

REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITOR: Hans Ingo Weber

Deptº Projeto Mecânico, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

Álvaro Toubes Prata

Deptº Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPO

Carlos Alberto de Almeida

Deptº Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,  
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UFRJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UFRJ)

Moisés Zindeluk (COPPE/UFRJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UFRJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UFRJ)

Samir N.Y. Gerges (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

---

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /  
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

---

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



## THE SOLUTION OF THE COMPRESSIBLE TURBULENT BOUNDARY LAYER BY THE KELLER METHOD AND ITS APPLICATION TO THE CASE OF THE SHOCK TUBE

## SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE TURBULENÇA PELO MÉTODO DE KELLER E SUA APLICAÇÃO AO CASO DO TUBO DE CHOQUE

Roberto F. Bobenrieth M.  
Marcos A. Ortega - Membro ABCM  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
Departamento de Aerodinâmica  
12225 São José dos Campos, SP Brasil

### ABSTRACT

*A numerical scheme based on the Keller method for the calculation of the compressible turbulent boundary layer is presented. The computer code is initially validated by comparing results with well-established literature data. Finally, the same computer code is used to calculate the heat transfer to the wall of a shock tube due to the passage of the shock wave. Comparison with existing shock-tube measurements stresses the accuracy of the numerical procedure.*

**Keywords:** Boundary Layer ■ Turbulence ■ Keller Method ■ Shock Tube

### RESUMO

*No trabalho que segue apresenta-se um esquema numérico baseado no método de Keller para cálculo da camada limite compressível turbulenta. Inicialmente procede-se à validação do programa resultante por meio da comparação com dados tradicionais da literatura. Finalmente, o mesmo programa é utilizado no cálculo da taxa de calor na parede de um tubo de choque devido à passagem da onda de choque. A comparação com medidas experimentais demonstra a precisão do esquema numérico desenvolvido.*

**Palavras-chave:** Camada Limite ■ Turbulência ■ Método de Keller ■ Tubo de Choque

## INTRODUCTION

In a former work by the same authors (Bobenrieth and Ortega [1]) a method for calculating the laminar compressible boundary layer for two-dimensional and axisymmetric flows was presented. In what follows the extension of this numerical procedure for the turbulent case is developed. The overall idea is the same shown in reference [1], the difference now is that one has to tackle a turbulent boundary layer. Turbulence is dealt with by introducing the concepts of eddy-viscosity and eddy-conductivity, and the model to be used is the one due to Cebeci and Smith (see, for instance, Cebeci and Bradshaw [2]).

A calculation procedure for the compressible turbulent boundary layer based on the Keller method [3] can be found in the literature in the work of Cebeci and Bradshaw [2]. Nevertheless, there is a definite and important difference between their approach and ours. One of the steps of the Keller numerical scheme is a linearization step, which has to be introduced considering that the momentum equation maintains its non-linear nature even after the discretization procedure. Cebeci and Bradshaw introduce the linearization step for both the momentum and the energy equations, even though the energy equation is linear. The idea of these authors is to solve the equations simultaneously and the consequence of this procedure is that the resulting matrices are  $5 \times 5$ . The approach to be discussed below considers linearization of only the discretized momentum equation, and the solution is sequential, i.e., first the momentum equation is solved (matrices  $3 \times 3$ ) and then the energy equation is solved (matrices  $2 \times 2$ ). A definite disadvantage of working with matrices  $5 \times 5$  appears during the implementation phase of the code. In a certain stage one is faced with inverting an almost complete algebraic  $5 \times 5$  matrix. Moreover, the  $5 \times 5$  computer code has a computer cost greater than the  $3 \times 3$  code. This greater time expenditure corresponds exactly to that action which is in fact not needed, i.e., calculations due to the linearization of the energy equation. In the compressible case the equations are generally coupled, but it is a simple matter to establish a convergence criterion.

Several applications of the computer code are reported below. Initially, two examples still in the laminar regime, the flat plate and the Howarth retarded flow are considered. The idea here is to explore the laminar régime beyond the point of Ref.[1]. After this the solution of the turbulent compressible flow along

a flat plate is presented. Finally, an application to the case of the boundary layer behind the shock wave advancing in a shock tube is performed. The results of the boundary-layer computer code based on Keller's method, when compared with results from the literature, both theoretical and experimental, show the flexibility and the accuracy of the present numerical scheme.

## BASIC EQUATIONS

**The Boundary-Layer Equations.** The steady compressible turbulent boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flows, with the usual assumptions, are:

$$\frac{\partial}{\partial x} r^k [\bar{\rho} \bar{U}] + \frac{\partial}{\partial y} r^k [\bar{\rho} \bar{V} + \overline{\rho'V'}] = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + [\bar{\rho} \bar{V} + \overline{\rho'V'}] \left[ \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right] = -\frac{d\bar{p}}{dx} + r^{-k} \frac{\partial}{\partial y} r^k \left[ \bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - [\overline{\rho'U'V'}] \right], \quad (2)$$

$$\bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} + [\bar{\rho} \bar{V} + \overline{\rho'V'}] \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} = r^{-k} \frac{\partial}{\partial y} r^k \left[ \frac{\bar{\mu}}{Pr} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{V'h'_0} + \bar{\mu} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right], \quad (3)$$

where  $k = 0$  for two-dimensional flows and  $k = 1$  for axisymmetric flows.

The above equations are written in a curvilinear system of coordinates (see Fig. 1) where  $x$  is the distance along the surface measured from the stagnation point or leading edge, and  $y$  is measured normal to the surface. In Fig. 1  $r$  is a radial coordinate,  $r_0(x)$  is the radius of the body,  $\bar{U}_\infty$  is a reference velocity,  $\bar{U}_e(x)$  and  $\bar{h}_e(x)$  are, respectively, the velocity and specific stagnation enthalpy outside the boundary layer. The other symbols in Eqs.(1), (2), (3) have their usual meaning, i.e.,  $U$  and  $V$  stand for, respectively,  $x$ - and  $y$ -components of velocity,  $\rho$  for density,  $p$  for pressure,  $\mu$  for viscosity,  $Pr$  for the Prandtl number and  $h_0$  for the specific stagnation enthalpy. The bars over the symbols indicate time mean values and the primes indicate fluctuation components relative to those means (from now on, we keep the bars only on terms involving products of fluctuations).

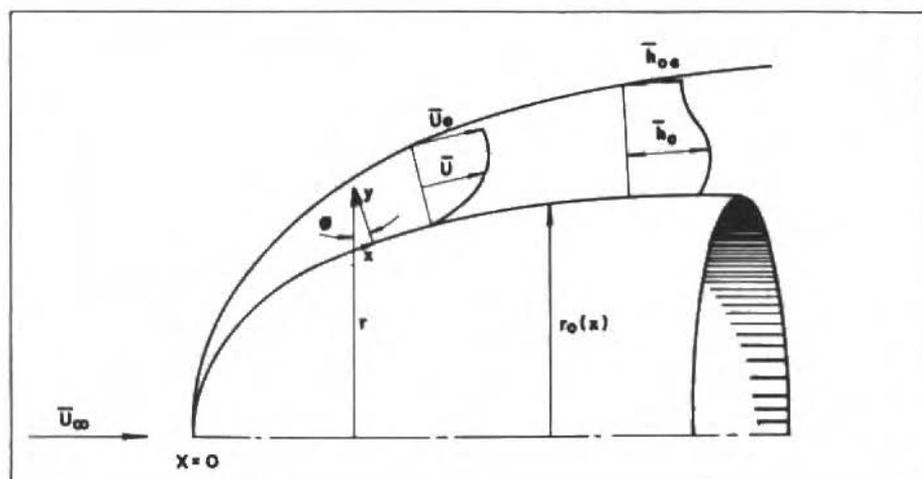


Figure 1. Coordinate system and notation.

In this paper the fluid considered is air taken to be a perfect gas with constant specific heats. The viscosity  $\mu$  is obtained by means of the Sutherland formula [4].

**The Turbulence Model.** In order to solve the system of equations (1), (2), (3), it is necessary to relate the Reynolds shear stress,  $-\rho \overline{U'V'}$ , and the Reynolds heat flux,  $-\rho \overline{V'h'_0}$ , to the mean velocity and enthalpy distributions, respectively. To this end, we introduce the following eddy-viscosity ( $\varepsilon$ ) and eddy-conductivity ( $\lambda_t$ ) concepts [2]

$$\varepsilon = \frac{-\overline{U'V'}}{\partial U / \partial y}, \quad \lambda_t = \frac{-\overline{V'h'_0}}{\partial h_0 / \partial y} = \frac{\varepsilon}{Pr_t}, \quad (4a, b)$$

where  $Pr_t$  is a turbulent Prandtl number.

Next, a two-layer model is also introduced and the eddy viscosity within the boundary layer is represented by separate expressions. In the inner region, use is made of an eddy viscosity based on Prandtl's mixing length theory,

$$\varepsilon_i = L_m^2 \frac{\partial U}{\partial y} \gamma_{tr} \gamma, \quad \varepsilon_i < \varepsilon_0, \quad (5)$$

where  $\gamma_{tr}$  is a laminar-turbulent transition parameter,  $\gamma$  is Klebanoff's intermittency factor,  $\varepsilon_0$  is the value of the eddy-viscosity in the outer region, and  $L_m$  is Prandtl's mixing length modified by van Driest,

$$L_m = 0.4y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]. \quad (6)$$

The value of  $A$  to be used in the above expression was later modified by Cebeci [5]. The modification introduced by Cebeci takes, as reference, the shear stress and density at the height of the laminar sub-layer, and not their values at the wall, as proposed originally by van Driest. The resulting expression for  $A$  is

$$A = 26 \left( \frac{\rho'}{\rho_w} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu_e}{N} \right) u_\tau^{-1}, \quad (7a)$$

with

$$N^2 = 1 - 11.8 \left( \frac{\mu_w}{\mu_e} \right) \left( \frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 p^+, \quad (7b)$$

and

$$p^+ = \frac{\nu l'_e}{u_\tau^3} \frac{dl'_e}{dx}, \quad u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2} \quad (7c, d)$$

The subscript "w" indicates values at the wall, whereas the subscript "e" characterizes values at the outer edge of the boundary layer. In the equations above  $\nu$  is the kinematic viscosity and  $\tau$  is the symbol for shear stress.

In the outer region the eddy-viscosity is given by [2]

$$\varepsilon_0 = 0.0168 \left| \int_0^\infty (U_e - U) dy \right| \gamma_{tr} \gamma, \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon_i, \quad (8)$$

where the vertical bars indicate absolute values.

In Eqs. (5) and (8)  $\gamma_{tr}$  is an intermittency factor which is required to represent the region of transition from laminar to turbulent flow. It is defined by an empirical correlation.

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[ -G_{tr}(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{U_e} \right]. \quad (9)$$

Here  $x_{tr}$  is the location of the start of transition and the factor  $G_{tr}$ , which is evaluated at the transition location, is given by

$$G_{tr} = \frac{8.33}{10^4} \frac{U_e^3}{\nu_e^2} R_x^{-1.34}, \quad (10)$$

where  $R_x = U_e x / \nu_e$  is the Reynolds number.

In Eqs. (5) and (8)  $\gamma$  is another intermittency factor that accounts for the fact that as the freestream is approached, the turbulence becomes intermittent. It is given by

$$\gamma = \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}, \quad (11)$$

where  $\delta$  is the hydrodynamic boundary-layer thickness.

In this paper the turbulent Prandtl number,  $Pr_t$ , is treated as a constant across the layer, its value been contained, normally, in the range 0.5–0.9. In fact  $Pr_t$  varies as a function of the distance to the wall, this variation being a function of the molecular Prandtl number. Nevertheless, for molecular Prandtl numbers of order 1,  $Pr_t$  is almost invariant across the layer. For further details the reader is referred to Cabeci and Bradshaw [2].

**Transformation of the Boundary-Layer and the Eddy-Viscosity Equations.** Introducing the Probstein-Elliot/Levy-Lees transformation

$$d\xi = \rho_e \mu_e U_e \left( \frac{r_0}{L} \right)^{2k} dx, \quad d\eta = \frac{\rho U_e}{(2\xi)^{1/2}} \left( \frac{r}{L} \right)^k dy, \quad (12a, b)$$

and the definition of the dimensionless stream function  $f$

$$\psi = (2\xi)^{1/2} f(\xi, \eta), \quad (13)$$

in the equations (1), (2) and (3), gives the following transformed momentum and energy equations:

$$[(1+t)^{2k} C(1+\varepsilon^+) f''']' + f f'' + \beta \left[ \frac{\rho_e}{\rho} - (f')^2 \right] = 2\xi \left[ f' \frac{\partial f}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right], \quad (14)$$

$$\left\{ (1+t)^{2k} C \left[ \left( 1 + \varepsilon^+ \frac{Pr}{Pr_t} \right) \frac{g'}{Pr} + \frac{U_e^2}{h_{0e}} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) f' f'' \right] \right\}' + f g' = 2\xi \left( f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (15)$$

In the above equations  $\xi^+$  is the dimensionless eddy-viscosity defined by  $\varepsilon^+ = \varepsilon/\nu$ ,  $L$  is a reference body length,  $\psi$  is the stream function defined such that  $r^k \rho U = \partial \psi / \partial y$ ,  $r^k \rho V = -\partial \psi / \partial x$ , primes denote differentiation with respect to  $\eta$ ,  $C = \rho U / \rho_e U_e$ ,  $g = h_0 / h_{0e}$ ,  $\beta = (2\xi / U_e)(dU_e/d\xi)$ , and  $t$  is the transverse-curvature factor defined by  $t = y \cos \phi / r_0$ , where  $\phi$  is the angle between  $y$  and  $r$  (see Fig. 1).

The boundary conditions for the transformed equations, in the plane defined by the coordinates  $\xi, \eta$ , are

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad f'(\xi, 0) = 0, \quad g(\xi, 0) = g_w \quad \text{or} \quad g'(\xi, 0) = g'_w, \quad (16a)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\xi, \eta) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\xi, \eta) = 1. \quad (16b)$$

The expression for the inner eddy-viscosity in the new coordinates is

$$\xi_i = L_m^2 \left[ \frac{\rho_e}{(2\xi)^{1/2}} \left( \frac{r_0}{L} \right)^k (1+t)^k U_e^2 \left( \frac{\rho}{\rho_e} \right) f'' \right] \gamma_{tr} \gamma, \quad (17)$$

where  $L_m$  is defined by Eq. (6). The coordinate  $y$  in terms of  $\xi$  and  $\eta$  is given by

$$y = - \left( \frac{r_0}{\cos \phi} \right) + \left[ \left( \frac{r_0}{\cos \phi} \right)^2 + \left( \frac{2L}{\cos \phi} \right) \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e U_e} \int_0^\eta \frac{\rho_e}{\rho} d\eta \right]^{1/2}, \quad (18a)$$

for axisymmetric flows and by

$$y = \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e U_e} \int_0^\eta \frac{\rho_e}{\rho} d\eta, \quad (18b)$$

for two-dimensional flows.

The parameters  $A$  and  $N$  keep their form expressed by Eqs. (7a) and (7b), but the parameters  $p^+$  and  $u_\tau$  are transformed to

$$p^+ = \frac{\mu_e^2 U_e^2}{u_\tau^3} \left( \frac{\mu}{\mu_e} \right) \left( \frac{\rho_e}{\rho} \right) \left( \frac{r_0}{L} \right)^{2k} \frac{dU_e}{d\xi}, \quad (19)$$

$$u_r = \left[ \left( \frac{\mu_w}{\mu_e} \right) \frac{\mu_e U_e^2}{(2\xi)^{1/2}} \left( \frac{r_0}{L} \right)^k f_w'' \right]^{1/2} \quad (20)$$

In a similar fashion, the modified expression for the dimensionless outer eddy-viscosity is

$$\varepsilon_0 = 0.0168 \left| \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e} \left( \frac{L}{r_0} \right)^k \int_0^{\eta_e} (1+t)^{-k} \left( 1 - \frac{U}{U_e} \right) \left( \frac{\rho_e}{\rho} \right) d\eta \right| \gamma_{tr} \gamma \quad (21)$$

The new expressions for the transverse-curvature factor,  $t$ , and the laminar-turbulent transition parameter,  $\gamma_{tr}$ , are

$$t = -1 + \left[ 1 + \frac{2L \cos \phi}{r_0^2} \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e U_e} \int_0^\eta \frac{\rho_e}{\rho} d\eta \right]^{1/2} \quad (22)$$

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[ -G_{tr} \left( \int_{\xi_{tr}}^\xi \left( \frac{L}{r_0} \right)^{2k} \frac{d\xi}{\rho_e \mu_e U_e} \right) \left( \int_{\xi_{tr}}^\xi U_e^{-1} \left( \frac{L}{r_0} \right)^{2k} \frac{d\xi}{\rho_e \mu_e U_e} \right) \right] \quad (23)$$

where

$$G_{tr} = \frac{8.33}{10^4} \frac{U_e^3}{\nu_e^2} R_\xi^{-1.34} \quad (24)$$

and

$$R_\xi = \frac{U_e}{\nu_e} \int_0^\xi \left( \frac{L}{r_0} \right)^{2k} \frac{d\xi}{\rho_e \mu_e U_e} \quad (25)$$

The equation for Klebanoff's intermittency factor,  $\gamma$ , is still given by (11), where  $y$  is now obtained from (18). The boundary-layer thickness in transformed coordinates is

$$\delta = - \left( \frac{r_0}{\cos \phi} \right) + \left[ \left( \frac{r_0}{\cos \phi} \right)^2 + \left( \frac{2L}{\cos \phi} \right) \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e U_e} \int_0^{\eta_e} \frac{\rho_e}{\rho} d\eta \right]^{1/2} \quad (26a)$$

for axisymmetric flows and

$$\delta = \frac{(2\xi)^{1/2}}{\rho_e U_e} \int_0^{\eta_e} \frac{\rho_e}{\rho} d\eta \quad (26b)$$

for two-dimensional flows. In both cases,  $\eta_e$  is defined as the value of  $\eta$  such that

$$\frac{U(\eta_e)}{U_e} = 0.995 . \quad (27)$$

In practice the calculation in the direction of  $\eta$  is not stopped by the condition established by equation (27). This is done so to permit the numerical grid to go beyond the height of the boundary layer, defined by (27). The least value for  $\gamma$ , i.e., the value for  $y = \delta$ , is 0.154. If calculations are stopped at the edge of the boundary layer, the turbulence model will be numerically unstable. But if we expand further, to points outside the boundary layer ( $y > \delta$ ), the value of  $\gamma$ , given by Eq. (11), will be less than 0.154 and the numerical stability is recovered. On physical grounds this means that calculations end in a region where the intermittency is sufficiently small.

## NUMERICAL METHOD

As it has been already pointed out above, the overall idea of the numerical procedure in this case is exactly the same as in Bobenrieth and Ortega [1]. Initially, the equations of momentum and energy, respectively, Eqs. (14) and (15), are expressed (separately) as systems of first order differential equations. In the sequence, those equations are discretized on a rectangular grid through the use of centered-difference derivatives and averages at the midpoints of grid rectangles and grid segments. After this the momentum equation is linearized by means of the Newton technique, whereas the discretized energy equation does not need to be linearized. The equations are then solved sequentially, what is accomplished by the use of the block elimination technique [3].

Considering that the algebraic developments are the same as in reference [1], there is no need to repeat them here. The only differences appear in some coefficients, which, in the notation of [1], can be expressed as

$$A_1 = (1+t)^{2k} C(1+\epsilon^+) , \quad (28a)$$

and

$$B_1 = (1+t)^{2k} \frac{C}{Pr} \left( 1 + \epsilon^+ \frac{Pr}{Pr_t} \right) \quad (28b)$$

The interested reader can find all the specific algebraic details in Bobenrieth [6].

## APPLICATIONS

### Laminar Compressible Flow Along a Flat Plate

Figures 2 and 3 show the solution of the laminar compressible boundary layer along a flat plate and the comparison with data from Ref.[4]. As these solutions are similar, only two stations along  $\xi$  are needed to get to the final results. The time of CPU was about 0.35 sec for all the cases. The computer used in this calculation, as well as in all other calculations in this paper, was a CDC CYBERG 170/730.

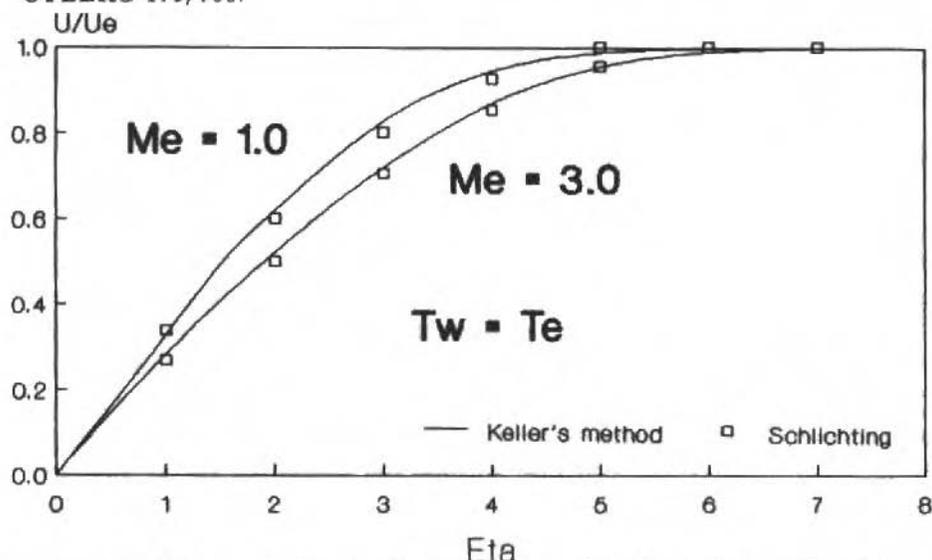


Figure 2. Velocity profiles in the laminar boundary layer along a flat plate.

### Howarth retarded flow

This case was a test to the computer code's ability to cope with longitudinal pressure gradients in the potential flow. The Howarth retarded flow in its laminar compressible form is characterized by [7]

$$M_e(x) = M_0 \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \quad (29)$$

where  $M_e$  stands for the Mach number of the potential stream and  $M_0$  is its initial value;  $x$  is the distance measured along the surface of the body and  $L$  is

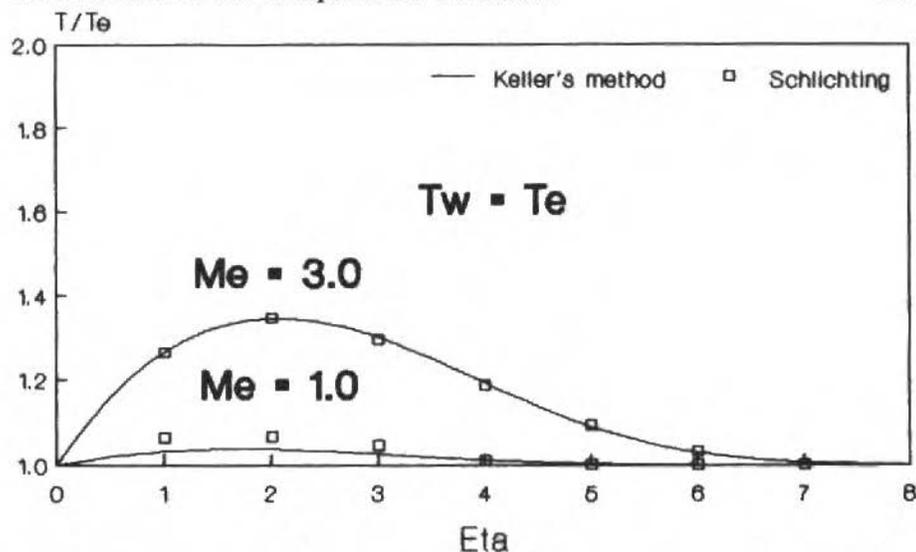


Figure 3. Temperature profiles in the laminar boundary layer along a flat plate.

its maximum value. Figure 4 shows the typical effects of the retarded flow on the velocity profile, and for  $x/L$  equal to 0.1 one can see, clearly, the inflexion point in the velocity profile. This last curve corresponds to the velocity profile immediately before the separation point, which is located somewhere between  $x/L = 0.100$  and  $x/L = 0.101$ .

The position of the boundary-layer separation for the flow following Eq.(29) was also calculated by Grushwitz and Walz by means of an integral method, and, as reported by White [7], they found it at  $x/L = 0.082$ . The difference of results might be related to the fact that White does not report the potential values of the stagnation pressure and stagnation enthalpy used by Grushwitz and Walz in their calculation. Besides, one must remember that finite difference methods are, in general, more accurate than integral ones. The results corresponding to Figure 4 were obtained considering  $\theta = -1$ , where  $\theta$  is defined as

$$\theta = \frac{T_a(x) - T_w(x)}{T_a(x) - T_c(x)}, \quad (30)$$

$T$  is the symbol for absolute temperature and  $T_a$  is the adiabatic wall temperature.

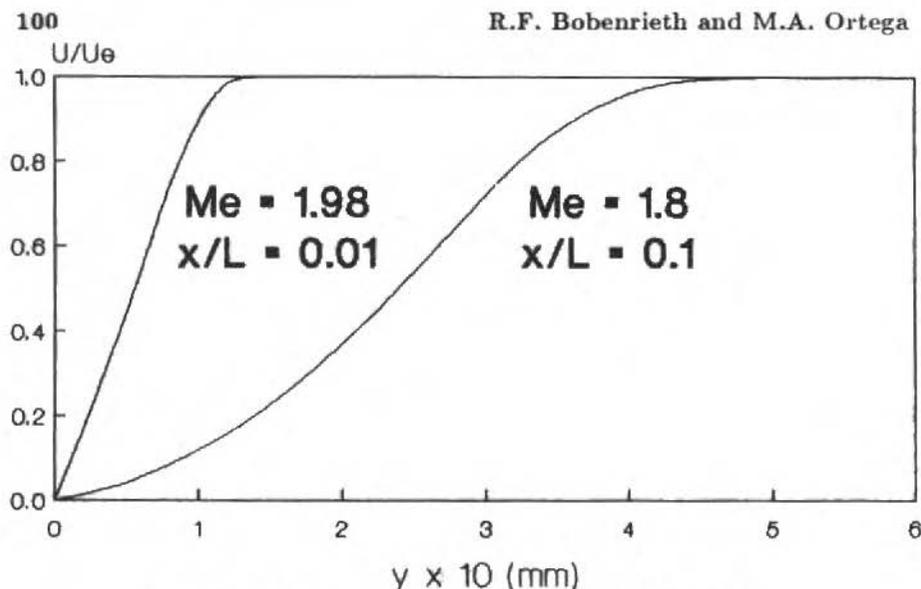


Figure 4. Velocity profiles for the Howarth retarded flow.

The calculation of the Howarth retarded flow up to the point of separation required 11 stations in  $\xi$  and 41 points in  $\eta$  for all the stations. The required CPU time was 1.816 sec.

### Turbulent Compressible Flow Along a Flat Plate

The initial *calibration* of the computer code for the turbulent boundary layer was achieved by comparison with the classical case of the flat plate. Two cases were chosen: one experimental and one analytical, and the plotting of results appears in Figures 5, 6, and 7.

The experimental heat-transfer data appearing in Figures 5 and 6, and reported as profiles of Mach number, are due to Michel [10]. The Mach number of the potential stream is  $M_e = 2.57$  and the ratio between the temperatures of the wall and of the potential flow is  $T_w/T_e = 1.95$ . Michel reports measurements for two stations located  $x = 182\text{mm}$  and  $x = 281\text{mm}$  from the leading edge. Agreement is quite good, in spite of some small discrepancies. It is important to point out that also in this case the values of stagnation pressure and stagnation temperature of Michel's experience is not known.

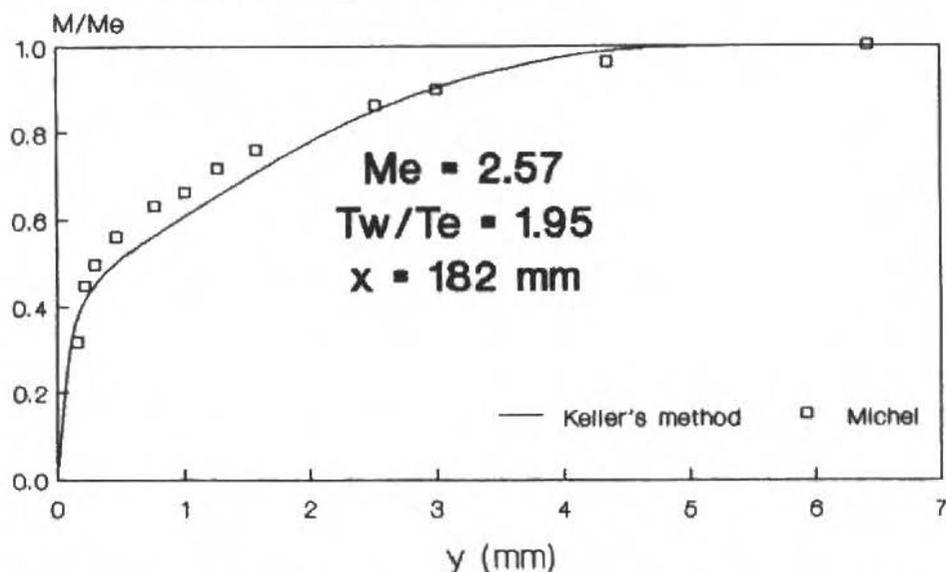


Figure 5. Mach number profile in a turbulent boundary layer along a flat plate.

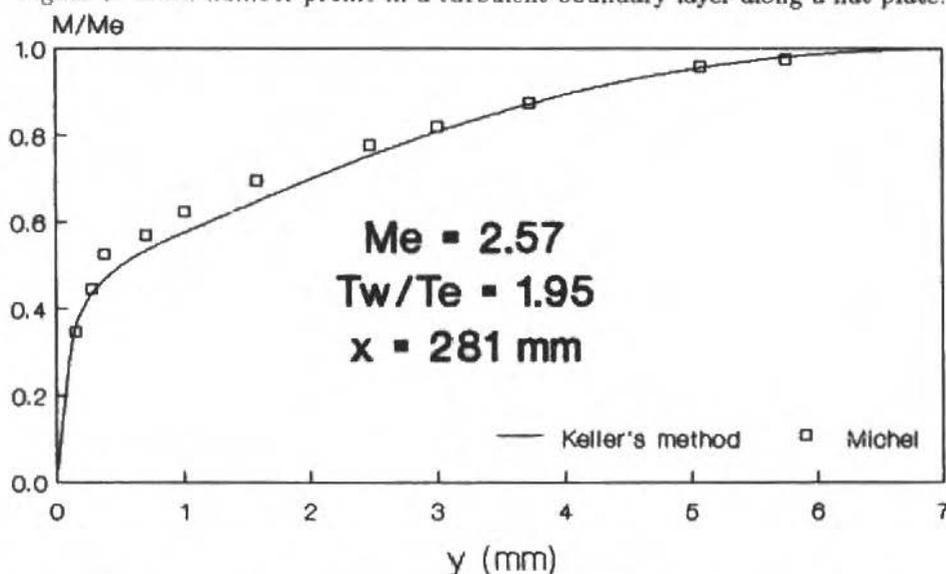


Figure 6. Mach number profile in a turbulent boundary layer along a flat plate.

The number of stations along the plate was 60, whereas the points in the grid in the direction of  $\eta$  were not constant as the calculation proceeded in the

downstream  $\xi$  direction, varying from 41 in the first station ( $x = 0$  mm) to 136 in the last station ( $x = 281$  mm). In the station  $x = 128$  mm, the number of points in  $\eta$  was 119. The increase in the number of points of the grid in the direction normal to the stream direction is typical of turbulent flows and is a consequence of the rapid growing of the turbulent boundary-layer thickness in comparison to the laminar case. The CPU time for this case was 37.6 sec, the boundary layer was considered turbulent from the very beginning by specifying the second station as turbulent and the value of the turbulent Prandtl number was considered to be 0.9.

The skin-friction data of Figure 7 also confirm the ability of the calculation method to represent high-Mach-number flows. This figure displays numerical results and the classical solution for the turbulent boundary layer along the flat plate due to van Driest [4].

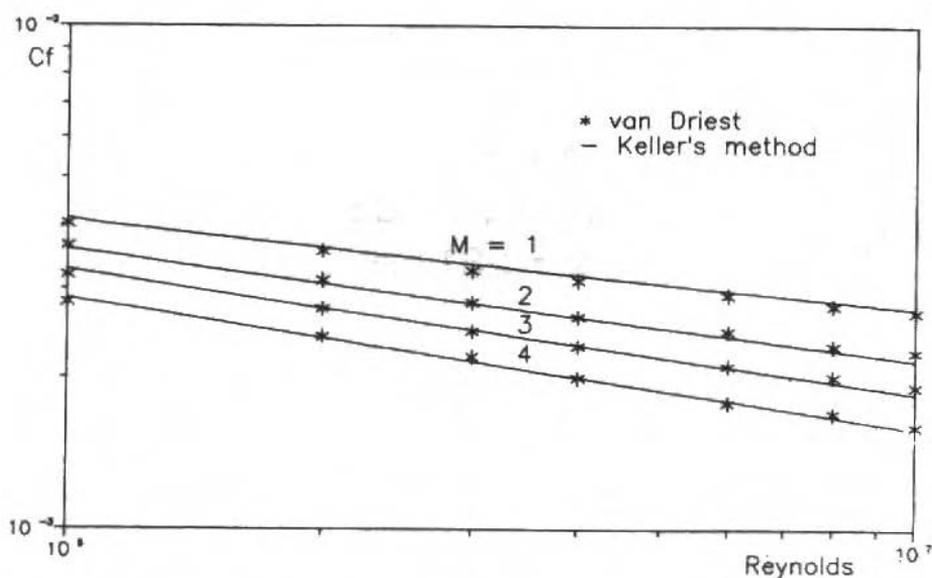


Figure 7. Coefficient of total turbulent skin friction for flow along an adiabatic flat plate.

### Boundary Layer Behind a Shock Wave Advancing Inside a Shock Tube

After the bursting of the diaphragm in a shock tube, a shock wave propagates into the low pressure chamber of the tube, the so called driven section (see, for example, Ref.[8]). The gas in the driven is initially at rest, but the wave drives the gas behind it and, consequently, a boundary layer is formed along the wall of the tube. Dillon and Nagamatsu [9] have performed a series of experiments with the objective of studying this boundary layer and have found that the nature of it, i.e., laminar, transitional or turbulent, is dependent upon the value of a Reynolds number per centimeter defined by

$$R/cm = \rho_2 U_2 / \mu_2 , \quad (31)$$

where the subscript 2 indicates properties of the gas (outside the boundary layer) after the passage of the shock wave.

Figure 8 shows values of the heat flux at the wall of the tube plotted as a function of time. The horizontal origin, i.e.,  $t = 0$ , corresponds to that instant of time for which the shock wave is exactly passing by the heat flux gage. The Reynolds number in this case is  $R/cm = 30000$ , what guarantees the turbulent nature of the boundary layer [9]. Plotted in Figure 8 one can see four types of data: (i) Experimental values; (ii) Numerical solution by the Keller method with  $Pr_t = 0.6$ , (iii) Numerical solution by the Keller method with  $Pr_t = 0.9$ ; (iv) von Kármán's incompressible correlation values.

The incompressible correlation due to von Kármán, which was used by Dillon and Nagamatsu for comparison purposes, deviates markedly from the measured data. The same is true with Keller's numerical solution for  $Pr_t = 0.9$  (the initial value of  $Pr_t$  for all numerical calculations in this paper). When the turbulence model was recalibrated by adopting  $Pr_t = 0.6$ , the numerical solution fit the experimental points very well. This reaffirms the great flexibility and accuracy that can be achieved with the numerical scheme of Keller, coupled with a properly used algebraic turbulence model. The recalibration of the turbulence model by changing the value of the turbulent Prandtl number (or another parameter of interest) is by no means a *tricky* technique. A turbulent calculation, in contrast to many laminar calculations, is always a mixed analytical and physical solution with much of empiricism present. An

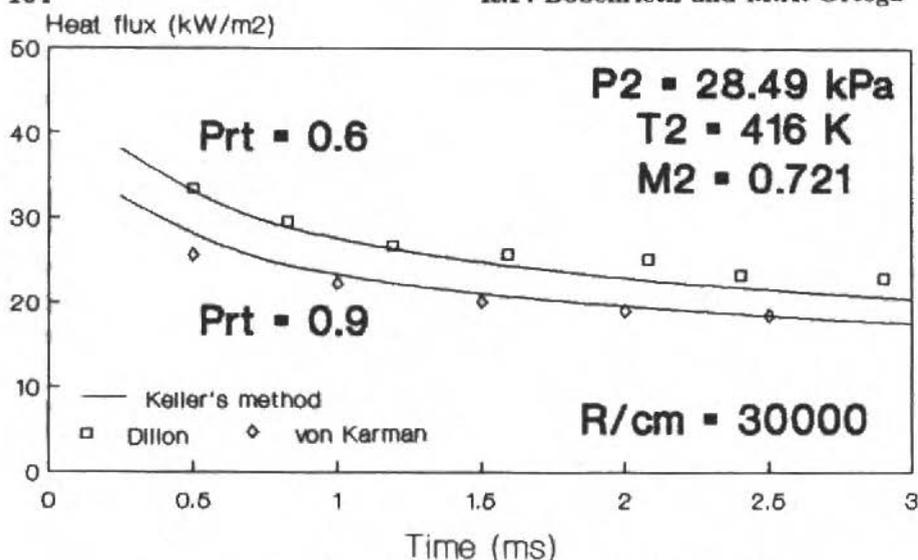


Figure 8. Turbulent heat transfer on a shock-tube wall.

extensive analysis of the transport coefficients in turbulent boundary layers can be found in Cebeci and Smith [5].

The complete solution for this turbulent case required 13 stations along  $\xi$ . In the  $\eta$  direction, the number of points varied from 81 in the first station to 234 in the last station for  $Pr_t = 0.6$  and 233 for  $Pr_t = 0.9$ . The CPU time was 116.43 sec and 112 sec, respectively.

## CONCLUSIONS

The principal conclusion is that a turbulent boundary-layer solver based on the Keller method has shown to be an efficient and robust procedure for calculating heat transfer and skin friction, even in more stringent conditions, as is the case of the shock tube, where the flow after the passage of the shock wave shows a higher degree of turbulent excitation than in normal situations. The higher degree of excitation was accommodated by recalibrating the turbulence model, especially by changing the value of the turbulent Prandtl number. Even in those limiting situations the method has kept its accuracy, stability and low computer costs. These results, together with the large spreading of the Keller

numerical procedure in the pertinent scientific literature [2], [11], [12], [13], strongly recommends it for future applications.

## REFERENCES

- [1] BOBENRIETH, R.F. and ORTEGA, M.A. Extension of Keller's Numerical Scheme to the compressible Boundary Layer, Proc. 9<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Florianópolis, SC, December 1987.
- [2] CEBECI, T. and BRADSHAW, P. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, Springer-Verlag, N. York, 1984.
- [3] KELLER, H.B. Accurate Difference Methods for Non-Linear Two-Point Boundary-Value Problems, Siam J. Numer. Anal., vol. 11, pp. 305-320, 1974.
- [4] SCHLICHTING, H. Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, New York, 7<sup>th</sup> edition, 1979.
- [5] CEBECI, T. and SMITH A.M.O. Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, Inc., New York, 1974.
- [6] BOBENRIETH, R.F.M. Extension of Keller's Numerical Method to the Compressible Boundary Layer and its Application to the Case of the Shock Tube. M.Sc. Thesis, ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), S.J. dos Campos, SP, 1988 (in portuguese).
- [7] WHITE, F.M. Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, N. York, 1974.
- [8] LIEPMANN, H.W. and ROSHKO, A. Elements of Gasdynamics, John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [9] DILLON, R.E. and NAGAMATSU, H.T. Heat Transfer and Transition Mechanism on a Shock-Tube Wall, AIAA Journal, vol. 22, n. 11, November 1984.
- [10] MICHEL, R. Étude de la Transition sur les Profils d'Aile; Établissement d'un Critère de Détermination du Point de Transition et Calcul de la Trainée des Profils Incompressible. ONERA Rp 1/578A, 1951.
- [11] ARPACI, V.S. and LARSEN, P.S. Convection Heat Transfer, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1984.

- [12] ANDERSON D.A., TANNEHILL J.C. and PLETCHER R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere, New York, 1984.
- [13] FLETCHER, C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vols. I & II, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

## EFEITOS NÃO-LINEARES NO ESCAAMENTO EM MEIO POROSO COM INTERFACE FLUIDA

### NONLINEAR EFFECTS ON POROUS MEDIA FLOW WITH PERMEABLE INTERFACE

Francisco Ricardo da Cunha\* - Membro ABCM

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de Brasília - UnB

70910 Brasília DF, Brasil

\*Endereço atual:

Department of Applied Mathematics & Theoretical Physics

Silver Street, Cambridge, CB3 9EW, U.K.

#### RESUMO

*Neste trabalho são desenvolvidos estudos aos níveis analíticos e numérico para verificação da influência de efeitos não lineares no escoamento em uma matriz porosa com interface fluida. O modelo foi construído sob o ponto de vista da Mecânica dos Meios Contínuos, sendo o fluido e o sólido, que compõem o meio poroso, tratados como constituintes contínuos de uma mistura binária. Na equação constitutiva da força de interação entre as fases, além dos termos de gradiente de concentração e arrasto viscoso, considera-se uma parcela não-linear que representa a contribuição ao arrasto, devido a presença de efeitos inerciais originados da interação hidrodinâmica fluido-partícula, na matriz porosa. Os resultados obtidos mostram que, na presença de efeitos não lineares, ocorre uma diminuição considerável na distribuição de velocidade do canal poroso. Uma expressão explícita para a velocidade na interface é determinada, analiticamente, por aplicações das condições de continuidade da velocidade e tensão cisalhante, através da interface meio poroso e camada fluida. Resultados analíticos e numéricos, da velocidade na interface, são comparados com o modelo semi-empírico proposto por Beavers e Joseph. Uma boa concordância é observada, confirmando a hipótese de Beavers e Joseph com relação a condição de contorno na interface permeável.*

**Palavras-chave:** Meio Poroso ■ Efeito Não-Lineares ■ Velocidade ■ Interface

#### ABSTRACT

*This work has aimed to develop analytical and numerical studies to verify the influence of nonlinear effects on porous media flow with a permeable interface. Average equations of continuity and motion describing the flow model are proposed upon the framework of the Continuum Mechanics. The constitutive equation of the interfacial force take into account a linear Darcy term in the velocity, concentration gradient force and a nonlinear term which represents the contribution to the total drag owing to inertial effects arised from hydrodynamic interactions between fluid-particles. The results have shown considerable reduction of velocity distribution in the channel flow when nonlinear effects have been presented. An analytical expression for the interface velocity and shear stress through the porous media and liquid layer. The analytical and numerical results of the interface velocity were compared with Beavers-Hoseph's semi-empirical model and a good agreement can be observed.*

**Keywords:** Porous Media ■ Nonlinear Effects ■ Interface Velocity

## INTRODUÇÃO

A hidrodinâmica de meios porosos vem sendo bastante estudada, tendo em vista a sua larga aplicação no campo científico e tecnológico, principalmente, no que se refere à mecânica dos solos, produção de petróleo, engenharia civil, filtração e purificação de água, metalurgia do pó e reatores químicos, com leito fixo [1], [2], [3] e [4]. O campo de aplicação da presente pesquisa está relacionado com fenômenos que ocorrem em reservatórios naturais subterrâneos de petróleo, onde o escoamento de óleo encontra diferentes camadas de xisto, calcário e rocha. Uma situação similar, é encontrada na gaseificação subterrânea do carvão.

A região de interface entre um meio poroso e uma camada fluida, pode ser considerada uma zona de camada limite onde as características dos dois escoamentos se ajustam, garantindo a continuidade da velocidade e tensão cisalhante, através da interface. Investigações experimentais sobre o problema foram realizadas por Beavers e Joseph [5], mostrando que o gradiente de velocidade na interface é proporcional a diferença entre a velocidade de deslizamento e a velocidade de filtro no meio poroso. Entretanto, na modelagem semi-empírica do fenômeno, Beavers e Joseph usaram, fundamentalmente, a lei linear de Darcy, que não considera efeitos de inércia e o termo difusivo, tipo Brinkman, significativo próximo à região de parede. Isto exprime que a proposta semi-empírica de Beavers e Joseph, restringe-se a um número de Reynolds, muito baixos, na qual a lei linear de Darcy é válida.

Recentes publicações, relacionadas com a Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor em escoamentos bifásicos (meio poroso e leito fluidizado), já consideram em seus modelos hidrodinâmicos uma parcela quadrática na velocidade como uma contribuição ao arrasto total devido à presença de efeitos inerciais. Lauriat e Prasad [6], através de simulação numérica, enfatizaram a importância de efeitos inerciais em seu trabalho sobre convecção natural em cavidades verticais porosas. Sebben e Prata [7] desenvolveram uma simulação numérica para o estudo da transferência de calor com convecção forçada em um canal, contendo um leito de esferas compactadas. Efeitos inerciais também foram considerados. Cunha e Fortes em [8] e [9], propõem um termo constitutivo na força de interação fluido-partícula do tipo  $\mathbf{f} = \alpha(\varepsilon)\mathbf{u}|\mathbf{u}|$  e verificaram a influência de efeitos não-lineares na estabilidade de leitos fluidizados homogêneos. O termo

proposto é totalmente compatível com os experimentos em fluidização sólido-líquido, realizado por Fortes, Joseph e Lundgren [10]. Nestes experimentos, os resultados indicaram a existência de efeitos não-lineares associados à formação de esteiras.

Muitos estudos também foram desenvolvidos na área experimental, mostrando que, para uma faixa de Reynolds acima da unidade, o escoamento em meio poroso é governado pela extensão de Forchheimer da lei de Darcy. Destes, pode-se citar os trabalhos de Ergun [11] e Beavers, Sparrow e Rodenz [12].

Nesta perspectiva, efeitos inerciais originados da interação hidrodinâmica fluido-partícula, devem ser considerados na equação constitutiva que representa a força de interação entre as fases fluida e dispersa. Isto significa que a força de arrasto deve ser subdividida em duas parcelas: a primeira relacionada com efeitos puramente viscosos e a segunda, com efeitos não lineares presentes nas regiões de estagnação, à jusante das partículas. A consideração é totalmente consistente com resultados clássicos observados no escoamento em torno de uma esfera, onde para Reynolds maior que a unidade, a Lei de Stokes não mais se aplica [13].

Dentro do contexto das referências citadas anteriormente, a presente pesquisa tem como objetivo desenvolver estudos analíticos e numéricos para verificar a influência de efeitos não lineares no escoamento, em um meio poroso saturado, composto de partículas esféricas, em contato com um escoamento de uma camada fluida. A modelagem do problema será feita com base nos princípios da Mecânica dos Meios Contínuos, onde se trata o meio poroso e o fluido como constituintes contínuos de uma mistura binária. A solução analítica do problema será obtida através do Método de Perturbação, comumente usado em problemas provenientes de fenômenos físicos [14], [15] e [16]. A simulação numérica baseia-se no método de diferenças finitas com formulação de volumes de controle, descrito em Patankar [17]. Uma expressão explícita para velocidade da interface é determinada, analiticamente, por aplicações das condições de continuidade da velocidade e tensão cisalhante, através da interface meio poroso e camada fluida. Analisa-se a influência de parâmetros característicos da matriz porosa e canal fluido na velocidade da interface, com objetivo de complementar os estudos de Beavers e Joseph [5].

## MODELO DINÂMICO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO

### Generalidades

Na presente seção, descreve-se as equações médias locais do movimento que governam a dinâmica do escoamento em meios porosos. A formulação desta classe de problemas é elaborada com base nos princípios da conservação e equações constitutivas que regem a Mecânica dos Meios Contínuos, descritos em Truesdell e Noll [18] e Drew e Lahey [19]. A equação da energia não será estudada, tendo em vista que o meio poroso é considerado, globalmente, isotérmico.

Em escoamento bifásico, tal como em um meio poroso, a Teoria Contínua da Mistura assume que todos os volumes elementares da mistura são ocupados por um mínimo de partículas de cada constituinte suficiente para se considerar a fase dispersa como um quasi-contínuo. Além disso, qualquer dimensão característica destes elementos macroscópicos, deve ser muito maior quando comparada à distância média entre as partículas que compõem a mistura binária. Dentro desta concepção, estamos interessados em propriedades médias locais na vizinhança de um ponto do escoamento e não em propriedades pontuais do domínio da matriz porosa.

As propriedades médias locais macroscópicas variam continuamente com o tamanho do volume elementar, a posição e o tempo. Entretanto, a variação com o tamanho do elemento contínuo torna-se imperceptível quando este é muito pequeno, mas ainda contém um número de partículas suficiente para tornar a descrição do contínuo estatisticamente significativa. Isto implica que as propriedades médias locais podem ser expressas por funções contínuas da posição e do tempo, na forma:  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$  e  $\langle p \rangle = \langle p \rangle(\mathbf{x}, t)$ . O tratamento estatístico das equações do movimento é bastante significativo quando se trata de problemas de engenharia. Isto porque na grande maioria de aplicações industriais, propriedades médias são suficientes não interessando detalhes ou flutuações dos escoamentos, filtrados pelo processo de média.

Na presente pesquisa considera-se o meio poroso uma mistura binária constituída de partículas macroscópicas, rígidas, homogêneas, isotrópicas em repouso, e de um fluido Newtoniano incompressível. Em qualquer posição  $\mathbf{x}$

na Região  $R$  ocupada pela mistura e em qualquer tempo  $t$ , cada constituinte possui uma densidade de material média local  $\langle \rho^n \rangle (\mathbf{x}, t)$  ( $n = f$ : fluido e  $n = s$ : sólido).

A porosidade média local,  $\varepsilon$ , em um ponto  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$  é definida por

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{V_f} \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dV_y \quad (1)$$

onde o sufixo  $V_f$  na integral indica que a mesma é calculada sobre todos os pontos  $\mathbf{y}$  ocupados pelo fluido no tempo  $t$ ,  $dV_y$  indica um elemento do volume na vizinhança de  $\mathbf{y}$  e  $\Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  uma função peso utilizada no processo de média do tipo  $\frac{1}{V_\infty}$ .

Da equação (1) a porosidade média global do meio poroso pode ser definida como,

$$\varepsilon = \frac{\text{volume da fase fluida}}{\text{volume da mistura}} = \frac{V_f}{V_\infty} \quad (2)$$

### Definição da Média

Seja  $f(\mathbf{x}, t)$  uma propriedade pontual exata da fase fluida, por exemplo, a pressão  $p(\mathbf{x}, t)$  ou a velocidade Euleriana  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Da mesma maneira, seja  $g(\mathbf{x}, t)$  denotando a propriedade pontual exata da fase dispersa. Então os valores médios locais  $\langle f \rangle (\mathbf{x}, t)$  e  $\langle g \rangle (\mathbf{x}, t)$  de  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $g(\mathbf{x}, t)$  são definidos por

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \langle f \rangle (\mathbf{x}, t) = \int_{V_f} f(\mathbf{y}, t) \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dV_y \quad (3)$$

$$[1 - \varepsilon(\mathbf{x}, t)] \langle g \rangle (\mathbf{x}, t) = \int_{V_s} g(\mathbf{y}, t) \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dV_y \quad (4)$$

O sufixo  $V_s$  na integral em (4) indica que a mesma deve ser calculada sobre todos os pontos  $\mathbf{x}$  ocupado pelo sólido no tempo  $t$ .

### Equações do Movimento

As equações do movimento para o escoamento no meio poroso são análogas àquelas aplicadas aos escoamentos monofásicos. Aplica-se as equações da

conservação a cada fase individual, levando-se em consideração a força de interação entre as fases, na interface.

Como a fase particulada está em repouso, para descrição da dinâmica do escoamento no meio poroso, são necessárias apenas as equações do movimento da fase fluida. A presença das partículas no meio poroso é considerada através da força interfacial de interação entre fluido-partículas.

Na ausência de reações químicas ou mudança de fase no meio poroso, e desprezando efeitos de tensão superficial na interface entre as fases, as equações governantes que representam o balanço de massa e momento linear no meio poroso, em termos das propriedades médias locais são, respectivamente,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \langle \rho \rangle \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle \right] = \nabla \cdot \langle \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{I} \rangle + \langle \rho \rangle \varepsilon \mathbf{b} \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\langle \mathbf{T} \rangle$  e  $\langle \mathbf{I} \rangle$  são, respectivamente, o tensor parcial de tensão médio local e a força de interação interfacial média local entre as fases,  $\langle \rho \rangle \varepsilon$  é a densidade parcial média local contínua da fase fluida e  $\langle \rho \rangle \varepsilon \mathbf{b}$  é a força de campo gravitacional, por unidade de volume, atuando como o único agente externo ao sistema. A parcela a esquerda da equação, representa a força de inércia média local por unidade de volume da fase fluida.

O desenvolvimento algébrico para determinação das equações médias locais que descrevem a dinâmica de escoamento binários é baseado nas equações (3) e (4) e estão descritos, formalmente, em Anderson e Jackosn [20] e Drew [21].

Na presente formulação, o tensor parcial de tensão é simétrico, tendo em vista a inexistência de torques induzidos ou localizados por ação de campo magnético. Isto garante o balanço de momento angular para cada constituinte e para mistura. Assim,

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{T}^t \rangle \quad (8)$$

o balanço de momento linear para a mistura é satisfeito, baseado no princípio da terceira Lei de Newton,

$$\langle \mathbf{I}^f \rangle = \langle \mathbf{I}^s \rangle \quad (9)$$

### Equações Constitutivas

Nesta seção são apresentadas as formas funcionais do tensor aprcial de tensão médio local  $\langle \mathbf{T} \rangle$ , e da força de interação interfacial média  $\langle \mathbf{I} \rangle$ , em termos de  $\varepsilon$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle$ ,  $\langle p \rangle$  e  $\langle \mathbf{u} \rangle \langle |\mathbf{u}| \rangle$ .

Para o tensor parcial de tensão médio, admite-se que a fase fluida comporta-se como um fluido Newtoniano incompressível, no qual as tensões relacionam-se linearmente com as taxas de deformação.

$$\langle \mathbf{T} \rangle = - \langle p \rangle \mathbf{1} + 2\eta^f \langle \mathbf{D} \rangle \quad (10)$$

onde  $\langle p \rangle$  representa o campo de pressão médio local da fase fluida (pressão lida por um sensor),  $\mathbf{1}$  o tensor identidade e  $\langle \mathbf{D} \rangle$  representa a taxa de deformação média local da fase fluida ou, ainda, a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade.  $\langle \mathbf{D} \rangle = \frac{1}{2}[\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla^t \langle \mathbf{u} \rangle]$  onde  $\langle \mathbf{u} \rangle$  é o campo de velocidade médio local.

A equação constitutiva que representa a força de interação interfacial média local entre as fases é proposta como,

$$\langle \mathbf{I} \rangle = - \langle p \rangle \nabla(1 - \varepsilon) - \alpha(\varepsilon, \langle |\mathbf{u}| \rangle) \mathbf{u} \quad (11)$$

onde

$$\alpha(\varepsilon, \langle |\mathbf{u}| \rangle) \langle \mathbf{u} \rangle = \alpha_1(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle + \alpha_2(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle \langle |\mathbf{u}| \rangle \quad (12)$$

Assim,

$$\langle \mathbf{I} \rangle = - \langle p \rangle \nabla(1 - \varepsilon) - \alpha_1(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle + \alpha_2(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle \langle |\mathbf{u}| \rangle \quad (13)$$

O primeiro termo da equação anterior, representa uma força por unidade de volume devido a presença de gradiente de concentração no meio poroso. O termo  $\alpha_1(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle$  representa uma força de arrasto linear dominada por efeitos puramente viscosos, enquanto  $\alpha_2(\varepsilon) \langle \mathbf{u} \rangle \langle |\mathbf{u}| \rangle$  é a contribuição ao arrasto relacionada com efeitos inerciais originados da interação hidrodinâmica fluido-partículas.

### Constantes Materiais

As constantes materiais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , podem ser determinadas através da extensão de Forchheimer da lei da Darcy [12]. Estas representam, respectivamente, os coeficientes de arrasto viscoso e inercial.

$$\alpha_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\mu}{K} \quad \text{e} \quad \alpha_3(\varepsilon) = b\rho\varepsilon \quad (14)$$

onde  $K$  é a permeabilidade específica do meio poroso,  $\mu$  a viscosidade do fluido constituinte do meio poroso e  $b$  o coeficiente inercial da extensão de Forchheimer da lei de Darcy.

Fórmulas empíricas para determinação de  $K$  e  $b$  podem ser obtidas da equação de Ergun [11] válida para escoamento em leito fixo.

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{1,75(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2 d_p} \quad (15)$$

O cálculo da porosidade  $\varepsilon$ , com boa aproximação, é proposto por Beavers et al. [12],

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left[ 1 + \frac{2d_p}{D_e} \left( \frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \right] \quad (16)$$

onde  $\varepsilon_\infty = 0,368$ ,  $\varepsilon_\omega = 0,476$ ,  $d_p$  é o diâmetro da partícula e  $D_e$  o diâmetro hidráulico da seção transversal do escoamento.

Com relação a constante material  $\eta^f$ , esta pode ser assumida como igual a viscosidade cisalhante do fluido Newtoniano. Isto se justifica por dois motivos relacionados à Dinâmica de Suspensões:

i) Efeitos não hidrodinâmicos tais como: forças Brownianas ou térmicas, forças elétricas (efeito eletroviscoso) e forças atrativas de Van der Waals não estão presentes em escoamento com as características dinâmicas, e escala de partículas do estudado aqui (ver Jeffrey e Acrivos [22]).

ii) A modificação da viscosidade, por efeitos hidrodinâmicos, em um meio poroso, deve ser considerada apenas no cálculo do arrasto viscoso, através da permeabilidade (ver Hinch [23]).

Substituindo as equações constitutivas (10) e (13) na equação (7), obtém-se o sistema de equações médias locais que governam a dinâmica do escoamento, em meios porosos.

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (17)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle \right] = -\nabla \langle p \rangle - \frac{\mu}{K} \langle \mathbf{u} \rangle - b\rho \langle \mathbf{u} \rangle \langle |\mathbf{u}| \rangle + \frac{\mu}{\epsilon} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle \quad (18)$$

## PROBLEMA ANALISADO

Seja um arranjo como o da figura 1, onde se tem uma matriz porosa, saturada, constituída de partículas esféricas, limitada superiormente por uma superfície permeável, devido ao escoamento de uma camada líquida e inferiormente por uma superfície impermeável. O problema consiste na determinação da distribuição de velocidade deste escoamento, com objetivo de se avaliar a influência de efeitos inerciais na velocidade da interface, e verificar a validade da hipótese semi-empírica proposta por Beavers-Joseph [5] em condições de regime quasi-linear compatíveis com seus experimentos.

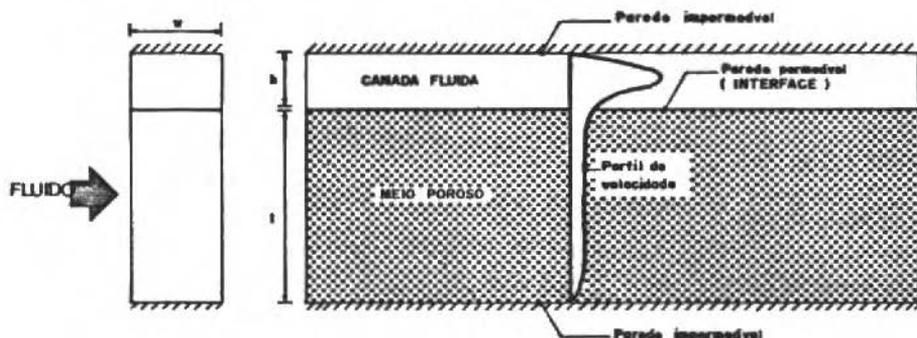


Figura 1. Arranjo estudado.

### Hipóteses Simplificativas

- As propriedades termofísicas do meio poroso e do canal líquido, são consideradas constantes;
- O escoamento se dá em regime permanente e as forças de campo são desprezadas no escoamento;
- Uma análise de ordem de grandeza na equação (18), bem como dados de simulações computacionais [6], mostram que o termo convectivo  $(\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle$  é de pequena ordem de magnitude, quando comparado aos outros termos da equação. Isto significa que o comprimento de desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica ocorre em uma região muito próxima à entrada do meio poroso. Desta maneira, o escoamento no meio poroso será assumido totalmente desenvolvido. Com isto, o campo de velocidade é função apenas da coordenada normal às fronteiras sólidas, podendo ser escrito como  $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle u \rangle (y) \hat{e}_1$ ;
- O escoamento na região da camada líquida, que faz interface com o meio poroso, será assumido, também, totalmente desenvolvido, tendo em vista a fina espessura do canal.

Baseando-se nas hipóteses simplificativas descritas anteriormente, as equações governantes do escoamento na camada líquida e no meio poroso são,

(i) Camada Líquida.

Da equação de Navier-Stokes,

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v}{dy_1^2} = 0 \quad (20)$$

com  $0 \leq y_1 \leq h$ .

(ii) Meio Poroso.

Da equação (18),

$$-\frac{d \langle p \rangle}{dx} - \frac{\mu}{K} \langle u \rangle - b\rho \langle u^2 \rangle + \frac{\mu}{\epsilon} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy_2^2} = 0 \quad (21)$$

com  $0 \leq y_2 \leq \ell$ .

As equações anteriores estão sujeitas às seguintes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = u_i \\ v(h) = 0 \\ \langle u \rangle (0) = u_i \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\langle u \rangle}{dy_2} \right|_{y_2=0} = - \left. \frac{dv}{dy_1} \right|_{y_1=0} \\ \langle u \rangle (\ell) = 0 \quad \text{ou considera-se meio poroso semi-infinito} \\ \quad \quad \quad \text{no caso de solução analítica.} \end{array} \right. \quad (22)$$

Na equação acima,  $y_1$  e  $y_2$  são as coordenadas normais à direção do escoamento na camada líquida e meio poroso, respectivamente,  $u_i$  é a velocidade na interface.

### Adimensionalização das Equações Governantes

Por conveniência define-se novas variáveis e parâmetros, passando-se a trabalhar com grandezas adimensionais.

$$U = \frac{\langle u \rangle}{\frac{1}{2\mu} h^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)}; \quad V = \frac{v}{\frac{1}{2\mu} h^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)}; \quad Re_2 = \frac{K^{0,5} \rho h^2}{2\mu^2} \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

$$Re_1 = \frac{h}{\sqrt{K}} Re_2; \quad Y_1 = \frac{y_1}{h}; \quad \lambda = bK^{0,5} Re_2; \quad \delta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{0,5} \frac{1}{h} \quad (26)$$

onde  $Re_1$  e  $Re_2$  referem-se, respectivamente, aos números de Reynolds do escoamento do canal líquido e meio poroso. O parâmetro  $\delta$ , como pode ser observado, relaciona características tanto do meio poroso como da camada líquida. Este parâmetro, terá grande importância na solução analítica do problema pelo Método de Perturbação.

As equações adimensionalizadas, bem como as condições de contorno, são descritas a seguir,

(i) Camada Líquida.

$$\frac{d^2 V}{dY_1^2} = -2 \quad \text{com} \quad 0 \leq Y_1 \leq 1 \quad (27)$$

(ii) Meio Poroso.

$$2\varepsilon\delta^2 - U - \lambda U^2 + \delta^2 h^2 \frac{d^2 U}{dy_2^2} = 0 \quad (28)$$

ou ainda definindo  $Y_2 = \frac{y_2}{(\frac{K}{\varepsilon})^{0,5}}$  obtém-se,

$$2\varepsilon\delta^2 - U - \lambda U^2 + \frac{d^2 U}{dY_2^2} = 0 \quad (29)$$

com  $0 \leq Y_2 \leq \varepsilon$  onde  $\xi = \frac{\ell}{(\frac{K}{\varepsilon})^{0,5}}$ .

#### Condições de Contorno Adimensionalizadas

$$\begin{cases} V(0) = U_i & V(1) = 0; & U(0) = U_i; & \frac{dU}{dY_2} \Big|_{Y_2=0} = -\delta \frac{dV}{dY_1} \Big|_{Y_1=0}; \\ U(\xi) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

### MÉTODO ANÁLITICO

A solução analítica da equação diferencial ordinária não homogênea (28) é obtida com base no Método de Perturbação comumente utilizada em problemas provenientes de fenômenos físicos [4], [15] e [16].

Em termos práticos, o parâmetro  $\delta$  é consideravelmente menor que a unidade. Desta maneira, para velocidades no meio poroso relativamente baixos, a solução analítica do problema pode ser escrita como,

$$U(Y_2) \sim 0 + U'(Y_2) \quad (31)$$

onde  $U'(Y_2)$  é a perturbação da solução relacionada com o parâmetro  $\delta$ , que considera características tanto do meio poroso como da camada fluida, funcionando como um fator de escala entre os escoamentos. Propõe-se a seguinte expansão assintótica,

$$U(Y_2) \sim \delta U_1(Y_2) + \delta^2 U_2(Y_2) + \delta^3 U_3(Y_2) + \dots \quad (32)$$

Substituindo a equação anterior na equação (29), obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo,

$$\frac{d^2 U_1}{dY_2^2} - U_1 = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d^2 U_2}{dY_2^2} - U_2 - \lambda U_1^2 + 2\varepsilon = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d^2 U_3}{dY_2^2} - U_3 - 2U_1 U_2 = 0 \quad (35)$$

A integração da equação que governa o escoamento na camada líquida é imediata, e sua solução pode ser escrita como,

$$V(Y_1) = U_i + Y_1(1 - U_i) - Y_1^2 \quad (36)$$

Tendo em vista a equação anterior, o sistema formado pelas equações (33), (34) e (35) deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1(0) = U_{i1} \\ U_2(0) = U_{i2} \\ U_3(0) = U_{i3} \\ \frac{dU}{dY_2} \Big|_{Y_2=0} = -\delta(1 - U_i) = \delta \frac{DU_1}{dY_2} \Big|_{Y_2=0} + \delta^2 \frac{dU_2}{dY_2} \Big|_{Y_2=0} + \delta^3 \frac{dU_3}{dY_2} \Big|_{Y_2=0} \\ \text{e } U_i = U_{i1} \delta + U_{i2} \delta^2 + U_{i3} \delta^3 \end{array} \right. \quad (37)$$

Resolvendo o sistema de equações anterior pelo Método dos Coeficientes a determinar, desprezando termos de pequena ordem de magnitude relacionados às potências de  $\delta$  e considerando o meio poroso semi-infinito determina-se que,

$$U_1 = U_{i1} \exp(-Y_2) \quad (38)$$

$$U_2 = 2\varepsilon + \frac{\lambda}{3} U_{i1}^2 \exp(-2Y_2) + C_1 \exp(-Y_2) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} U_3 = & -2\lambda\varepsilon Y_2 U_{i1} \exp(-Y_2) + \frac{2}{3} \lambda U_{i1} C_1 \exp(-2Y_2) + \\ & \frac{1}{12} \lambda^2 U_{i1}^3 \exp(-3Y_2) + C_2 \exp(-Y_2) \end{aligned} \quad (40)$$

onde:

$$C_1 = -\left(\frac{2}{3} \lambda + 1\right)$$

$$C_2 = \frac{23}{36} \lambda^2 + \frac{5}{3} \lambda - 2\lambda\varepsilon - 2\varepsilon + 1$$

$$U_{i1} = 1 ; U_{i2} = (2\varepsilon - 1) - \frac{\lambda}{3} \quad \text{e} \quad U_{i3} = \frac{5}{18} \lambda^2 - 2\lambda\varepsilon - 2\varepsilon + \lambda + 1 \quad (41)$$

Neste caso a solução analítica do problema está determinada, tendo em vista que  $U = \delta U_1 + \delta^2 U_2 + \delta^3 U_3$ . A velocidade da interface pode ser obtida explicitamente por,

$$U_i = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{0,5} \frac{1}{h} \left[ 1 + \left(2\varepsilon - 1 - \frac{\lambda}{3}\right) \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{0,5} \frac{1}{h} + \left(\frac{5}{18} \lambda^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda + 1\right) \left(\frac{K}{\varepsilon}\right) \frac{1}{h^2} \right] \quad (42)$$

Uma discussão sobre limitações da solução analítica é apresentada, posteriormente, na seção dos resultados obtidos.

## MÉTODO NUMÉRICO

A idéia básica para a solução numérica do problema é obtida através do Método de Volumes Finitos, descrito em Pantakar [17]. A essência da formulação de volumes finitos é dividir o domínio de solução em um determinado número de pequenos volumes de controle adjacentes, tal que haja um volume de controle circundando cada ponto da malha. A equação diferencial é integrada com relação a cada volume de controle, assumindo perfis que expressem a variação de  $U$  entre os pontos nodais. O resultado deste processo é a obtenção da equação de discretização do problema. Esta equação é uma relação algébrica que correlaciona os valores da propriedade  $U$ , para os pontos nodais da malha. O objetivo da discretização é transformar a equação diferencial governante do problema num sistema de equações algébricas, para cada ponto do domínio discreto. Tendo obtido as equações de discretização, utiliza-se o algoritmo TDMA [17], para solução do sistema algébrico.

A escolha do número de volumes de controle, utilizados na geração da malha, foi baseada em diversos testes computacionais, tendo como referencial a solução analítica. A solução numérica demonstrou total estabilidade. Na obtenção dos resultados numéricos, foram utilizados 59 volumes de controle, o que corresponde a 61 pontos nodais.

### Discretização da Equação Governante

A equação diferencial ordinária (29) pode ser escrita na forma,

$$\frac{d^2U}{dY^2} + S(U) = 0 \quad (43)$$

onde  $S(U) = -\lambda U^2 - U + 2\varepsilon\delta^2$  é considerado um termo fonte.

Na presente análise,  $S$  é uma função não linear da velocidade  $U$ . Neste caso, pode-se contornar a não-linearidade do termo de fonte através de um processo iterativo. Recomenda-se, para a linearização de  $S$ , a equação,

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dU}\right)^* (U_P - U_P^*) = S_P U_P + S_C \quad (44)$$

Durante cada ciclo de interação,  $S_C$  e  $S_P$  devem ser recalculadas para o novo valor de  $U_P$ . O símbolo  $U_P^*$  é usado para denotar o valor estimado de  $U_P$  no processo iterativo.

Integrando a equação (43) no volume de controle finito mostrado na figura 2, tem-se

$$\int_n^s \frac{d}{dY} \left(\frac{dU}{dY}\right) dY + \int_n^s S dY = 0 \quad (45)$$

Assumindo um perfil linear para a variação da velocidade entre pontos nodais internos do domínio solução e resolvendo (45) obtém-se,

$$a_P U_P = a_N U_N + a_S U_S + B \quad (46)$$

onde  $a_P$ ,  $a_N$ ,  $a_S$  e  $B$  são os coeficientes de discretização dados por,

$$a_N = a_S = \frac{1}{\Delta Y} ; B = S_C \Delta Y ; a_P = \frac{2}{\Delta Y} - S_P \Delta Y$$

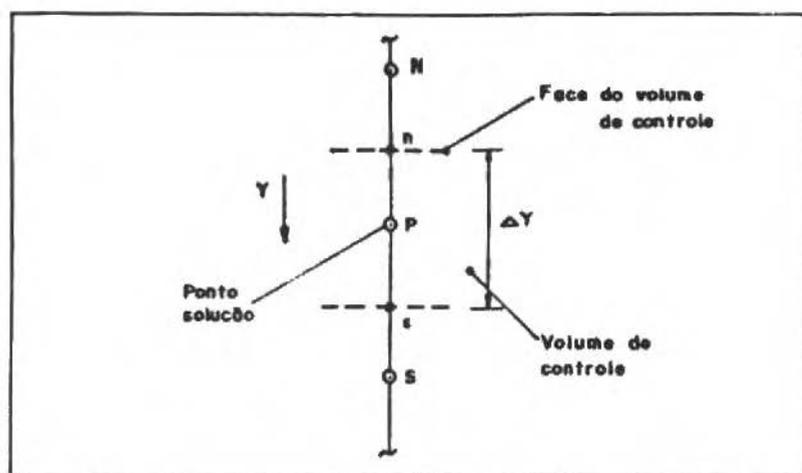


Figura 2. Volume finito da malha.

$$S_P = -(2\alpha U_P^* + \epsilon^2) \quad e \quad S_C = \alpha \Delta Y^2 + 2\epsilon\delta^2 \quad (47)$$

Os coeficientes de discretização relacionados às condições de contorno do problema são:

Na parede permeável (interface) em  $Y = 0$

$$a_P = 2 + \delta \Delta Y \quad ; \quad B = \delta \Delta Y \quad ; \quad a_S = 2 \quad e \quad a_N = 0 \quad (48)$$

Na parede impermeável em  $Y = \xi$

$$a_P = 1 \quad ; \quad a_N = a_S = B = 0 \quad (49)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresenta-se os resultados analíticos e numéricos obtidos no presente estudo. A solução analítica foi determinada através do Método de Perturbação largamente utilizado em problemas relacionados a fenômenos físicos, enquanto a simulação numérica foi fundamentada no Método de Diferenças Finitas com formulação de volume de controle descrito em Patankar

[17]. Os resultados incorporam tanto o regime linear, onde a Lei de Darcy se aplica ( $O(Re_2) < 1$ ), como regime não linear, onde deve-se considerar efeitos inerciais do escoamento no meio poroso ( $O(Re_2) > 1$ ) traduzidos pela extensão de Forchheimer da Lei de Darcy.

A seguir mostra-se na Tabela 1, alguns valores numéricos de parâmetros característicos do escoamento no meio poroso e camada fluida.

Tabela 1. Dados numéricos de parâmetros característicos do escoamento estudado

Diâmetro das partículas	(dp): 0,004m
Altura do canal livre	(h): $0,3 \times 10^{-3}$ a $2 \times 10^{-3}$ m
Densidade do fluido	( $\rho$ ): $1000 \text{ Kg/m}^3$
Viscosidade cinemática	( $\nu$ ): $0,9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Altura do canal poroso	( $\ell$ ): 0,0381m
Largura do canal poroso e canal livre	( $\omega$ ): 0,089m
Porosidade	( $\varepsilon$ ): 0,384
Permeabilidade	(K): $1,6 \times 10^{-8} \text{ m}^2$
Constante de Forchheimer	(b): $1828 \text{ m}^{-1}$

A Figura 3 apresenta uma comparação entre resultados analíticos e numéricos para um regime de escoamento no meio poroso, onde  $Re_2 = 0,2$ . Conforme se observa, efeitos viscosos são transmitidos para o interior da matriz porosa através de uma região de camada limite existente próxima a parede permeável. No interior desta camada limite a velocidade muda rapidamente do valor da interface para um valor constante ao longo do núcleo de matriz porosa. Outro fato a ser notado na Figura 3, é que a solução numérica mostra a formação de uma outra camada limite próxima a parede sólida impermeável do contorno inferior. Isto caracteriza a configuração de uma região de interface entre um meio poroso e uma parede sólida impermeável. O mesmo não é observado no resultado analítico, tendo em vista que a condição de contorno utilizada considerou o meio poroso semi-infinito. Das análises referentes à Figura 3, nota-se que a região de interface entre o meio poroso e o canal fluido, pode ser considerada uma zona da camada limite onde as características

dos dois escoamentos se ajustam, garantindo a continuidade da velocidade e tensão cisalhante através da interface permeável. Cabe ressaltar, a excelente concordância entre resultados analíticos e numéricos.

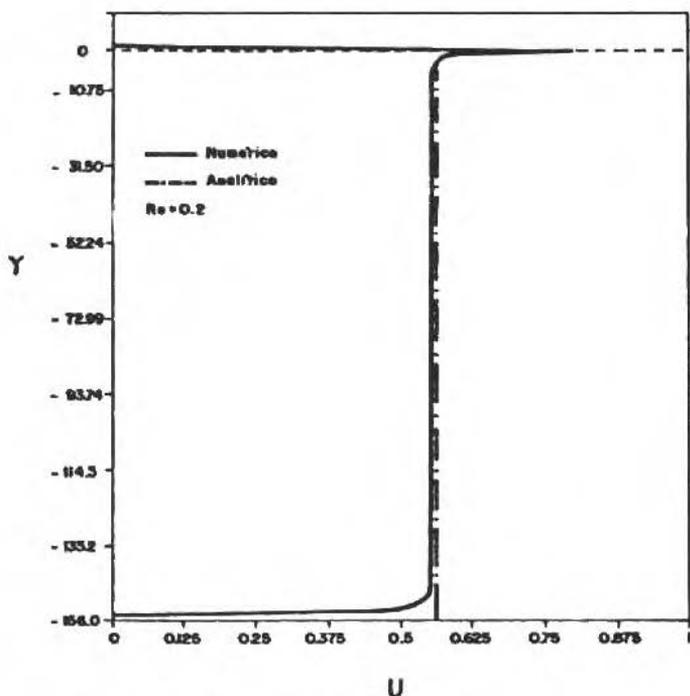


Figura 3. Distribuição de velocidade analítica e numérica na extensão da matriz porosa para  $Re_2 = 0,2$ . Região de interface entre o meio poroso e canal fluido, e meio poroso e parede impermeável.

Focaliza-se agora a atenção, apenas, em uma região nas vizinhanças da interface permeável ( $0 < Y_2 < 5$ ), tal como indica a figura 4. Resultados analíticos e numéricos são obtidos para dois valores de números de Reynolds,  $Re_2 = 0,2$  e  $Re_2 = 1,4$ . Observa-se uma diminuição na distribuição de velocidade do escoamento, relacionada com Reynolds fora da faixa linear ( $Re_2 = 1,4$ ), quando comparada com a distribuição de velocidade correspondente a Reynolds no regime linear ( $Re_2 = 0,2$ ). Esta mudança na distribuição de velocidade para  $O(Re_2) > 1$ , indica que a presença de efeitos inerciais no escoamento do meio

poroso torna-se evidente neste regime de número de Reynolds. Verifica-se, também, uma melhor concordância entre os resultados das soluções analíticas e numéricas para menores valores de Reynolds. Tal fato está relacionado com a própria natureza da solução analítica, pois a mesma é baseada em uma solução, onde o termo de arrasto quadrático é considerado uma perturbação da equação governante. Como será visto posteriormente, isto impõe uma limitação à solução analítica tornando-a mais conservadora que a solução numérica.

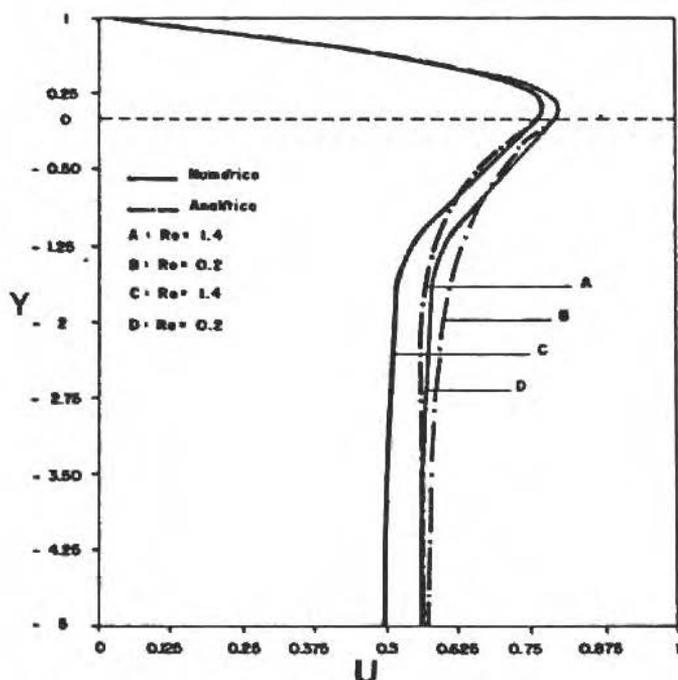


Figura 4. Resultados da distribuição de velocidade analítica e numérica em uma região próxima a interface para  $Re_2 = 0,2$  e  $Re_2 = 1,4$ .

A influência de efeitos inerciais no escoamento é melhor observada através da Figura 5. Nota-se uma considerável discrepância entre as distribuições de velocidades correspondentes a  $Re_2 = 0,2$  e  $Re_2 = 10$ . Isto se explica tendo em vista a relação do termo  $\lambda U^2$ , da equação governante, com o número de Reynolds. Com o aumento do número de Reynolds, o termo quadrático cresce

em ordem e magnitude e assim, maior será a contribuição ao arrasto devido a presença de efeitos inerciais no escoamento. Neste caso, existe um aumento da sensibilidade da solução à parcela não-linear da equação governante.

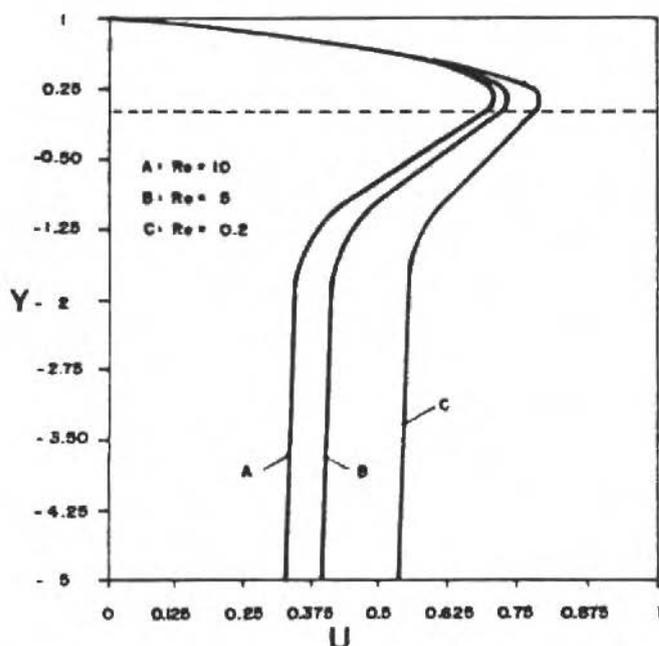


Figura 5. Resultados numéricos da distribuição de velocidade para  $Re_2 = 0,2$ ,  $Re_2 = 5,0$  e  $Re_2 = 10$  em uma região próxima a interface permeável.

Considera-se agora a Figura 6, a fim de se avaliar a influência de efeitos não-lineares na extensão total da matriz porosa. A figura mostra a comparação entre duas simulações numéricas com  $Re_2 = 0,2$  e  $Re_2 = 1,0$ . Os resultados indicam que a maior diferença entre as distribuições de velocidades ocorre no núcleo do meio poroso, isto é, fora das zonas de camadas limites existentes nas regiões de parede permeável e impermeável do escoamento.

A Figura 7 mostra a variação da velocidade na interface com o número de Reynolds. Observa-se que para Reynolds, aproximadamente, igual a 1,5 a

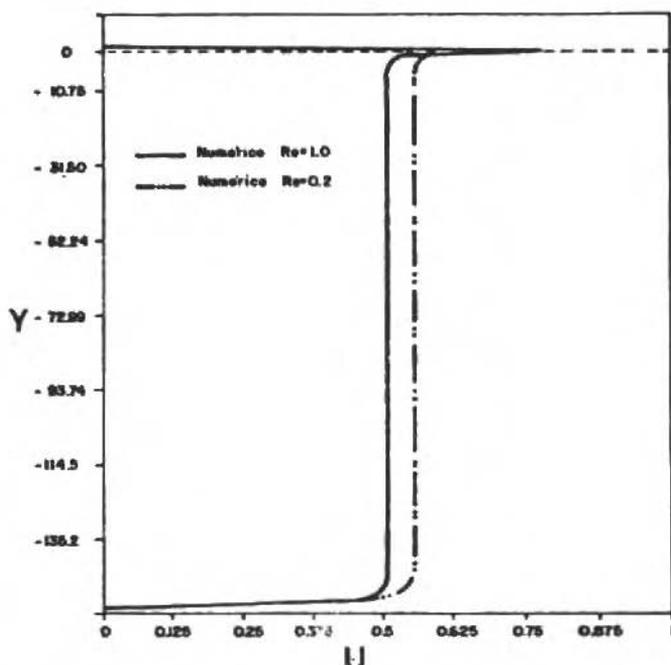


Figura 6. Distribuição de velocidade numérica em toda a extensão da matriz porosa para  $Re_2 = 0,2$  e  $Re_2 = 1,0$ . Região de interface entre meio poroso e canal livre e meio poroso e parede impermeável.

solução analítica diverge da solução numérica apresentando um comportamento inconsistente do ponto de vista física. Isto pode ser justificado pela própria metodologia utilizada na solução analítica, onde considera-se o termo não-linear,  $\lambda U^2$ , uma perturbação da equação governante do problema. Desta maneira, a solução analítica será consistente fisicamente até um certo valor de Reynolds que, ainda garanta uma magnitude de  $\lambda U^2$  ( $\lambda = K^{0,5} b Re$ ) compatível com a hipóteses na qual o Método Assintótico é fundamentado.

Mesmo com esta restrição da sua faixa de aplicação, a solução explícita para velocidade na interface permeável (equação (42)) ainda permite análises de regime de escoamentos não-lineares onde  $O(Re_2) > 1$ . A equação mostra que além da dependência de propriedades do material poroso ( $K$  e  $\varepsilon$ ) e geometria do canal livre ( $h$ ), a velocidade na interface depende explicitamente do parâmetro

$\lambda$ , diretamente relacionado com os efeitos inerciais do escoamento. Tal característica da solução analítica a torna menos conservativa que a proposta semi-empírica de Beavers e Joseph [5], baseada fundamentalmente na lei de Darcy restrita ao regime linear.

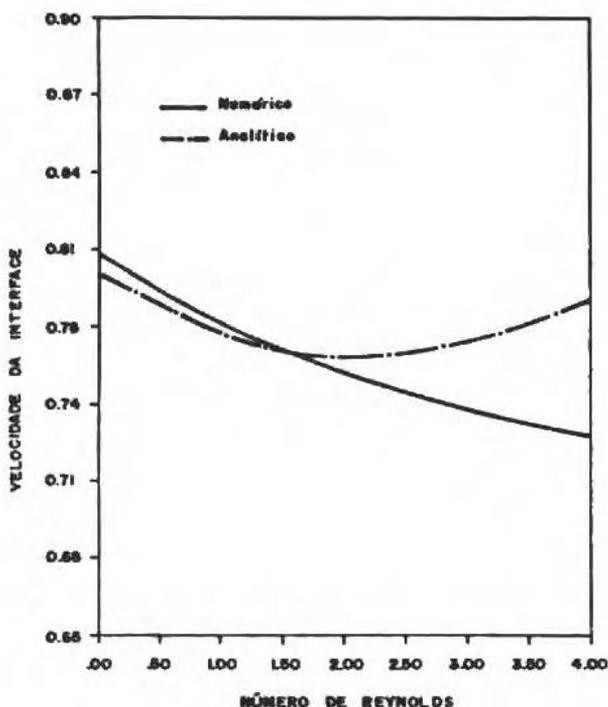


Figura 7. Variação da velocidade da interface com o número de Reynolds do escoamento no meio poroso. Resultados analíticos e numéricos.

Como foi citado anteriormente, Beavers e Joseph [5] realizaram experimentos com a finalidade de estudar a natureza do escoamento tangencial na região de contorno da interface permeável. Os mesmos postularam que a velocidade de deslizamento na interface é proporcional à taxa de deformação do fluido. A hipótese é expressa matematicamente na forma,

$$\left. \frac{du}{dy_1} \right|_{y_1=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (u_i - u_d) \quad (5)$$

onde  $\alpha$  é uma constante material de proporcionalidade adimensional que caracteriza a estrutura da permeabilidade do material poroso,  $u_i$  é a velocidade na interface e  $u_d$  é definida da lei linear da Darcy como,

$$u_d = \frac{K}{\mu} \left( - \frac{dp}{dx} \right) \quad (51)$$

Baseados nesta hipótese empírica de condição de contorno, Beavers e Joseph chegaram a seguinte expressão para velocidade na interface,

$$U_i = \frac{\sigma + 2\alpha}{\sigma(1 + \alpha\sigma)} \quad (52)$$

onde  $\sigma = h/\sqrt{K}$ .

Na Figura 8 resultados analíticos e numéricos da velocidade na interface permeável, são comparados com o modelo semi-empírico proposto por Beavers e Joseph [5] para  $\alpha = 0,8$ . Uma boa concordância é observada, confirmando a consistência física da hipótese semi-empírica. Entretanto, nota-se uma maior concordância entre a solução analítica e a solução semi-empírica. Isto mostra um regime quasi-linear, é menos conservativa que a proposta linear de Beavers e Joseph, porém mais conservativa que a solução numérica que não possui nenhuma limitação quanto a consideração de efeitos não-lineares.

Outro fato a ser notado na Figura 8 é a convergência das soluções à medida que o valor do parâmetro  $h/\sqrt{K}$  cresce. A velocidade na interface permeável tenderá para zero com o aumento do parâmetro  $h/\sqrt{K}$ . Isto se traduz na dependência da magnitude da velocidade de deslizamento com relação as características do material poroso e geometria do canal livre. Na verdade, pode-se entender o parâmetro  $h/\sqrt{K}$  como um fator de escala que relaciona os escoamentos do meio poroso e canal livre através da interface permeável.

Finalmente, em termos de resultados obtidos, mostra-se nas figuras 9 e 10 a variação do fator de atrito no canal livre com o número de Reynolds.

Da equação de Darcy-Weisbach, baseando-se na adimensionalização realizada no presente estudo, determina-se que:

$$f = \frac{1}{Re_1 \left( \frac{1}{12} + \frac{U_i}{4} \right)^2} \quad (53)$$

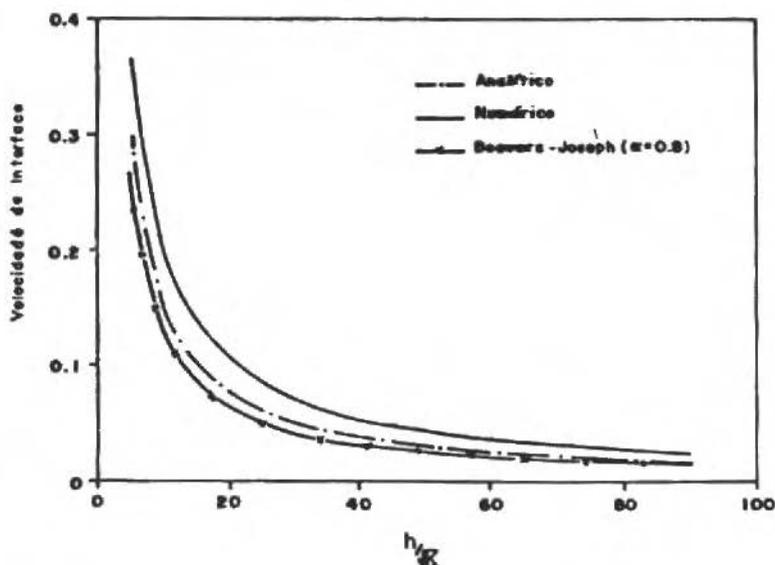


Figura 8. Comparação entre resultados analíticos, numéricos e hipótese de Beavers e Joseph ( $\alpha = 0,8$ ).

A Figura 9 compara resultados analíticos e numéricos mostrando que a concordância dos resultados é perfeita até um determinado número de Reynolds (aproximadamente 1,5). Para maiores Reynolds, os resultados apresentam um certo grau de divergência relacionado com a limitação da solução analítica em regimes não lineares. O fator de atrito decresce mais rapidamente no caso analítico, pois a partir do Reynolds limite, a velocidade da interface cresce divergindo da solução numérica, conforme visto na Figura 7.

Uma comparação entre dois resultados numéricos, onde considera-se a presença de efeitos inerciais a ausência dos mesmos, é mostrada através da Figura 10. Nota-se um aumento do fator de atrito, devido a presença de efeitos inerciais no escoamento do meio poroso.

Da discussão anterior, verifica-se que a consideração do termo quadrático na equação constitutiva da força de interação fluido-partícula tem uma influência considerável na distribuição de velocidade do escoamento estudado e

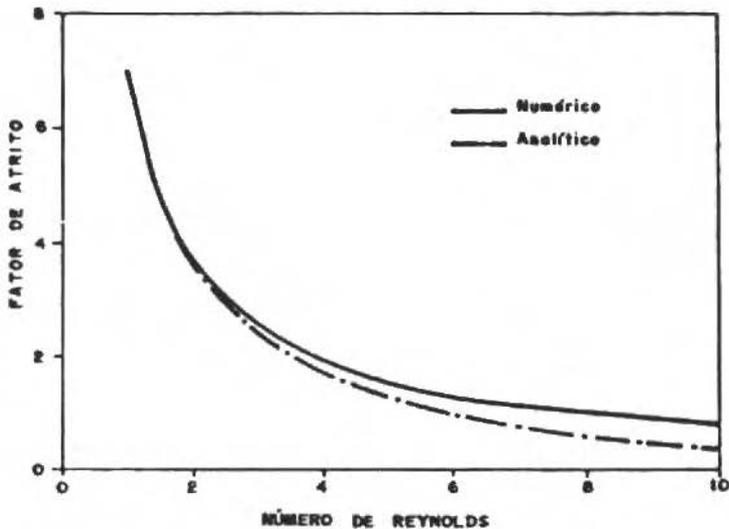


Figura 9. Resultados numéricos e analíticos da variação do fator de atrito do canal livre com o número de Reynolds.

consequentemente na velocidade de deslizamento da interface permeável. Isto significa, que a contribuição dos efeitos inerciais não devem ser desprezados em análise hidrodinâmica na qual o regime de escoamento favorece a presença de efeitos não-lineares, relacionados com a formação de regiões de recirculação à jusante das partículas que compõem o meio poroso.

## CONCLUSÕES

Considerando os resultados obtidos no presente estudo pode-se concluir que:

1. A região de interface entre o meio e o canal livre é uma região de camada limite onde as características dos dois escoamentos se ajustam, garantindo a continuidade da velocidade e tensão cisalhante através da interface permeável;
2. Na presença de efeitos inerciais, ocorre uma diminuição na distribuição de velocidade do escoamento analisado, observada quando se compara resultados para diferentes números de Reynolds na faixa linear e não-linear do escoamento;

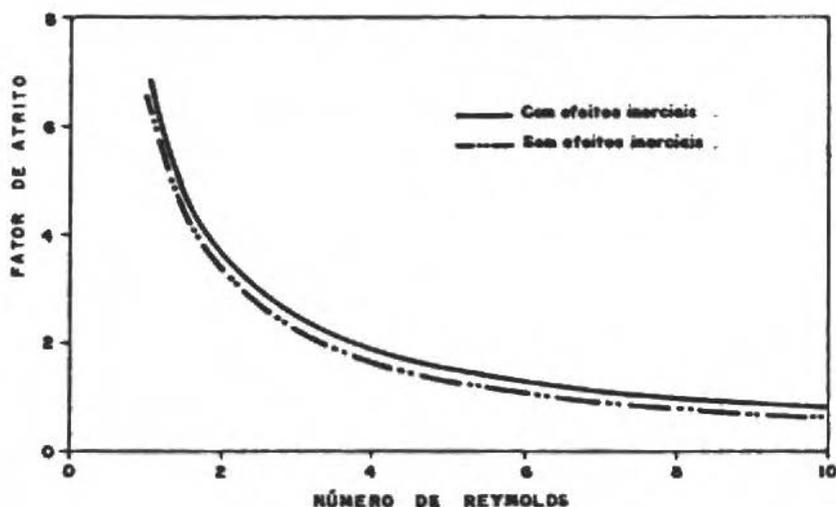


Figura 10. Comparação entre dois resultados numéricos relacionados com o fator de atrito.

3. A maior diferença entre distribuições de velocidade, relacionada com efeitos inerciais, ocorre no núcleo da matriz porosa, isto é, fora das zonas de camadas limites existentes nas regiões de parede permeável e impermeável do sistema;

4. A equação analítica para velocidade de deslizamento mostra a dependência desta velocidade com as propriedades características do material poroso e canal livre, confirmando os resultados obtidos anteriormente por Beavers e Joseph. Além disso, uma dependência explícita da velocidade na interface com o parâmetros  $\lambda$ , relacionado com efeitos inerciais, é mostrada na equação analítica;

5. A solução analítica, apesar de sua limitação com o aumento do regime não-linear, é menos conservativa que a proposta semi-emprírica de Beavers-Joseph baseada fundamentalmente na lei de Darcy. Entretanto, a solução analítica é mais conservativa que a solução numérica;

6. A contribuição de efeitos inerciais não deve ser desprezada em análises na qual o regime de escoamento favorece o aparecimento de efeitos não lineares,

relacionados com a interação hidrodinâmica fluido-partícula;

7. A hipótese empírica de Beavers e Joseph é totalmente consistente do ponto de vista físico, apresentando uma boa concordância com os resultados analíticos e numéricos;

8. As soluções analíticas e numéricas, envolvem cálculos imediatos que não dependem de constantes materiais difíceis de serem fixados ou explicitados, tal como o parâmetro  $\alpha$  da hipótese de Beavers e Joseph [5].

De uma maneira geral, o trabalho pode ser visto como uma extensão dos estudos pioneiros de Beavers e Joseph relacionados com o fenômeno aqui analisado.

#### AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Dr. A.F.P. Fortes pelas frutificantes discussões durante o início do trabalho, ao Eng. C.H. Gomes pela inestimável ajuda na elaboração das rotinas computacionais, a Sra. M.C. da Cunha pela contribuição na redação e datilografia do texto original. Finalmente o autor agradece ao apoio financeiro concedido pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

#### REFERÊNCIAS

- [1] SCHEIDEGGER, A.E., Hydrodynamics in Porous Media, in: *Handbuch der Physik*, VIII-2, pp. 625-643, 1960.
- [2] KUNII, D. and LEVENSPIEL, O., *Fluidization Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [3] DE VRIES, D.A., The Theory of Heat and Moisture Transfer in Porous Media Revisited, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.30, n. 7, pp. 1331-1341, 1987.
- [4] WANG, M., KASSOY, D.R. and WEIDMAN, P.D. Onset of Convection in a Vertical Slab of Saturated Porous Media Between two Impermeable Conducting Blocks. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, n. 7, pp. 1331-1341, 1987.

- [5] BEAVERS, G.S. and JOSEPH, D.D. Boundary Conditions at Naturally Permeable Wall, *J. Fluid Mech.*, vol. 30, part 1, pp. 197-207, 1967.
- [6] LAURIAT, G. and PRASAD, V. Non-Darcion Effects on Natural Convection in a Vertical Porous Enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 32, n. 11, pp. 21-35-2148, 1989.
- [7] SEBEN, S.T. e PRATA, A.T. Transferência de Calor em um Canal Preenchido com Esferas Compactadas, *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, RJ, 1989.
- [8] CUNHA, F.R. and FORTES, A.F. Nonlinear Fluid - Particle Interaction in the Mechanics of Fluidization, *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Rio de Janeiro, RJ, 1989.
- [9] CUNHA, F.R. and FORTES, A.F. Nonlinear Fluid-Particle Interactions in the Mechanics of Fluidization-II, *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Itapema, SC, 1990.
- [10] FORTES, A.F., JOSEPH, D.D. and LUNDGREN, T.S. Nonlinear Mechanics of Fluidization of Beds of Spherical Particles, *J. Fluid Mech.*, vol. 177, pp. 467-483, 1987.
- [11] ERGUN, S. Fluid Flow Through Packed Columns, *Chemical Engineering Progress*, vol. 48, n. 02, pp. 89-94, 1952.
- [12] BEAVERS, G.S., SPARROW, E.M. and RODENZ, D.E. Influence of Bed Size on the Flow Characteristics and Porosity of Randomly Packed Beds of Spheres, *J. of Applied Mechanics*, vol. 40, pp. 655-660, 1973.
- [13] COURDERC, J.P. Incipient Fluidization and Particulate Systems, in *Fluidization*, Second edition, Academic Press, London, 1985.
- [14] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
- [15] DYKE, V. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, California, 1975.
- [16] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*, Wesley Publishing Company, Inc., 1968.
- [17] PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1982.

- [18] TRUESDELL, C. and NOLL, W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics, in *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin, 1965.
- [19] DREW, D.A. and LAHEY, R.T. Applications of General Constitutive Principles to the Derivation of Multidimensional Two-Phase Flow Equations, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 5, pp. 243-264, 1979.
- [20] ANDERSON, T.B. and JACKSON, R. A Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds, *I/EC Fundamentals*, vol. 6, n. 4, pp. 527-539, 1967.
- [21] DREW, D.A. Continuum Modeling of Two-Phase Flows, in *Theory of Dispersed Multiphase Flow* Academic Press, New York, pp. 174-189, 1983.
- [22] JEFFREY, D.J. and ACRIVOS, A. The Rheological Properties of Suspensions of Rigid Particles, *AIChE Journal*, vol. 22, n. 3, pp. 417-432, 1976.
- [23] HINCH, E.J. An Averaged-Equation Approach to Particle Interactions in Fluid Suspension, *J. Fluid. Mech.*, vol. 83, Part 4, pp. 695-720, 1977.

## ANÁLISE DE SINAIS DE PRESSÃO E QUEDA DE PRESSÃO COMO INDICADORES DE REGIMES EM FLUXO BIFÁSICO HORIZONTAL

### STATISTICAL ANALYSIS OF PRESSURE AND PRESSURE DROP AS FLOW REGIME INDICATORS IN HORIZONTAL TWO-PHASE FLOWS

Fernando de Almeida França - Membro ABCM

Departamento de Energia - FEM

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Cidade Universitária

13081 Campinas SP, Brasil

#### RESUMO

*Sinais de pressão e queda de pressão em escoamento bifásico gás/líquido horizontal foram processados, na tentativa de se obter um critério objetivo para classificar escoamentos. Foram analisadas características temporais e estatísticas para escoamentos em ondas, plug, pistonado e anular. Verificou-se que a densidade espectral de potência é a única propriedade que permite distinguir, mesmo restritamente, entre padrões de escoamento.*

**Palavras-chave.** Escoamento Multifásico ■ Escoamento Bifásico ■ Padrões de Escoamento ■ Escoamento Estratificado, Intermitente e Anular

#### ABSTRACT

*This paper shows measurements of statistical properties associated with pressure and pressure drop fluctuations in two-phase horizontal air-water and air-oil flows. The mean and its distribution, the variance, the power spectra density and the probability density function of these stochastic processes are measured to be used as objective flow regime indicators. Wavy stratified, plug, slug and annular flow are the patterns observed. From among the analysed properties, only the power spectra shows some invariance to the change in flow components within the same flow pattern.*

**Keywords:** Two-Phase Flow ■ Flow Patterns ■ Flow Regime Indicator

## INTRODUÇÃO

Métodos objetivos para caracterizar padrões de escoamento em fluxos multifásicos gás-líquido têm sido objeto de discussão na literatura. Alguns pesquisadores mediram a flutuação da fração de vazio (local ou média diametral) em uma tubulação. Outros processaram variáveis dinâmicas relacionadas à fração de vazio ou à sua distribuição na seção transversal da tubulação. Hubbard e Dukler [1], por exemplo, mediram a flutuação da pressão estática de um escoamento bifásico ar/água horizontal. Os padrões de escoamento observados foram classificados, usando técnicas de Fourier, de acordo com a forma das respectivas funções de densidade espectral da potência (DEP). A frequência de pico foi utilizada para diferenciar entre escoamentos intermitentes e separados. Um critério numérico relacionado à distribuição da frequência foi utilizado para caracterizar escoamentos separados e distribuídos, ou a transição entre escoamentos intermitentes e dispersos. A localização de certas regiões de transição entre padrões de escoamento, entretanto, era objeto de avaliações subjetivas.

Jones e Zuber [2] adaptaram uma técnica de absorção de raios-X para obter dados estatísticos de um fluxo vertical ascendente de ar e água. A flutuação da fração de vazio diametral foi medida e a função densidade de probabilidade (FDP) foi usada para classificar os padrões de escoamento. Critérios subjetivos ainda se fizeram presentes.

Weisman et al. [3] and Barnea et al. [4] propuseram critérios para se distinguir entre os vários padrões baseados na observação da flutuação temporal de sinais. Os primeiros usaram um sensor de pressão estática na parede de uma tubulação horizontal. Os últimos, o sinal de um sensor de condutância em um escoamento bifásico vertical. Como poderia se esperar, estas técnicas também resultaram em critérios subjetivos.

A técnica de absorção de raios-X foi também usada por Vince e Lahey [5] em um escoamento vertical ar/água. O sinal transiente de um sistema de raios-X foi processado para gerar FDPs e DEPs. A forma e o número de modos destas distribuições foram analisadas como critérios para se classificar os escoamentos. Para quantificar as informações dos histogramas, os primeiros quatro momentos associados com as distribuições foram calculados. A média, a distribuição sobre a média (i.e., a variância), sua medida de a-simetria (*skewness*)

e a ocorrência de picos (*kurtosis*) foram associadas aos vários padrões. Conclui-se que os momentos associados com a DEP dependem da velocidade superficial do líquido, uma característica indesejável para um indicador de padrões de escoamento. A variância associada com a FDP resultou em um critério mais adequado para se discriminar entre escoamentos em bolhas, pistonado (*slug*) e anular. Entretanto, menciona-se a dificuldade de determinar com precisão a região fronteira entre dois regimes consecutivos.

Tutu [6,7] mediu o sinal transiente da queda de pressão em um escoamento ar/água vertical. Os sensores de pressão foram montados faceando a parede interna da tubulação e separados entre si de  $1/2 * D$  ( $D \equiv$  diâmetro interno da tubulação). A flutuação da queda de pressão foi usada como um indicador de padrões de escoamento. Foram mencionados DEPs de pico único (ou unimodais) para escoamentos em bolhas e anular, e bimodais para escoamentos intermitentes.

Matsui [8,9] registrou simultaneamente sinais de queda de pressão para pequenos ( $D/2$ ) e grandes intervalos ( $10D$ ) entre os orifícios de medição. Sua seção de teste estava posicionada na vertical, e os fluidos eram nitrogênio e água. Os DEPs foram calculados e os resultados mostraram formas distintas, de acordo com a distância entre os sensores. FDPs unimodais e bimodais foram encontradas para escoamentos intermitentes, para grandes e pequenas distâncias entre os orifícios de medição de pressão, respectivamente.

## ELEMENTOS DA ANÁLISE ESTATÍSTICA

A revisão dos vários trabalhos publicados demonstra claramente que, a despeito da variedade de métodos e critérios adotados até o presente, não há opção que permita generalizar o processo de identificação objetiva entre os padrões de escoamento. Observa-se também a concentração de estudos em escoamentos verticais, orientação favorecida do ponto de vista da distribuição das fases, normalmente simétrica em relação ao eixo da tubulação. Consequentemente, procedimentos que possam ser adequados em escoamentos verticais podem resultar inadequados para escoamentos horizontais, onde as fases mostram uma distribuição a-simétrica. Propõe-se então, neste trabalho, o estudo de propriedades dos sinais de pressão e queda de pressão de um escoamento bifásico gás-líquido horizontal como indicadores de regimes de escoamento.

Características temporais (comparação de sinais temporais), e estatísticas (determinação de FDP, cálculo de variância e determinação de DEP) serão exploradas na tentativa de se obter critérios objetivos para discriminar entre escoamentos tipo *plug*, pistonado, em ondas e anular.

Para tanto, seja a série discreta  $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  representando a amostragem dos sinais de flutuação de pressão e de queda de pressão em um escoamento bifásico gás-líquido horizontal. As variáveis foram definidas de acordo com Bendat e Pierson [10]. Assim, se os sinais são estacionários, a amplitude média,  $\bar{x}$ , é calculada por:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n x_i \quad (1)$$

A variância, que mede a dispersão do sinal sobre a média, é dada por:

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

A função densidade de probabilidade (FDP),  $p(x)$ , que mede a distribuição de amplitudes da amostragem, é descrita em termos da inclinação da função distribuição de probabilidade,  $P(x)$ :

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}, \quad (3)$$

sendo

$$P(x) = P_x(\xi) = \text{Prob.}[x \leq \xi], \quad (4)$$

e a probabilidade de  $(x \leq \xi)$ ,

$$\text{Prob.}[x \leq \xi] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N[x \leq \xi]}{N}, \quad (5)$$

onde  $N[x \leq \xi]$  é número de amostragens com amplitude menor ou igual a  $\xi$ .

Finalmente, a função densidade espectral de potência (DEP),  $S_{xx}$ , que mede a composição de frequências do sinal, é definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação,  $R_{xx}$ :

$$S_{xx}(f) = \int R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (6)$$

sendo

$$R(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_{i+\tau} \quad (7)$$

onde  $f$  é a frequência e  $\tau$  é o intervalo discreto de tempo entre duas amostragens do sinal.

## PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Um desenho esquemático do circuito de teste está mostrado na Figura 1. A seção de teste horizontal, assim como a maior parte da seção de desenvolvimento do escoamento, utilizava uma tubulação transparente de acrílico em 19 mm de diâmetro interno. Pequenos trechos em cobre, com o mesmo diâmetro interno, foram utilizados onde a tubulação foi conectada ao suporte do conjunto. A seção de entrada tinha comprimento equivalente a 258D, de forma a permitir o completo desenvolvimento do escoamento até o trecho onde estavam instalados os sensores de pressão. A seção de saída tinha comprimento de 55D e a mistura bifásica fluía para um tanque de separação, em descarga livre.

Água ou óleo mineral (Nujol, densidade relativa  $\rho_r = 0.87$ , viscosidade relativa - água  $20^{\circ}\text{C} - \mu_r = 100$ ) eram introduzidos na seção de teste através de um misturador. Como a maior parcela do fluxo dos líquidos ocorria em um circuito principal de alta pressão, o fluxo secundário através da seção de teste era muito estável, não sendo influenciado pelo processo instável que ocorria no misturador. A vazão água foi medida com quatro rotâmetros *Ratemaster Dwyer*, de escala diferenciada, ligados em paralelo. A aferição de fábrica foi reavaliada em laboratório. A vazão de óleo foi medida com dois rotâmetros *Ratemaster Dwyer*, instalados em paralelo, e aferidos em laboratório. O ar era direcionado para o misturador após passar por um conjunto de quatro rotâmetros *Ratemaster Dwyer*, também de escala diferenciada, instalados em paralelo. Da mesma forma que o fluxo de líquidos, a estabilidade da vazão de ar era garantida por uma pressão de suprimento elevada. O circuito operava a temperatura constante, garantida por um trocador de calor bi-tubular conectado à linha de suprimento do edifício. A temperatura foi medida e utilizada para corrigir as leituras dos rotâmetros.

Orifícios de tomada de pressão e queda de pressão foram construídos na parte inferior da tubulação, separados por uma distância equivalente a 6D.

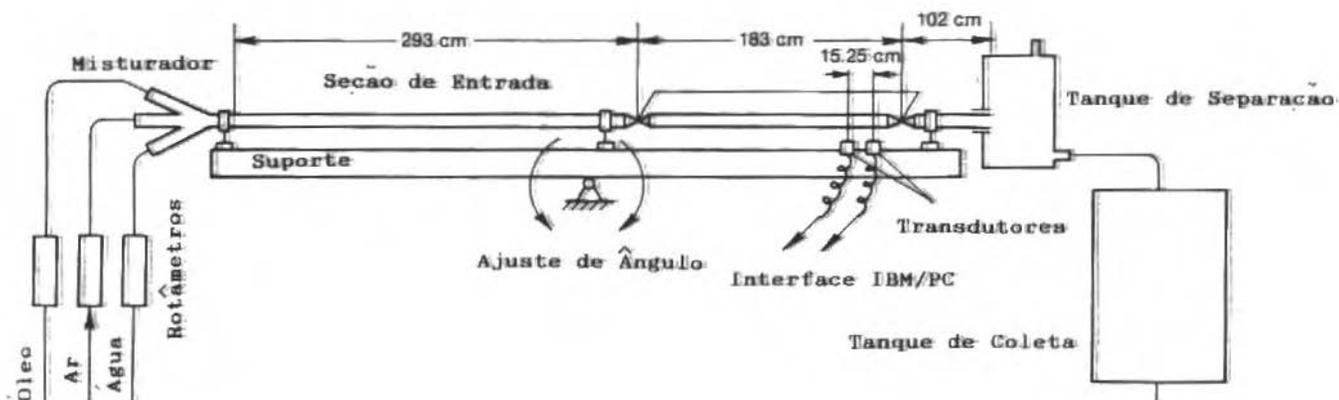


Figura I. Esquema da montagem de teste

Os sensores de pressão foram ligados aos orifícios através de pequenos tubos de cobre de 3 mm de diâmetro interno. Um conjunto de sensores diferenciais Valadyne, aferidos, e demoduladores Carrier foram utilizados. O conjunto transdutor/diafragma apropriado era selecionado de acordo com a amplitude da grandeza medida. Desta forma, pode-se adequar a resolução do transdutor a cada um dos padrões de escoamento analisados e condições do escoamento. Os limites adotados foram  $\pm 8.6$  KPa, 55 KPa e 220 KPa. Um sensor de alta resolução, para  $\pm 0.55$  KPa foi também utilizado nas medições de escoamentos em ondas de superfície quase lisa (*quasi-smooth stratified flow*).

Uma placa padrão de aquisição de dados, de 13 bits, foi utilizada na aquisição, digitalização e transferência dos dados medidos para a memória de um microcomputador IBM-PC-XT. A frequência de amostragem do sinal podia ser variada, através de programa, de forma a compatibilizar o tamanho do arquivo de dados gerado e os requisitos do processamento adotado. Desta forma, até cerca de 10.000 pares de dados pressão/queda de pressão puderam ser digitalizados, tornando o processo de medida confiável e as variáveis estatisticamente estáveis. Após registrar cada conjunto de dados, as pequenas válvulas que conectavam os sensores à tubulação eram fechadas, e os ruídos de fundo inerentes ao sistema eram digitalizados.

O algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) foi utilizado para a determinação da DEP. Para as frequências de amostragem adotadas, 260 Hz e 640 Hz, as frequências de Nyquist resultantes, 130 Hz e 320 Hz, foram adequadas. Em ambos os casos, considerando os conjuntos de 512 pontos adotados para o processamento das DEPs, frequências abaixo de  $(20/512)$  Hz e  $(640/512)$  Hz não são resolvidas nos espectros. As DEPs dos ruídos de fundo foram também processadas e não revelaram qualquer potência significativa quando comparadas com o sinal principal. Para associar os padrões de escoamento às variáveis e funções calculadas, a observação visual direta e fotografias de alta velocidade foram utilizadas. As fotografias foram tiradas utilizando-se iluminação fluorescente direta através da tubulação e fluido transparentes, isto é, câmara e fonte de luz foram colocados em lados opostos da tubulação. A utilização de filmes de alta velocidade, como o Kodak TMZ-P3200 ou PCC-1600, e um conjunto apropriado de lentes de aproximação, propiciaram o uso de velocidades de obturador de até 1/4000 segundos. Foi possível congelar imagens até o início do regime anular em escoamento de ar e água.

## RESULTADOS

Os sinais de pressão estática e de queda de pressão foram amostrados e processados para quatro distintas condições do escoamento, associadas aos quatro regimes observados: em ondas, *plug*, pistonado e anular. Considerando-se as duas misturas gás-líquido possíveis, ar/água e ar/óleo, um total de 32 conjunto de dados, constituídos de 5.000 pontos ou 10.000 pontos, foram adquiridos. A Tabela I mostra valores das velocidades superficiais das fases para condições representativas do escoamento, considerando as duas possíveis misturas.

MISTURA	REGIME	$\langle J_{AR} \rangle, M/S$	$\langle J_{LIQ} \rangle, M/S$	$\sigma^2, \text{Pascal}^2$	
				$P$	$\Delta P$
AR	Ondas	12.60	0.68	$1.4 \cdot 10^4$	$2.5 \cdot 10^2$
	Plug	0.25	1.10	$2.5 \cdot 10^4$	$9.0 \cdot 10^2$
E	Pistonado	1.00	0.82	$1.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^4$
ÁGUA	Anular	16.40	0.36	$1.1 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^4$
ÓLEO	Ondas	4.28	0.025	$1.8 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^2$
	Plug	0.24	0.08	$1.1 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^3$
	Pistonado	2.04	0.14	$2.2 \cdot 10^5$	$4.9 \cdot 10^4$
	Anular	9.6.	0.05	$1.0 \cdot 10^2$	$3.5 \cdot 10^2$

A dificuldade de caracterização do escoamento com base na observação do sinal temporal da queda de pressão fica evidenciada na Figura 2. Os escoamentos em ondas e anular da mistura ar-água se caracterizam pela superposição de ondas de perturbação (*disturbance waves*) sobre o filme líquido que escoia junto à parede da tubulação. Como consequência, sinais temporais de escoamentos intermitentes, como o *plug* ou o pistonado, ou de fases separadas, como o em ondas ou o anular, apresentam a mesma forma: oscilações associadas à presença intermitente de pistões líquidos e bolhas de gás, no primeiro caso, e à ocorrência

das ondas de perturbação, no segundo caso. Características similares foram observadas no processamento dos sinais de pressão estática. Esta verificação torna subjetiva a utilização da observação de sinais com base temporal na caracterização de escoamentos horizontais.

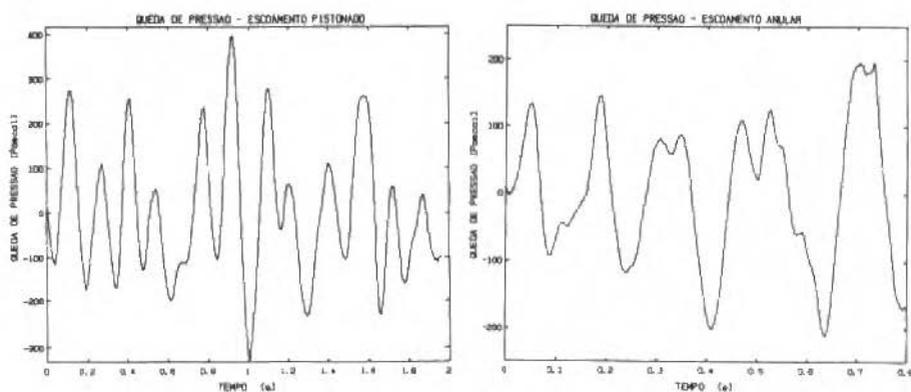


Figura 2. Queda de pressão para escoamentos pistonado e anular.

A magnitude da variância dos sinais, já utilizada anteriormente para classificar padrões de escoamento em tubulações verticais, também não resultou em critério adequado. Como mostrado na Figura 2, sinais de escoamentos horizontais pistonado e anular não só têm a mesma forma, como podem apresentar amplitude de flutuação de mesma ordem de grandeza. A variância, medindo a dispersão em torno do valor médio do sinal, reflete estes aspectos. A última coluna da Tabela I traz os valores calculados para os sinais de pressão estática e queda de pressão. A magnitude dos sinais de pressão estática pode ser semelhante para escoamentos horizontais tipo pistonado e anular. Valores de  $1.05 \times 10^5$  Pascal<sup>2</sup> e  $1.1 \times 10^5$  Pascal<sup>2</sup>, respectivamente, foram calculados para escoamentos de ar e água.

Devem ser destacados os valores de variância medidos para o escoamento anular da mistura ar-óleo. Contrariamente ao escoamento anular ar-água, os valores calculados sugerem amplitudes de flutuação de pequena magnitude em torno do valor médio do sinal. Este fato indica que o escoamento anular se desenvolve de forma peculiar para esta mistura, e que a distribuição das fases pode ocorrer de forma distinta do escoamento ar-água. A Figura 3 mostra (a) uma fotografia do

escoamento anular de ar e óleo, e (b) uma amostragem de seu sinal de pressão estática em base temporal. Observou-se que a transição em ondas/anular ocorre para velocidades do gás inferiores, quando comparadas à transição para a mistura ar-água. Gotas de óleo se desprendem da crista das ondas (*entrainment*), e se depositam na parte superior da tubulação. Devido à alta viscosidade do óleo, não fluem novamente para a parte inferior da tubulação, como seria característico em misturas com líquidos de baixa viscosidade. O acúmulo de gotas propicia a formação do filme de óleo na parte superior da tubulação. Verificou-se também superposição de ondas de pequena amplitude sobre o filme de base. Estas ondas se interligam, formando estruturas, uma configuração típica neste escoamento com líquido de alta viscosidade. Não se verificou a formação de ondas de perturbação, e os sinais de pressão estática e queda de pressão apresentam um valor médio elevado e flutuações de amplitude pouco superiores ao ruído de fundo superposto ao sinal.

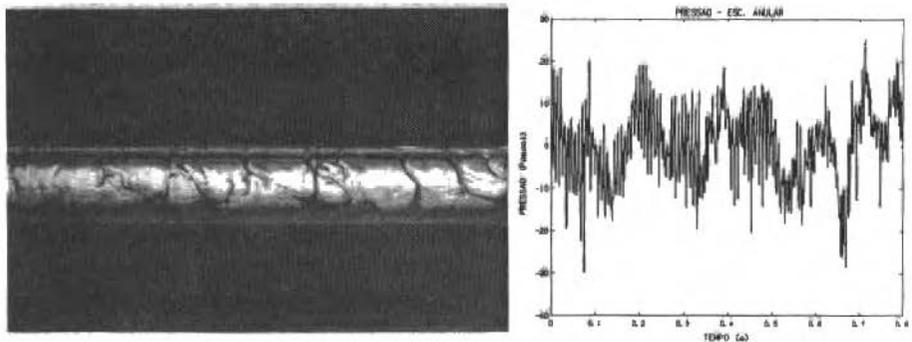


Figura 3. Escoamento anular (a) fotografia (b) sinal de pressão

A Figura 6 traz FDPs relativos aos sinais de queda de pressão em escoamentos pistonado e anular de água e ar. Com isso evidenciado, as funções densidade de probabilidade não permitem uma diferenciação objetiva entre os regimes de escoamento. Resultados similares foram obtidos com o processamento de sinais de pressão estática.

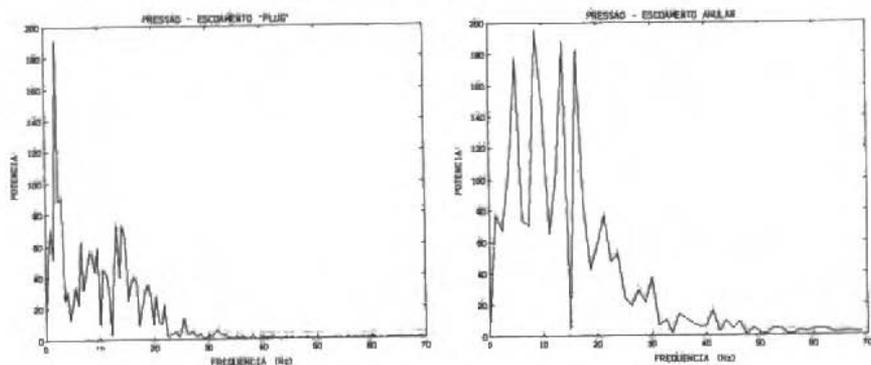


Figura 4. DEP da pressão para escoamentos plug e anular.

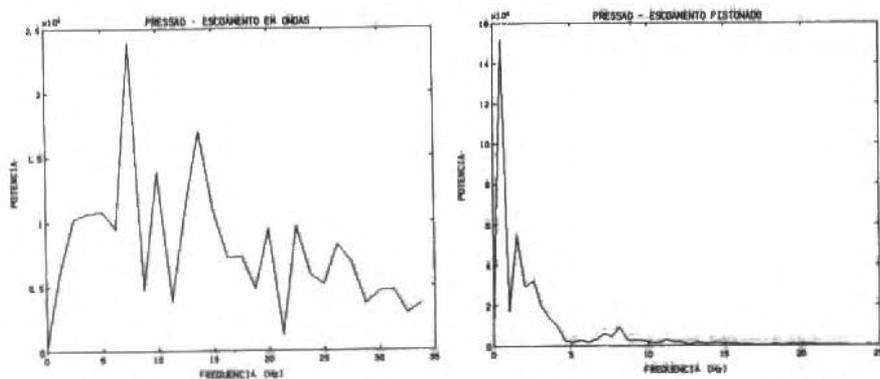


Figura 5. DEP da pressão para escoamentos em ondas e pistonado.

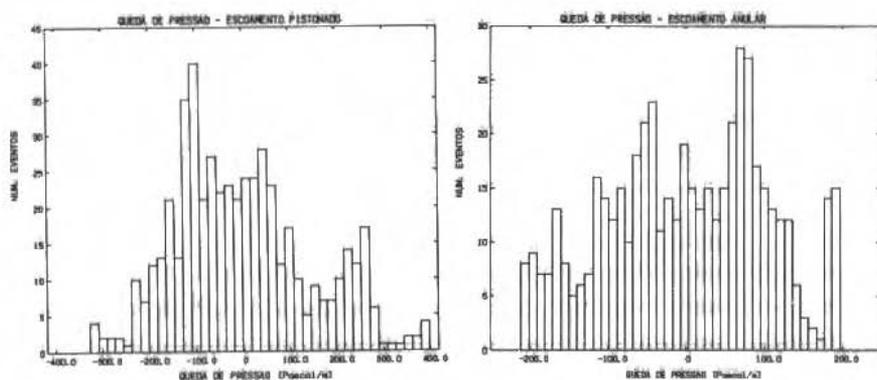


Figura 6. FDP da queda de pressão em escoamentos pistonado e anular.

A DEP da flutuação de pressão em escoamentos água/ar tipo plug e anular são mostrados na Figura 4. Tipicamente, o escoamento plug apresenta uma única frequência dominante no espectro. Para o escoamento anular, por outro lado, o espectro traz uma banda de frequências dominantes, de potências de ordem de magnitude similares. A substituição da água por um fluido de viscosidade mais elevada não altera, em termos gerais, a forma dos espectros. Na Figura 5 estão mostradas as distribuições espectrais de potência para os escoamentos em ondas e pistonado de ar e óleo. Verifica-se, então, que os escoamentos horizontais ditos intermitentes, como o plug e o pistonado, se diferenciam dos escoamentos em ondas e anular, no que se refere à forma dos respectivos espectros de frequência. A mesma conclusão é extensiva aos resultados obtidos do processamento dos sinais de queda de pressão.

## CONCLUSÃO

Foram processados sinais de pressão estática e queda de pressão em escoamentos horizontais de gás e líquido. As características temporais e estatísticas destas variáveis foram analisadas com o intuito de se determinar um critério objetivo para a diferenciação entre os regimes de escoamento. Escoamento em ondas, plug, pistonado e anular foram os padrões observados, utilizando-se ar/água e ar/óleo como os fluidos de trabalho. Conclui-se:

- a comparação de sinais temporais e funções densidade de probabilidade das variáveis medidas não permite a diferenciação entre os padrões de escoamento;
- o cálculo da variância das grandezas medidas também não conduz a um critério objetivo, já que resultados de mesma ordem de grandeza foram obtidos para distintos padrões de escoamento;
- o espectro de frequências de escoamentos intermitentes, plug e pistonado, apresenta uma frequência dominante, enquanto que escoamentos em ondas e anular apresentam uma banda de frequências dominantes, de mesma ordem de magnitude, permitindo uma diferenciação entre eles. Os espectros são similares, entretanto, para escoamentos em ondas e anular, ou plug e pistonado.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio parcial, através de uma bolsa de pós-doutorado.

## REFERÊNCIAS

- [1] HUBBARD, M.G and DUKLER, A.E. The Characterization of Flow Regimes for Horizontal two Phase Flow. Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1966.
- [2] JONES, O.C. and ZUBER, N. The Interrelation between Void Fraction Fluctuations and Flow Patterns in Two Phase Flow. Int. J. Multiphase Flow, 2, 273-306, 1975.
- [3] WEISMAN, J., DUNCAN, D., GIBBON, J. and CRAWFORD, T. Effects of Fluid Properties and Pipe Diameter on Two Phase Flow Patterns in Horizontal Lines. Int. J. Multiphase Flow, 5, 437-462, 1979.
- [4] BARNEA, D., SHOHAM, O., TAITEL, Y. and DUKLER, A.E. Flow Pattern Characterization in Two Phase Flow by Electrical Conductance Probe. Int. J. Multiphase Flow, 6, 387-397, 1980.
- [5] VINCE, M.A. and LAHEY, Jr., R.T. On the Development of an Objective Flow Regime Indicator. Int. J. Multiphase Flow, 8, 93-124, 1982.
- [6] TUTU, N.K., Pressure Fluctuations and Flow Pattern Recognition in Vertical Two Phase Gas-Liquid Flow. Int. J. Multiphase Flow, 8, 443-447, 1982.
- [7] TUTU, N.K., Pressure Drop Fluctuations and Bubble-Slug Transition in a Vertical Two Phase Water Flow. Int. J. Multiphase Flow, 10, 211-216, 1984.
- [8] MATSUI, G. Identification of Flow Regimes in Vertical Gas Liquid Two Phase Flow Using Differential Pressure Fluctuation. Int. J. Multiphase Flow, 10, 711-720, 1984.
- [9] MATSUI, G. Automatic Identification of Flow Regimes in Vertical Two Phase Flow Using Differential Pressure Fluctuations. Nuclear Engineering & Design, 95, 221-231, 1986.
- [10] BENDAT, J.S. and PIERSON, A.G. Engineering Applications of Correlations and Spectral Analysis. John Wiley & Sons, 1980.

## ON THE HEAT TRANSFER PHENOMENON IN A SPHERICAL BODY SURROUNDED BY VACUUM, WITH TEMPERATURE-DEPENDENT HEAT GENERATION

### SOBRE O FENÔMENO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NUM CORPO ESFÉRICO NO VÁCUO, COM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Rogério Martins S. da Gama - Membro ABCM

Laboratório Nacional de Computação Científica

Rua Lauro Müller 455

22290 Rio de Janeiro, Brasil

#### ABSTRACT

*In this work the steady-state (nonlinear) energy transfer process in a spherical body, with temperature-dependent internal heat generation and surrounded by vacuum, is considered. The energy transfer mechanism inside the body is the conduction heat transfer while the energy transfer mechanism from/to the body is the radiation heat transfer. The resultant mathematical problem is represented by a partial differential equation (in some cases nonlinear) subjected to nonlinear boundary conditions (representing the coupling between conduction and radiation). It is presented an equivalent variational principle which will be employed for simulating some particular cases.*

**Keywords:** Temperature-Dependent Heat Generation ■ Conduction / Radiation ■ Numerical Simulation

#### RESUMO

*Neste trabalho considera-se a transferência de energia (não-linear) em regime permanente num corpo esférico imerso no vácuo com geração interna de calor dependente da temperatura. O mecanismo de transferência de energia no interior do corpo é a condução de calor enquanto que a transferência de energia de/para o corpo se dá por radiação térmica. O problema matemático resultante é representado por uma equação diferencial parcial (não-linear em alguns casos) sujeita a condições de contorno não-lineares (representando o acoplamento entre condução e radiação). É apresentado um princípio variacional equivalente o qual será empregado na simulação de alguns casos particulares.*

**Palavras-chave:** Geração de Calor Dependente da Temperatura ■ Condução / Radiação ■ Simulação Numérica

## INTRODUCTION

When a phenomenon is mathematically described from an engineering viewpoint, the main constraint is the possibility of simulating it. In other words, a realistic but difficult problem must, sometimes, be simplified until its simulation becomes available with existent tools.

Although the possibility of simplifying a problem is almost unbounded, there exist situations in which it is desirable to preserve a more precise mathematical description and to look for adequate methods for the simulation, even when these methods demand the use of new and/or sophisticated tools.

In this paper it will be considered a nonlinear heat transfer phenomenon that, due to its mathematical complexity, is usually considered under very restrictive assumptions. It will be presented a tool for carrying out numerical simulations of the considered phenomenon, without the usual restrictive assumptions.

The main subject of this paper is the coupled conduction/radiation heat transfer phenomenon in a spherical body with temperature-dependent internal heat supply. This phenomenon is mathematically described by a partial differential equation (nonlinear, if the relation between the internal heat generation and the temperature is nonlinear) subjected to nonlinear boundary conditions (representing the coupling between the conduction heat transfer and the radiation heat transfer).

The main objective is to present a variational formulation for this problem as well as numerical approximations for some particular cases.

Usually, for engineering purposes, these (nonlinear) problems are considered under the constant temperature approximation. In some cases this approach is not adequate. Hence, in order to illustrate the consequences of such approximation, it will be shown a direct comparison between this approximation and the piecewise linear ones obtained from the variational principle.

## GOVERNING EQUATIONS

The steady-state conduction heat transfer inside a body, represented by the set  $\Omega$  with boundary  $\partial\Omega$ , is mathematically described by [1]

$$\text{Div}(k \text{ Grad } T) + \dot{q} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

in which  $T$  is the absolute temperature field (unknown),  $k$  is the thermal conductivity field and  $\dot{q}$  is the internal heat generation. In this work it will be assumed that  $k$  is a (positive) constant while  $\dot{q}$  is such that

$$\dot{q} = \dot{q}(T, \mathbf{X}), \quad \dot{q}(b, \mathbf{X}) \leq \dot{q}(a, \mathbf{X}) \quad \text{if } b > a \quad \text{for any } \mathbf{X} \in \Omega \quad (2)$$

For the considered body, the sets  $\Omega$  and  $\partial\Omega$  are represented as follows (see figure 1)

$$\Omega \equiv \{ \mathbf{X} \text{ such that } R_1 < \|\mathbf{X}\| < R_2 \}; \quad \mathbf{X} \equiv (x, y, z), \quad \|\mathbf{X}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3)$$

and

$$\partial\Omega \equiv \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \equiv \{ \mathbf{X} \text{ such that } \|\mathbf{X}\| = R_1 \} \cup \{ \mathbf{X} \text{ such that } \|\mathbf{X}\| = R_2 \} \quad (4)$$

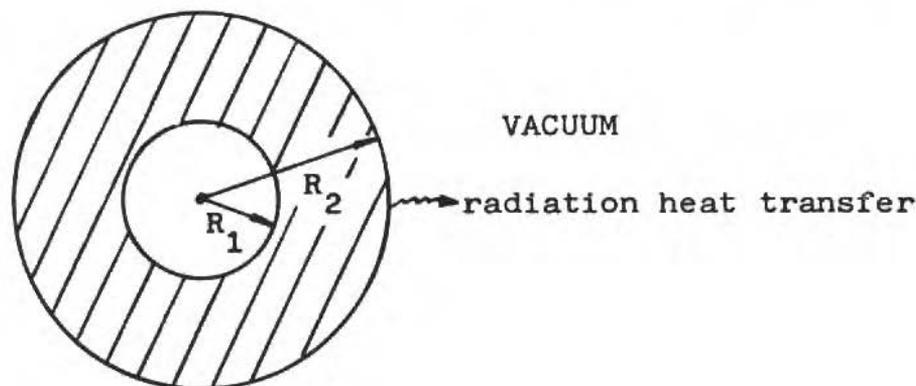


Figure 1. The considered spherical body.

The body will be considered insulated on  $\partial\Omega_1$  and exposed to atmosphere-free space on  $\partial\Omega_2$ . Hence

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \quad (5)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \sigma T^4 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_2 \quad (6)$$

in which  $\partial/\partial n$  represents the exterior normal derivative,  $\sigma$  is the Stefan-Boltzmann constant and  $\varepsilon$  is the emittance ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) assumed here constant [2]. The boundary condition (6) arises when it is considered, at  $r = R_2$ , the coupling between conduction and radiation.

In the cases in which  $R_1 = 0$ , only the boundary condition (6) must be imposed. However, (5) will hold too.

It is to be noticed that, besides (1), (5) and (6), the field  $T$  must satisfy the following inequality (in order to preserve the physical meaning, since  $T$  represents an absolute temperature)

$$T \geq 0 \quad \text{in} \quad \bar{\Omega} \quad (7)$$

Combining (1), (5), (6) and (7) and taking into account that  $k$  is a constant, the mathematical description of the considered heat transfer problem may be expressed, in spherical coordinates, as follows

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \\ &\text{for } R_1 < r < R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ k \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 \quad \text{for } r = R_1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} &= \varepsilon \sigma T^4 \quad \text{for } r = R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ T &\geq 0 \quad \text{for } R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (8)$$

in which  $r$  ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ),  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) and  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) are related to  $x$ ,  $y$  and  $z$  as follows

$$x = r \cos \theta \sin \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \phi \quad (9)$$

## A VARIATIONAL PRINCIPLE FOR (8)

The solution of (8) is the field which minimizes the following functional

$$\begin{aligned}
 I[u] = & \frac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \psi r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta + \\
 & + \frac{1}{5} \varepsilon \sigma \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |u|^5 r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \right]_{r=R_2} \quad (10)
 \end{aligned}$$

in which the fields  $u$  are admissible fields (fields for which  $I[u]$  may be evaluated).

In (10) the function  $\psi$  is given by

$$\psi = \dot{\psi}(u, \mathbf{X}) = \int_{u_0}^u \dot{q}(v, \mathbf{X}) \, dv = \int_{u_0}^u \dot{q}(v, r, \phi, \theta) \, dv \quad (11)$$

in which  $u_0$  is an arbitrary reference. Hence, when  $\dot{q}$  does not depend on  $T$ ,  $\psi$  may be expressed as follows

$$\psi = \dot{q} u \quad (12)$$

Since (2) holds the functional  $I$  is convex. Therefore, if an extremum exists, it is unique and corresponds to a minimum.

The first variation of  $I[u]$  is given by

$$\begin{aligned}
 \delta I = & k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \delta u \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \delta u \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta u \right) \right\} r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta - \\
 & - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \dot{q} \delta u \, r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta + \\
 & + \varepsilon \sigma \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |u|^3 u \delta u \, r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \right]_{r=R_2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

in which  $\delta u$  is any admissible variation [3].

The minimum of  $I[u]$  is reached when  $\delta I = 0$ . Employing Green's identity and taking into account that  $\delta u$  is arbitrary, this condition is equivalent to the following Euler-Lagrange equation and Natural boundary conditions (taking into account that  $\sin \pi = \sin 0 = 0$  and that  $\partial u / \partial \theta$  has the same value at  $\theta = 0$  and at  $\theta = 2\pi$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \\ &\text{for } R_1 < r < R_2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi \\ k \frac{\partial u^*}{\partial r} &= 0 \quad \text{for } r = r_1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi \\ -k \frac{\partial u^*}{\partial r} &= \varepsilon \sigma |u^*|^3 u^* \quad \text{for } r = R_2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (14)$$

in which  $u^*$  is the field that minimizes  $I[u]$ .

It is easy to see that, if  $u^* \geq 0$  in  $\bar{\Omega}$ , then  $T \equiv u^*$  will satisfy (8). Hence, once the solution of (14) is unique, the solution of (8) (when exists) is unique too [4]. In addition, if  $u^*$  assumes negative values in  $\bar{\Omega}$  then (8) does not admit a solution.

Therefore, in the physically admissible range, the minimization of  $I[u]$  is equivalent to problem (8). This is a powerful result that will be used later for carrying out simulations from the minimization of  $I[u]$ .

### SOME REMARKS ON THE BOUNDARY CONDITION (5)

If, instead of (5), it is assumed that  $\partial \Omega_1$  is opaque and gray, the boundary condition at  $r = R_1$  is given by [2]

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial r} &= \varepsilon \sigma T^4 - \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{B}(\phi, \theta) \frac{\sin \phi}{4\pi} d\phi d\theta \quad \text{at } r = R_1 \\ B &= \varepsilon \sigma T^4 + (1 - \varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{B}(\phi, \theta) \frac{\sin \phi}{4\pi} d\phi d\theta \quad \text{at } r = R_1 \end{aligned} \quad (15)$$

in which  $B = \widehat{B}(\phi, \theta)$  is the radiosity on  $\partial \Omega_1$ .

Hence, in the cases where  $T$  is constant on  $\partial\Omega_1$  (and consequently  $B = \text{constant}$ ) equations (15) reduce to

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial r} &= \varepsilon \sigma T^4 - \varepsilon B & \text{at } r = R_1 \\ B &= \varepsilon \sigma T^4 + (1 - \varepsilon) B & \text{at } r = R_1 \end{aligned} \quad (16)$$

and, therefore,

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = R_1 \quad (17)$$

In addition, since all the energy leaving  $\partial\Omega_1$  by thermal radiation must reach  $\partial\Omega_1$ , the following always holds (even when  $\partial\Omega_1$  is not gray)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} R_1^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 0 \quad (18)$$

These results represent a support for employing condition (5), even when it is not exact.

## THE CONSTANT TEMPERATURE APPROXIMATION

The most common approximation for engineering calculations is the one which assumes that the temperature is constant along the body.

The most attractive feature of this approach is that the problem is reduced to a single algebraic equation.

Assuming that the field  $T$  is constant ( $T = T_c$  in  $\bar{\Omega}$ ), the energy balance is represented by

$$\varepsilon \sigma T_c^4 4\pi R_2^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \dot{q} r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \quad (19)$$

and, hence, if the right side is nonnegative, the solution of (19) (with physical sense), is obtained from

$$T = T_c = \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \dot{q} r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta}{\varepsilon \sigma 4\pi R_2^2} \right\}^{1/4} \quad (20)$$

When the right side of (19) is negative, the problem has no physical sense (since an absolute temperature is not negative).

For instance, when  $\dot{q} = \dot{q}_0 = \text{constant} \geq 0$ ,  $T_c$  is given by

$$T_c = \left[ \dot{q}_0 \frac{1}{3\epsilon\sigma} \left( \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2} \right) \right]^{1/4} \quad (21)$$

when  $\dot{q} = \dot{q}_0(R_2/r)$ ,  $T_c$  is given by (even when  $R_1 = 0$ )

$$T_c = \left[ \dot{q}_0 \frac{1}{2\epsilon\sigma} \left( \frac{(R_2^2 - R_1^2) R_2}{R_2^2} \right) \right]^{1/4} \quad (22)$$

when  $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)$  (temperature-dependent internal heat generation), in which  $T_0$  is a temperature of reference,  $T_c$  is given by

$$T_c = \left[ \dot{q}_0 T_0 \frac{1}{3\epsilon\sigma} \left( \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2} \right) \right]^{1/5} \quad (23)$$

and, when  $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)^2$ ,  $T_c$  is given by

$$T_c = \left[ \dot{q}_0 T_0^2 \frac{1}{3\epsilon\sigma} \left( \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2} \right) \right]^{1/6} \quad (24)$$

### SIMULATION OF SOME CASES IN WHICH $\dot{q}$ DEPENDS ONLY ON $r$

When  $\dot{q}$  is nonnegative and depends only on  $r$ , the solution of (8) may be easily reached.

In particular, when  $R_1 = 0$ , the solution of (8) is given by

$$T = F + C; \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (25)$$

in which

$$F = \hat{F}(r) = - \int_0^r \frac{1}{w^2} \left( \int_0^w \frac{\dot{q}}{k} v^2 dv \right) dw \quad (26)$$

and the constant  $C$  is given by

$$C = \left( \frac{1}{R_2^2} \frac{1}{\varepsilon \sigma} \int_0^{R_2} \dot{q} v^2 dv \right)^{1/4} + \int_0^{R_2} \frac{1}{w^2} \left( \int_0^w \frac{\dot{q}}{k} v^2 dv \right) dw \quad (27)$$

The above integrals may be evaluated, since the relation between  $\dot{q}$  and  $r$  is known.

In the case in which  $\dot{q} = \dot{q}_0 = \text{constant}$ , the solution of (8) is given by

$$T = \frac{1}{6} \frac{\dot{q}_0}{k} (R_2^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}_0}{3\varepsilon\sigma} R_2 \right)^{1/4}; \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (28)$$

while, in the case in which  $\dot{q} = \dot{q}_0(R_2/r)$ , the solution of (8) is given by

$$T = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{k} (R_2 - r) R_2 + \left( \frac{\dot{q}_0}{2\varepsilon\sigma} R_2 \right)^{1/4}; \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (29)$$

A comparison between (28) and (21) shows that, when  $\dot{q} = \dot{q}_0 = \text{constant}$ , the constant temperature approximation gives rise to the following error

$$E = \max \left| \frac{T - T_c}{T} \right| = \frac{1}{6} \frac{\dot{q}_0}{k} R_2^2 \left( \frac{\dot{q}_0}{3\varepsilon\sigma} R_2 \right)^{-1/4} \quad (30)$$

while a comparison between (29) and (22) shows that, when  $\dot{q} = \dot{q}_0(R_2/r)$ , the constant temperature approximation gives rise to the following error

$$E = \max \left| \frac{T - T_c}{T} \right| = \frac{1}{6} \frac{\dot{q}_0}{k} R_2^2 \left( \frac{\dot{q}_0}{2\varepsilon\sigma} R_2 \right)^{-1/4} \quad (31)$$

From the above results it is easy to see that the error may be not negligible.

In the cases considered in this section, an exact solution was easily reached. Nevertheless, when  $\dot{q}$  depends on the temperature, even when the phenomenon is one-dimensional, the problem becomes more difficult and, in general, the simulations must be carried out numerically.

## A PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION

In order to obtain numerical results for more complex situations it will be assumed that the admissible fields  $u$  are continuous and piecewise linear. In other words, the numerical approximations will be reached through the minimization of  $I[u]$  assuming that the fields  $u$  are given as follows

$$u = (T_{i+1} - T_i) \left( \frac{r - r_i}{\Delta r} \right) + T_i ; \quad r_i \leq r \leq r_{i+1} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (32)$$

in which

$$r_i = R_1 + (i - 1) \Delta r \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N + 1 \quad (33)$$

$$\Delta r = \frac{R_2 - R_1}{N} \quad (34)$$

In the above equations,  $(N + 1)$  is the number of nodes and  $T_i$  represents the approximation for the temperature distribution at the node  $i$ .

Inserting (32) into (10) the functional  $I[u]$  becomes the function  $g$ , given as follows

$$g = \hat{g}(T_1, T_2, T_3, \dots, T_N, T_{N+1}) = \sum_{i=1}^N (A_i + B_i) + \frac{1}{5} \varepsilon \sigma 4\pi R_2^2 |T_{N+1}|^5 \quad (35)$$

in which

$$A_i = \frac{1}{2} k 4\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left( \frac{du}{dr} \right)^2 r^2 dr ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (36)$$

$$B_i = 4\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} \psi r^2 dr ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (37)$$

For each considered situation, the numerical approximation is obtained from the minimization of  $g$ . In other words, the  $T_i$ 's are the solution of the following (nonlinear) system

$$\frac{\partial g}{\partial T_i} = 0 ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N + 1 \quad (38)$$

Taking into account (32), the  $A_i$ 's become

$$A_i = \frac{1}{2} k 4\pi \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \right)^2 \left( \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (39)$$

In order to evaluate the  $B_i$ 's it is necessary to know the function  $\psi$ . In this work, the following two cases will be simulated ( $\dot{q}_0 = \text{constant} > 0$  and  $T_0 = \text{constant} > 0$ )

$$\text{Case 1 } \rightarrow \dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T) \Rightarrow \psi = \dot{q}_0 T_0 \ln \left( \frac{u}{T_0} \right) \quad (40)$$

$$\text{Case 2 } \rightarrow \dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)^2 \Rightarrow \psi = -\dot{q}_0 T_0^2 \frac{1}{u} \quad (41)$$

For the above cases, the  $B_i$ 's become

$$\text{Case 1 } \rightarrow B_i = -4\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} \dot{q}_0 T_0 \ln \left[ \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{T_0} \right) \left( \frac{r - r_i}{\Delta r} \right) + \frac{T_i}{T_0} \right] r^2 dr; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (42)$$

$$\text{Case 2 } \rightarrow B_i = 4\pi \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \frac{\dot{q}_0 T_0 r^2}{\left[ \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{T_0} \right) \left( \frac{r - r_i}{\Delta r} \right) + \frac{T_i}{T_0} \right]} \right\} dr; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (43)$$

and, therefore, for case 1

$$\begin{aligned} B_i = & -4\pi \dot{q}_0 \frac{1}{\alpha_i^3} \left\{ \beta_i^2 \left[ \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right) \ln \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right) - \frac{T_{i+1}}{T_0} - \frac{T_i}{T_0} \ln \left( \frac{T_i}{T_0} \right) + \frac{T_i}{T_0} \right] - \right. \\ & - 2\beta_i \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right)^2 \ln \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^2 \ln \left( \frac{T_i}{T_0} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^2 \right] + \\ & \left. + \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right)^3 \ln \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{T_{i+1}}{T_0} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^3 \ln \left( \frac{T_i}{T_0} \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^3 \right] \right\} \\ & i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (44) \end{aligned}$$

in which

$$\alpha_i = \frac{1}{T_0} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \quad \text{and} \quad \beta_i = \frac{T_i}{T_0} - \alpha_i r_i \quad (45)$$

For case 2, the  $B_i$ 's are given by

$$B_i = 4\pi\dot{q}_0 T_0 \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \left( r_i + \frac{1}{2} \Delta r \right) \Delta r - \frac{\beta_i}{\alpha_i^2} \Delta r + \frac{\beta_i^2}{\alpha_i^3} \ln \left( \frac{T_{i+1}}{T_i} \right) \right\}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (46)$$

in which  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  are the ones defined in (45).

### SOME RESULTS

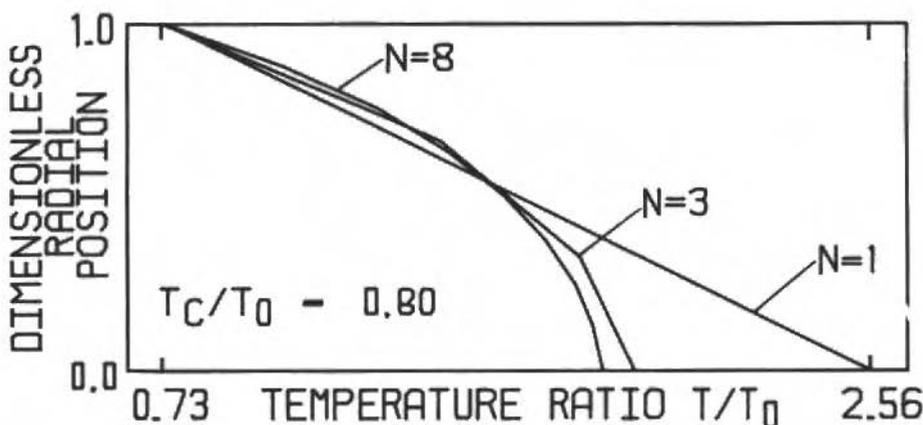


Figure 2. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 1 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.0$ ,  $(\varepsilon\sigma R_2^3 T_0^3)/k = 10.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 10.0$ .

Figures 2, 3, 4, 5, 6 and 7 present some results, obtained from the minimization of  $g$ . Each of these figures present (for  $N = 1$ ,  $N = 3$  and  $N = 8$ ) a curve  $T/T_0$  versus  $r/R_2$ , in which  $T$  is the approximated temperature field, obtained from the minimization of  $g$ .

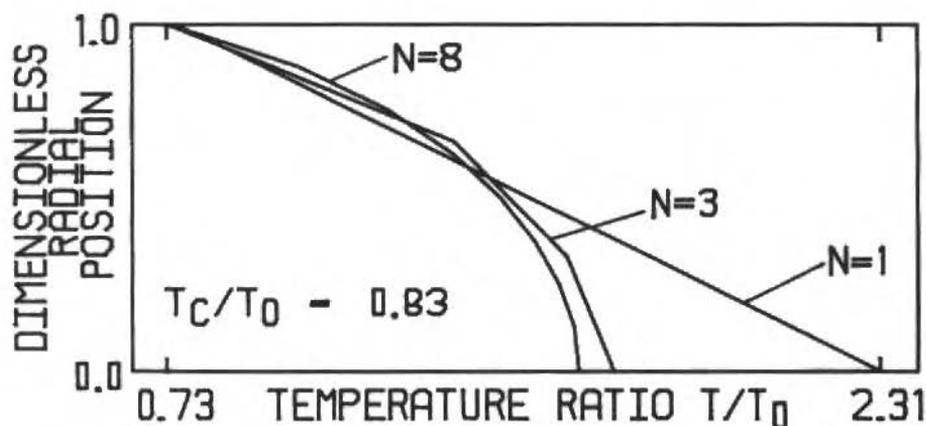


Figure 3. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 2 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)^2$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.0$ ,  $(\varepsilon\sigma R_2 T_0^3)/k = 10.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 10.0$ .

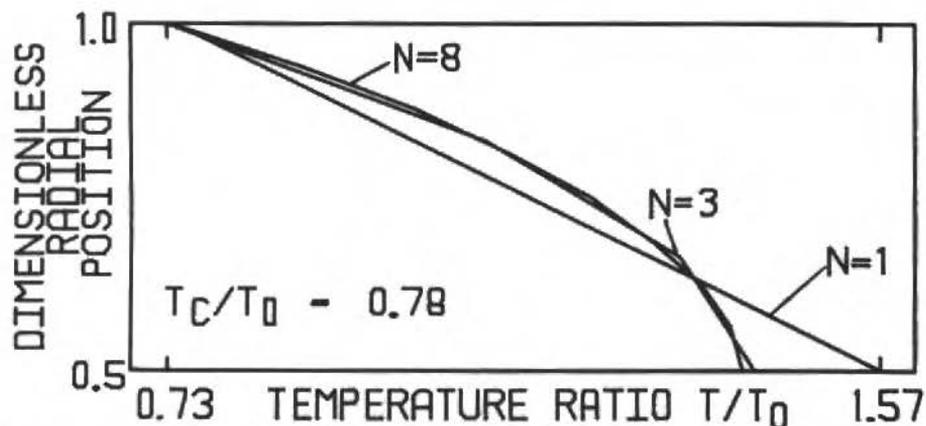


Figure 4. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 1 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.5$ ,  $(\varepsilon\sigma R_2 T_0^3)/k = 10.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 10.0$ .

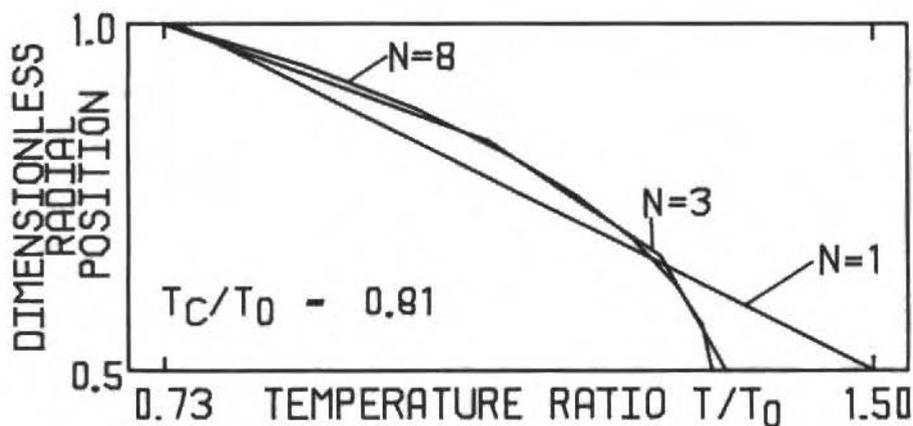


Figure 5. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 2 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)^2$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.5$ ,  $(\epsilon\sigma R_2 T_0^3)/k = 10.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 10.0$ .

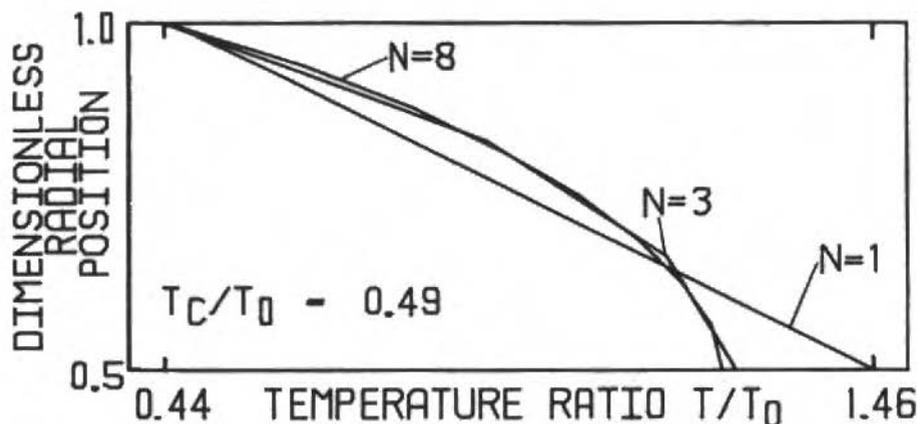


Figure 6. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 1 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.5$ ,  $(\epsilon\sigma R_2 T_0^3)/k = 100.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 10.0$ .

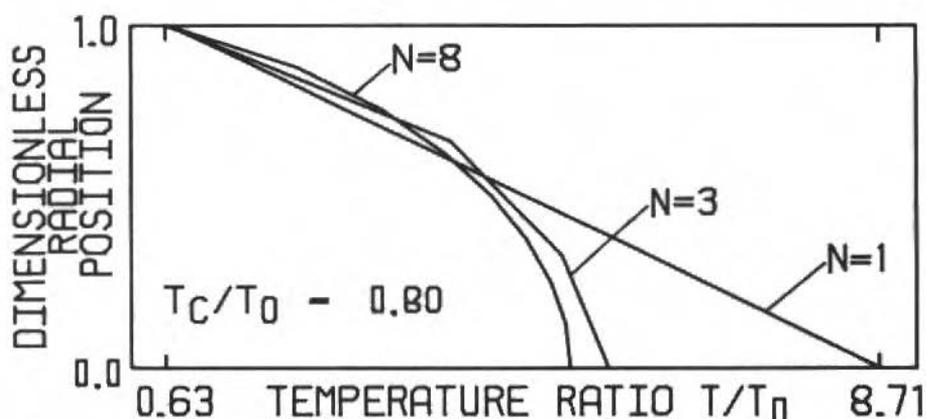


Figure 7. Temperature ratio ( $T/T_0$ ) versus dimensionless radial position ( $r/R_2$ ), for case 1 ( $\dot{q} = \dot{q}_0(T_0/T)$ ), obtained with  $R_1/R_2 = 0.0$ ,  $(\varepsilon\sigma R_2 T_0^3)/k = 100.0$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0) = 100.0$ .

It is to be noticed that, for each given  $N$ , the approximation for  $T/T_0$  (as a function of  $r/R_2$ ) depends only on  $R_1/R_2$ ,  $(\varepsilon\sigma R_2 T_0^3)/k$  and  $(\dot{q}_0 R_2^2)/(kT_0)$ .

In all the considered cases, system (38) was solved with the aid of a Newton scheme [5].

## FINAL REMARKS

In this work it was presented a powerful tool for the numerical simulation of a large class of nonlinear heat transfer problems. Within this class are two-dimensional and three-dimensional problems described by (8) as well as problems in which  $\dot{q}$  is not so simple as in the cases simulated here.

In all these situations, the variational principle provides a reliable and efficient way for carrying out simulations.

**REFERENCES**

- [1] SLATTERY, J.C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [2] SPARROW, E.M. and CESS, R.D. Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, Washington, 1978.
- [3] SAGAN, H. Introduction to the calculus of variations, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [4] SALDANHA DA GAMA, R.M. A New Mathematical Modeling for Energy Transfer Problems with Radiative Boundary Conditions, Appl. Math. Mod., vol. 14, no. 2, 1990.
- [5] PSHENICHNY, B.N. and DANILIN, Yu. M. Numerical Methods in Extremal Problems, MIR Publishers, Moscow, 1978.

## PATRONES DE FLUJO Y DE TEMPERATURA EN TUBOS CON PAREDES DE ESPESOR FINITO: INCORPORACION DE LOS FENOMENOS DE DIFUSION EN AMBOS MEDIOS

### FLOW AND TEMPERATURE PATTERNS IN THICK-WALLED TUBES: INCLUSION OF DIFFUSION PHENOMENA IN BOTH MEDIA

Antonio Campo

College of Engineering  
Idaho State University  
Pocatello, ID 83209, USA

Juan C. Morales\*

Department of Mechanical Engineering  
University of Texas at Austin  
Austin, TX 78712, USA

\*Direccion Permanente:

Depto. de Mecánica, Universidad Simón Bolívar  
Caracas, Venezuela

#### RESUMEN

*Este trabajo examina el desarrollo simultáneo de la velocidad y de la temperatura de un flujo laminar a través de un tubo de paredes gruesas. La corriente del flujo entra al tubo con velocidad y temperatura uniforme. El calentamiento se lleva a cabo mediante la aplicación de un flujo de calor uniforme en la superficie externa del tubo, el cual es de tamaño finito. La incorporación de flujos con bajos números de Peclet conlleva incluir los efectos de difusión axial de cantidad de movimiento y de calor en el fluido y los efectos de difusión de calor bidimensional en el sólido. Los cálculos para los campos de la velocidad y de temperatura se realizaron utilizando un procedimiento de volúmenes finitos.*

**Palabras-clave:** Tubo de Paredes Gruesas ■ Fenomenos de Difusion ■ Campos de Velocidad e de Temperatura

#### ABSTRACT

*This paper is concerned with the simultaneous development of velocity and temperature in a flow moving laminarily through a thick-walled tube. The flow possesses uniform velocity and uniform temperature at the inlet of the tube. A uniform heat flux is applied at the outer surface of the tube having a finite length. The utilization of low Peclet number flows gives rise to the inclusion of axial diffusion of momentum in the fluid and bidimensional heat diffusion in the solid. Calculation of the velocity and temperature fields were carried out employing the control volume based procedure.*

**Keywords:** Thick-Walled Tubes ■ Diffusion Phenomena ■ Velocity and Temperature Fields

## NOMENCLATURA

$c_p$	calor específico, $kJ/kg - C$
$h$	coeficiente convectivo, $W/m^2 - C$
$k_f$	conductividad térmica del fluido, $W/m - C$
$k_s$	conductividad térmica del sólido, $W/m - C$
$K_{s,f}$	relación de conductividades térmicas, $k_s/k_f$
$L$	longitud de calentamiento, $m$
$L^*$	valor adimensional de $L$ , $L/r_i Pe$
$\dot{m}$	flujo másico, $kg/s$
$Nu$	número de Nusselt local, $2hr_i/k_f$
$p$	presión, $Pa$
$Pe$	número de Peclet, $u_0(2r_i)/a_f$
$q_{si}$	densidad de calor en la superficie interna, $W/m^2$
$q_{se}$	densidad de calor en la superficie externa, $W/m^2$
$Q_T$	calor total transferido, $W$
$r$	variable radial, $m$
$r_i$	radio interno del tubo, $m$
$r_e$	radio externo del tubo, $m$
$Re$	número de Reynolds, $u_0(2r_i)/\nu$
$t$	espesor de la pared del tubo, $r_e - r_i$ , $m$
$T$	temperatura, $C$
$u$	velocidad axial del fluido, $m/s$
$v$	velocidad radial del fluido, $m/s$
$x$	variable axial, $m$
$X$	variable axial adimensional, $\dot{x}/r_i Pe$
$a_f$	difusividad térmica del fluido, $m^2/s$
$\nu$	viscosidad cinemática del fluido, $m^2/s$
$\phi$	temperatura adimensional, $k_f(T - T_0)/q_{se}r_e$
$\rho$	densidad del fluido, $kg/m^3$

## Subíndices

$b$	volumétrica media
$e$	superficie externa del tubo
$f$	se refiere al fluido
$i$	superficie interna del tubo
$s$	se refiere al sólido
$o$	entrada

## INTRODUCCION

Es práctica común que tanto los fenómenos de difusión axial de cantidad de movimiento como los de difusión de calor suelen descartarse en el análisis térmico de equipos de intercambio de calor. Sin embargo, se sabe que la contribución del primero afecta adversamente el campo de velocidad en flujos con bajos números de Reynolds. Además, la presencia del segundo modifica el campo de temperatura en flujos caracterizados por bajos números de Peclet. Existen diversos criterios que proporcionan la importancia de cada fenómeno por separado. Por ejemplo; desde una óptica de dinámica de fluidos, Schlichting [1] recomienda que cuando  $Re > 400$ , la difusión axial de cantidad de movimiento está ausente en la vecindad del origen ( $x = 0$ ). Por otro lado; desde un punto de vista térmico, Hennecke [2] sugiere que la acción de la conducción axial en el fluido puede omitirse en la entrada ( $x = 0$ ) para condiciones en donde  $Pe > 10$ . Evidentemente, esta frontera corresponde a tubos de paredes delgadas en donde la velocidad se encuentra plenamente desarrollada, en tanto que la temperatura prevalece uniforme lejos del origen ( $x \ll 0$ ). Este criterio aplica cuando la superficie del tubo está expuesta a un flujo de calor constante en la región corriente abajo. En torno a este tema relacionado a la importancia de los fenómenos de difusión axial se han publicado dos trabajos claves en la literatura especializada. McMordie y Emery [3] examinaron el desarrollo simultáneo de la velocidad y de la temperatura en un tubo de paredes delgadas. La solución presentada por estos autores es de tipo capa límite e incluye la conducción axial en el fluido, pero excluye la difusión axial de cantidad de movimiento. Recientemente, Pagliarini [4] examinó la incorporación de ambos mecanismos difusivos en las ecuaciones de Navier-Stokes y de energía y resolvió el problema en una región ilimitada ( $-\infty < x < \infty$ ).

Bajo la hipótesis de tuberías de paredes delgadas en aplicaciones de convección interna, se sabe que las condiciones de contorno térmicas son idénticas en las superficies externa e interna del tubo. Por lo tanto, el conocimiento de cualquier condición de contorno térmica en la parte externa implica que ésta es también conocida en la parte interna. Por el contrario, cuando las paredes del tubo son relativamente gruesas puede existir una discrepancia considerable entre ellas. Este es el caso típico de ciertos fluidos que necesitan ser transportados a altas presiones por tuberías de paredes gruesas. Para estas aplicaciones específicas, la condición de contorno en la superficie interna del tubo se desconoce a priori.

Este tipo de problemas de transmisión de calor por convección forzada ha sido bautizado por Luikov et al. [5] con el nombre genérico de problemas conjugados. Bajo esta perspectiva amplia, la formulación matemática tiene que replantearse y hacerse forzosamente en el dominio completo que abarque al fluido y al sólido. En consecuencia, esta vía mucho más general necesita introducir nuevas condiciones de contorno térmicas que establezcan continuidad tanto de la temperatura como del flujo de calor en la interfase fluido-sólido.

La influencia que ejerce la conducción de calor bidimensional en la pared de un tubo sobre la convección forzada interna ha sido estudiada por varios autores. Las suposiciones de velocidad desarrollada y temperatura desarrollándose son las más comunes, en tanto que la condición de contorno en la superficie externa del tubo puede ser de temperatura uniforme o de flujo de calor uniforme. Los trabajos de Mori et al. [6], Barozzi y Pagliarini [7] y Campo y Schuler [8] han demostrado la marcada distorsión del campo de temperatura en el fluido como producto de un flujo de calor uniforme aplicado en la parte de afuera del tubo.

En virtud de lo anterior, la motivación principal de esta investigación consiste en ampliar el estudio reportado en [8] al caso más general en donde la velocidad y la temperatura se desarrollan simultáneamente desde el origen del tubo  $x = 0$ . Conforme a esto, se pretende explorar la importancia de los mecanismos de difusión axial de cantidad de movimiento y de calor en el fluido conjuntamente con los de conducción de calor bidimensional en el tubo. Una revisión exhaustiva de la bibliografía refleja que este problema conjugado de naturaleza elíptica incluyendo los fenómenos de difusión no ha sido abordado aún.

En este orden de ideas, el primer objetivo de este trabajo consiste en determinar el campo de velocidad de un fluido que se mueve con bajos números de Reynolds dentro de un tubo circular. El segundo objetivo está centrado en obtener los campos de temperatura tanto en el seno del fluido como en la pared sólida del tubo. Como es de esperarse, estos dos últimos campos de verán afectados por los característicos números de Peclet bajos. Para analizar el desarrollo simultáneo en este tipo de flujos, se requiere resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones elípticas de conservación para ambos medios sin invocar la teoría de la capa límite en el fluido. Este problema conjugado está gobernado por cinco grupos adimensionales, a saber: el número de Reynolds, el número de

Peclet, la longitud finita de calentamiento, el espesor de la pared del tubo y el cociente de conductividades térmicas entre el sólido y el fluido.

El cálculo numérico de este problema en el dominio fluido-sólido se realizó empleando una discretización por volúmenes finitos propuesta originalmente por Patankar [9]. Adicionalmente, para la integración del sistema de ecuaciones algebraicas se utilizó el algoritmo especializado MSI de alta velocidad elaborado por Schneider y Zedan [10]. Entretanto, la ejecución se hizo con un programa de estructura parecida al SIMPLER. Los resultados numéricos así obtenidos se presentan en forma gráfica para la variación de la temperatura volumétrica media, la temperatura de la interfase, el flujo calorífico de la interfase y el número de Nusselt. Finalmente, una vez conocidas estas cantidades, se puede proceder a calcular la transmisión de calor total que se lleva a cabo en el tubo de tamaño finito.

## POSTULADO DEL PROBLEMA

Considérese un tubo circular de paredes gruesas al cual entra un fluido con movimiento laminar siendo la velocidad y la temperatura uniformes en  $x = 0$ . La superficie externa del tubo recibe una incidencia de calor constante  $q_{se}$  en toda la extensión de la zona finita de calentamiento.

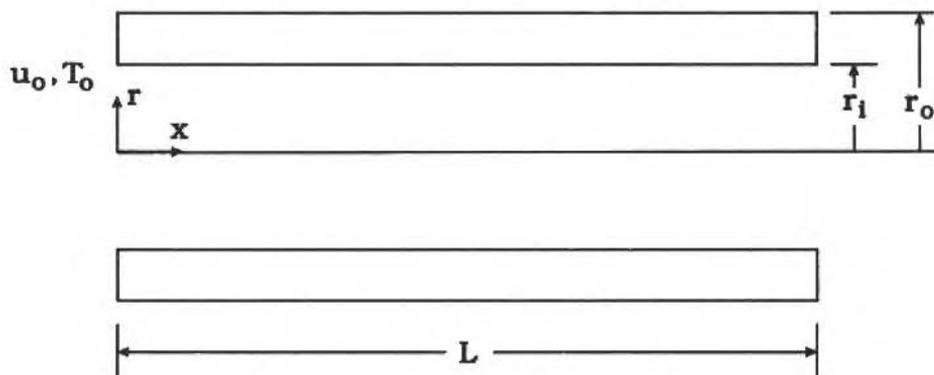


Figura 1. Tubo de paredes gruesas.

Amparados en la suposición de propiedades termofísicas constantes para ambos medios, las ecuaciones de conservación incluyendo los términos de difusión axial son:

Medio Fluido

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] \right\} \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial r} = \alpha_f \left[ \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) \right] \quad (4)$$

Medio Sólido

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = 0 \quad (5)$$

en donde los subíndices  $f$  y  $s$  en la variable temperatura designan el medio fluido y el medio sólido, respectivamente.

Las condiciones de contorno relacionadas al problema termohidráulico se enuncian a continuación. Estas son:

a) para  $x = 0$

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad T_f = T_0, \quad 0 < r < r_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = 0, \quad r_i < r < r_e \quad (7)$$

b) para  $r = r_e$ ;  $0 < x < L$ 

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = q_{se} \quad (8)$$

c) para  $r = r_i$ ;  $0 < x < L$ 

$$u = 0, \quad T_f = T_s \quad (9)$$

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial r} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \quad (10)$$

d) para  $x = L$ 

$$\frac{\partial T_f}{\partial x} = 0, \quad 0 < r < r_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = 0, \quad r_i < r < r_e \quad (12)$$

Tal como se ha mencionado anteriormente, el objetivo primordial de este trabajo consiste en la determinación de los campos de velocidad en el fluido y de temperatura tanto en el fluido como en el sólido. Para ello, se requiere resolver el sistema de ecuaciones (1)-(12) mediante técnicas de cálculo numérico inevitablemente. Con esta información, se puede proceder a obtener los parámetros imprescindibles para el análisis hidrodinámico y térmico del problema.

## PARAMETROS HIDRODINAMICOS Y TERMICOS

El proceso de adimensionar las ecuaciones anteriores usando las variables apropiadas indica que los parámetros adimensionales que describen el problema son:

- El número de Peclet  $Pe$
- La relación de conductividad térmica  $K_{sf}$
- El espesor de la pared  $r_e/r_i$
- La longitud de calentamiento  $L^*$

En virtud de esto, la solución numérica de las ecuaciones (1)-(12) se presentará en término del siguiente grupo de variables y parámetros adimensionales:

- El coeficiente de fricción aparente

$$f_{ap} = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2} \frac{r_i}{x} \quad (13)$$

- La temperatura volumétrica media

$$T_{fb} = \frac{\int_A u T_f dA}{\int_A u dA} \quad (14)$$

- La temperatura de la interfase

$$T_{fi} = T_f(x, r_i) \quad (15)$$

- El número de Nusselt

$$Nu = \frac{2r_i \left( \frac{\partial T_f}{\partial r} \right)_{r=r_i}}{T_{fi} - T_{fb}} \quad (16)$$

Por consiguiente, esta información da base para calcular el calor total transferido empleando la relación

$$Q_T = \dot{m} c_p [T_0 - T_b(x)] \quad (17)$$

la cual esta inspirada en el Primer Principio de la Termodinámica.

## CALCULO NUMERICO

La naturaleza conjugada del problema termohidráulico, aunada al carácter elíptico de las ecuaciones de conservación hace mandatorio el uso de técnicas de diferencias finitas. Por lo tanto, enmarcando las ecuaciones (1)-(5) en una perspectiva de cálculo aproximado, se desprende que cualquier método

de solución numérica hace que cada ecuación de conservación se aproxime por una ecuación algebraica en un punto  $i, j$  de la malla. Una vez que se tiene la ecuación algebraica para cada punto que conforma el dominio fluido-sólido, la tarea principal consiste en resolver el sistema de ecuaciones algebraicas por métodos iterativos rápidos.

Sin embargo, en este trabajo la discretización de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se realizó con el enfoque físico de los volúmenes de control ideado por Patankar [9]. En este sentido, cada ecuación participante se amolda a la forma general de la ecuación de difusión-convección:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \rho U_j \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right) = S_\phi \quad (19)$$

En esta ecuación,  $\Gamma_\phi$  se conoce como el coeficiente de difusión efectiva y  $S_\phi$  como el término de fuente.

Cobra especial importancia destacar que el sistema de ecuaciones algebraicas pentadiagonales se resolvió con el algoritmo MSI desarrollado por Schneider y Zedan [10]. Además de su alta flexibilidad, el atributo más importante de este algoritmo lo constituye el hecho de que al compararse con otros, tales como SOR, ADI y SIP el costo computacional varía entre 25 y 50% de la alternativa más económica. Entretanto, la ejecución se hizo con un programa de estructura parecida al SIMPLER.

A manera de comentario tangencial, conviene señalar que la variación abrupta de la conductividad térmica en la interfase fluido-sólido se manejó con la formulación propuesta por Patankar [11], la cual fue concebida especialmente para este tipo de condición de contorno. Esto equivale a calcular el promedio armónico de las conductividades térmicas del fluido y del sólido, o sea

$$k_a = \frac{k_f k_s}{(k_f + k_s)} \quad (19)$$

Con el propósito de reducir el elevado número de cómputos, se empleó una distribución de nodos con intervalos desiguales tal como se ilustra en la Figura 2. Para lograr esto se utilizó una transformación de coordenadas eficiente propuesta por Roberts [12]. Se realizaron varias pruebas con mallas diferentes

para examinar la precisión del método y su convergencia. Se llegó a la conclusión que una malla con 30 intervalos radiales (20 en el fluido y 10 en el sólido) combinada con 30 intervalos axiales proporcionaba buenos resultados para los casos críticos examinados. Este tipo de malla fue usada en la Referencia [8] también.

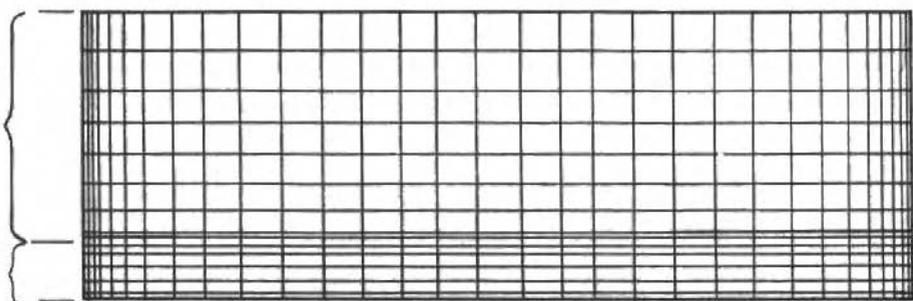


Figura 2. Malla con intervalos desiguales.

Adicionalmente, se compararon los resultados para el caso límite de flujos a través de tubos de paredes gruesas en donde la velocidad se encuentra totalmente desarrollada en la entrada ( $x = 0$ ), mientras que la temperatura se está desarrollando. Para el caso extremo de  $r_e/r_i = 1.6$ , las Figuras 3 y 4 muestran una buena concordancia con los resultados para  $\phi_{si}$  y  $Nu$  reportados por Mori et al. [6]. Asimismo, se consideró otro caso límite consistente en el desarrollo simultáneo de la velocidad y de la temperatura en tubos de paredes delgadas. Las distribuciones del factor de fricción aparente y del número de Nusselt calculados por Pagliarini [4] aparecen dibujadas en las Figuras 5 y 6. Aquí se puede apreciar que la comparación con nuestros resultados es excelente en toda la región de entrada.

## PRESENTACION DE LOS RESULTADOS NUMERICOS

Desde un punto de vista práctico los resultados más significativos que aporta esta investigación son las predicciones de la temperatura volumétrica media  $\phi_b$  y de la temperatura en la interfase  $\phi_{si}$  en función del número de Peclet  $Pe$ , el cociente de los radios  $r_e/r_i$ , el cociente de conductividades térmicas  $K_{sf}$  y la longitud adimensional del tubo  $L^*$ . Debido al excesivo número de parámetros que afectan a este problema, se decidió fijar dos de ellos, a saber  $L^* = 0.1$  y

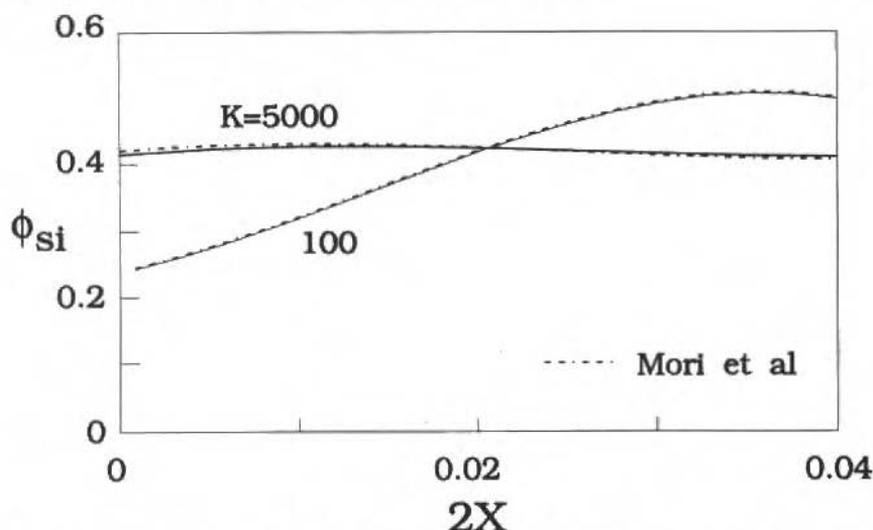


Figura 3. Comparación de la temperatura en la interfase para  $r_e/r_i = 1.6$ . Caso de velocidad desarrollada.

$r_e/r_i = 1.2$  con el propósito de reducir el número de figuras en la presentación de los resultados. En este sentido, las Figuras 7-9 corresponden a una situación en la cual  $Pe = 500$  y los valores de  $K_{sf}$  son 1, 500 y 5000, respectivamente. Por ejemplo, el flujo de sodio en un tubo de hierro está caracterizado por un valor de  $K_{sf} = 1$ . En cambio, el cociente  $K_{sf} = 500$  puede representar las combinaciones aceite-hierro al igual que aire-acero.

La Figura 7 muestra el desarrollo de la temperatura volumétrica media. Aquí se puede observar la dependencia lineal de  $\phi_b$  con  $X^*$  para  $K_{sf} = 1$  y 500, coincidiendo plenamente con el resultado  $\phi_b = 8X^*$  que corresponde al mismo caso, pero con tubos de paredes delgadas. A medida que  $K_{sf}$  aumenta a 5000, se observa el carácter parabólico de  $\phi_b$  en la cercanía de la entrada  $X^*$ . Esto se atribuye a la conducción axial en el tubo que calienta al fluido con una intensidad mayor. El conocimiento de la temperatura volumétrica media en cualquier estación  $X^*$  facilita el cálculo del calor total transferido  $Q_T$  desde el origen  $x = 0$  hasta esa estación usando la ec.(7) directamente.

En la Figura 8 se aprecia la distribución de la temperatura en la interfase  $\phi_{si}$  para las mismas condiciones de la Figura 7. La curva correspondiente a  $K_{sf} = 1$  es análoga a la curva asociada al caso de paredes delgadas, mostrando

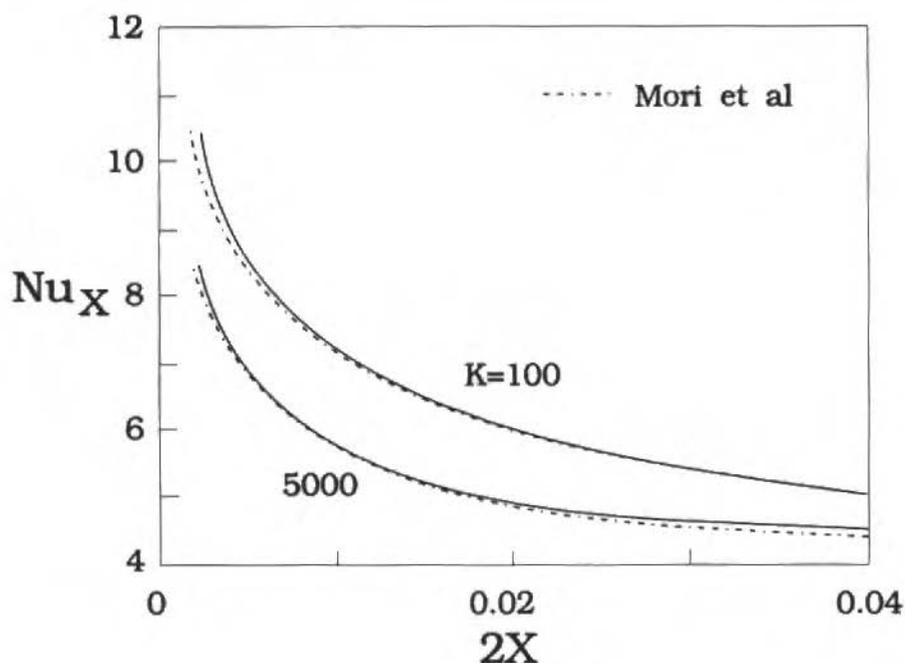


Figura 4. Comparación del número de Nusselt para  $r_e/r_i = 1.6$ . Caso de velocidad desarrollada.

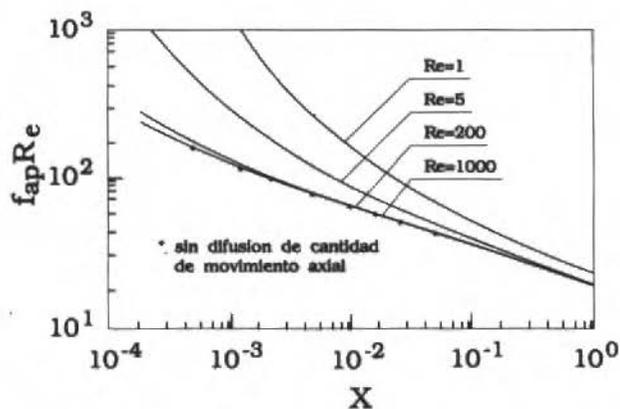


Figura 5. Distribución del factor de fricción aparente.

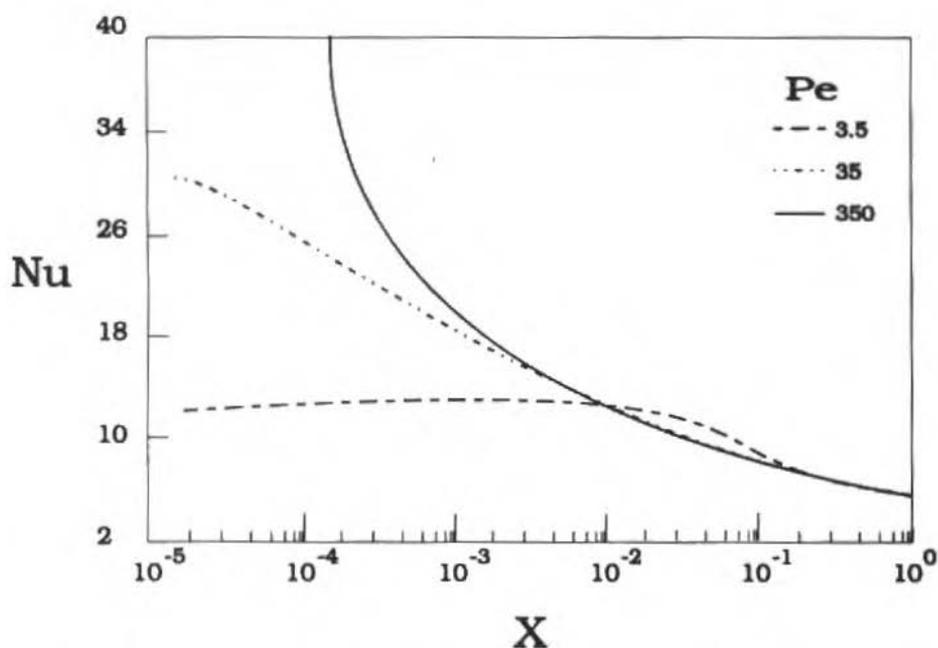


Figure 6. Distribución del número de Nusselt para  $r_e/r_i = 1$  y  $Pr = 0.7$ .

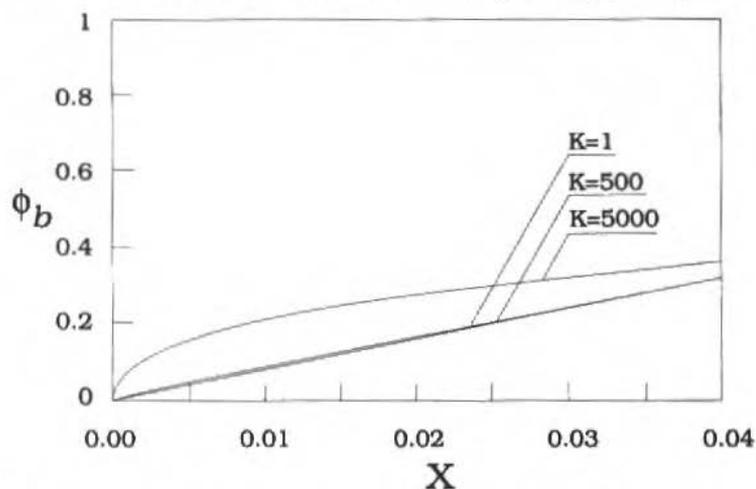


Figure 7. Variación de la temperatura volumétrica media para  $r_e/r_i = 1.2$  y  $Pe = 500$ .

su característico patrón lineal con pendiente 8 en la región corriente abajo. A medida que  $K_{sf}$  aumenta a 500 la curva tiende a un comportamiento lineal casi horizontal, en donde se manifiesta el alto grado de calentamiento por conducción que se transmite a la superficie interna del tubo. A pesar que para  $K_{sf} = 500$  la temperatura  $\phi_b$  no se desviaba del comportamiento lineal de pared inactiva (ver Fig. 7), no ocurre así para  $\phi_{si}$  en donde se ve una marcada diferencia. Más aún, al alcanzar  $K_{sf}$  el valor de 5000, la variación de  $\phi_{si}$  es totalmente independiente de la coordenada axial, lo cual indica que se ha arribado a una condición límite de temperatura uniforme en la pared del tubo.

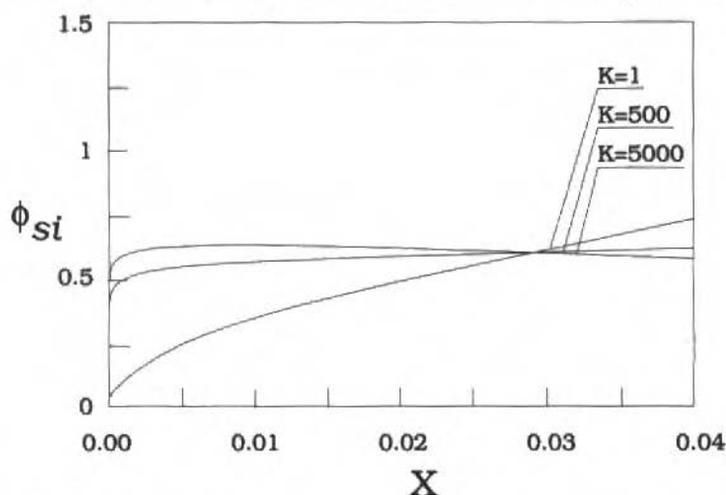


Figure 8. Variación de la temperatura en la interfase para  $r_e/r_i = 1.2$  y  $Pe = 500$ .

Finalmente, la Figura 9 recoge la información depositada en las figuras anteriores. Esta figura ilustra el comportamiento monótono decreciente para la familia de curvas del número de Nusselt en función de  $X$ . Para una estación axial dada, el número de Nusselt disminuye cuando  $K_{sf}$  aumenta. Adicionalmente, dentro del marco de tubos con paredes finas, la curva para  $K_{sf} = 1$  se aproxima al caso límite dictado por una condición de flujo de calor uniforme. Por el contrario, la curva para  $K_{sf} = 5000$  está cercana a la asociada a una condición de temperatura uniforme. Conviene resaltar que la combinación de los resultados de las tres figuras anteriores proporciona la distribución de la temperatura en la superficie externa del tubo, esto es  $\phi_{se}$

vs.  $X$ . Obviamente, esta curva se omite en este trabajo por limitaciones de espacio.

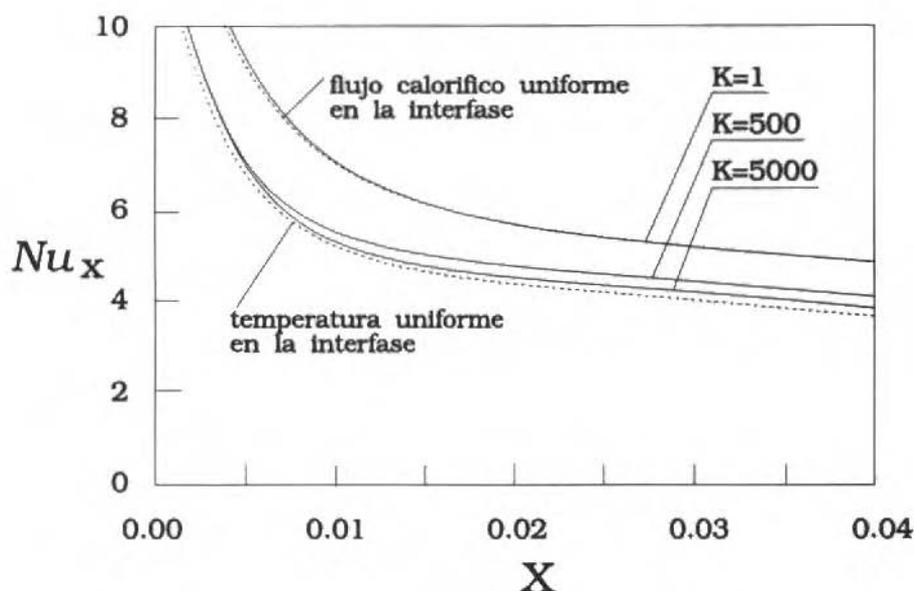


Figure 9. Variación del número de Nusselt para  $r_e/r_i = 1.2$  y  $Pe = 500$ .

## CONCLUSIONES

Este estudio numérico presenta una investigación exhaustiva del desarrollo simultáneo de velocidad y temperatura en tubos fabricados con paredes gruesas incorporando la difusión axial tanto en el fluido como en el sólido. Las tuberías con paredes gruesas son capaces de soportar altas presiones en el fluido circulante. Los resultados numéricos se obtuvieron empleando un procedimiento que descansa sobre discretizaciones con volúmenes finitos.

Las conclusiones más importantes que se pueden extraer de este trabajo son las siguientes:

- 1) A medida que  $K_{sf}$  disminuye los resultados térmicos tienden a plegarse con los resultados para desarrollo simultáneo en tubos de paredes delgadas con flujo de calor uniforme y excluyendo los fenómenos de difusión axial en el fluido y en el sólido.
- 2) Cuando  $K_{sf}$  aumenta y adquiere valores grandes, ocurre la misma tendencia citada anteriormente pero en sentido contrario, o sea los resultados se concentran en el entorno de los del caso límite de temperatura uniforme para las mismas condiciones físicas.

### REFERENCIAS

- [1] SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory, Seventh edition, McGraw-Hill, New York, USA, 1976.
- [2] HENNECKE, D.K. Heat Transfer by Hagen-Poiseuille Flow in the Thermal Development Region with Axial Conduction, *Wärme-und Stoffübertragung* 1, pp. 177-183, 1968.
- [3] McMORDIE, R.K. and EMERY, A.F. A Numerical Solution for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes with Axial Conduction and Developing Thermal and Velocity Fields, *Journal of Heat Transfer* 89, 11-16, 1967.
- [4] PAGLIARINI, G. Steady Laminar Heat Transfer in the Entry Region of Circular Tubes with Axial Diffusion of Heat and Momentum, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32, pp. 1037-1052, 1989.
- [5] LUIKOV, A.V., ALEKSASHENKO, V.A. and ALEKSASHENKO A.A. Analytical Methods of Solution of Conjugated Problems in Convective Heat Transfer, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 14, pp. 1047-1056, 1971
- [6] MORI, S., SAKAKIBARA, M. and TANIMOTO, A. Steady Heat Transfer to Laminar Flow in a Circular Tube with Conduction in the Tube Wall, *Heat Transfer-Japanese Research* 3, pp. 37-46, 1974.
- [7] BAROZZI, G.S. and PAGLIARINI, G. A Method to Solve Conjugate Heat Transfer Problems: The Case of Fully Developed Laminar Flow in a Pipe, *Journal of Heat Transfer* 107, pp. 77-83, 1978.

- [8] CAMPO, A. and SCHULER, C. Heat Transfer in Laminar Flow Through Circular Tubes Accounting for Two-Dimensional Wall Conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **31**, pp. 2251-2259, 1988.
- [9] PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C., USA, 1980.
- [10] SCHNEIDER, G.E. and ZEDAN, M. A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, *Numerical Heat Transfer* **4**, pp. 1-19, 1981.
- [11] PATANKAR, S.V. A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Irregular Geometries and Conjugate Heat Transfer, *Proc. International Heat Transfer Conference, Toronto, Canada*, **3**, pp. 297-302, 1978.
- [12] ROBERTS, G.O. Computational Meshes for Boundary Layer Problems. In *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, Munich, Germany, **8**, pp. 171-177, 1971.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

### Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the English title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from English, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.

ÍNDICE / CONTENTS

R.F. Bobenrieth M. and M.A. Ortega	The Solution of the Compressible Turbulent Boundary Layer by the Keller Method and its Application to the Case of the Shock Tube	89
F.R. da Cunha	Efeitos Não-Lineares no Escoamento em Meio Poroso com Interface Fluida	107
F. de Almeida França	Análise de Sinais de Pressão e Queda de Pressão como Indicadores de Regimes em Fluxo Bifásico Horizontal	137
R.M.S. da Gama	On the Heat Transfer Phenomena in a Spherical Body Surrounded by Vacuum, with Temperature-Dependent Heat Generation	151
A. Campo y J.C. Morales	Patrones de Flujo y de Temperatura en Tubos con Paredes de Espesor Finito: Incorporacion de los Fenomenos de Difusion en Ambos Medios	167