i(\omega t - kx)} \quad (2)$$

onde:

$P_i$  - pressão acústica complexa incidente

$P_r$  - pressão acústica complexa refletida

$A$  - amplitude de  $P_i$

$B$  - amplitude complexa de  $P_r$

$\omega$  - frequência da onda

$k$  -  $\omega/c$  = número de onda

- $c$  - velocidade de propagação do som no ar  
 $x_P$  - distância entre a amostra e a posição mais próxima do microfone  
 $x_A$  - distância entre a amostra e a posição mais afastada do microfone  
 $s$  - distância entre as duas posições do microfone  
 $S$  - sinal do gerador

Considerando-se a pressão total no interior do tubo (soma das equações 1 e 2), nas posições  $A$  e  $P$ , tem-se

$$P_P = e^{i\omega t} \cdot [Ae^{ikx_P} + Be^{-ikx_P}] \quad (3)$$

$$P_A = e^{i\omega t} \cdot [Ae^{ikx_A} + Be^{-ikx_A}] \quad (4)$$

A função de resposta em frequência ou função de transferência entre os sinais obtidos nas posições  $P$  e  $A$  é dada por

$$H_{AP} = \frac{P_P}{P_A} = \frac{[Ae^{ikx_P} + Be^{-ikx_P}]}{[Ae^{ikx_A} + Be^{-ikx_A}]} = \frac{[e^{ikx_P} + (B/A)e^{-ikx_P}]}{[e^{ikx_A} + (B/A)e^{-ikx_A}]} \quad (5)$$

A partir de (5) pode-se obter a expressão do módulo da razão das amplitudes

$$(B/A) = \left| \frac{H_{AP} - e^{-iks}}{e^{iks} - H_{AP}} \right| \quad (6)$$

Considerando-se que a energia sonora transmitida para fora do tubo, através da tampa, é assumida nula, o coeficiente de absorção  $\alpha$  pode ser determinado da seguinte forma

$$\alpha = 1 - \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 - \left| \frac{H_{AP} - e^{-iks}}{e^{iks} - H_{AP}} \right|^2 \quad (7)$$

Observando-se a expressão (7) pode-se notar que uma vez definida a distância entre as duas posições de medição,  $s$ , deve-se determinar a função de resposta em frequência,  $H_{AP}$  que é dada por

$$H_{AP} = H_{AS} \cdot H_{SP} \quad (8)$$

onde:

$S$  é o sinal do gerador, responsável pelo campo acústico no interior do tubo.

$H_{AS}$  é a função de transferência entre o sinal do microfone na posição  $A$  e o sinal do gerador.

$H_{SP}$  é a função de transferência entre o sinal do gerador e o sinal do microfone na posição  $P$ .

Conforme já citado anteriormente, assumindo-se que o processo pode ser considerado estacionário,  $H_{AS}$  e  $H_{SP}$  não necessitam ser calculados simultaneamente. Portanto, um único microfone poderá ser utilizado para medir, sequencialmente, a pressão nas posições  $A$  e  $P$ . A função  $H_{AP}$ , necessária para a determinação do coeficiente de absorção, é obtida através da equação (8).

Devem ser destacadas, ainda, três grandes vantagens desta técnica para determinação do coeficiente de absorção, que utiliza um analisador digital de dois canais, sobre o método clássico.

A primeira vantagem consiste na maior rapidez do método digital, na determinação do coeficiente de absorção. Por exemplo, a curva de absorção de um material, em uma determinada faixa de frequência, pode ser obtida, por este método, num tempo 20 a 30 vezes menor do que o necessário para determinar o coeficiente de absorção, em 30 frequências discretas (tons puros), distribuídas ao longo da mesma banda de frequência coberta pelo método digital.

O segundo aspecto positivo do método digital, é o fato de fornecer uma curva do coeficiente de absorção, praticamente contínua, já que a discretização do sinal pode implicar, em alguns casos, uma resolução da ordem de décimos de Hz. Portanto, através deste método pode-se detectar qualquer comportamento das curvas de absorção, como por exemplo: ressonâncias, que pelo método clássico poderiam passar despercebidas, em função da baixa resolução.

A outra vantagem deste método é dispensar o uso de um tubo de ondas estacionárias de grande comprimento para medições em baixa frequências. Na técnica clássica o comprimento do tubo deve ser suficiente para conter, pelo menos, meio comprimento de onda e possibilitar a medição dos níveis de pressão sonora máximo e mínimo da onda estacionária. Na técnica de um microfone é

suficiente que o comprimento do tubo seja da ordem de grandeza de distância entre as posições de microfones adotadas.

### Função de Coerência

Outro importante parâmetro que deve ser determinado durante as medições de coeficiente de absorção é a função de coerência. Esta função, que varia entre 0 e 1, mede o grau de causalidade entre dois sinais quaisquer. Neste estudo, ela pode ser usada para verificar a validade da função de transferência,  $H_{AP}$ , obtida. Segundo [8] e [5], pode ocorrer um significativo erro aleatório na estimativa da função de transferência, em frequências para as quais a coerência, entre as duas medições feitas no tubo de ondas estacionárias, apresentar um valor baixo. Portanto, através da função de coerência pode-se quantificar a confiança no cálculo da função  $H_{AP}$  e, conseqüentemente, na curva de absorção determinada.

A função de coerência é definida pela razão entre o espectro cruzado  $G_{AP}$  e os espectros de potência  $G_{AA}$  e  $G_{PP}$ ,

$$\gamma_{AP}^2 = \frac{|G_{AP}|^2}{G_{AA} \cdot G_{PP}} \quad (9)$$

Conforme ocorre com a função de transferência, quando se utiliza a técnica de um microfone não é possível determinar a função de coerência de forma direta. No entanto, pode-se escrever:

$$\gamma_{AP}^2 = \gamma_{AS}^2 \cdot \gamma_{SP}^2 \quad (10)$$

As funções  $\gamma_{AS}^2$  e  $\gamma_{SP}^2$  serão obtidas quando o microfone ocupar respectivamente as posições  $A$  e  $P$ . A função de coerência  $\gamma_{AP}^2$  será determinada pela equação (10).

### APARELHO DE ONDAS ESTACIONÁRIAS

O aparelho de ondas estacionárias, ilustrado na figura 2, foi projetado de forma a possibilitar a determinação do coeficiente de absorção de materiais acústicos, através da técnica de um microfone anteriormente referida. É constituído,

basicamente, por dois componentes principais: a caixa acústica e o tubo de ondas estacionárias propriamente dito. O conjunto é montado na posição vertical e utiliza o piso de concreto de laboratório como terminação rígida do tubo.

A caixa acústica é construída com placas de aglomerado de 20mm de espessura e equipada com um alto-falante da marca Selenium, modelo W-830, que possui um diâmetro nominal de 305mm. Visando reduzir as possíveis reflexões no extremo do tubo onde se encontra a fonte sonora, conforme recomenda [8], foi utilizado um enchimento de espuma entre o alto-falante e o início do tubo de ondas estacionárias. Ainda, com o mesmo objetivo, as paredes internas da caixa foram totalmente revestidas com lã de vidro, protegida por um fino envólucro plástico e na face superior interna foram instaladas oito cunhas de espuma.

O tubo de ondas estacionárias é constituído por um tubo de PVC com 200mm de diâmetro externo e 170mm de diâmetro interno, com flanges, também em PVC, nas duas extremidades. Uma das extremidades é fixada na caixa acústica e a outra acoplada ao piso, através da pressão gerada pelo próprio peso do sistema. Para possibilitar uma melhor conexão, dois anéis de borracha macia estão colocados entre a extremidade do tubo e o piso.

A frequência de corte do tubo de ondas estacionárias é 1.182 Hz.

Para possibilitar a medição da pressão sonora em duas posições distintas do tubo de ondas estacionárias, foram feitos sete orifícios equidistantes entre si, que acomodam perfeitamente o microfone de meia polegada e o pré-amplificador, utilizados na medição. A distância entre as posições de microfone,  $s$ , dependerá de quais orifícios forem selecionados para a medição da pressão sonora. Como o sinal proveniente do microfone será processado por um analisador digital, o valor de  $s$  não poderá ser qualquer, pois será função da discretização adotada no referido analisador. Para este estudo optou-se pela determinação de curvas do coeficiente de absorção que cubram a banda 0 Hz a 1000 Hz. Os sinais processados pelo analisador HP 5451C passam por um filtro passa baixa (filtro ante-aliasing) sintonizado na frequência de corte de 1250 Hz. O sistema foi então, ajustado de forma que fossem colhidas 5.000 amostras por segundo (frequência de amostragem). Verifica-se que,  $s$  deverá ser no mínimo 68,6mm

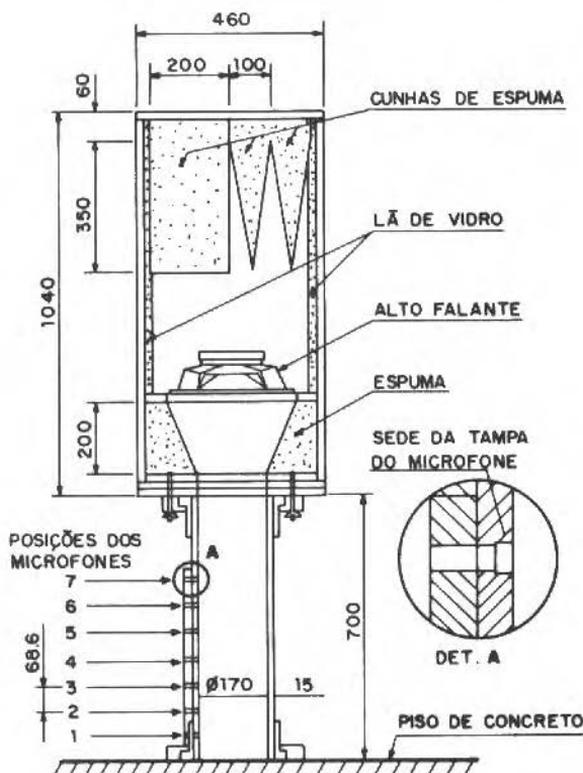


Figura 2. Vista em corte do aparelho de ondas estacionárias (medidas em mm).

ou assumir qualquer valor múltiplo deste mínimo. Portanto, os sete orifícios foram alinhados na direção de propagação da onda sonora, com espaçamento de 68,6mm entre os centros de orifícios consecutivos. Para facilitar a identificação, ao longo do trabalho, das posições de microfone selecionadas, para medição, os orifícios foram identificados pelos números 1 a 7, iniciando-se pelo orifício mais próximo à extremidade do tubo onde posiciona-se a amostra. A distância entre o centro do orifício 1 e o extremo do tubo também foi ajustada em 68,6mm.

### AJUSTE E VERIFICAÇÃO DO SISTEMA

Estando o sistema de medição devidamente montado, o próximo passo foi proceder a seleção e ajustes dos parâmetros a serem adotados nas medições

e efetuar as verificações preliminares do funcionamento do referido sistema.

### Seleção das Posições de um Microfone

Bodén na Ref. [8] verificou que o espaçamento entre as posições de microfone define a faixa de frequência na qual as medições terão precisão aceitável. Considerando  $ks$  variando entre 0 a  $\pi$ , constatou que a menor variação da curva ocorrerá quando  $ks = \pi/2$  e, baseado em dados experimentais, recomenda como faixa de utilização, a definida pela relação seguinte

$$0,1\pi < ks < 0,8\pi \quad (11)$$

A partir da expressão (11) pode-se determinar as frequências mínima  $f_{\min}$  e máxima  $f_{\max}$  da faixa recomendada para uso, em função entre da distância as posições de microfone adotadas.

Analogamente, considerando-se  $ks = \pi/2$ , temos a frequência ideal de trabalho,  $f_i = c/4.s$ , em torno da qual espera-se que a curva apresente a menor variação.

A Tabela 1 abaixo mostra os valores de  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  e  $f_i$ , para as distâncias entre posições,  $s$ , que podem ser adotadas no tubo de ondas estacionárias utilizado neste estudo.

Tabela 1. Valores de  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  e  $f_i$ , em função de da distância  $s$ .

$s$ (mm)	$f_{\min}$ (Hz)	$f_{\max}$ (Hz)	$f_i$ (Hz)
68,6	251	2000	1250
137,2	126	1000	625
205,8	84	666	417
274,4	63	500	312
343,0	51	400	250
411,6	42	333	208

Analisando-se a Tabela 1, verifica-se que maiores espaçamentos entre as posições de microfone, são mais adequados para estudos nas regiões de baixas frequências.

Considerando-se, ainda, os casos nos quais:

$$\begin{aligned} k_m s &= m\pi && \text{ondé} && m = 1, 2, 3, \dots, \text{ tem-se} \\ f_m &= \frac{mc}{2s}, && \text{ ou } && s = m \frac{\lambda m}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Nestes casos, verifica-se que a distância  $s$  entre as posições de microfone coincide com um múltiplo de meio comprimento de onda e a pressão sonora no interior do tubo deve ser igual nas duas posições de medição. Esta condição estabelece uma indeterminação na expressão (7), utilizada para o cálculo do coeficiente de absorção. Portanto, a curva do coeficiente de absorção deve apresentar grande variação nas regiões em torno das frequências  $f_m$ , definidas pela expressão (12). Esta é uma característica própria do método de medição utilizado.

Analisando-se a expressão (12), verifica-se ainda, que quanto maior for  $s$ , tanto menor será o valor de  $f_m$  para um mesmo  $m$ . Portanto, quanto maior for a distância entre as posições selecionadas para o microfone, tanto maior será o número de regiões com grande variação na curva de absorção, considerando-se uma mesma banda de frequências.

As informações constantes neste item e os objetivos a serem alcançados, deverão nortear a adequada escolha das posições de microfone.

### Espectro de Pressão Sonora

O campo acústico no interior do tubo de ondas estacionárias foi gerado, alimentando-se o alto-falante com um sinal cujo espectro é de um ruído branco com largura de 1000 Hz. Cada espectro obtido nesta fase de verificação do sistema, corresponde à média de 50 amostras do sinal enviado ao analisador digital. Baseado no critério apresentado na Ref. [9] para este número de amostras adotado pode-se afirmar, com confiança de 99%, que os valores verdadeiros do espectro de potência ou do espectro cruzado estão contidos no intervalo de  $-1,3\text{dB}$  a  $+1,5\text{dB}$  dos valores estimados experimentalmente. Para confiança de 90%, o referido intervalo será de  $-0,8\text{dB}$  a  $+0,9\text{dB}$ .

O espectro de pressão sonora do campo acústico no interior do tubo de ondas estacionárias foi determinado, colocando-se o microfone nas posições 3, 5 e

7 (ver figura 2). As medições foram feitas sem material absorvente junto à terminação rígida e uma das curvas obtidas é mostrada na figura 3. Observa-se, que em frequências bem definidas, cada espectro apresenta acentuados decréscimos no valor da amplitude. Considerando a banda de frequência entre 0 Hz a 1000 Hz, as frequências onde os referidos decréscimos ocorrem,  $f_m$ , são dados em função da posição de medição, conforme equação (12).

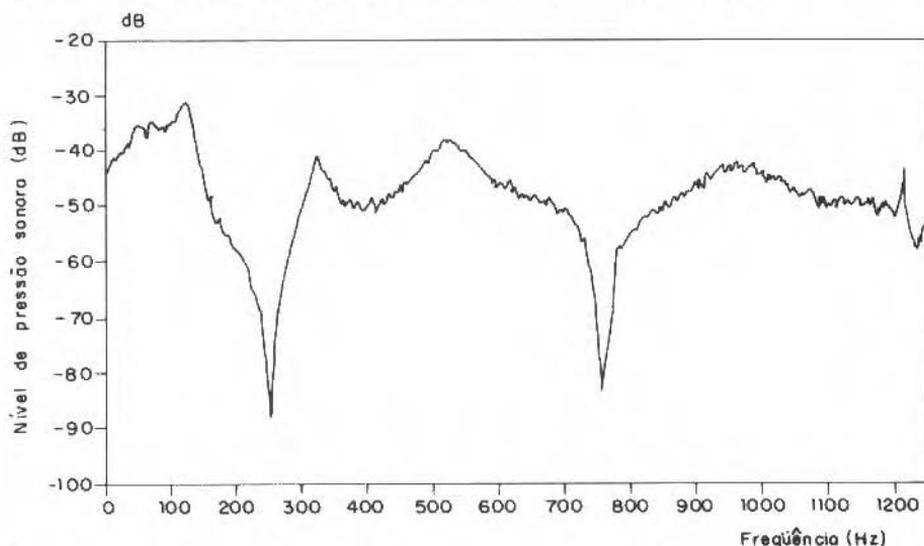


Figura 3. Espectro de pressão sonora (não calibrado) no interior do tubo de ondas estacionárias, com terminação rígida. Microfone na posição 5.

### Ruído de Fundo

Durante o desenvolvimento deste trabalho, tomou-se o cuidado em verificar o nível de ruído de fundo no interior do tubo de ondas estacionárias. Comparou-se o espectro do ruído de fundo com o espectro do campo acústico, nas diversas posições de medição utilizadas. Constatou-se que o ruído de fundo apresentou níveis de pressão sonora, com diferenças frequentemente iguais ou superiores a 20 dB, em relação aos níveis apresentados pelos espectros do campo acústico no interior do tubo, determinados com a presença de amostra de material absorvente. Em casos isolados ocorreram diferenças menores mas, nunca inferiores a 10 dB.

### Efeito da Rotação e da Profundidade do Microfone

Outra verificação feita no sistema foi o efeito que a rotação do microfone, ou seu deslocamento para o interior do tubo, poderia causar sobre as medições efetuadas. Embora não tenham sido notadas alterações nos resultados decorrentes destas variáveis analisadas, as medições ao longo de todo o estudo realizado foram feitas mantendo-se estes parâmetros inalterados.

### DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE ABSORÇÃO

O material analisado foi uma placa de espuma com 60 mm de espessura e densidade igual a  $44 \text{ kg/m}^2$ , da qual foram tiradas duas amostras, uma apropriada ao tubo da B&K e a outra compatível com o sistema utilizado neste trabalho.

Pelo método clássico, utilizando o aparelho de ondas estacionárias da B&K, tipo 4002, foram feitas medições do coeficiente de absorção para 20 tons puros, cobrindo-se a banda de frequência entre 100 Hz e 1050 Hz.

Pelo método utilizado neste estudo, cada curva de coeficiente de absorção foi determinada através da expressão (7) e é baseada na média de 50 amostras do sinal enviado ao analisador digital, já comentada anteriormente. Para as curvas de absorção, obtidas ao longo de todo o estudo, adotou-se  $\Delta f = 2,44 \text{ Hz}$ .

A primeira curva de absorção foi determinada com o microfone ocupando as posições 5 e 7. Neste caso, a distância entre as posições de microfone corresponde a 137,2 mm. A curva obtida é apresentada na figura 4, na qual também estão plotados os valores obtidos pelo método clássico.

Analisando-se a referida curva constata-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos dois métodos. Observa-se, também, uma variação mais acentuada em frequências inferior a 135 Hz.

Determinou-se, novamente, a curva de absorção da mesma amostra mas, com o microfone nas posições 2 e 7. Neste caso, a distância entre as posições de microfone correspondem a 343 mm. A curva do coeficiente de absorção obtida

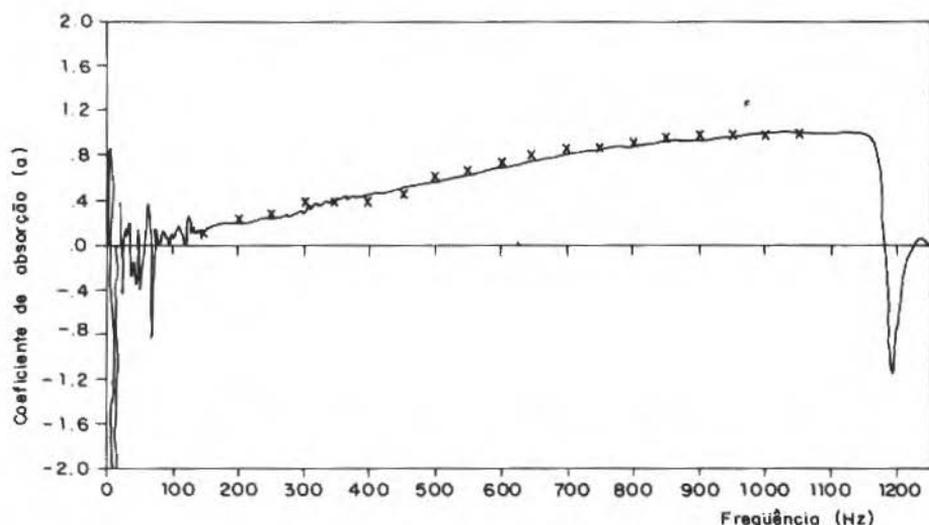


Figura 4. Coeficiente de absorção da amostra de espuma. Microfone nas posições 5 e 7.

é mostrada na figura 5, que também inclui os valores determinados pelo método clássico.

Observando-se a figura 5, verifica-se que os resultados previstos teoricamente pela expressão (12), sobre a ocorrência de grandes variações em torno de 500 Hz, são confirmados pelos dados experimentais. Excetuando-se as regiões da curva perturbadas pela grande variação, novamente se observa uma boa concordância entre os valores determinados pelos dois métodos de medição. Quanto a região da curva abaixo de 135 Hz, nota-se, neste caso, uma menor variação em relação à medição feita com microfone nas posições 5 e 7 mas, não o suficiente para apresentar valores aceitáveis a partir de 51 Hz, conforme previsto na Tabela 1. Deve-se ressaltar, no entanto, que esta variação pode ser devida, não só ao fato de  $ks \rightarrow 0$ , mas, também, aos baixos valores de  $\alpha$  obtidos nesta região do espectro. Espera-se que para valores de  $\alpha$  mais elevados, a curva de absorção apresente uma variação menor, nesta mesma banda de frequência. A figura 6 mostra a função de coerência determinada durante a obtenção da figura 5. A alta coerência neste caso significa boas estimativas das funções de transferências.

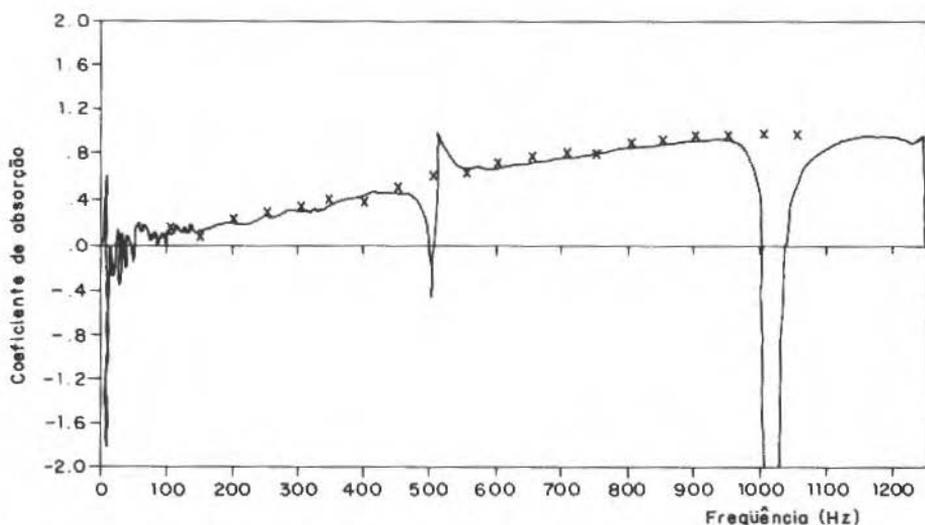


Figura 5. Coeficiente de absorção da amostra de espuma. Microfone nas posições 2 e 7.

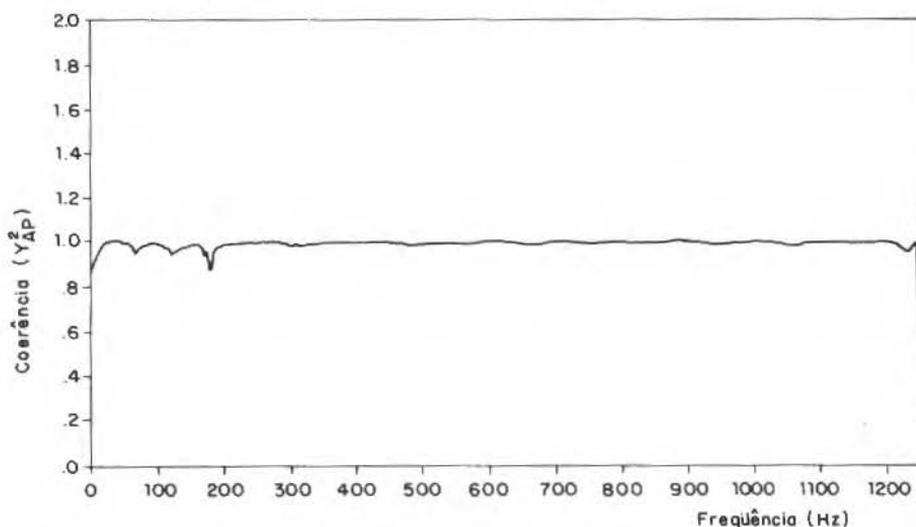


Figura 6. Função de coerência entre as duas posições de medição, determinada durante a obtenção da curva de coeficiente de absorção mostrada na figura 5. Microfone nas posições 2 e 7.

Outro aspecto que deve ser considerado é a repetibilidade entre os resultados obtidos no sistema de medição. Neste sentido, a figura 7 mostra três curvas de absorção, obtidas exatamente nas mesmas condições. O que se fez entre cada medição foi retirar e recolocar a amostra no tubo. A proximidade entre as curvas permite concluir que o sistema de medição apresenta uma boa repetibilidade.

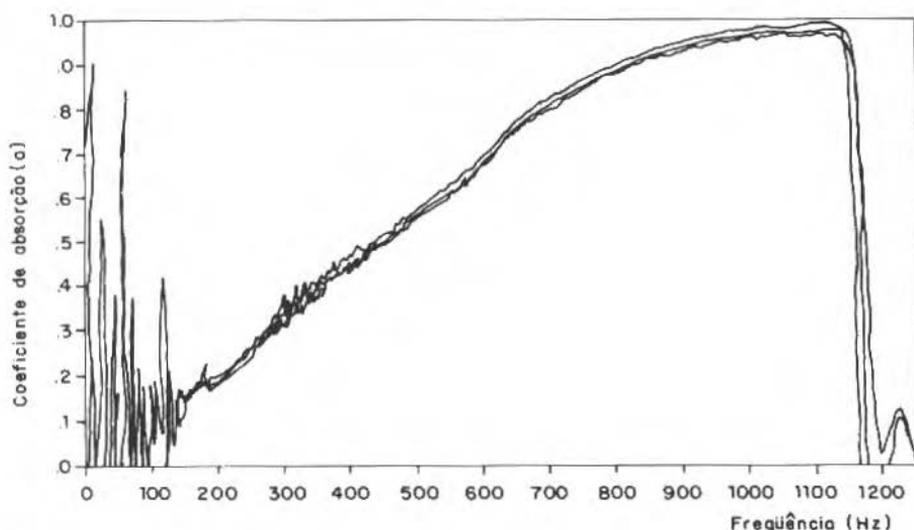


Figura 7. Sobreposição de três curvas do coeficiente de absorção da mesma amostra de espuma. Microfone nas posições 5 e 7.

## CONCLUSÕES

A técnica de medição proposta na Ref. [5] e apresentada neste estudo, além de muito eficiente e rápida (20 e 30 vezes mais rápida que o método clássico), mostrou resultados com precisão e confiança comparáveis aos obtidos com as técnicas já consagradas mundialmente. Outro aspecto positivo é a alta resolução alcançada com esta técnica de medição. As curvas obtidas podem ser consideradas praticamente contínuas, já que a discretização do sinal pode implicar, em alguns casos, uma resolução da ordem de décimos de Hz.

## REFERÊNCIAS

- [1] ASTM-384-85, Standard Test Method for Impedance and Absorption of Acoustical Materials by the Impedance Tube Method, revised (1985).
- [2] CHUNG, J.Y. and BLASER, D.A. Transfer Function Method of Measuring In-Duct Acoustic Properties: I. Theory, J. Acoust. Soc. Am., vol.68, n<sup>o</sup> 3 (1980).
- [3] CHUNG, J.Y. and BLASER, D.A. Transfer Function Method of Measuring In-Duct Acoustic Properties: II. Experiment, J. Acoust. Soc. Am., vol.68, n<sup>o</sup> 3 (1980).
- [4] GERGES, S.N.Y. ANDRADE, E.B., VARGAS, R.T. e DAMASCENO, R.K. Medição de Absorção Acústica de Materiais com a Técnica dos Dois Microfones, COBEM-85.
- [5] CHU, W.T. Transfer Function Technique for Impedance and Absorption Measurements in an Impedance Tube Using a Single Microphone, J. Acoustic. Soc. Am., vol.80, n<sup>o</sup> 02, (1986).
- [6] GIAMPAOLI, E. Características da Absorção de Tijolos Transformados em Absorvedores de Ruído de Baixa Frequência. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Engenharia Mecânica, (1987).
- [7] GIAMPAOLI, E. e GERGES, S.N.Y. Determinação da Absorção Sonora de Materiais Utilizando a Técnica de um Microfone e um Analisador Digital de Dois Canais, COBEM-87.
- [8] BÓDEN, H. and ABOM, M. Two - Microfone Measurements in the Plane Wave Region of Ducts - Influence of Errors, Rep. TRITA-TAK 8401, Dpt. of Technical Acoustics, Royal Inst. of Technology, Stockholm, (1984).
- [9] GERGES, S.N.Y. Processamento e Análise de Sinais Aleatórios, Curso de Pós-Graduação, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Engenharia Mecânica, (1986).
- [10] DODDS, C.J. and ROBSON, J.D. Partial Coherence in Multivariable Process, J. of Sound and Vibration, 42, pp. 243-249, (1975).

## DYNAMIC MODELS OF HYDROELECTRIC MACHINERY

### MODELAGEM DINÂMICA DE UNIDADES HIDROELÉTRICAS

A. Sperber  
BASF AG, ZE/IR  
6700 Ludwigshafen, W-Germany

H.I. Weber  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Estadual de Campinas  
C.P. 6051, 13081 Campinas SP Brasil

#### ABSTRACT

*Field measurements are used to develop a mathematical model of the flexural vibrations of large-size hydroelectric units. First, the main design parameters are studied, using the transfer matrix approach with special elements for generator and turbine. The influence of parameter variations on the model's natural frequencies are investigated. A minimal model is deduced which allows for the main influencing parameters. The model fits the measured natural frequencies.*

**Keywords:** Hydraulic Machine ■ Dynamic Modelling ■ Identification

#### RESUMO

*Medições em campo são utilizadas para desenvolver um modelo matemático das vibrações de flexão de unidades hidroelétricas de grande porte. Inicialmente, os principais parâmetros de projeto são estudados otimizando o método de matriz de transferência com elementos especiais para o gerador e para a turbina. Investiga-se a influência da variação de parâmetros nas frequências naturais do modelo. Deduz-se um modelo mínimo que permite analisar os principais parâmetros. O modelo é validado com as frequências naturais medidas.*

**Palavras-chave:** Máquinas Hidráulicas ■ Modelagem Dinâmica ■ Identificação

## Nomenclature

$A$	$[m^2]$	area of cross section
$E$	$[N/m^2]$	modulus of elasticity
$J$	$[kgm^2]$	moment of inertia
$k$	$[N/m]$	stiffness
$L$	$[m]$	rotor length
$M$	$[Nm]$	moment
$m$	$[kg]$	mass
$Q$	$[N]$	lateral force
$u$	$[m]$	displacement
$w$	$[m]$	displacement of shaft cross section
$\psi$	$[rad]$	distortion of shaft cross section
$\Omega$	$[s^{-1}, Hz]$	rotating frequency
$\omega$	$[s^{-1}, Hz]$	angular frequency
$\rho$	$[kg/m^3]$	specific weight

## Indices

$a,p$	axial, polar
$b$	(turbine) blade
$h$	hydraulic
$u,l$	upper, lower
$t$	torsion
$f$	oilfilm (slide bearings)
$G,T$	generator, turbine
$W$	water (turbine)

## INTRODUCTION

With increasing size and performance of hydroelectric units for power generation projects, the knowledge of their dynamic behaviour becomes more and more important. Computer aided vibration simulations become indispensable for design as well as for failure prediction and prevention.

The shaft line of such machinery, including generator and water turbine, is subjected to axial, torsional and flexural vibrations. Usually the range of critical frequencies for axial and torsional vibrations is far higher than the excitation frequencies. Hence, the main interest has to be paid to flexural vibrations [1].

Vibrational data from field measurements usually are available as transverse accelerations and/or deflections, located at the slide bearings. Their power spectral densities show their natural vibrational properties (Fig. 1). The main excitation sources in this case are harmonic with once and twice the rotational frequency. As well, there is stochastic wide band excitation.

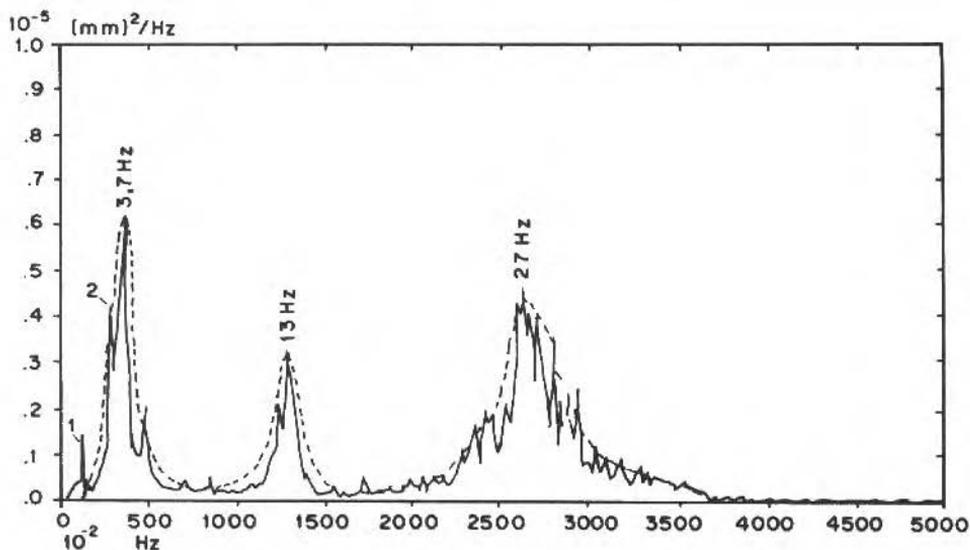


Figure 1. Power spectral densities of the relative displacement at the guide bearing (Project CESP/UNICAMP, Ref. [7])

The mathematical description of such dynamic equipment by parametric models is adequate. In the following, a physical model will be established which considers the design structure. Furthermore, the parameters are adjusted by parameter variations, based on the spectral analysis of measured data.

## PHYSICAL MODELS OF HYDROGENERATORS

The particular interest of this paper concerns the modelling of hydro-units with vertical arrangement of the power plant of Ilha Solteira, SP (schematic cross section, Fig. 2). They have a nominal power of 160 MW each at a rotational frequency of 1.43 Hz. The vertical distance between generator and turbine is 6.33 m, the diameter of the generator 13.2 m. The Francis type turbine has 12 blades. The effective water head is 46 m, the throughput  $389.7 \text{ m}^3/\text{s}$ .

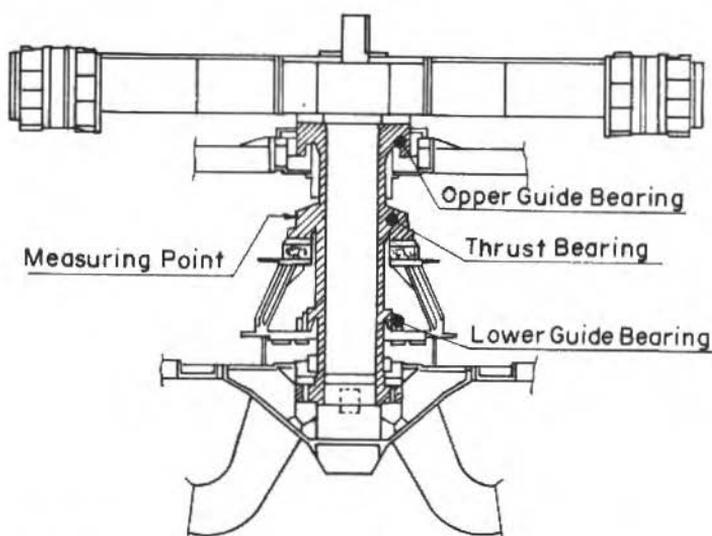


Figure 2. Hydrogenerator with combined axial/radial support (Ilha Solteira, SP, Brasil)

Its basic dynamic model is shown in Fig. 3. The hollow shaft with an outer diameter of 400 and 1300 mm resp. is modelled by a Timoshenko beam. Generator and turbine are rigid disks of relatively large diameters, thus provoking gyroscopic effects. The thrust bearing is modelled as a torsional

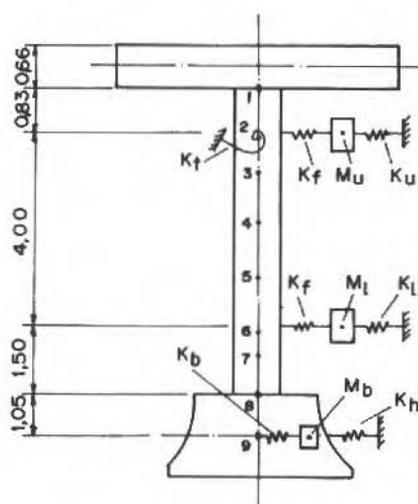


Figure 3. Dynamic model of a hydrogenerator, Ref. [2].

spring  $k_t$ . The parameters of the upper and lower radial supports are their masses  $m_u$ ,  $m_l$ , a linear-elastic oilfilm stiffness  $k_f$  and structure stiffnesses  $k_u$ ,  $k_l$ . The blade vibrations of the Francis type turbine are represented as a mass-spring system  $m_b$ ,  $k_b$  with  $m_b$  as a certain fraction of the total water mass inside the turbine which contributes to the blade vibrations. Finally, hydraulic effects between turbine blades and the housing are modelled by a spring  $k_h$ . All supports are isotropic. The complete data set and the measured and calculated natural frequencies are given in Table 1.

As especially the first calculated natural frequency still differs from measured data, further model refinement is to be done. First, the manufacturer supplied design data is analysed. The geometric data of the shaft itself does not cause problems because the geometry is simple. As the ratio length/diameter is comparatively small, the Timoshenko beam model is considered which includes the effects of shear forces and rotatory inertia.

Table 1. Data of a parameter fitted machine model [2] (see Fig. 3) and comparison of natural frequencies

Shaft line:	$\rho = 7.85E3 \text{ kg/m}^3$ $EI = 2.87E10 \text{ N/m}^2$ $d_i = 0.4 \text{ m}, d_0 = 1.3 \text{ m}$	. Timoshenko model		
Generator:	$m_G = 4.95E5 \text{ kg}$ $J_{aG} = 7.00E6 \text{ kgm}^2$	. Rigid disk . No magnetic pull		
Turbine:	$m_T = 1.45E5 \text{ kg}$ $J_{aT} = 0.65E6 \text{ kgm}^2$	$m_b = 0.35E5 \text{ kg}(25\%m_W)$ $k_b = 5.0E9 \text{ N/m}$ $k_h = 1.1E9 \text{ N/m}$		
Upper support:	$m_u = 0.30E5 \text{ kg}$	$k_f = 2.2E11 \text{ N/m}$ $k_u = 2.0E10 \text{ N/m}$ $k_t = 1.0E8 \text{ N/rad}$		
Lower support:	$m_l = 0.30E5 \text{ kg}$	$k_f = 2.2E11 \text{ N/m}$ $k_l = 3.0E9 \text{ N/m}$		
Natural frequencies [Hz]:		f1	f2	f3
measured:		3.7	13	27
calculated:		4.8	13.24	26.5

The estimation of the elasticity of the supports can only roughly be performed due to the complex geometry of the structure. Its elasticity cannot be neglected and has to be modelled more specifically. The additional degree of freedom, however, can be neglected considering the high stiffness of the oilfilm. Here, a parameter variation of the structure stiffness is necessary.

Mass and polar moment of inertia of generator and turbine are given by the manufacturer. The axial moment of inertia may only be estimated, considering the geometry. The water which flows through the turbine contributes as well to its overall mass and moment of inertia. The effect of the water on the blade vibrations has to be investigated. Nascimento [2] gives a value of 25% of the total mass of water inside the turbine but does not consider the effect of the

rest of the water on the turbine mass. This portion as well as the blade stiffness have to be adjusted by parameter variations. Also the contribution of the water to the moment of inertia of the turbine should be considered.

Furthermore, a flexible generator structure may be introduced which allows for the large portion of the mass on a ring distant from the shaft center. The magnetic pull in the air gap of the generator can be modelled by a linear spring between stator and rotor. The spring constant is negative [1].

The prediction of structural damping and viscous damping of the supports is difficult. Probably, their influence is small.

The excitation forces of the system are of mechanical, hydraulic, electrical and electromagnetic origin. Unbalanced masses of generator and turbine are the most important excitation sources, due to their large diameters. They result from inaccuracies of fabrication, assembly as well as maintenance. Bad alignment of the center line of the shaft causes harmonic excitations with twice the rotating frequency. Dry friction of the supports causes auto-excitation with the natural frequencies of the system. Stochastic excitation occurs due to turbulent flow inside the turbine, especially under part-load conditions [3]. Assymetries of the rotor of the generator cause additional unbalancing due to variations in the magnetic field.

#### **APPLICATION OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO FREE, UNDAMPED ROTOR VIBRATIONS**

The simulation of the above mentioned physical system can be carried out by mainly three different approaches which are outlined briefly.

First, a description of the whole shaft as a distributed Timoshenko beam may be used. Generator, upper and lower support and turbine are described by additional physical systems, coupled to the beam as discrete contact forces. The solution is then found by an expansion in appropriate time and space functions. The approximation in the space domain is performed by means of the Galerkin method.

The whole domain may be described also by separate field and point elements, leading to the finite element (FEM) or transfer matrix (TMM) method. FEM

leads to a time domain system of differential equations. Its dimension depends on the number of elements which need to be used to secure the wanted accuracy of the results. If gyroscopic effects are to be included, the transversal vibrations must be considered in two orthogonal directions, thus doubling the size of the system of differential equations.

In comparison with that, the transfer matrix approach is carried out in the frequency domain. No differential equations have to be solved, and between each "contact point" only one element is needed. Damping can be included by using complex transfer matrices. If the system is considered isotropic, the inclusion of gyroscopic effects can be performed by a modification of the moments of inertia [4].

The transfer matrix method is well documented for the use in rotor dynamics (e.g. Ref. [5]). Only those field and point matrices are mentioned which are needed for calculation.

The transfer relation of a beam is

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{\text{right}} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & c_1 & s_1 \\ \lambda^4 s_2 & C_2 & S_2 & c_1 \\ \lambda^4 c_1 & \lambda^4 s_3 & C_2 & S_1 \\ \lambda^4 S_3 & \lambda^4 c_1 & \lambda^4 s_2 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{\text{left}}$$

with Rayleigh functions  $C_i$ ,  $S_i$ ,  $c_i$ ,  $s_i$  (for details see Ref. [6]). The eigenvalues are

$$\lambda^4 = (\omega^2 \rho A L^4) / E J_a .$$

The point matrices are of the form

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{\text{right}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_m & 1 & 0 \\ -\Gamma_Q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{\text{left}}$$

with element specific abbreviations  $\Gamma_M$ ,  $\Gamma_Q$ . Displacement  $w$  and distortion  $\psi$  keep unchanged. The minus sign at  $\Gamma_Q$  is due to the convention of choosing the positive direction of the shear force  $Q$ .

Now, two special elements have to be introduced. The elastic support with rotatory inertia and additional mass, shown in Fig. 4, is used for description of the turbine. It has the three degrees of freedom  $w$ ,  $\psi$ ,  $u$  and is described by the differential equations

$$\begin{aligned} m\ddot{w}(t) + (k_h + k_b) w(t) &= k_b u(t) , \\ m_b \ddot{u}(t) + k_b u(t) &= k_b w(t) , \\ J_a \ddot{\psi}(t) &= 0 . \end{aligned}$$

Fourier transform of the independent variables with respect to time leads to

$$\begin{aligned} (-m \omega^2 + k_h + k_b) W &= k_b U , \\ (-m_b \omega^2 + k_b) U &= k_b W , \\ (-J_a \omega^2) \Psi &= 0 . \end{aligned}$$

Here,  $W = \mathcal{F}\{\omega(t)\}$ ,  $U = \mathcal{F}\{u(t)\}$ ,  $\Psi = \mathcal{F}\{\psi(t)\}$ . Eliminating  $U$ , we finally obtain

$$\begin{aligned} \Gamma_M &= -J_a \omega^2 , \\ \Gamma_Q &= (-m \omega^2 + k_h + k_b - k_b^2) / (-m_b \omega^2 + k_b) . \end{aligned}$$

The special case of a simple elastic support with a point mass with  $\Gamma_M = 0$ ,  $\Gamma_Q = (-m\omega^2 + k)$  is included.

For the generator, the rigid-disk-rigid-ring system (Fig. 5) is used. This system is described by the four differential equations

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{w}(t) + k_1 w(t) &= k_1 u(t) , \\ m_2 \ddot{u}(t) + (k_1 + k_m) u(t) &= k_1 w(t) , \\ J_{a1} \ddot{\psi}(t) + k_t \psi(t) &= k_t \varphi(t) , \\ J_{a2} \ddot{\varphi}(t) + k_t \varphi(t) &= k_t \psi(t) . \end{aligned}$$

Similarly as above, we obtain

$$\begin{aligned} \Gamma_M &= -J_{a1} \omega^2 - \frac{k_t J_{a2} \omega^2}{k_t - J_{a2} \omega^2} , \\ \Gamma_Q &= -m_1 \omega^2 + \frac{k_1 (k_m - m_2 \omega^2)}{k_1 + k_m - m_2 \omega^2} . \end{aligned}$$

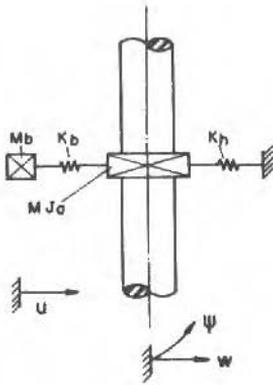


Figure 4. Physical turbine model

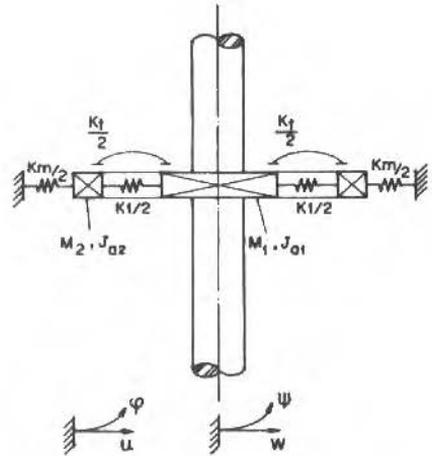


Figure 5. Physical generator model

For the inclusion of gyroscopic effects (Fig. 6), the rotation of a Laval rotor around the  $z$ -axis is considered. If the overall system is isotropic, the introduction of complex coordinates

$$\hat{x} = x + iy, \quad \hat{\psi} = \psi_y - i\psi_x$$

leads to the coupled system

$$\begin{aligned} \alpha m \hat{x} + \hat{x} + \gamma (J_a \hat{\psi} - i J_p \Omega \hat{\psi}) &= 0, \\ \delta m \hat{x} + \hat{\psi} + \beta (J_a \hat{\psi} - i J_p \Omega \hat{\psi}) &= 0 \end{aligned}$$

The constants  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  depend on the overall arrangement of the rotor system. The natural mode determinant is

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha m \omega^2 - 1 & \gamma J_R \omega^2 \\ \delta m \omega^2 & \beta J_R \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

where a "reduced" moment of inertia

$$J_R = J_a - J_p(\Omega/\omega)$$

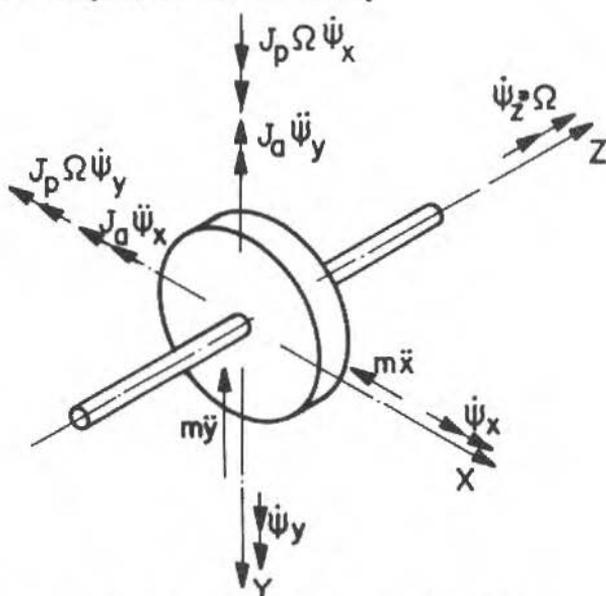


Figure 6. Forces and moments on a rotating disk.

is introduced. As the only difference to the non-gyroscopic system is the appearance of the polar inertia term, gyroscopic effects can be considered by a simple replacement of the axial moment of inertia  $J_a$  by the reduced moment  $J_R$ .

With

$$J_p = mr^2/2, \quad J_a = m(3r^2 + L^2)/12$$

in case of a disc (mass  $m$ , radius  $r$ ) with negligible length  $L$  we obtain  $J_p = 2J_a$ . Hence, the gyroscopic effect changes the moment of inertia and the natural modes significantly.

This model can, thinking in differential terms, also be applied to the shaft, usually with length  $L > r$ . In this case, the axial moment of inertia predominates,  $J_a > J_p$ , and gyroscopic effects may be neglected.

Following the above mentioned considerations, the model of Fig. 3 is updated. Its complete data set is given Table 2. Gyroscopic effects of the shaft line are not included because mass and inertia of turbine and generator predominate

by order of magnitude 10.

Table 2. Data of an improved machine model.

Shaft line:	$\rho = 7.85E3 \text{ kg/m}^3$ $EI = 2.87E10 \text{ N/m}^2$ $d_i = 0.4 \text{ m}, d_o = 1.3 \text{ m}$	No gyroscopic effects . Timoshenko model		
Generator:	$m_G = 4.95E5 \text{ kg}$ $J_{aG} = 7.00E6 \text{ kgm}^2$ $k_m = -0.55E9 \text{ N/m}$	. Steiner correction: $J_{a,ges} \cong 1.03J_{aG}$		
Turbine: ( $V \cong 140\text{m}^3$ )	$m_T = 1.45E5 \text{ kg}$ $J_{aT} = 0.65E6 \text{ kgm}^2$  $m_T + m_W = 2.50E5 \text{ kg}$ $J_T + J_W = 1.10E6 \text{ kgm}^2$	$m_b = 0.35E5 \text{ kg}(25\%m_W)$ $k_b = 5.0E9 \text{ N/m}$ $k_h = 1.1E9 \text{ N/m}$  . Steiner correction $J_{ges} \cong 1.29(J_T + J_W)$		
Upper support:	$m_u = 0.27E5 \text{ kg}$	$k_u = 1.29E9 \text{ N/m}$ $k_t = 1.0E8 \text{ N/rad}$		
Lower support:	$m_l = 0.27E5 \text{ kg}$	$k_l = 0.5E9 \text{ N/m}$		
Natural frequencies [Hz]:	f1	f2	f3	f4
calculated:	3.8	10.6	13.0	26.6

Stiffness of upper and lower supports are, due to the present design, lower than the values given in the basic model. With a relatively small mass, their structures, are modelled as point masses on the shaft without rotational inertia.

The generator is still modelled as a rigid disk. The magnetic pull is considered, using manufacturer's data [7], The Steiner correction of the rotational inertia, due to the geometric distance between mass center and reference point of 0.66 m, has only a 3% influence.

In contrary, its increase on the rotational inertia of the turbine (distance of 1.05 m) is about 30%. The decrease of the natural frequencies due to this effect,

however, is small as the calculations show. This is probably because the main rotational inertia of the whole system is the generator.

As 25% of the total water volume is supposed to be determining the blade vibrations, the remaining 75% are added to the turbine mass. As well, the whole of the water is supposed to contribute to the rotational inertia.

The gyroscopic effects on the natural modes of this model are plotted in Fig. 7. The first mode is determined mainly by the vibration of the generator. Its frequency of 3.8 Hz fits very well the experimental data (Fig. 1). The shape of the second mode for a frequency of 9 Hz (possible estimation from the experimental data: 8.5 Hz) varies significantly with the rotating frequency. The third and fourth natural frequencies of 11 and 24.2 Hz resp. are somewhat lower than the experimental ones (13 and 27 Hz resp.). They are determined mainly by the vibration of the shaft locations near the turbine. A distinct shaft deflection occurs only in the fourth mode which is about 17 times higher than the nominal rotating frequency. An interesting result is the existence of a natural frequency between the first and second frequency calculated by [2].

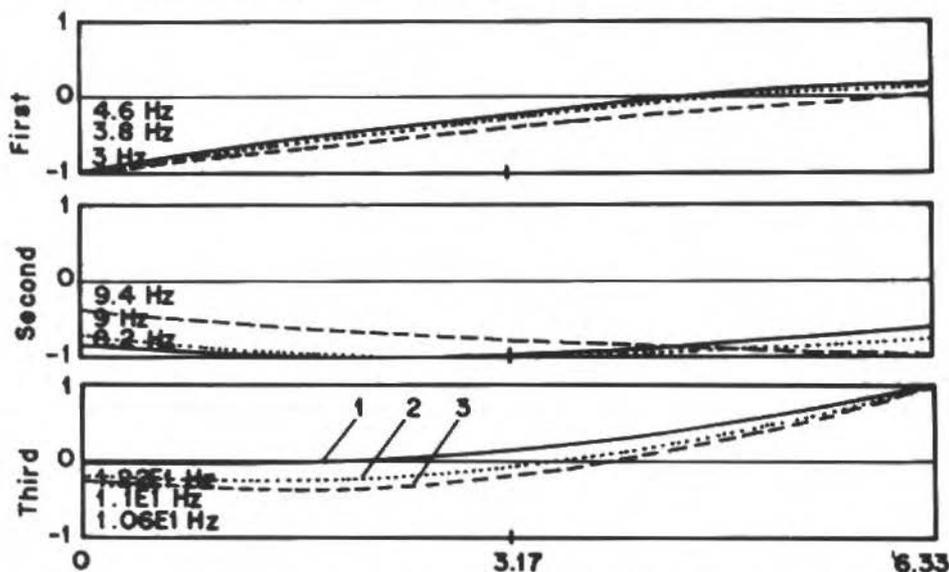


Figure 7. Gyroscopic influence on the natural modes of the hydrogenerator (left: generator, right: turbine)

Fig. 8 shows a Campbell diagram of the hydrogenerator. In the progressive sense of rotation, gyroscopic effect are increasing the critical frequencies. Thus, they are stabilizing the system. The contra-rotating sense with decreasing critical frequencies is usually not observed on Francis type machinery as their supports are supposed to be only slightly non-isotropic [1].

For the nominal rotating frequency, the three lowest natural frequencies are sufficiently outside the critical frequency bands. As the second and third natural frequencies are in the neighbourhood to the 6th and 8th harmonics resp., excitations of their modes may occur when leaving the nominal rotating frequency. Furthermore, none of the modes is influenced by the most important harmonics of order one and two.

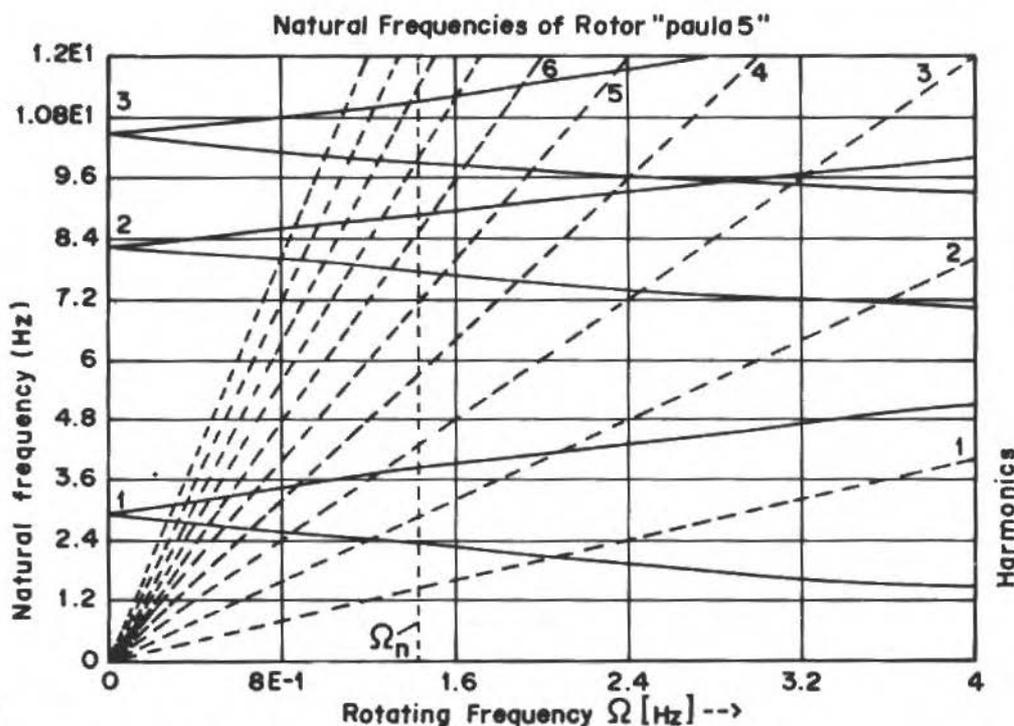


Figure 8. Campbell diagram of the hydrogenerator model.

## PARAMETER INFLUENCES

In the following parameter studies, only one parameter or a parameter group is changed each time to see the effect of each on the natural frequencies.

Fig. 9 shows the variation of the rotational stiffness  $k_t$ . Within a range of approximately  $k_t = 10^9 - 10^{11}$  N/rad the nature of the bearing changes from "free" to "fixed" with the corresponding increase of the natural frequencies. Only the low modes are affected significantly. As well, the first mode shape changes by shifting its node away from the turbine. For  $k_t > 10^{13}$  N/rad the modes have a vertical tangent at the support location.

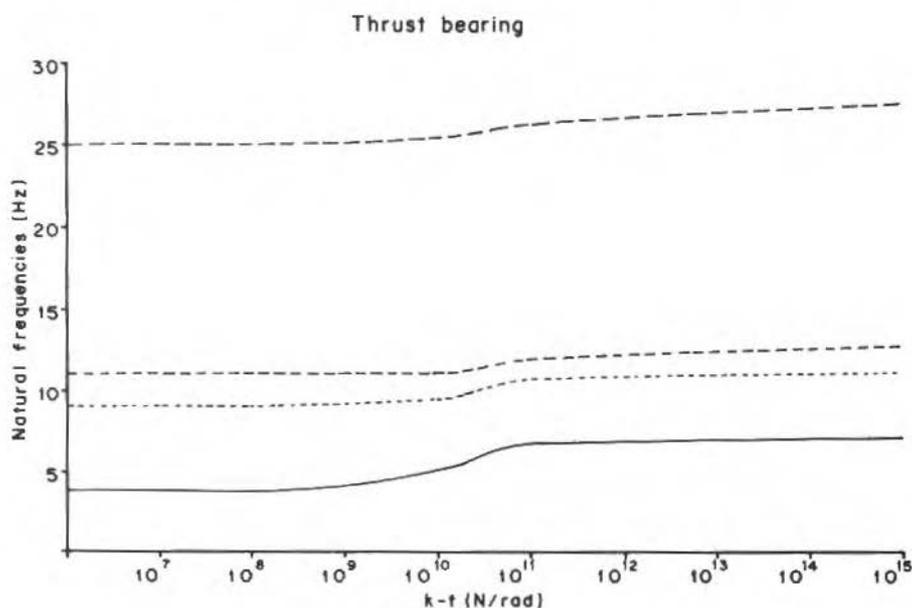


Figure 9. Variation of thrust bearing stiffness.

Fig. 10 shows a very strong influence of the stiffness  $k_u$  on the first and third mode, mainly in the range which was estimated from design. For low  $k_u$ ,  $f_1$  vanishes. For high  $k_u$ ,  $f_3$  increases beyond limits. All mode shapes are affected strongly. Thus, the design of this support is very important for the vibration performance of the machine.

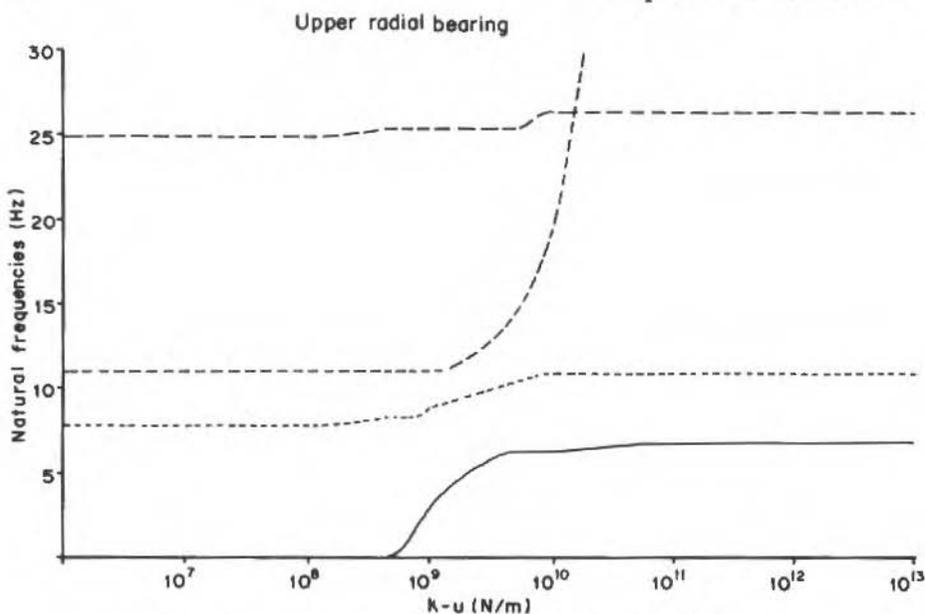


Figure 10. Variation of the stiffness of the upper support.

Because of their neighbourhood,  $k_1$  and  $k_h$  influence very much each other. Fig. 11 shows the influence of  $k_h$  on the natural frequencies if  $k_1$  is held constant. In the low range the low order natural frequencies and their modes are affected by shifting maxima and nodes more to the turbine. In the high range specially  $f_3$  and  $f_4$  are increased. Fig. 12 shows the variation of  $k_1$  for three constant values of  $k_h$ . The lower natural frequencies vary significantly only for small values of  $k_h$ . Another interesting feature is the first mode shape: for small  $k_h$ , it is nearly a rigid body rotation with the maximal displacement at the generator or turbine location (depending on  $k_1$ ) and a node near the lower support. With increase of  $k_h$ , the node shifts more to the turbine end, and the bending of the shaft is more distinct.

Fig. 13 shows the influence of the blade vibration assumptions. For the assumed values of the hydraulic stiffness  $k_h$ , there is nearly no influence of the blade stiffness  $k_b$  as well as of the choice of the vibrating portion of water  $m_b$  on the overall vibrations of the machine. This is because the hydraulic forces between turbine and housing are limiting the deflections. Thus, the

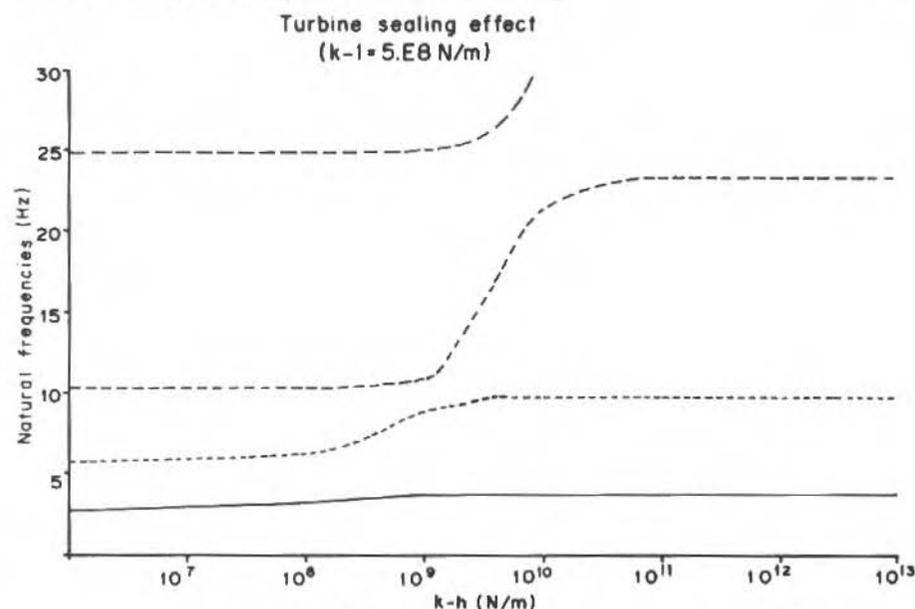


Figure 11. Variation of the hydraulic stiffness of the turbine water gap.

additional degree-of-freedom which results in the additional natural frequency  $f_0$  may be neglected.

The next study considers the special geometry of the generator with a large diameter ( $d_{\text{gen}} \cong 10 \cdot d_{\text{shaft}}$ ) and a considerable part of the mass outside. Hence, a flexible model according to Fig. 5 seems obvious. A rigid ring (mass  $m_2$ , rotational inertia  $J_{a2}$ ) is connected to the shaft by a radial stiffness  $k_1$  and a rotational stiffness  $k_{t1}$ . On the shaft, there is an additional mass  $m_1$  and rotational inertia  $J_{a1}$ . The magnetic pull is modelled by  $k_m = k_2$ .

The variation of  $k_1$  (Fig. 14) is only of theoretical interest because of the high stiffness of the structure in this direction. Due to the additional degree-of-freedom there is a additional natural frequency  $f_0$  which depends highly on  $k_1$ . For  $k_1 \Rightarrow \infty$  this degree of freedom is lost. If  $k_1$  is small, this natural frequency vanishes as well as  $f_1$ . This takes into account the uncoupling of the ring from the remaining structure.

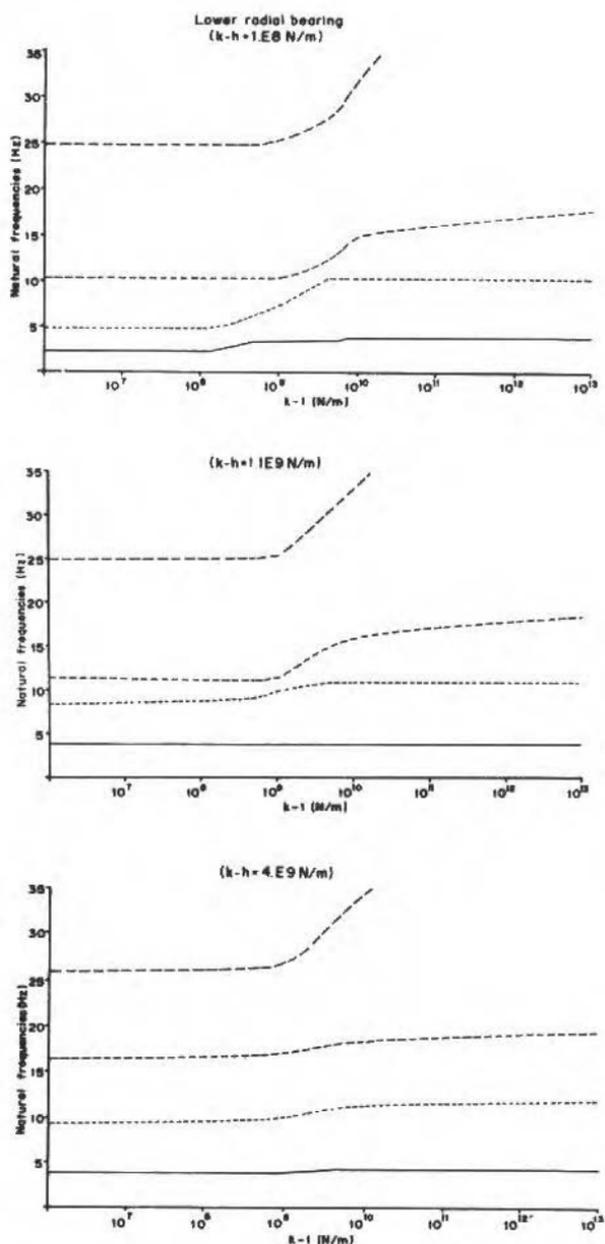
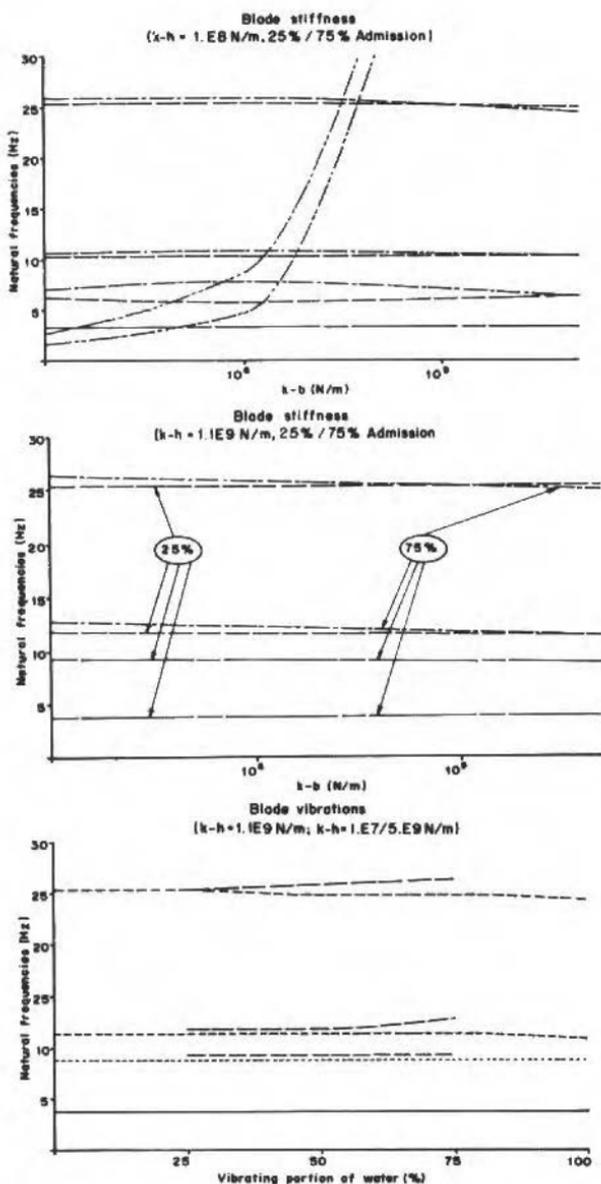


Figure 12. Variation of the stiffness of the lower support.



Page 47

Figure 13. Influence of the turbine blade vibrations.

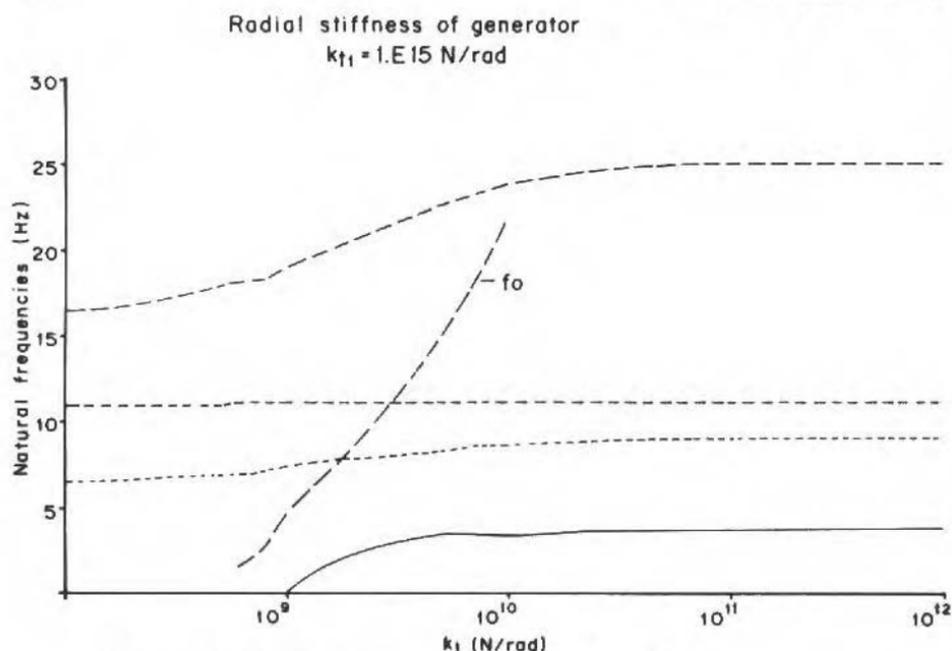


Figure 14. Variation of the radial stiffness of the generator.

Similar effects show the variation of the rotational stiffness  $k_{t1}$  (Fig. 15). With decreasing  $k_{t1}$ , the higher natural frequencies decrease, as well as an additional natural frequency appears. For  $k_{t1} = 0$  it is equal to  $f_1$ .

An interesting feature is the huge influence of the magnetic pull  $k_m$  to  $f_1$  which decreases until vanishing at about  $k_m = -10^9 \text{ N/m}$  (Fig. 16).  $f_3$  and  $f_4$  as well as the natural frequency of the additional rotatory degree-of-freedom are not affected. The mode shapes are not changed.

## PROPOSALS FOR A MINIMAL MODEL

The model which was established in section 3 fits well the first and second natural frequencies. As the higher ones are lower than experimental data, certain parameter changes were still necessary.

As the elastic modelling of the generator does deteriorate the model, it should not be considered further. The magnetic pull, as well as the stiffness of the

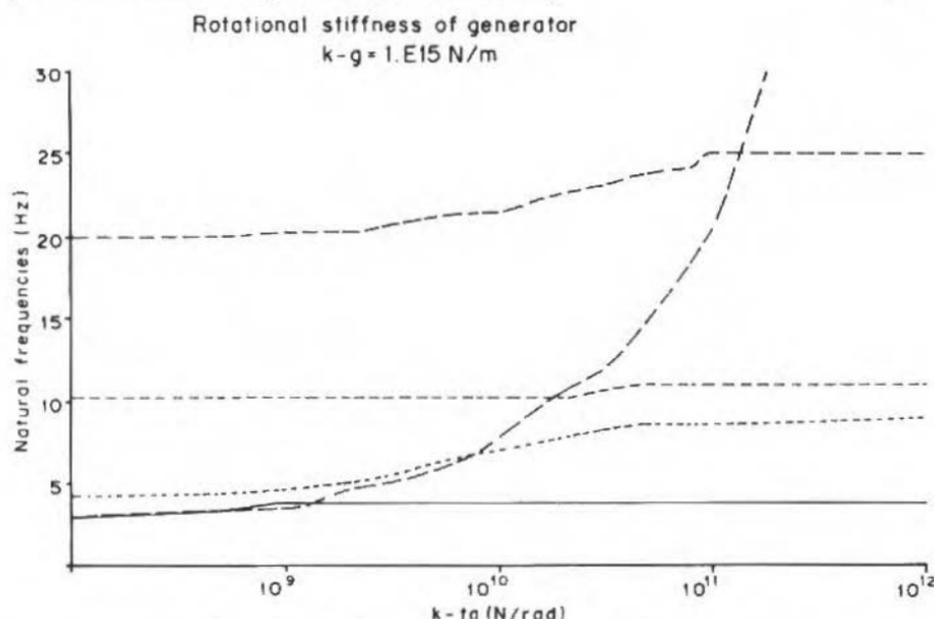


Figure 15. Variation of the rotational stiffness of the generator.

upper support, mainly seem to affect the first natural frequency and should therefore be kept. Hence, the main affecting parameters of the higher order frequencies are the hydraulic stiffness  $k_h$  of the turbine and the stiffness of the lower support  $k_1$ . Both parameters could be estimated only very roughly due to missing data. The choice of the values  $k_1 = 4.E9 \text{ N/m}$  and  $k_h = 1.0E9 \text{ N/m}$  lead to  $f_1 = 3.8 \text{ Hz}$  (measured 3.7),  $f_2 = 10.6 \text{ Hz}$  (8.5),  $f_3 = 13.0 \text{ Hz}$  (13),  $f_4 = 26.6 \text{ Hz}$  (27). The difference in  $f_2$  may be caused by measurement errors, due to the small amplitudes in the spectral density (Fig. 1). The same result is obtained if, as the parameter discussion suggests, the elasticity of the turbine blades is neglected. The natural modes are shown in Fig. 17.

Hence, a final model which is suitable as well to investigate vibration excitations and damping properties is shown in Fig. 18. The data of this model are given in Table 3. Mainly the turbine mass has been altered in comparison to the model in Table 2 ( $m_4 = m_{\text{Turbine}} + 100\%m_{\text{Water}}$ ).

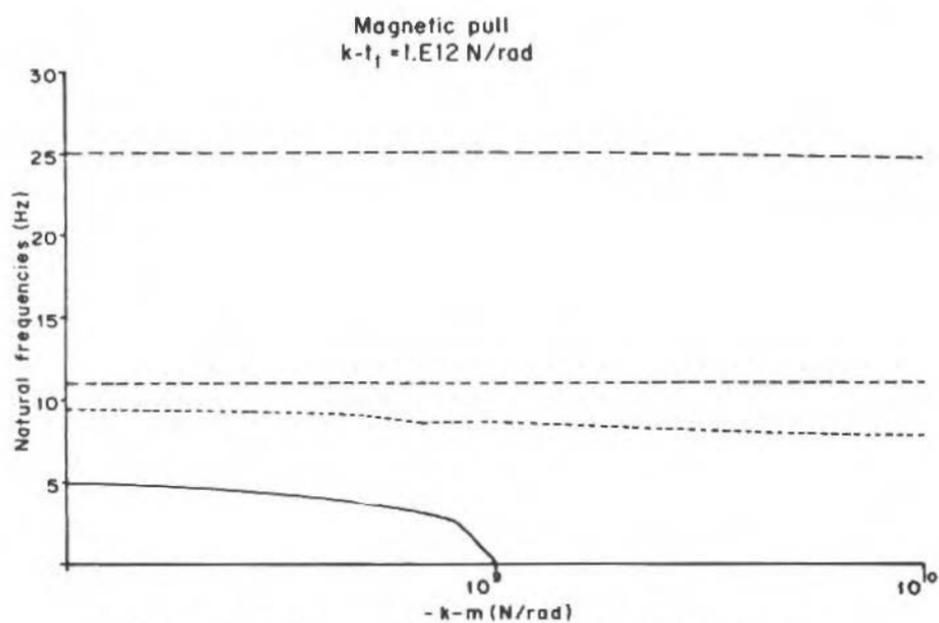
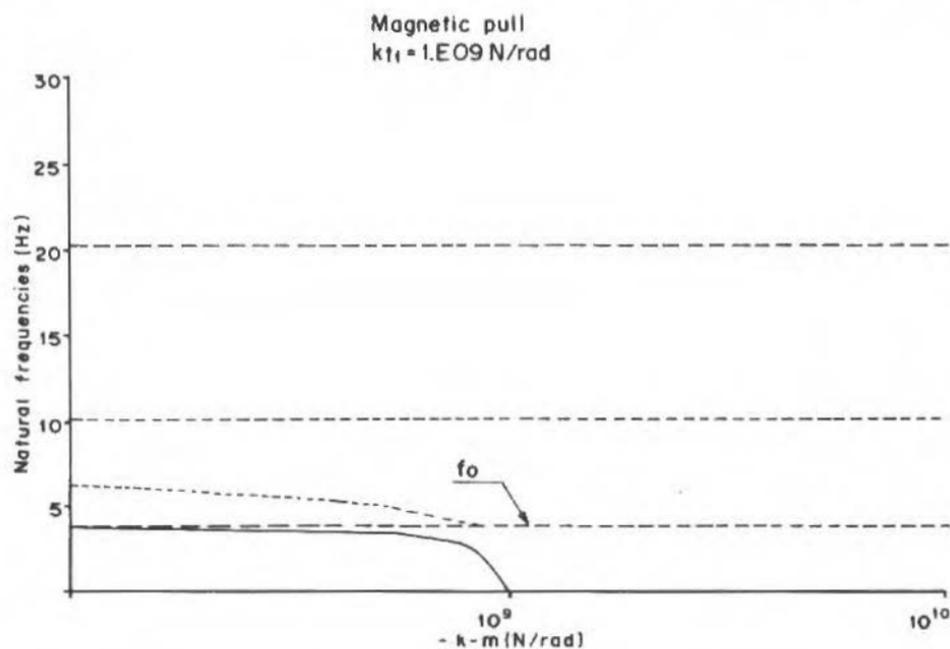


Figure 16. Variation of the magnetic pull of the generator.

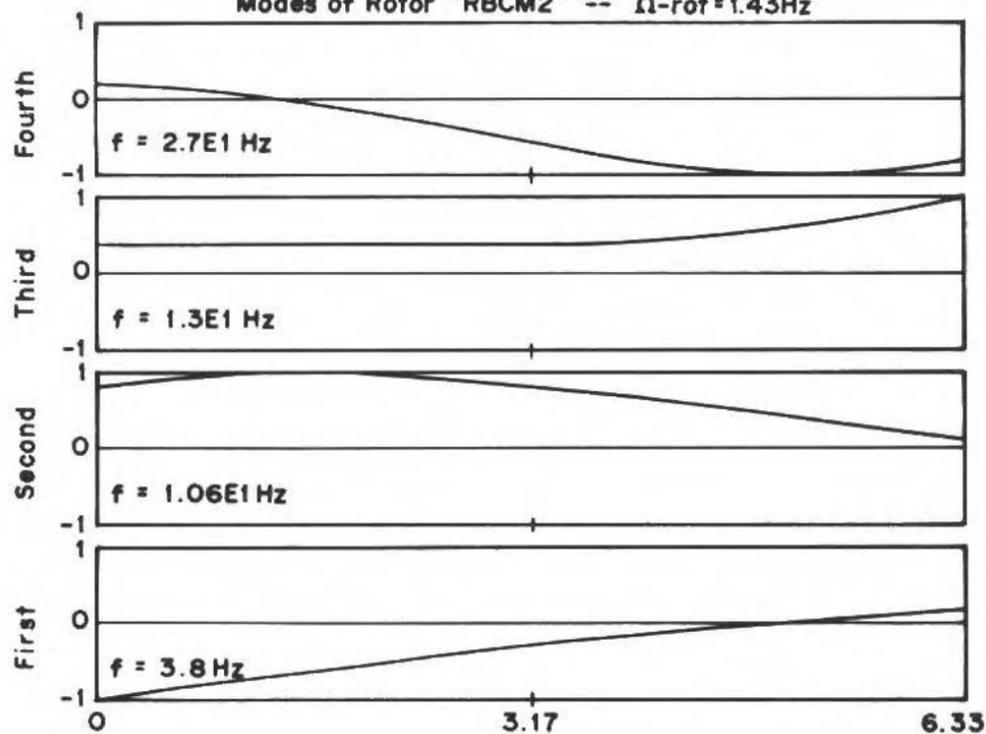
Modes of Rotor "RBCM2" --  $\Omega\text{-rot} = 1.43\text{Hz}$ 

Figure 17. Flexural modes of the final model.

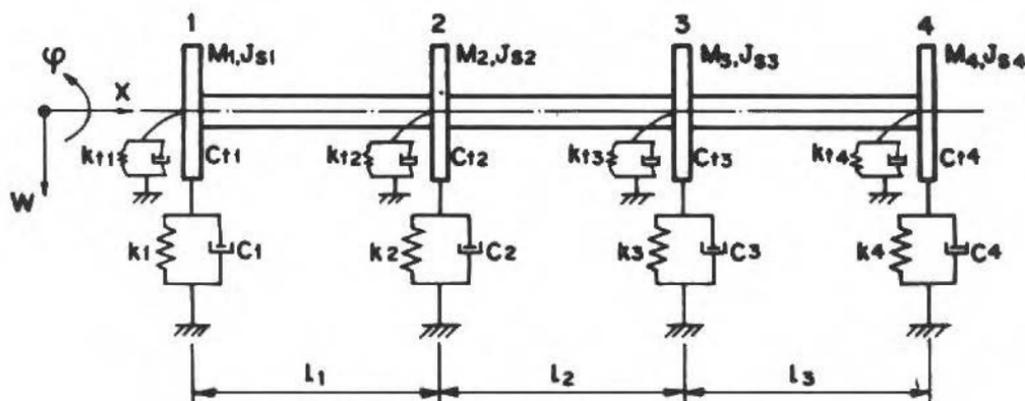


Figure 18. Minimal model of a hydrogenerator.

Table 2. Data of the final machine model.

Shaft line:	$\rho = 7.85E3 \text{ kg/m}^3$ $EI = 2.87E10 \text{ N/m}^2$ $d_i = 0.4 \text{ m}, d_0 = 1.3 \text{ m}$	No gyroscopic effects Timoshenko model			
Generator: [1]	$m_1 = 4.95E5 \text{ kg}$ $J_{s1} = 7.00E6 \text{ kgm}^2$ $k_1 = -0.55E9 \text{ N/m}$	$k_{t1} = 0$ $c_1 = 0$ $c_{t1} = 0$			
Turbine: [4]	$m_4 = 2.85E5 \text{ kg}$ $J_{s4} = 1.11E6 \text{ kgm}^2$ $k_4 = 1.10E9 \text{ N/m}^2$	$k_{t4} = 0$ $c_4 > 0$ $c_{t4} = 0$			
Upper support: [2]	$m_2 = 0.27E5 \text{ kg}$ $J_{s2} = 0$ $k_2 = 1.29E9 \text{ N/m}^2$	$k_{t2} = 1.0E8 \text{ N/r}$ $c_2 > 0$ $c_{t2} > 0$			
Lower support: [3]	$m_3 = 0.30E5 \text{ kg}$ $J_{s3} = 0$ $k_1 = 0.50E9 \text{ N/m}^2$	$k_{t3} = 0$ $c_3 > 0$ $c_{t3} = 0$			
Natural frequencies [Hz]:	f1	f2	f3	f4	
calculated:	3.8	9.0	11.0	24.2	

An investigation of damping effects can be performed by using complex stiffness parameters in the transfer matrix approach. Using FEM, the system can be formulated directly in the time domain. Here, time domain parameter identification techniques can be applied [8].

#### ACKNOWLEDGEMENT

The authors wish very much to thank the Alexander von Humboldt foundation. This research was performed during a research fellowship by their Feodor Linen program which they granted to the first author.

## REFERENCES

- [1] SIMON, F. Zur Berechnung des Dynamischen Verrhaltens von Wellensystemen bei Wasserkraftanlagen. Voith Forschung und Konstruktion, vol. 28, 1982, paper no. 4.
- [2] NASCIMENTO, L.P. Desenvolvimento e Análise de Modelos Matemáticos de Máquinas Hidroelétrica. COBEM, 9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 1987, Florianopolis.
- [3] SCHWIRZER, T. Dynamic Stressing of Hydroelectric Units by Stochastic Hydraulic Forces on the Turbine Runner. Water Power, vol. 29, 1977, no. 1, pp. 39-44.
- [4] HOLZWEISSIGN, F. & Dresig, H. Lehrbuch der Maschinendynamik. 2nd edition, Springer, Leipzig, 1982.
- [5] PESTEL, C. & LECKIE, A. Matrix Methods in Elastomechanics. McGraw-Hill, New York.
- [6] UHRIG, R. Elastostatik und Elastoknetik in Matrizenschreibweise. Springer, Berlin, 1973.
- [7] PROJECT CESP/UNICAMP. Critérios para Avaliação pela Análise de Vibrações de Condições de Operação de Máquinas Rotativas. Relatórios I a VIII, State University of Campinas, 1984-1986.
- [8] SPERBER, A. WEBER, H.I. Modelling and Parameter Estimation of Hydroelectric Machinery. Proc. of the 3rd Int. Conf. on Rotordynamics, Lyon, 1990.

## EXPERIMENTAL AND THEORETICAL DYNAMIC ANALYSIS OF A ROTATING SHROUDED IMPELLER

### ANÁLISE DINÂMICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE IMPULSORES PALHETADOS EM ROTAÇÃO

A. Berlioz

R. Henry

J.M. Pagnet\*

G. Ferraris

Lab. Méc. des Structures

URA CNRS 862

I.N.S.A., Lyon France

\*Framatome Thermodyn - Le Creusot

#### ABSTRACT

*Wave propagation and substructuring techniques are combined to analyse rotationally periodic structures in rotation. The method is applied to an industrial rotating shrouded impeller. Frequencies and mode shapes are computed and compared to experimental results at rest and in rotation.*

*The associated computer program implemented in a workstation turns out to be an efficient and inexpensive tool for engineers.*

**Keywords:** Vibration ■ Modelling ■ Finite Element Dynamic Analysis ■ Rotating Machinery ■ Wave Propagation

#### RÉSUMO

*Técnicas de propagação de ondas e subestruturação são combinadas para analisar estruturas rotacionalmente periódicas em rotação. O método é aplicado a um impulsor industrial palhetado. São computadas as frequências e as formas modais e comparadas com resultados experimentais em repouso e em rotação.*

*O programa desenvolvido para uma estação de trabalho mostra ser uma ferramenta eficiente e econômica para engenheiros.*

**Palavras-chave:** Vibração ■ Modelagem ■ Análise Dinâmica por Elementos Finitos ■ Máquinas Rotativas ■ Propagação de Ondas

### Nomenclature

$R, F, f$	Forces
$K, k$	Stiffness matrices
$M, m$	Mass matrices
$N$	Number of repetitive sectors
$p$	Modal coordinates
$\beta$	Interblade phase angle
$\Delta, \delta$	Displacements
$\lambda$	Index, Number of diameters
$\Omega$	Speed of rotation
$\phi$	Ritz vectors
$\sigma$	Initial centrifugal stress
$\omega^0$	Frequency rd/s or Hz (in figures)
$nD, F_i$	Mode with $n$ diameters of the family $i$

### Subscripts related to:

$c$	Centrifugal terms
$d$	Dynamic terms
$e$	Elastic terms
$g$	Geometric terms
$i$	Basic sector integral terms
$j$	Imaginary unit, $j^2 = -1$
$\ell$	Basic sector left boundary
$n$	$n$ th repetitive sector
$q$	Final quantities
$r$	Basic sector right boundary
$s$	Static terms
$\beta$	Wave propagation

### Superscripts

	Acceleration
$R, I$	Real and imaginary parts
$t$	Matrix transposition symbol

## INTRODUCTION

This paper is aimed at presenting a reliable method for the dynamic analysis of industrial rotating impellers. Such structures are characterized by a complicated geometry made up of thin and thick parts (shroud, blades, disk, hub and the supporting shaft). Modeling of the complete system is in principle permitted provided a large computer is available. In fact, considering the continuous improvement of minicomputers and workstations, it becomes appropriate to develop specific methods and corresponding computer programs to be used at a low cost by engineers. This goal can be achieved by using the cyclic symmetry which is the main characteristic of turbomachinery bladed-disk assemblies. In this case, only one repetitive sector modelling is required.

The method is based on previous works presented by many authors such as: Mead [1], Orris and Petyt [2], Henry [3]. The state of the art and basic requirements are detailed in Refs. [4] and [5].

## METHOD OF ANALYSIS-THEORY

The bladed disk assemblies such as impellers (see Fig. 1) pumps, turbochargers, are rotationally periodic structures. They contain  $N$  identical sectors coupled together identically about their axes of rotation. According to the wave propagation theory [6], the displacements of homologous points of two adjacent sectors ( $n, n - 1$ ), stated in a cylindrical coordinates system, are related by:

$$\delta_n = \delta_{n-1} e^{j\beta} \quad (1)$$

where the phase angle  $\beta$  must satisfy:

$$e^{j\beta N} = 1 \quad (2)$$

for free undamped vibration.

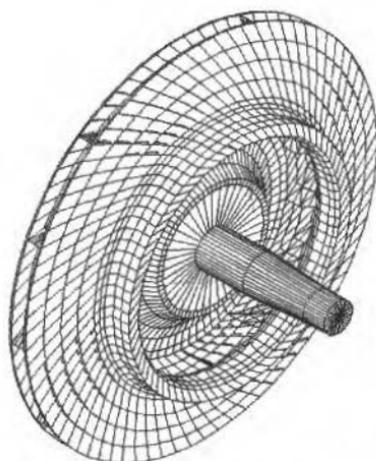


Figure 1. Shrouded Impeller

This condition gives:

$$\beta = 2\pi\lambda/N \quad (3)$$

where

$$\lambda = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, N/2 & \text{if } N \text{ is even} \\ 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2 & \text{if } N \text{ is odd} \end{cases}$$

The index  $\lambda$  represents the number of diameters in the classical axisymmetric formulation.

Remembering that only one repetitive sector needs to be modelled, the complete structure behaviour is described by

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K_e + K_g(\sigma_0) - \Omega^2 M_c]\{\delta\} = \{F_c(\Omega^2)\} + \{R\} \quad (4)$$

where  $M$ ,  $K$  are the rotating sector mass and stiffness matrices including the rotation effects,  $F_c(\Omega^2)$  the centrifugal forces and  $R$  the boundary forces linking the basic sector to the adjacent ones. The Coriolis effect is not considered here.

Equation (4) is then partitioned into three blocks linked to the left, right and interior displacements and forces of the basic sector, noted with subscripts  $\ell$ ,  $r$ ,  $i$  respectively.

Thus writing:

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= \{\delta_\ell, \delta_r, \delta_i\}^t \\ \{F_c\} &= \{F_{c\ell}, F_{cr}, F_{ci}\}^t \\ \{R\} &= \{R_\ell, R_r, 0\}^t\end{aligned}\quad (5)$$

and utilizing the propagation relations for the boundary forces and displacements

$$\begin{aligned}\{R_r\} &= -e^{j\beta} \{R_\ell\} \\ \{\delta_r\} &= -e^{j\beta} \{\delta_\ell\}\end{aligned}\quad (6)$$

lead to

$$\begin{bmatrix} m_{\ell\ell} & m_{\ell i} \\ m_{i\ell} & m_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_\ell \\ \ddot{\delta}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\ell\ell} & k_{\ell i} \\ k_{i\ell} & k_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\ell \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{c\ell} \\ f_{ci} \end{Bmatrix}\quad (7)$$

where

$$\begin{aligned}k_{\ell\ell} &= K_{\ell\ell} + K_{rr} + e^{j\beta} K_{\ell r} + e^{-j\beta} K_{r\ell} \\ k_{\ell i} &= K_{\ell i} + e^{-j\beta} K_{r i} \\ k_{i\ell} &= K_{i\ell} + e^{j\beta} K_{i r} \\ k_{ii} &= K_{ii}\end{aligned}\quad (8)$$

The mass terms are defined, similarly, by substituting  $m$  and  $M$  to  $k$  and  $K$  respectively.

## STATIC ANALYSIS

The static initial stress distribution due to rotation is computed in the basic sector with such boundary conditions that equal displacements are imposed to homologous points of the basic sector contours. This is achieved by stating the phase angle  $\beta = 0$  in Eqs.(6) to (8).

In this case, Eq.(7) takes the general form

$$\{k_e + k_g(\sigma_0) - \Omega^2 m_c\} \{\Delta_s\} = \{f_c(\Omega^2)\}\quad (9)$$

with

$$\begin{aligned} \{\Delta_s\} &= \{\delta_{\ell s}, \delta_{is}\}^t \\ \{f_c(\Omega^2)\} &= \{F_{cl} + F_{cr}, F_{ci}\}^t \end{aligned} \quad (10)$$

where the subscript  $s$  indicates the static part of the displacement  $\Delta$ .

The stress distribution  $\sigma_0$  is initially unknown, thus the Newton-Raphson procedure is used to perform the static solution. After few iterations, the static state of the rotating structure is obtained.

### DYNAMIC ANALYSIS

At operating speed of rotation  $\Omega$ , the structure vibrates about the static state computed in the previous step. The displacement is assumed to be of small amplitude and, for a particular value of  $\beta$ , the undamped Eq.(7) leads to the following classical eigenvalue-eigenvector problem

$$[m_\beta]\{\ddot{\Delta}_d\} + [(k_e + k_g(\sigma_0) - \Omega^2 m_e)_\beta]\{\Delta_d\} = \{0\} \quad (11)$$

where the subscript  $d$  indicates the dynamic part of the displacement  $\Delta$ . In this case, the system (11) must be computed for each value of  $\beta$  defined by Eq.(3).

However in practice, Eq.(11) still implies a high number of degrees of freedom, especially if three dimensional finite elements are used to model the basic sector. Thus, for industrial structures, the previous improvement is still not sufficient and a supplementary condensation technique must be used to reduce the number of DOF of Eq.(11). The efficient Craig and Bampton substructure method is chosen [7]. This method uses two types of vectors for the Ritz vector group to reduce the modes  $\phi_D$  of the substructure with boundary DOF fixed (called dynamic modes) and static displacement vectors  $\phi_s$  for a unit displacement at each boundary DOF (called static modes). Thus, Ritz reduction can be written

$$\{\delta_{id}\} = [\phi_s] \{\delta_{\ell d}\} + [\phi_d] \{p_d\} \quad (12)$$

which results in

$$\{\Delta_d\} = \begin{Bmatrix} \delta_{\ell d} \\ \delta_{id} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_s & \phi_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{\ell d} \\ p_d \end{Bmatrix} = [\phi] \{\delta_q\} \quad (13)$$

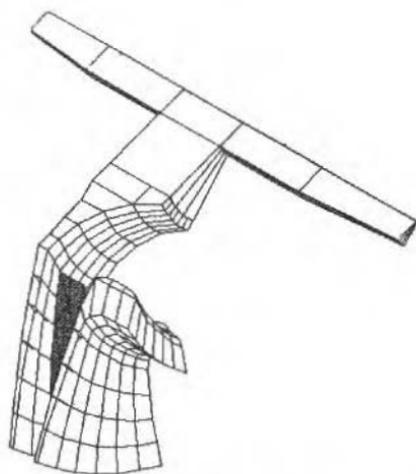


Figure 2. Finite element mesh of basic sector

Substituting Eq. (13) into Eq.(11), using the properties of the resultant Hermitian matrices, and assuming harmonic motion leads to the final real symmetric eigenvalue problem

$$[K_q(\beta) - \omega^2 M_q(\beta)] \{\delta_q\} = \{0\} \quad (14)$$

where

$$\{\delta_q\} = \{\delta_{td}^R, p_d^R, p_{td}^I, P_d^I\}^t \quad (15)$$

The eigenvalues are double and the associated eigenvectors are in quadrature. The physical dynamic displacements of the complete structure are derived by back substitution in Eqs.(13), (6) and (1).

## APPLICATION

The method is applied to a steel impeller manufactured by Framatome-Thermodyn. This impeller has been especially designed to show the centrifugal effects in order to check the theoretical model.

## STRUCTURE MODELLING

### Main characteristics of the impeller

Outer diameter: 0.685 m, inner diameter: 0.203 m, height: 0.120 m, number of blades: 13, mass: 60.3 Kg, rotating speed range: 0 to 7125 rev/min.

### Finite element model

One Nth of the shrouded impeller mounted on the supporting shaft is modelled with finite element. The shaft and disk sector are modelled with eight noded isoparametric brick elements with 3 DOF per node, including incompatible shape functions. The blade is modelled with three noded thin shell elements with 6 DOF per node. Special junction elements are used to link the blade to the disk and shroud. All types of elements include distributed mass and non-linear stiffness due to centrifugal effects. The basic sector finite element mesh is presented in Fig. 2.

## EXPERIMENTAL ANALYSIS

The frequencies and mode shapes at rest and the frequencies in rotation are measured.

### Impeller at rest

The tests in stanstill conditons are first carried out on the shafted impeller mounted on a soft suspension, Fig. 3. Excitation is applied by shock and the transfert function measurement between acceleration and excitation force is performed using a dual channel FFT analyser. Natural frequencies and mode shapes are derived through an identification process.

For example, the first two diameter ( $2D$ ) mode shape noted ( $2D, F1$ ) is presented in Fig. 4. The corresponding experimental frequency is 599 Hz.

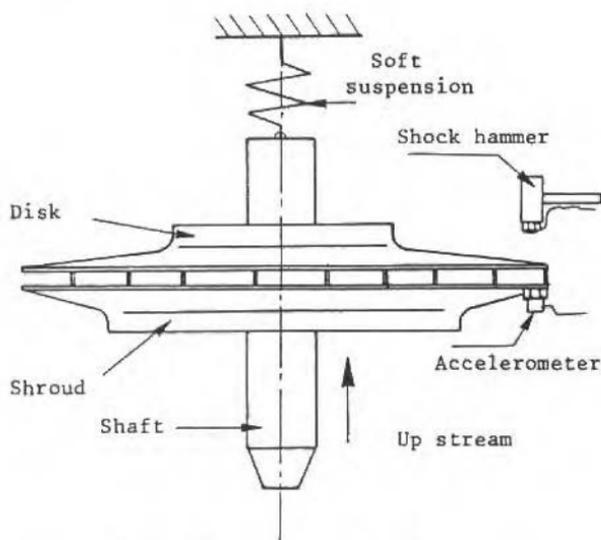
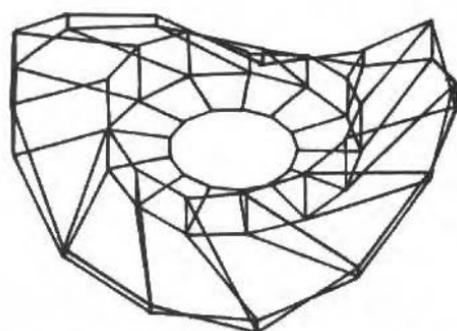


Figure 3. Experimental set-up

Figure 4. Identified  $(2D, F1)$  mode shape

In second step, the impeller is suspended at one end of the shaft. The excitation is applied by an electrodynamic shaker at fixed resonant frequencies.

The associated nodal lines are obtained through phase measurements and when possible, with the well-known classical sand technique. For example, the nodal lines of the  $(2D, F1)$  mode are presented in Photo 1.

In this case the measured frequency is 619 Hz. The discrepancy between the

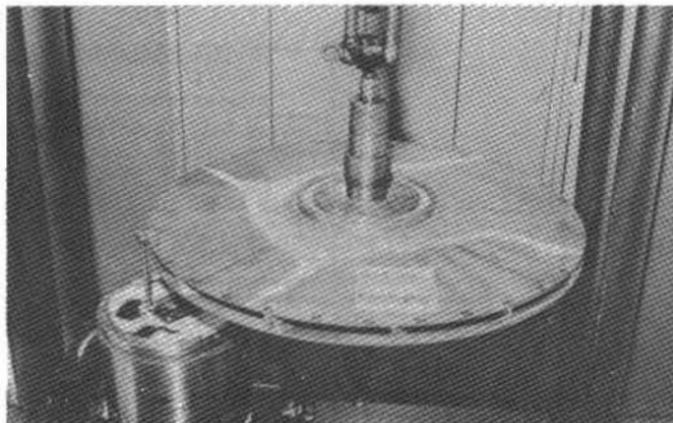


Photo 1. Nodal lines of  $(2D, F1)$  mode

first and second tests is about 3%. The difference is due to the new suspension which is slightly changed.

### Impeller in rotation

For the rotating tests, the impeller is mounted in a vacuum test rig. The exciter is a pneumatically controlled shock hammer which can be seen in Photo 2.

The vibrating signals are obtained with strain gages through a rotating switch and performed by FFT analyser. In this case the nodal lines are not available. Four frequencies are measured for  $\Omega = 1125, 1875, 3000, 4125, 4875, 6192$  and  $7125$  rev/mn. The experimental values are given in Fig. 8 with computed frequencies (Campbell diagram).

## ANALYSIS OF RESULTS

The frequencies and associated mode shapes are computed for various boundary conditions at rest and in rotation and arranged in families ( $F1$  to  $F4$ ), (as shown in Fig. 5), to preserve analogy with the classical axisymmetric representation. The eigen problem of Eq.(14) is solved for each of the seven values of  $\beta$  as defined in Eq.(3).



Photo 2. Rotating test rig

### Impeller at rest

The impeller frequencies and mode shapes are computed with free - Fig. 3 and supported - Photo 2 boundary conditions. The computed results are compared to experimental results and presented in Fig. 5. A satisfactory agreement is obtained. It can be noted that the OD and ID frequencies are very sensitive to the boundary conditions of the system. On the other hand, the highest diameter frequencies remain almost unchanged even with clamped hub conditions (not presented here).

### Impeller in rotation

The rotating impeller is supported at the end of the shaft as shown in Photo 2. The frequencies are computed for  $\Omega = 0, 1125, 1875, 3000, 4125, 4875, 6192$

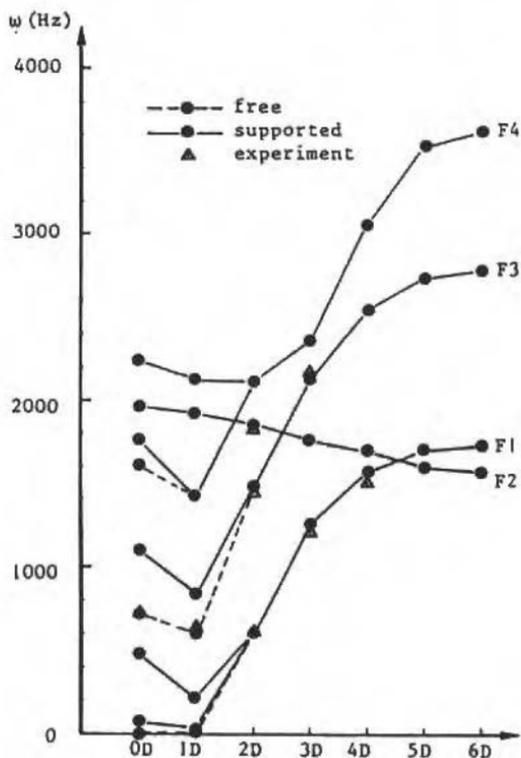


Figure 5. Frequencies at rest

and 7125 rev/min. They are plotted in the Campbell diagram and compared to experimental results in Fig. 8.

Examining Fig. 8, it shows that the first excited mode is the mode (2D, F1). The second one is the mode (3D, F1) of Fig. 7. At higher frequencies, it becomes clear that several modes can be excited at a time. At low speed of rotation the mode (1D, F4), responds to excitation. When  $\Omega$  increases (1D, F4) and (2D, F3) are concerned and for the highest  $\Omega$  only (2D, F3) is concerned. The same phenomenon arises to (2D, F3) and (4D, F1).

Typical nodal lines of the  $(0D, F3)$  mode at rest.

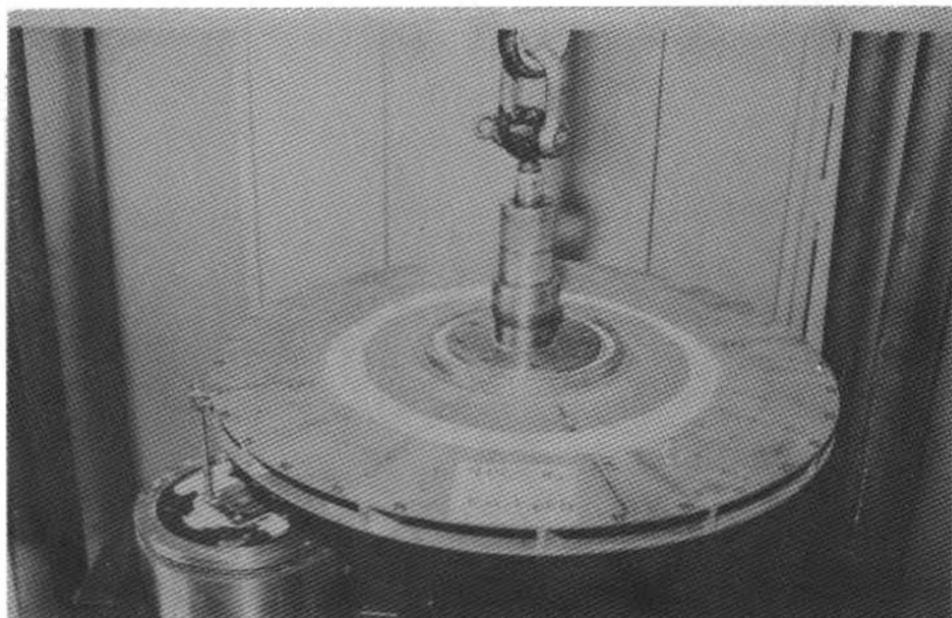
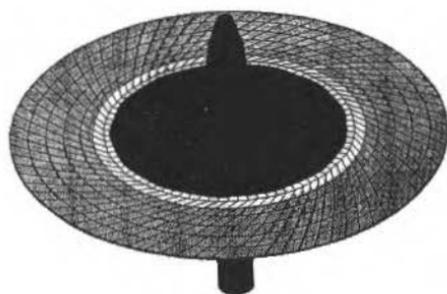
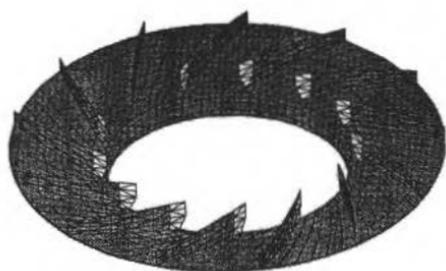


Photo 3. Experiment - Mode  $(0D, F3)$  - 715.5 Hz



a - Disk



b - Shroud and blades

Figure 6. Computed - Mode  $(0D, F3)$  - 729 Hz

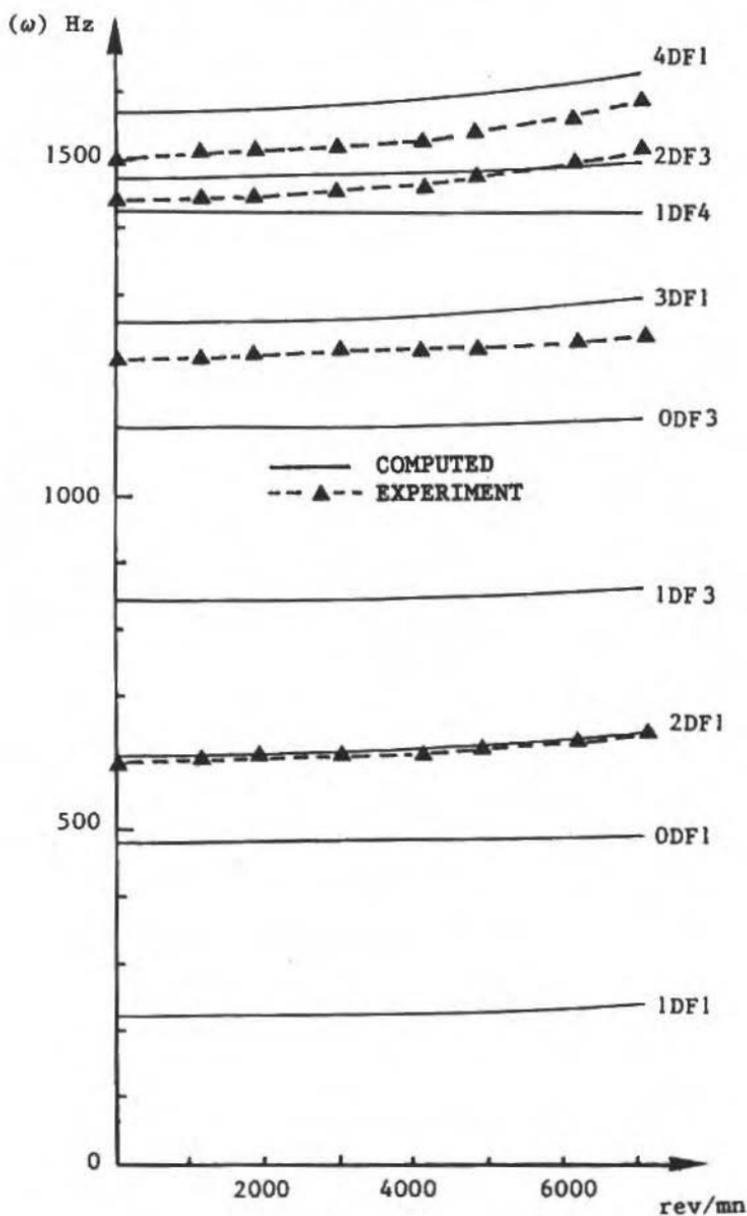


Figure 8. Campbell diagram

Typical nodal lines of the  $(3D, F3)$  mode at rest.

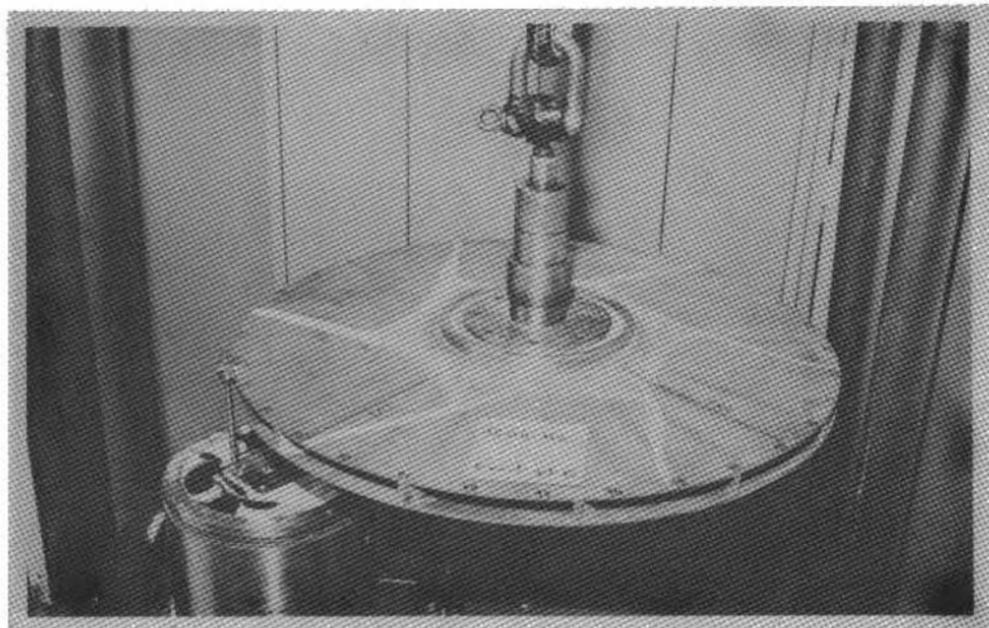
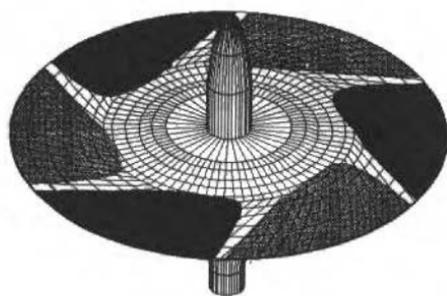
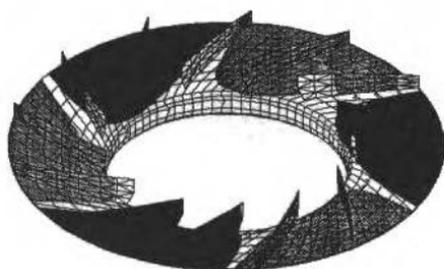


Photo 4. Experiment - Mode  $(3D, F1)$  - 1204 Hz



a - Disk



b - Shroud and blades

Figure 7. Computed - Mode  $(3D, F1)$  - 1256 Hz

## CONCLUSIONS

The analysis of the results obtained with this industrial example suggests that:

- Satisfactory agreement is obtained between computed and experimental results at rest and in rotation.
- The lowest 0 and 1 diameter frequencies are very sensitive to the boundary conditions. The other diameter frequencies ( $\lambda = 2$  to 6) are not significantly affected, even if the impeller is clamped on the hub.
- The effect of rotation is significant on some frequencies - about 6% for the  $(2D, F1)$  mode, for example. The mode shapes are only slightly modified by rotation.
- The method used is well suited to the dynamic analysis of rotating machinery components. The accuracy is directly linked to the quality of the finite element mesh, especially if centrifugal stresses are needed.
- A better model of shafted rotating impeller (Rotor) should include the Coriolis (gyroscopic) effects, response to various excitations and particularly response to unbalance. This will be done in the near future.
- Finally, for rotating machinery components, cyclic symmetric and substructure techniques are of great interest. In this case the size of the problem is greatly reduced and computation of all types of impellers can be performed on recent workstations.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully thank Framatome Thermodyn who provided the test impeller and many of the experimental results, and the "Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur" for its financial support.

## REFERENCES

- [1] MEAD, D.J., A General Theory of Harmonic Wave Propagation in Linear Periodic Systems with Multiple Coupling. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 27, no. 2, 1973, pp. 235-360.
- [2] ORRIS, R.M., PETYT, M. A Finite Element Study of Harmonic Wave Propagation in Periodic Structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 33, no. 2, 1974, pp. 223-236.
- [3] HENRY, R., FERRARIS, G. Substructuring and Wave Propagation: an Efficient Technique for Impeller Dynamic Analysis. *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, A.S.M.E.*, vol. 106, no. 1, 1984, pp.2-10.
- [4] HENRY, R. Contribution à l'étude Dynamique des Machines Tournantes, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Lyon 1, 1981.
- [5] BERLIOZ, A. Etude Dynamique des Structures à Symétrie Cyclique en Rotation. Application à une roue de Compresseur Centrifuge, Thèse de Doctorat, I.N.S.A. Lyon, 1990.
- [6] THOMAS, D.L. Standing Waves in Rotationally Periodic Structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 37, no. 2, 1974, pp. 288-290.
- [7] CRAIG, R.R. BAMPTON, M.C.C. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *A.I.A.A. Journal*, vol. 6, no.7, 1968, pp.1313-1319.

## VIBRATION OF THIN CYLINDRICAL VESSELS CONTAINING FLUID

## VIBRAÇÃO DE VASOS CILÍNDRICOS CONTENDO FLUIDOS

João Carlos Menezes  
CTA – ITA – IEMP  
12225, São José dos Campos, SP  
Brasil

Jayantilal Mistry  
University of Liverpool  
Department of Mechanical Engineering  
P.O. Box 147, Brownlow Hill  
Liverpool L69 3BX, U.K.

### ABSTRACT

*A numerical analysis based on finite element modelling of a coupled fluid-shell interaction to determine the natural frequencies of cylindrical vessels containing fluid has been presented. The model is based on laminar, viscid and incompressible fluid flow equations governed by the combination of the Navier-Stokes and continuity equations for the fluid dynamics and thin elastic axisymmetric shells for the walls of the containers. The numerical model has been employed to estimate the natural frequencies of steel cylinders filled to different levels of water and its results have been compared with the frequencies measured from an experimental analysis.*

**Keywords:** Fluid Structure Interaction ■ Identification

### RESUMO

*Apresenta-se uma análise numérica baseada em modelagem de elementos finitos de uma interação acoplada fluido-casca para determinar as frequências naturais de vasos cilíndricos contendo fluido. O modelo é baseado em equações para o fluido laminares, viscosos e incompressíveis, governados pela combinação das equações de Navier-Stokes e da continuidade para a dinâmica do fluido e de cascas elásticas finas e axisimétricas para as paredes do recipiente. O modelo numérico foi adotado para estimar as frequências naturais de cilindros de aço completados a diferentes níveis com água e seus resultados comparados com as frequências obtidas da análise experimental.*

**Palavras-chave:** Interação Fluido-Estrutura ■ Identificação

## INTRODUCTION

The problem of fluid-filled containers is important in several industries where the containers are likely to be used for either storage or transportation of dangerous chemicals or inflammable liquid products. In dynamic situations one important consideration, from the point of view of design for seismic events, is the ability of the designers to assess the natural frequencies and dynamic response of the containers. The present investigation is aimed to calculate these with the aid of a numerical finite element model.

The transient motion of a cylindrical vessel containing incompressible and viscous fluid is simulated using axisymmetric two-noded shell finite elements for the cylindrical wall [1,2,3,4,5] and 8-noded isoparametric fluid elements for the liquid. Galerkin's weighted residual technique had been employed for the Navier-Stokes equations expressed in polar coordinates in order to derive the fluid finite element equations. For the wall of the cylinder, classical linear shell theory of [6] had been employed. The transient coupled dynamics problem of fluid-shell interaction had been solved with the aid of the Newmark average acceleration procedure [7] for the shell wall and in case of the fluid elements, Euler's Backward Difference scheme [8] was utilized.

## SHELL ELEMENT

Curved elements are the most appropriate type of elements to depict axisymmetric shells. Although the geometry of the vessel studied in the present work is cylindrical, and therefore the radius of curvature is taken as infinite at all points, for the sake of generality, a two node annular axisymmetric element of constant curvature as shown in Fig. 1 was adopted.

The assumed displacement functions [1,2,3,4,5] are as follows

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{(1-\xi)}{2} u_i \cos(n\theta) + \frac{(1+\xi)}{2} u_j \cos(n\theta) \\
 v &= \frac{(1-\xi)}{2} v_i \sin(n\theta) + \frac{(1+\xi)}{2} v_j \sin(n\theta) \\
 w &= \frac{(2-3\xi+\xi^3)}{4} w_i \cos(n\theta) + \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \ell \beta_i \cos(n\theta) \\
 &\quad + \frac{(2+3\xi-\xi^3)}{4} w_j \cos(n\theta) - \frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \ell \beta_j \cos(n\theta)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

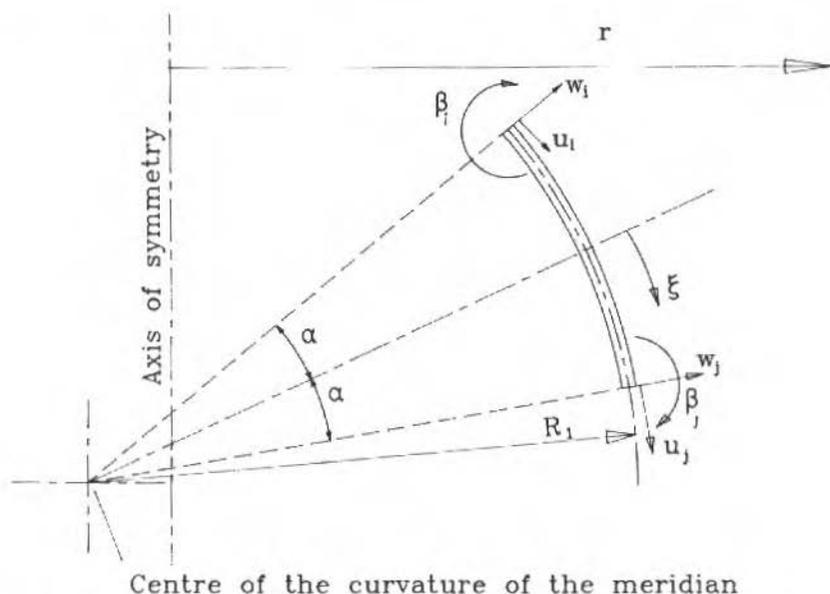


Figure 1. Curved axisymmetric shell element with assumed degrees of freedom (Circumferential displacement,  $v$  is normal to  $u$  and  $w$  and outward from the plane of the figure).

where  $u$ ,  $v$ ,  $w$  and  $\beta$  are meridional, circumferential, normal and rotational displacements respectively. In the above  $(u_i, v_i, w_i, \beta_i, u_j, v_j, w_j, \beta_j)$  are the nodal displacements at nodes  $i$  and  $j$  respectively and they are employed as the degrees of freedom of the shell element.  $n$  is number of circumferential waves.  $\theta$  is the angular coordinate in the circumferential direction,  $\ell$  is one half of the meridional length and  $\xi$  is the linear local coordinate along a meridian. It varies from  $-1$  (at node  $i$ ) to  $+1$  (at node  $j$ ). The displacement  $u$ ,  $v$ ,  $w$  and  $\beta$  may be expressed as a matrix product of the shape function  $[N]$  and the nodal displacement vector  $\{U_k\}$  as

$$\{U\} = [N] \{U_k\} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= [u \ v \ w] \\ \{U\}^T &= [u_i \ v_i \ w_i \ \beta_i \ u_j \ v_j \ w_j \ \beta_j] \end{aligned} \quad (3)$$

## FLUID EQUATIONS

When considering the fluid contained in the vessel, certain physical and geometric assumptions are made:

- (a) The fluid domain is axisymmetric,
- (b) There is no heat transfer between the fluid and the outside environment,
- (c) The fluid is viscous, incompressible and Newtonian,
- (d) The flow is unsteady, and
- (e) The mass of the system is conserved.

The differential equation relating fluid velocity components, acceleration components and pressure gradients at a certain point of the domain, which ensures assumptions (a), (b), (c) and (d) are given by the Navier-Stokes momentum equations [9] expressed in cylindrical coordinates. To ensure the assumption (e), the continuity equation has to be included in the system of equations.

Considering the displacement functions given in (1), the displacements along the shell element may be expressed as:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(\xi, t) \cos(n\theta) \\ v &= \bar{v}(\xi, t) \sin(n\theta) \\ w &= \bar{w}(\xi, t) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\bar{u}(\xi, t)$ ,  $\bar{v}(\xi, t)$  and  $\bar{w}(\xi, t)$  are the circular amplitudes of the displacement  $u$ ,  $v$  and  $w$  at a given position  $\xi$  and time  $t$ . Considering that the velocities may be calculated as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cos(n\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \cos(n\theta) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \cos(n\theta) \end{aligned}$$

and the shell-fluid interface, the fluid velocity components and the shell velocity components are expected to be compatible. It follows that the fluid velocity

components will also vary circumferentially in the similar manner.

$$\begin{aligned}v_r &= \bar{v}_r \cos(n\theta) \\v_\theta &= \bar{v}_\theta \sin(n\theta) \\v_z &= \bar{v}_z \cos(n\theta)\end{aligned}\quad (5)$$

where  $\bar{v}_r$ ,  $\bar{v}_\theta$  and  $\bar{v}_z$  are the fluid velocity components in cylindrical coordinates.

Assuming the pressure varies as,

$$p(r, \theta, z, t) = p_0(r, \theta, z) + \bar{p}(r, \theta, z, t) \cos(n\theta) \quad (6)$$

where the first term in the right hand side of the equation is the static pressure and the remaining term corresponds to the pressure in dynamic situation.

From the above equation, the pressure gradients components may be derived as,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \cos(n\theta) \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{\partial p_0}{\partial \theta} - n\bar{p} \sin(n\theta) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \cos(n\theta)\end{aligned}\quad (7)$$

Taking into account the set of equations (5) and (7), assuming that all variables are considered in terms of the circular amplitudes (i.e. discarding the bar notation above the amplitudes in the following), the Navier-Stokes equations and the continuity equation may be written as follows,

$$\rho A_1 - \rho g_r + \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \cos(n\theta) - \mu B_1 = 0 \quad (8)$$

$$\rho A_2 - \rho g_\theta + \frac{\partial p_0}{\partial \theta} - \frac{np}{r} \sin(n\theta) - \mu B_2 = 0 \quad (9)$$

$$\rho A_3 - \rho g_z + \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \cos(n\theta) - \mu B_3 = 0 \quad (10)$$

$$\left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{n}{r} u_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \cos(n\theta) = 0 \quad (11)$$

where  $\mu$  is the viscosity,  $\rho$  is the fluid density,  $(g_r, g_\theta, g_z)$  are cylindrical components of the gravitational acceleration and

$$A_1 = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \cos^2(n\theta) - \left[ \frac{n}{r} v_\theta v_r + \frac{v_\theta^2}{r} \right] \sin^2(n\theta) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \cos^2(n\theta) + v_r \cos(n\theta) \quad (12)$$

$$B_1 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2} v_r - \frac{2n}{r^2} v_\theta + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \cos(n\theta) \quad (13)$$

$$A_2 = \left[ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{n}{r} v_\theta^2 + \frac{v_r v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \cos(n\theta) \sin(n\theta) + v_\theta \sin(n\theta) \quad (14)$$

$$B_2 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2} v_\theta - \frac{2n}{r^2} v_r + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \sin(n\theta) \quad (15)$$

$$A_3 = \left[ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \cos^2(n\theta) - \frac{n}{r} v_\theta v_z \sin^2(n\theta) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \cos^2(n\theta) + v_z \cos(n\theta) \right] \quad (16)$$

$$B_3 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} - \frac{n^2}{r^2} v_z + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \cos(n\theta) \quad (17)$$

Assuming that the variation of the velocity, acceleration and pressure is given in terms of the assumed shape functions

$$v_k = \sum_{j=1}^8 N_j v_{kj} \quad \text{where} \quad k = r, \theta \text{ or } z$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^8 N_j \frac{\partial v_{kj}}{\partial t} \quad \text{where} \quad k = r, \theta \text{ or } z$$

$$p = \sum_{j=1}^4 M_j p_j \quad (18)$$

where  $v_{kj}$  and  $p_j$  are nodal variables,  $N_j$  are shape functions of a quadrilateral eight noded element and  $M_j$  are shape functions considering four corner nodes of the element only.

Using Galerkin's weighted residual procedure, the Finite Element equations are

$$\int_V N_i X dV = 0 \quad (19)$$

where  $X$  is one of the Navier-Stokes momentum equations or the continuity equation.  $i$  varies according to the range of shape functions used in the approximations, namely 8 for the three momentum equations, but 4 for the continuity equation. Here  $dV$  is equal to  $r d\theta dr dz$ . The resulting equations, after the Galerkin's weighted residual principle is applied, can be analytically integrated in the circumferential direction. Before this integration, equations 8, 10 and 11 are multiplied by  $\cos(n\theta)$  and equation 9 is multiplied by  $\sin(n\theta)$ . Performing the integrals and reducing the second order derivatives by partial integration, two groups of equations are obtained:

For  $n > 0$

$$\begin{aligned} & \int_A N_i \left\{ \rho v_r + \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{(1+n^2)}{r^2} v_r + \frac{2n}{r^2} v_\theta \right] \right\} r dr dz \\ & + \int_A \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] r dr dz \\ & - \int_S \mu N_i \frac{\partial v_r}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_A N_i \left\{ \rho v_\theta - \frac{n}{r} p + \mu \left[ \frac{(1+n^2)}{r^2} v_\theta + \frac{2n}{r^2} v_r \right] \right\} r dr dz \\ & + \int_A \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] r dr dz \\ & - \int_S \mu N_i \frac{\partial v_\theta}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\int_A N_i \left[ \rho v_z + \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{n^2}{r^2} v_z \right] r dr dz$$

$$\begin{aligned}
& + \int_A \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] r dr dz \\
& - \int_S \mu N_i \frac{\partial v_z}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_A M_i \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{nv_\theta}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] r dr dz = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \text{ and } 4. \quad (23)$$

For  $n = 0$

$$\begin{aligned}
& \int_A N_i \left[ \rho A_4 - \rho g_r + \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu v_r}{r^2} \right] r dr dz \\
& + \int_A \mu B_4 r dr dz - \int_S \mu N_i \frac{\partial v_r}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned} \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned}
A_4 &= v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\
B_4 &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A N_i \left[ \rho A_5 - \rho g_z + \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right] r dr dz \\
& + \int_A \mu B_5 r dr dz - \int_S \mu N_i \frac{\partial v_z}{\partial \bar{n}} ds = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned} \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned}
A_5 &= v_z + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
B_5 &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\int_A M_i \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] r dr dz = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \text{ and } 4. \quad (26)$$

In the above  $\bar{n}$  is a normal coordinate at the external edge  $S$ .

### SHELL EQUATION OF MOTION AND SHELL-FLUID COUPLING

Consider equation (4) and the relationships between stresses ( $\sigma$ ) and strains ( $\epsilon$ ) and between strains and displacements  $\{U_k\}$ ,

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (27)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{U_k\} \quad (28)$$

where  $[D]$  is the elasticity matrix and  $[B]$  is matrix relating strains to displacements. Applying the virtual work procedure [10], taking into account the work done by the stresses, by the inertia forces and by the external forces, the shell equation of motion may be obtained as follows,

$$[M]\{U_k\} + [K]\{U_k\} = \{R\} \quad (29)$$

where

$$[M] = \int_V \rho_s [N]^T [N] dV$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{R\} = \int_V [N]^T \{F\} dV$$

where  $[M]$  and  $[K]$  are the mass and stiffness matrices respectively,  $\rho_s$  is the shell density and  $\{F\}$  is the vector which considers the external forces per unit volume applied over the shell wall by the fluid.

The solution of the problem of a vibrating vessel filled with fluid may be established as an iterative solution. The fluid differential equations may be represented as

$$[A] \{\dot{C}\} + [V] \{C\} + [P] \{p\} = \{S\} \quad (30)$$

where  $\{\dot{C}\}$  and  $\{C\}$  are the fluid velocity and acceleration vectors respectively.

The necessary boundary conditions of one equation, say (29), are the results of the other one (30) and vice versa. First the values in  $\{R\}$  may be set to

zero and equation (29) may be solved for an initial disturbance on the shell wall. With the known velocities at the shell nodes, the boundary conditions for the fluid equation may be set, so that, equation (30) may now be solved for velocities, accelerations and pressures in the fluid medium. The pressures at the boundary (shell-fluid interface) will allow (29) to be solved for the next time step. This procedure was repeated for a defined duration of time and the response of the system may be thus analysed.

To solve shell matrix differential equation (29) the Newmark scheme may be employed [7], so that

$$\{U_k\}^{n+1} = \{U_k\}^n + [(1 - \alpha)\{U_k\}^n + \alpha\{U_k\}^{n+1}] \Delta t \quad (31)$$

$$\{U_k\}^{n+1} = \{U_k\}^n + \{U_k\}^n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{U_k\}^n + \beta \{U_k\}^{n+1} \right] (\Delta t)^2 \quad (32)$$

where  $\alpha = 0.5$  and  $\beta = 0.25$  give a constant average acceleration method. The superscript  $n$  and  $n+1$  refer to the time steps  $t_n$  and  $t_{n+1}$  with  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Rearranging equations (29), (31) and (32), one arrives at

$$[\bar{K}] \{U_k\}^{n+1} = \{R\} \quad (33)$$

where

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M]$$

$$\{\bar{R}\} = \{R\}^{n+1} + [M] \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \{U_k\}^n + \frac{4}{\Delta t} \{U_k\}^n + \{U_k\} \right]$$

For the fluid equations, the Backward Euler's scheme [8] may be adopted, so that

$$\{\dot{C}\}^{n+1} = \frac{\{C\}^{n+1} - \{C\}^n}{\Delta t} \quad (34)$$

Replacing the above equation in the matrix fluid equation (30) it follows that

$$[\bar{V}] \{C\}^{n+1} + [P] \{p\}^{n+1} - \{\bar{S}\} \quad (35)$$

where

$$[\bar{V}] = \frac{1}{\Delta t} [A] + [V]$$

$$\{\bar{S}\} = \{S\}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} [A] \{C\}^n$$

The first and second terms of equations (35) may be adequately assembled in order to give a set of equations dependent on  $\{C\}$  and  $\{p\}$  simultaneously.

## EXPERIMENTAL PROCEDURE

The experimental procedure adopted for the investigation was divided into two stages. Initially, each cylinder specimen was tested without any liquid in the cylinders. The main purpose of the test was to identify the modes of vibration in terms of the number of waves in the circumferential and longitudinal directions. This required excitation of the specimens at the resonance frequencies. The natural frequencies can be found from the spectrum analysis of the transient response of the shell wall following a shock excitation. Once the frequencies were thus identified, an apparatus was set up according to the schematic diagram shown in Fig. 2 in order to excite the structure at the natural frequency of a particular mode under test. The shaker at the base of the cylinder provided vertical oscillations as the source of excitation. The frequency of the shaker force was adjusted to give resonance conditions. The identification of the mode was carried out by means of two accelerometers attached to the top open rim of the cylinder. The relative angular position of the accelerometers circumferentially and the phase difference measured between them uniquely identified the mode of vibration in terms of the circumferential waves. The longitudinal waves were identified by measurements along any non-nodal meridian. In the second stage of the experimental procedure, tests were carried out with different heights of water in the cylinders. The test procedure was identical to the one described above.

## RESULTS

For the experimental verification of the model five steel cylinders were manufactured using a numerically controlled lathe from standard thick pipes. The inner surface was machined first to fit a mandrel and then the outside surface was turned down to the required thickness. The average dimensions of the specimens are given in Table 1.

Table 1. Average Dimensions of the Cylinders.

Cylinder Specimen	Average Thickness $h$ (mm)	Internal Diameter $D$ (mm)	Height of the Cylinder $L$ (mm)
0.6	0.65	198.0	280.2
0.8	0.82	198.0	325.5
1.0	0.99	198.0	398.4
1.2	1.16	198.0	398.0
1.4	1.37	198.0	398.0

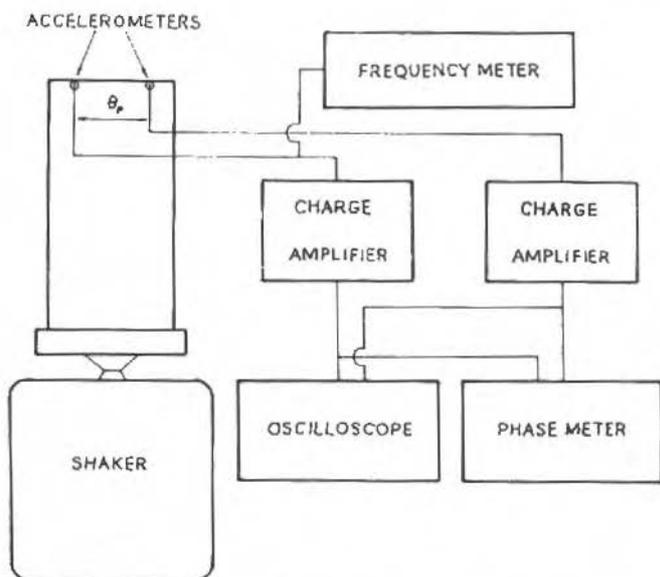


Figure 2. Schematic diagram of the experimental set-up.

After the initial test with the cylinders without water, the natural frequencies and modes of the cylinders were measured by gradually increasing the height of water. As expected, at shallow heights no change in frequencies was recorded for all the modes and test specimens. The effect of the mass of the fluid starts to influence the frequencies when approximately 30% of the cylinder is partially filled. This threshold of change varies from the specimen to specimen depending on the thickness-to-diameter ratio, but after the threshold there is a continuous decline in the value of the frequency due to the added mass affect of the fluid on the vibration of the cylindrical vessel. Typical set of results obtained are shown in Fig. 3 for a cylinder with nominal thickness of 0.8 mm. In the figure  $H$  represents the ratio of the water height to the total length of the cylinder. The various curves in the figure refer to the different mode of vibration identified by the circumferential wave number  $n$ . The lowest vibration mode was found for  $n$  equal to 2, which is a plain alternate ovalisation of the cylinder section about the two major axes. The second mode corresponding to  $n$  equal to 4, followed by 3 and 5.

The above case was also considered for the theoretical predictions of the natural frequency from a transient response analysis. Typical results of the cylinder when excited by an initial static disturbance applied to the empty and half filled ( $H = 0.5$ ) 0.8 mm thick cylinder are shown in the Fig. 4. The empty

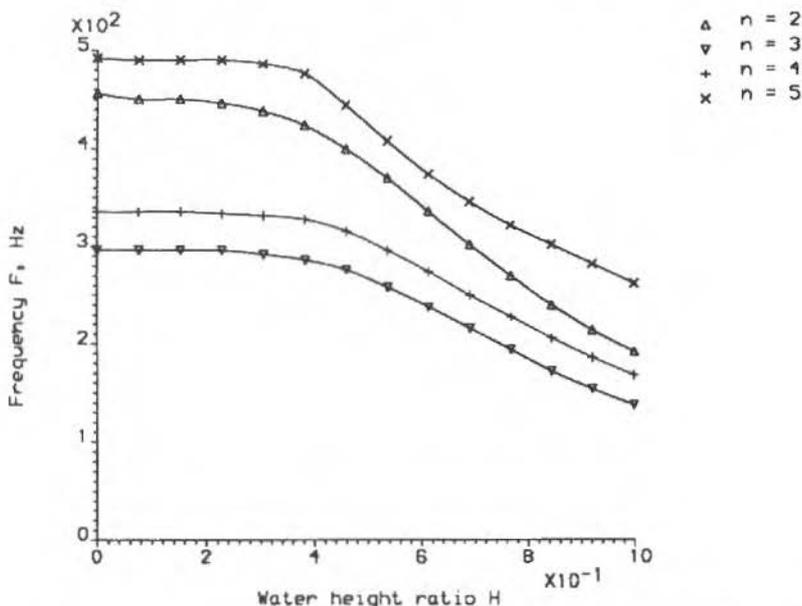


Figure 3. Variation of the natural frequencies with different level of water in the cylinders for different circumferential modes.

cylinder shows the expected undamped oscillatory response but the partially filled cylinder displays a damped response. The natural frequencies of the cylinders filled to various height of water were estimated from the dynamic response analysis. These results are compared with the experimental results in Table 2. The case A, B and C refer to the cylinder with nominal thicknesses 0.6, 0.8 and 1.2 respectively. The length to diameter of the specimens varied from 1.42 to 2.01. The thickness ( $h$ ) to internal diameter ( $D$ ) ratio of the specimens varied from 0.00328 to 0.00586. The water levels used were 50%, 70% and 80% of the total height. In order to show the degree of correlation of results, the final column lists the ratio of theoretical frequencies to the experimental values. It can be seen that the correlation is generally satisfactory because the correlation ratio lies in between 0.848 and 1.202, with the largest difference approximately 20%. These results confirm the validity of the theoretical model employed. The source of errors in the theoretical model is mainly expected from the basic assumptions that the fluid motion is laminar and incompressible. At high frequencies, turbulence and compressibility of the fluid will have dominant effect on its response.

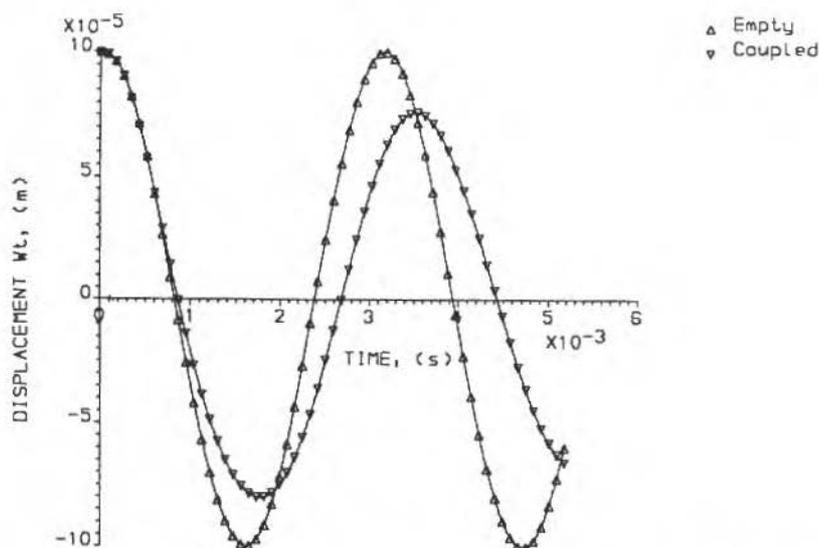


Figure 4. Transient responses of an empty cylinder and half filled with water (0.8 mm specimen,  $n = 4$  and  $H = 0.5$ )

Table 2. Comparison between Theoretical Experimental Natural Frequencies.

Case	$\frac{1000h}{D}$	$\frac{L}{D}$	$n$	$H$	Freq. theory (Hz)	Freq. Expt. (Hz)	$\frac{\text{Theory}}{\text{Expt.}}$
A	3.28	1.42	2	0.5	544	490	1.110
A	3.28	1.42	3	0.5	319	314	1.016
A	3.28	1.42	4	0.5	275	276	0.996
A	3.28	1.42	5	0.5	397	351	1.131
B	4.14	1.64	2	0.7	350	298	1.174
B	4.14	1.64	3	0.7	218	213	1.023
B	4.14	1.64	4	0.7	229	247	0.927
C	5.86	2.01	2	0.8	244	203	1.202
C	5.86	2.01	3	0.8	196	190	1.032
C	5.86	2.01	4	0.8	251	296	0.848

## CONCLUSIONS

The theoretical analysis of the Navier-Stokes have shown that the Finite Element equations are basically non-linear for circumferential wave number  $n = 0$ , but linear when other wave numbers are taken into consideration. However, the frequencies associated with  $n = 0$  nodes are usually very high for the cases considered here, and hence, it was not necessary to solve the non-linear equations. The practical procedure to identify the circumferential waves was tested and it was found that the method of two sensors can lead to quick and simple identification of mode shapes of shell type structures.

The numerical predictions when compared with the experimental results have shown a good degree of correlation. The present model was shown to provide reasonably accurate predictions of the natural frequencies of the partially-filled cylinders. Comparison between theoretical and experimental frequencies revealed a maximum deviation of 20% of the theoretical frequencies. Damped type response of the shell-fluid system observed in all theoretical simulations also adds reliability to the assumptions made.

## REFERENCES

- [1] ROSS, C.T.F; JOHNS, E. & JOHNS, T. Vibration of Thin-Walled Domes Under External Water Pressure, *J. Sound and Vibration*, v. 114, no. 3, pp. 453-463, 1987.
- [2] ROSS, C.T.F & JOHNS, T. Vibration of Hemi-ellipsoidal Axisymmetric Domes submerged in Water, *Proc. Inst. Mech. Engres.*, v. 200, no. C6, pp. 389-398, 1986.
- [3] ROSS, C.T.F & JOHNS, T. Vibration of submerged Hemi-ellipsoidal Domes, *J. Sound and Vibration*, v. 91, no. 3, pp. 363-373, 1983.
- [4] ROSS, C.T.F. & MACKNEY, M.D.A. Deformation and Stability Studies of Thin-Walled Domes under Uniform External Pressure, *J. Strain Analysis*, v. 18, no. 3, pp. 167-172, 1983.
- [5] ROSS, C.T.F. Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [6] NOVOZHILOV, V.V. Thin Shell Theory, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1964
- [7] WOOD, W.L. Pratical Time-Stepping Schemes, Oxford University Press, 1990.
- [8] REDDY, J.N. Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, McGraw-Hill Book Co., 1986.

- [9] PANTON, R.L. Incompressible Flow, John Wiley & Sons, 1984.
- [10] ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

### Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the English title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from English, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.

*ÍNDICE / CONTENTS*

A.I. Kawasaki W.A. Kapp e A.A. Gonçalves Jr.	Dispositivo Padrão de Microdeslocamentos	1
Giampaoli e S.N.Y. Gerges	Determinação da Absorção Sonora de Materiais com Sistema Computadorizado	13
A. Sperber and H.I. Weber	Dynamic Models of Hydroelectric Machinery	29
A. Berlioz R. Henry J.M. Pugnet and G. Ferraris	Experimental and Theoretical Dynamic Analysis of a Rotating Shrouded Impeller	55
J.C. Menezes and J. Mistry	Vibration of Thin Cylindrical Vessels Containing Fluid	73