



REVISTA  
BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

PUBLICAÇÃO DA ABCM  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

EDITOR: Hans Ingo Weber

Deptº Projeto Mecânico, FEC, UNICAMP, Caixa Postal 6131, 13081 Campinas/SP, Brasil,  
Tel. (0192) 39-7284, Telex (019) 1981, Telefax (0192) 39-4717

EDITORES ASSOCIADOS

Álvaro Toubes Prata

Deptº Engenharia Mecânica, UFSC, Caixa Postal 476, 88049 Florianópolis/SC, Brasil,  
Tel. (0482) 34-5166, Telex (482) 240 UFSC

Augusto César Noronha R. Galeão

LNCC, Rua Lauro Müller 455, 22290 Rio de Janeiro/RJ, Brasil, Tel. (021) 541-2132 r. 170, Telex 22563 CBPQ

Carlos Alberto de Almeida

Deptº Eng. Mecânica, PUC/RJ, Rua Marquês de São Vicente, 255, 22453 Rio de Janeiro/RJ, Brasil,  
Tel. (021) 529-9323, Telex (021) 131048

Hazim Ali Al-Qureshi

ITA/CTA, Caixa Postal 6001, 12225 São José dos Campos/SP, Tel. (0123) 41-2211

CORPO EDITORIAL

Abimael Fernando D. Loula (LNCC)

Arno Blass (UFSC)

Carlos Alberto de Campos Selke (UFSC)

Carlos Alberto Schneider (UFSC)

Clovis Raimundo Maliska (UFSC)

Fathi Darwich (PUC/RJ)

Henner Alberto Gomide (UFU)

Jaime Tupiassú de Castro (PUC/RJ)

João Lirani (EESC)

José Luiz de França Freire (PUC/RJ)

Leonardo Goldstein Jr. (UNICAMP)

Luiz Carlos Martins (COPPE/UF RJ)

Luiz Carlos Wrobel (COPPE/UF RJ)

Moyses Zindeluck (COPPE/UF RJ)

Nelson Back (UFSC)

Nestor Alberto Zouain Pereira (COPPE/UF RJ)

Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)

Paulo Rizzi (ITA)

Paulo Roberto de Souza Mendes (PUC/RJ)

Raul Feijóo (LNCC)

Renato M. Cotta (COPPE/UF RJ)

Samir N.Y. Gerger (UFSC)

Valder Steffen Jr. (UFU)

---

Publicado pela / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS, ABCM /  
BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretária da ABCM: Sra. Simone Maria Frade

Av. Rio Branco, 124 - 18º Andar - Rio de Janeiro - Brasil

Tel. (021) 221-6177 R. 278, Telex (21) 37973 CGEN-BR

Presidente: Sidney Stuckenbruck

Secret. Geral: Eloi Fernandez y Fernandez

Diretor de Patrimônio: Antonio MacDowell de Figueiredo

Vice-Presidente: Luiz Bevilacqua

Secretário: Oswaldo A. Pedrosa Jr.

---

PROGRAMA DE APOIO À PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

MCT



## ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE CASCAS CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS SOB COMPRESSÃO AXIAL

### NONLINEAR GEOMETRIC ANALYSIS OF STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL COMPRESSIVE LOADING

Ricardo Azoubel da Mota Silveira\*  
Khosrow Ghavami - Membro ABCM

Departamento de Engenharia Civil  
PUC-Rio

22453 Rio de Janeiro RJ, Brasil

\*Atualmente Professor Assistente da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

#### RESUMO

*É realizado no presente trabalho um estudo do comportamento não-linear geométrico no regime elástico de cascas cilíndricas isotrópicas e enrijecidas submetidas à compressão axial uniforme. No método de análise proposto, o elemento de casca enrijecida é idealizado como um elemento de casca isotrópica sujeito à ação de forças interativas em linha que agem nas direções dos enrijecedores longitudinais e/ou circunferenciais, simulando o efeito destes. As magnitudes destas forças interativas são avaliadas pela compatibilidade e equilíbrio entre os elementos de casca e de enrijecedor, e incorporadas nas equações não-lineares como forças de massa. Os resultados numéricos obtidos, baseados no método das diferenças finitas, mostram a validade e a exatidão da formulação teórica proposta.*

**Palavras-chave:** Análise Não-Linear Geométrica ■ Cascas Cilíndricas Enrijecidas ■ Elemento de Casca Isotrópica ■ Método das Diferenças Finitas

#### ABSTRACT

*The structural non-linear behaviour of isotropic and stiffened cylindrical shells subjected to uniform axial compression load in the elastic range is presented in this paper. In the method of analysis developed herein, the stiffened shell is idealized as an isotropic shell subjected to interactive line loads along the stringer and/or ring stiffeners. These interactive loads are incorporated into the equilibrium equations of shell element by consideration of compatibility and equilibrium between the shell and stiffener elements. The non-linear equations are expressed in finite difference form and implemented in a computer program. They are solved by means of a combined incremental-interactive load method. Comparison of the obtained results with those calculated from other methods are satisfactory.*

**Keywords:** Geometric Non-Linear Analysis ■ Stiffened Cylindrical Shells ■ Isotropic Shell Element ■ Finite Difference Method

## NOMENCLATURA

$E$	módulo de elasticidade da casca
$e_L$	excentricidade, distância do centro do enrijecedor longitudinal ao plano médio da casca
$F_{xC}, F_{\theta C}, F_{zC}$	forças de interação entre a casca e o enrijecedor circunferencial
$F_{xL}, F_{\theta L}, F_{zL}$	forças de interação entre a casca e o enrijecedor longitudinal
$h_C$	altura do enrijecedor circunferencial
$h_L$	altura do enrijecedor longitudinal
$L$	comprimento longitudinal da casca
$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$	momentos resultantes por unidade de comprimento da casca
$M_{VL}, M_{HL}, M_{TL}$	momentos resultantes por unidade de comprimento do enrijecedor longitudinal
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$	forças resultantes por unidade de comprimento da casca
$N_{AL}, Q_{VL}, Q_{HL}$	forças resultantes por unidade de comprimento do enrijecedor longitudinal
$p$	pressão lateral
$R$	raio médio da casca
$t$	espessura da casca
$t_C$	espessura do enrijecedor circunferencial
$t_L$	espessura do enrijecedor longitudinal
$T_C$	momento de torção interativo entre a casca e o enrijecedor circunferencial
$T_L$	momento de torção interativo entre a casca e o enrijecedor longitudinal
$u, v, w$	deslocamentos da superfície média da casca nas direções $x, \theta$ e $z$ , respectivamente
$\bar{u}_e, \bar{v}_e, \bar{w}_e$	deslocamentos totais de um ponto sobre o eixo do enrijecedor
$\hat{w}$	função trigonométrica que representa a imperfeição geométrica inicial
$\bar{w}$	deslocamento radial total ( $w + \bar{w}$ )
$x, \theta, z$	coordenadas axial, circunferencial e radial
$z = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{1 - \nu^2}$	parâmetro geométrico de Batdorf

$\Delta x$	espaçamento da malha na direção longitudinal
$\Delta \theta$	ângulo entre duas linhas nodais consecutivas da malha
$\epsilon_0$	deformação de escoamento do material
$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$	deformações específicas da superfície média de casca
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\sigma_0$	tensão de escoamento do material
$\sigma_{CR}$	tensão crítica elástica
$\sigma_x$	tensão longitudinal

## INTRODUÇÃO

As cascas cilíndricas vêm, já há algum tempo, recebendo especial atenção dos pesquisadores por representarem um dos componentes estruturais mais comuns em diversas áreas da engenharia moderna. Na indústria aeroespacial as cascas cilíndricas são usadas como o principal componente estrutural: a fuselagem; nas estruturas offshore, com a evolução das plataformas flutuantes, tem-se acentuado a necessidade do conhecimento da resistência de membros tubulares cada vez mais leves e esbeltos; na indústria nuclear as cascas são usualmente empregadas na construção de componentes de reatores; é frequente ainda verificar a utilização dos cilindros como depósitos de fluidos, túneis de vento, na indústria naval e como tubulações. Em grande parte destas aplicações, é bastante comum encontrar a casca cilíndrica reforçada por enrijecedores longitudinais e/ou circunferenciais objetivando uma maior eficiência estrutural (veja Figura 1).

As dimensões geométricas de uma casca cilíndrica são caracteristicamente representadas pelo seu raio de curvatura ( $R$ ), espessura ( $t$ ) e comprimento ( $L$ ), conforme mostra a Figura 1. Os tipos de flambagem das cascas cilíndricas isotrópicas — sem enrijecedores — e enrijecidas submetidas à compressão axial são suscetivelmente dependentes da relação do seu comprimento pelo seu raio ( $L/R$ ) e também da relação do seu raio pela sua espessura ( $R/t$ ). Os modos de flambagem da casca cilíndrica isotrópica de comprimento intermediário ( $z > 2.85$ ) diferem bastante daqueles observados nas cascas curtas e longas. Normalmente, os cilindros de comprimento intermediário flambam localmente, onde algumas saliências na sua superfície podem ser notadas. As cascas curtas, com grande diâmetro, comportam-se semelhantemente a uma placa apoiada

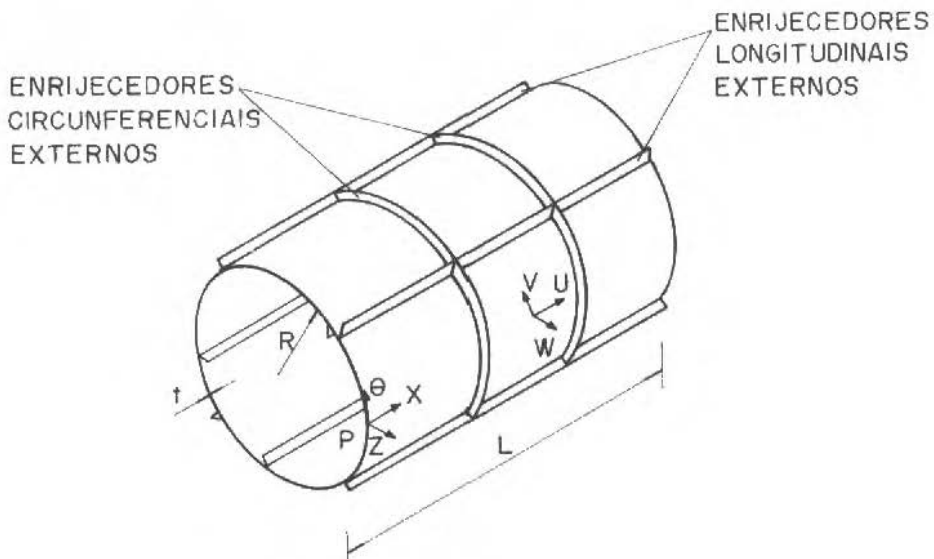


Figura 1. Casca cilíndrica enrijecida.

ao longo dos bordos carregados e livre nos outros bordos. Os tubos longos flambam geralmente como colunas.

A presença dos enrijecedores longitudinais e/ou circunferenciais, contribuindo para um melhor comportamento estrutural do modelo, fornece entretanto complicações adicionais na estimativa da carga e do modo de flambagem de uma casca. Em outras palavras, os efeitos específicos que os enrijecedores têm no comportamento de flambagem da casca cilíndrica sob compressão axial são relativamente complexos. Em função das propriedades dos materiais e das características geométricas das cascas e dos enrijecedores, cinco tipos de comportamento de flambagem são geralmente verificados, conforme é mostrado na Figura 2:

- a. Flambagem local da casca;
- b. Instabilidade do painel cilíndrico;
- c. Flambagem global;
- d. Flambagem como coluna;

## e. Flambagem local dos enrijecedores.

Procura-se contornar as dificuldades apresentadas no parágrafo anterior estudando-se neste trabalho apenas a flambagem local do segmento cilíndrico entre os enrijecedores. Para conseguir que este modo de flambagem anteceda ou prevaleça sobre a flambagem local torcional dos enrijecedores ou a flambagem global da peça, e ainda garantir que nenhuma interação catastrófica seja possível entre os modos local e global, foram seguidas as recomendações do projeto da DnV [1] para dimensionamento dos enrijecedores.

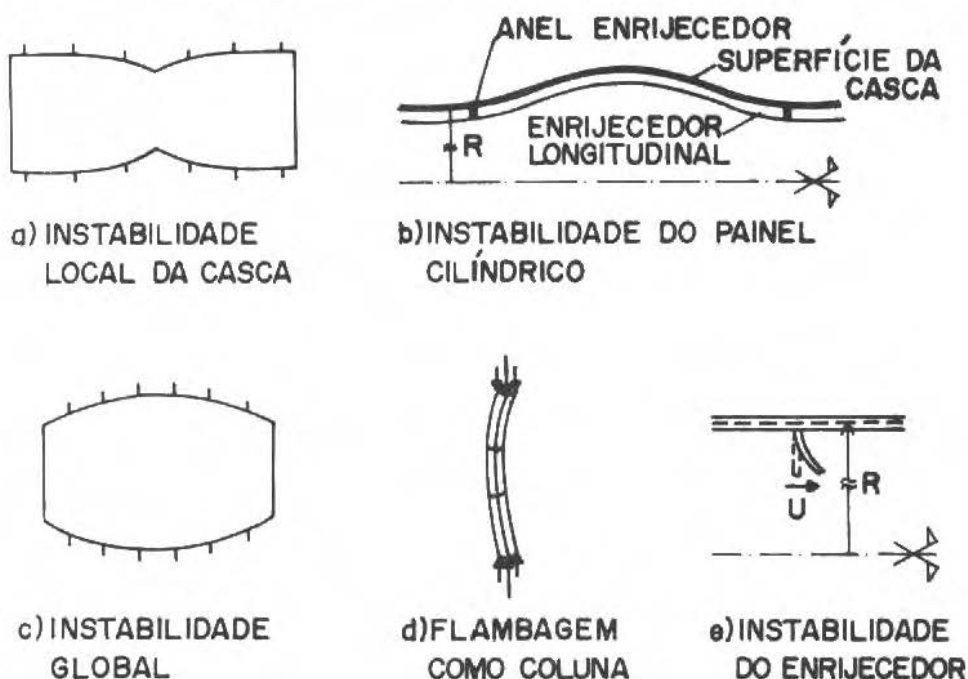


Figura 2. Modos de flambagem de casca cilíndrica enrijecida.

Objetivando encontrar uma maior simplicidade e precisão para a solução numérica das cascas cilíndricas enrijecidas, e baseado também na observação de que a representação da casca enrijecida como uma casca ortotrópica de peso equivalente não simula adequadamente o comportamento estrutural da peça — flambagem local da casca e dos enrijecedores — quando esta é reforçada

por poucos enrijecedores, adotou-se aqui um método de análise que considera a casca e os enrijecedores como componentes estruturais separados, ou seja, um modelo decomposto no qual o elemento de casca enrijecida é discretizado em elemento de casca e de enrijecedor longitudinal (viga-coluna) e/ou enrijecedor circunferencial (anel), como pode ser visto na Figura 3. Métodos similares para o tratamento da interação casca-enrijecedor foram usados com sucesso por Estefen [2], Andrade [3], Wang e Hsu [4], Ghavami e Andrade [5] e Silveira [6].

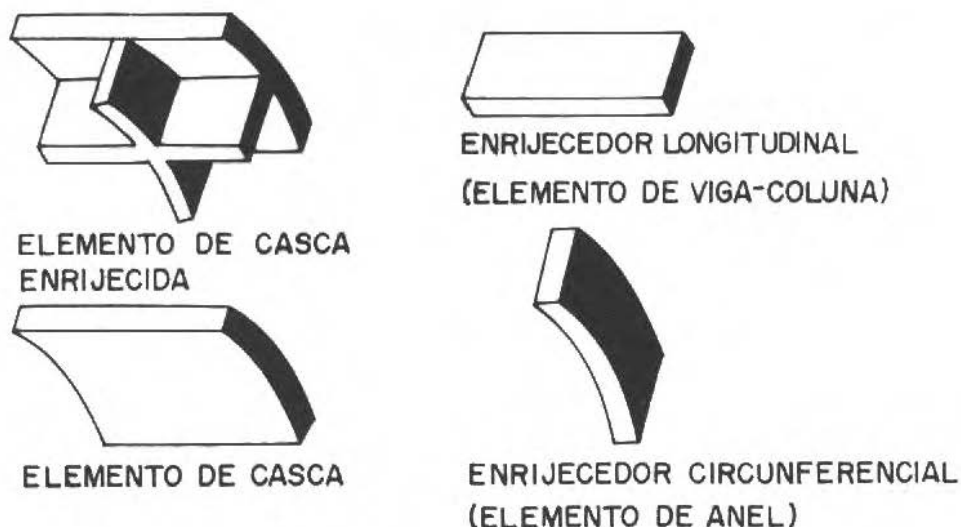


Figura 3. Elementos de uma casca enrijecida.

## DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE

Na formulação adotada, o desenvolvimento das equações de equilíbrio para o elemento de casca enrijecida é baseado na discretização deste elemento em elementos de casca e de viga-coluna e/ou anel. Observe através da Figura 4 que o efeito do enrijecedor longitudinal no comportamento da casca é representado por forças de interação (forças de massa) que atuam nas direções longitudinal ( $F_{xL}$ ), tangencial ( $F_{\theta L}$ ) e radial ( $F_{zL}$ ), e pelo momento de torção interativo ( $T_L$ ), e que localizam-se ao longo da linha definida pela interseção da superfície média da casca e o plano médio da viga-coluna. Analogamente são consideradas as forças de interação entre a casca cilíndrica e o enrijecedor anelar.



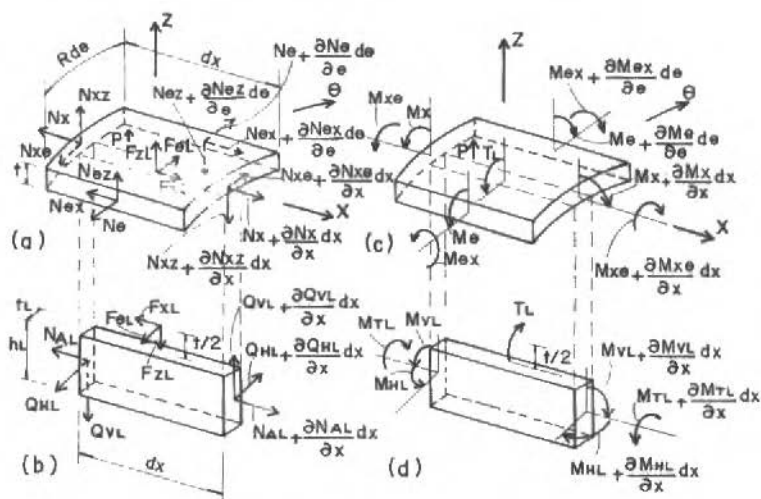


Figura 4. Representação dos elementos de casca e de enrijecedor longitudinal.

Ao considerar que os enrijecedores têm curvatura igual a da casca e supondo a indeformabilidade da sua seção transversal, determinam-se inicialmente as relações entre os deslocamentos dos pontos situados no eixo do enrijecedor e no plano médio da casca. Através do equilíbrio de forças e momentos na interseção dos elementos de casca e de enrijecedor, definem-se a natureza e a magnitude destas forças de interação em termos das propriedades físicas e geométricas do enrijecedor e dos deslocamentos da superfície média da casca. Estabelecendo-se posteriormente o equilíbrio do elemento de casca, e observando a colaboração destas forças de massa, obtêm-se as três equações diferenciais não-lineares de equilíbrio de casca cilíndrica enrijecida. Relações constitutivas e cinemáticas podem ser usadas para expressar estas equações em termos das funções incógnitas do problema, que são os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  da superfície média da casca cilíndrica.

O método das diferenças finitas é a técnica numérica adotada para reduzir o problema contínuo, com infinitos graus de liberdade, em um sistema com finitos graus de liberdade. Neste método, o tratamento dado aos enrijecedores envolve apenas certas mudanças na rigidez de determinados nós da malha. Para solução do sistema de equações não-lineares utiliza-se o método iterativo das "tensões

iniciais", ou mais comumente conhecido como o método de Newton-Raphson modificado.

## CASCA CILÍNDRICA

É considerado o sistema de eixos coordenados  $x$ ,  $\theta$  e  $z$  com origem no ponto  $P$ , situado na superfície média da casca, conforme representado na Figura 1. Os deslocamentos de um ponto da casca segundo estes eixos são  $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente.

As relações constitutivas são definidas neste trabalho para os materiais isotrópicos através de um modelo que representa adequadamente as propriedades elásticas do corpo. A seguir, baseadas na teoria geral não-linear de cascas delgadas proposta por Sanders [7], serão mostradas as relações de formação-deslocamento e as equações de equilíbrio de forças para o elemento de casca cilíndrica.

### Relações Deformação-Deslocamento

As relações de formação-deslocamento proposta por Sanders, para pequenas deformações e rotações, e deslocamentos de grandes a moderados, já simplificadas para o caso da casca cilíndrica, são mostradas a seguir:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8R^2} \left( R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w + \frac{1}{8R^2} \left( R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} \quad (1)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$$

onde,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_\theta$  e  $\gamma_{x\theta}$  representam as deformações específicas da superfície média da casca. Nas relações acima já estão incluídos os termos adicionais referentes

às imperfeições geométricas iniciais, representadas por  $\hat{w}(x, \theta)$ , medidas a partir da superfície média da casca.

### Equações de Equilíbrio

As equações diferenciais não-lineares de equilíbrio de forças para a casca cilíndrica, já introduzindo a influência dos enrijecedores através das forças interativas, são mostradas abaixo:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{4R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (N_x + N_\theta) \left( R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{1}{2R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{F_{xL}}{R\Delta\theta} + \frac{F_{xC}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{4R} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (N_x + N_\theta) \left( R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{R^2} N_\theta \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{1}{R} N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_{\theta L}}{R\Delta\theta} + \frac{F_{\theta C}}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{R} N_\theta + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_{x\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ N_\theta \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{F_{zL}}{R\Delta\theta} + \frac{F_{zC}}{\Delta x} \pm \frac{T_L}{2R\Delta x \Delta\theta} \pm \frac{T_C}{2R\Delta x \Delta\theta} + p = 0$$

onde,  $\Delta x$  e  $R\Delta\theta$  representam os espaçamentos, respectivamente, nas direções longitudinal e circunferencial da malha de diferenças finitas adotada.

### ENRIJECEDOR LONGITUDINAL

#### Compatibilidade de Deslocamentos entre a Casca e o Enrijecedor

As relações entre os deslocamentos dos pontos situados no eixo do enrijecedor e no plano médio da casca são definidas conforme a Figura 5, e encontram-se descritas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_e &= u \pm e_L \frac{\partial}{\partial x}(w + \hat{w}) \\
 \bar{v}_e &= v \pm \frac{e_L}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}(w + \hat{w}) \\
 \bar{w}_e &= w + \hat{w}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Os deslocamentos  $\bar{u}_e$ ,  $\bar{v}_e$  e  $\bar{w}_e$  representam os deslocamentos totais de um ponto qualquer sobre o eixo do enrijecedor;  $e_L$  é a excentricidade entre o enrijecedor e a casca. O sinal superior nas expressões acima corresponde aos enrijecedores fixados internamente na casca, enquanto o inferior pertence aos enrijecedores externos. A ausência do termo  $u/R$ , devido a curvatura inicial da casca na direção circunferencial, na segunda equação de (3), pode ser explicada pela atenção dada neste trabalho apenas às cascas cilíndricas finas. Verifica-se que em cascas com grandes esbeltez este termo pode ser excluído da análise sem maiores consequências.

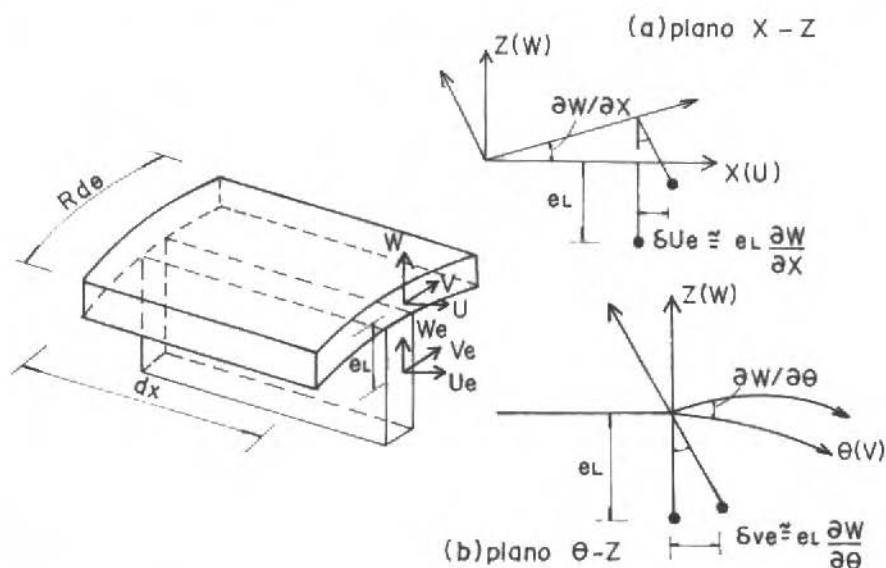


Figura 5. Compatibilidade de deslocamentos entre a casca e o enrijecedor.

### Equilíbrio do Elemento de Enrijecedor Longitudinal

As forças interativas incluídas nas equações de equilíbrio (2) devem ser conhecidas à priori para que se possa analisar a casca cilíndrica enrijecida. Através do equilíbrio de forças e momentos no elemento de enrijecedor, considerando a configuração deformada da casca enrijecida (veja Figura 6), consegue-se expressar estas forças interativas em função dos esforços internos do enrijecedor, ou seja:

$$\begin{aligned}
 F_{xL} &= \frac{\partial N_{AL}}{\partial x} \\
 F_{\theta L} &= \frac{\partial^2 M_{HL}}{\partial x^2} + N_{AL} \frac{\partial^2 \bar{v}_e}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{AL}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial x} \\
 F_{zL} &= \frac{\partial^2 M_{VL}}{\partial x^2} \mp e_L \frac{\partial^2 N_{AL}}{\partial x^2} + N_{AL} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{HL}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \\
 T_L &= \frac{\partial M_{TL}}{\partial x} \pm e_L \frac{\partial^2 M_{HL}}{\partial x^2} \pm \frac{e_L}{R} \frac{\partial^2 M_{VL}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \frac{e_L^2}{R} \frac{\partial^2 N_{AL}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Detalhes importantes sobre as deduções das expressões (4) são encontrados no trabalho de Ghavami e Silveira [8].

## RESULTADOS NUMÉRICOS

No programa computacional desenvolvido, a compressão axial é simulada por deslocamentos prescritos na direção longitudinal dos pontos nodais da malha de diferenças finitas coincidentes com o bordo da casca cilíndrica. Os exemplos apresentados a seguir baseiam-se no conhecimento do comportamento pré-flambagem da casca cilíndrica até a perda da sua estabilidade, que geralmente ocorre em um ponto limite. Estes pontos limites são encontrados através da solução frontal das equações diferenciais não-lineares do caminho fundamental, determinando-se os pontos de máximo ao longo da curva tensão vs. deformação.

Para verificação do grau de exatidão da resposta fornecida pelo método de solução adotado, foram feitas comparações entre os valores da tensão crítica

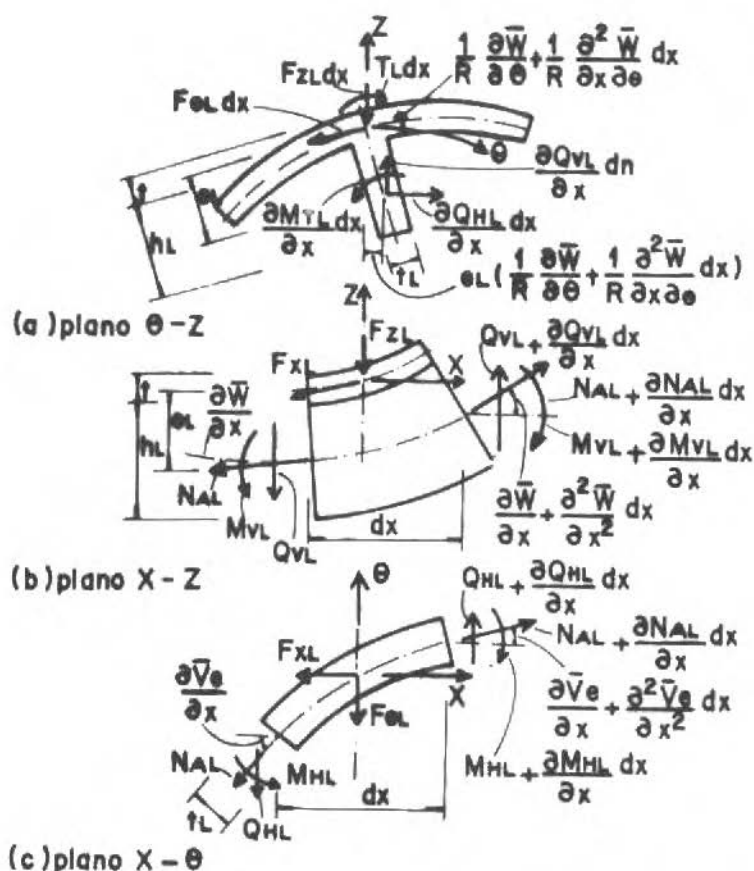


Figura 6. Equilíbrio do elemento de enrijecedor longitudinal

fornecidos pelo programa computacional para uma casca cilíndrica isotrópica de comprimento intermediário e os calculados analiticamente (Vinson [9], Brush e Almroth [10] e Chajes [11]). Os resultados destas comparações podem ser vistos na Figura 7. Verifique a razoável concordância entre os valores da tensão crítica obtidos numericamente e os calculados analiticamente para os diversos níveis de esbeltez escolhidos. Baseada nesta figura foi elaborada a Tabela 1, onde são ilustradas as diferenças entre as tensões calculadas pelos dois métodos de análise. As maiores diferenças observadas para os valores destas tensões correspondem às cascas mais esbeltas. Verificou-se entretanto que melhores

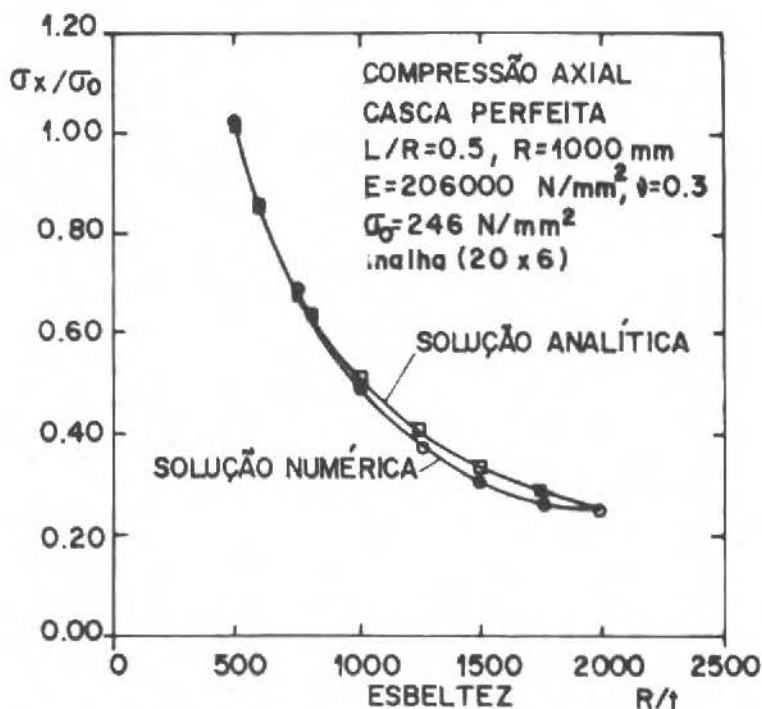


Figura 7. Estudo da relação: tensão crítica x esbeltez.

resultados poderiam ser obtidos com o refinamento da malha.

Como este estudo é restrito à não-linearidade geométrica, procurou-se selecionar tubos cilíndricos cujas relações geométricas propiciam a flambagem elástica da peça.

Tabela 1. Estudo da relação: tensão crítica x esbeltez.

ESBELTEZ (R/t)	500	600	750	800	1000	1250	1500	1750
DIFERENÇA: % σ <sub>CR</sub> (num) ⇔ ⇔ σ <sub>CR</sub> (ana)	1.6	0.6	-0.4	-0.9	-3.3	-10.3	-8.2	-6.9

### Casca Cilíndrica Enrijecida Circunferencialmente

A análise da casca cilíndrica reforçada circunferencialmente é desenvolvida para o modelo estrutural que obedece às relações geométricas  $R/t = 500$  e  $L/R = 0.75$ , onde são considerados dois anéis enrijecedores distribuídos uniformemente ao longo do seu comprimento longitudinal. Os resultados dessa análise para a peça comprimida axialmente são baseados em um diagrama comparativo entre o perfil do deslocamento radial total do modelo enrijecido proposto, no momento em que a carga crítica é atingida, e aquele do painel cilíndrico central entre os enrijecedores idealizado como uma casca isotrópica com bordos engastados, conforme ilustrado na Figura 8. Note que a deflexão lateral no centro dos dois modelos testados é de mesmo valor. Apesar da semelhança geral no comportamento dos painéis, verifica-se uma diferença marcante entre os deslocamentos radiais nas proximidades do anel.

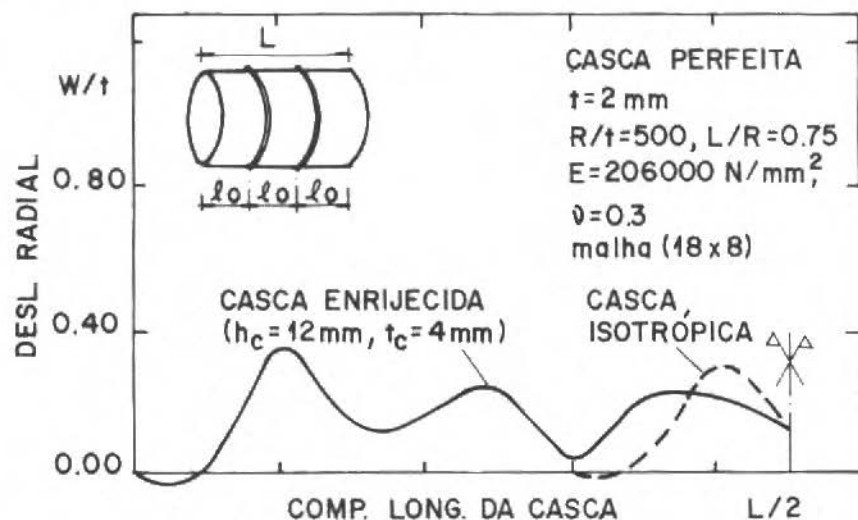


Figura 8. Casca cilíndrica enrijecida circunferencialmente.

A Figura 9 fornece as curvas tensão vs. deformação para as duas configurações geométricas propostas. Conclui-se que os comportamentos pré-flambagem são idênticos e que o valor da tensão crítica obtida para o modelo isotrópico idealizado é próximo ao do painel cilíndrico central da casca enrijecida.



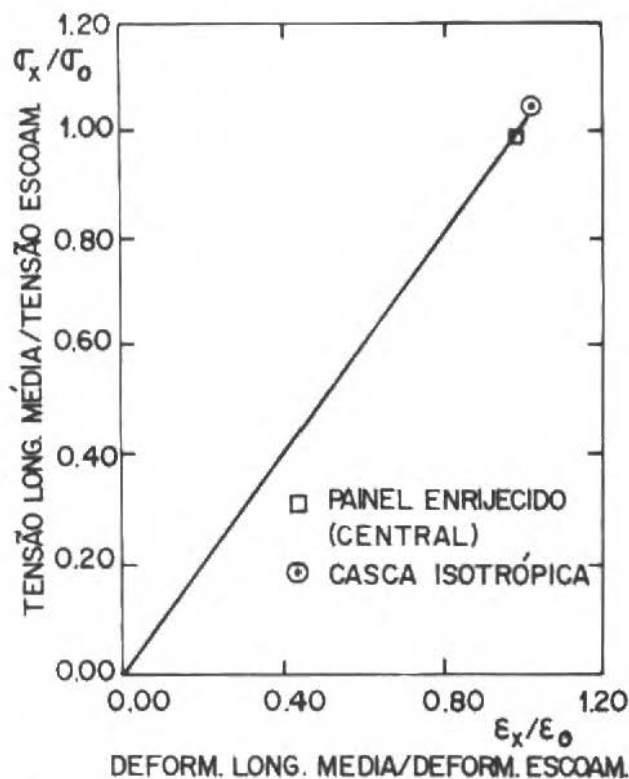


Figura 9. Análise da relação: tensão x deformação.

Também verificou-se neste exemplo que o requerimento da inércia radial proposto pela  $DnV$ , para dimensionamento do anel enrijecedor, é bastante conservador e que os resultados obtidos independem da posição dos enrijecedores (internos ou externos à casca).

### Casca Cilíndrica Enrijecida Longitudinalmente

O estudo da casca cilíndrica enrijecida longitudinalmente é restrito à configuração geométrica com esbeltez  $R/t = 750$  e comprimento longitudinal obedecendo a relação  $L/R = 0.5$ , onde são considerados oito enrijecedores longitudinais de mesmas dimensões reforçando a estrutura. A Figura 10 mostra, assim como foi feito para o cilindro enrijecido circunferencialmente, um diagrama comparativo entre os perfis do deslocamento radial da casca enrijecida

e aquele da casca isotrópica, no momento em que a tensão crítica é atingida. Para representar os deslocamentos do modelo enrijecido, além da consideração de pontos nodais sobre a superfície média da casca coincidentes com os enrijecedores e pontos nodais localizados entre dois enrijecedores longitudinais consecutivos, foram também usados os pontos da casca posicionados nas linhas da malha adjacentes ao enrijecedor. Excetuando-se o perfil representado por pontos nodais da casca cilíndrica coincidentes com os enrijecedores, observe a semelhança de comportamento entre os demais. Estes perfis podem ser caracterizados principalmente por uma saliência externa da superfície média da casca, relativamente acentuada, próxima ao contorno e também pela semelhança dos valores das deflexões laterais ao longo de todo o comprimento da casca. A presença desta saliência externa relevante pode ser explicada pela existência de tensões de flexão elevadas que surgem em função das restrições impostas pelo bordo da casca.

O ganho de rigidez da estrutura com a introdução dos enrijecedores longitudinais pode ser notado claramente no perfil do deslocamento radial dos pontos coincidentes com os enrijecedores. Note que para estes pontos, ao longo de todo comprimento longitudinal da casca, os deslocamentos radiais são menores que os obtidos para os demais pontos da malha.

Neste exemplo foram seguidos os requerimentos de projeto da *DnV* para dimensionamento do enrijecedor longitudinal e também aqui os testes mostraram-se indiferentes à posição do enrijecedor na parede da casca.

### **Casca Cilíndrica Enrijecida Longitudinal e Circunferencialmente**

Para o caso da casca cilíndrica enrijecida ortogonalmente o modelo estrutural a ser analisado é obtido adicionando-se três anéis enrijecedores uniformemente distribuídos na configuração geométrica do exemplo anterior (casca enrij. long.). As dimensões dos enrijecedores longitudinais e circunferenciais são tomadas iguais e escolhidas com o propósito de garantir que a flambagem local do segmento cilíndrico entre os enrijecedores anteceda ou predomine sobre as demais formas de colapsos da peça. As informações encontradas a seguir envolvendo o comportamento da casca cilíndrica são, como nos exemplos anteriores, baseadas exclusivamente no estudo do perfil do deslocamento radial total da superfície média da casca.

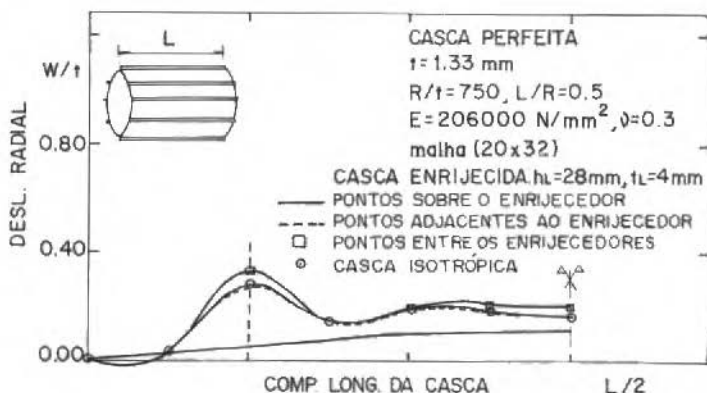


Figura 10. Casca cilíndrica enrijecida longitudinalmente.

Na Figura 11 são mostradas as características do comportamento da superfície média da casca para o modelo enrijecido proposto. Aí são representados os perfis dos deslocamentos radiais, no instante em que a carga crítica é atingida, dos pontos da casca entre dois enrijecedores longitudinais consecutivos e dos pontos nodais coincidentes com estes enrijecedores. Verifique nesta figura a grande restrição imposta às deflexões laterais pelos enrijecedores. Veja, como consequência do pequeno espaçamento dos enrijecedores, a formação de uma única saliência externa entre estes em forma de meia onda longitudinal.

Neste exemplo, apesar da casca ser mais densamente enrijecida, o valor da tensão longitudinal crítica obtido para o painel cilíndrico entre os enrijecedores foi próximo daquele encontrado para a casca isotrópica de comprimento equivalente.

A Figura 12 foi elaborada visando conhecer as contribuições dos anéis enrijecedores no aumento de rigidez da casca e principalmente saber o grau de restrição imposto por estes ao deslocamento radial dos pontos nodais da malha localizados na interseção com os enrijecedores longitudinais. Nesta figura estão caracterizados os deslocamentos radiais de pontos da casca coincidentes com o enrijecedor longitudinal, representando a casca reforçada apenas longitudinalmente (veja modelo do exemplo anterior), e a peça enrijecida ortogonalmente, respectivamente. Observa-se portanto que a

introdução dos anéis enrijecedores envolve um acréscimo substancial de rigidez em quase todo o comprimento da casca.

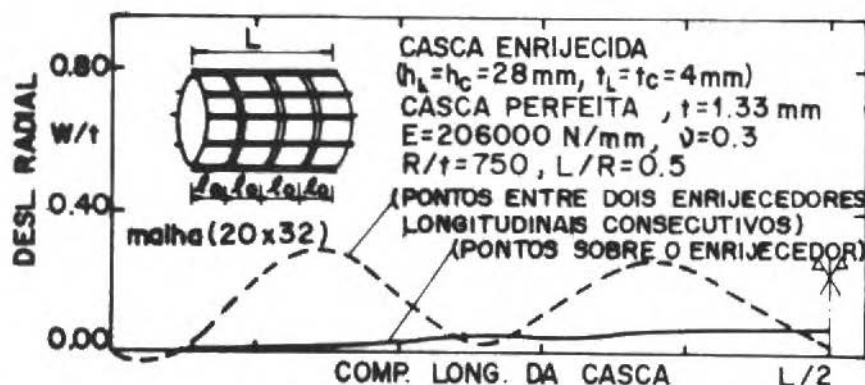


Figura 11. Casca cilíndrica enrijecida ortogonalmente.

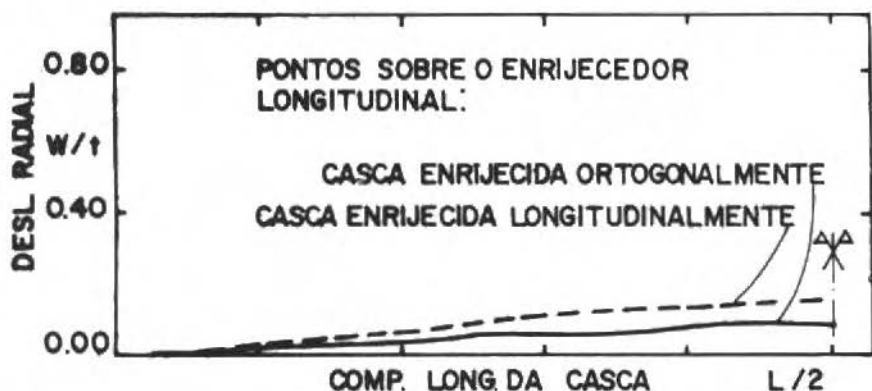


Figura 12. Modelo Enrij. Longit. x Modelo Enrij. Ortoгон.

## COMENTÁRIOS FINAIS

Baseado na qualidade dos resultados obtidos, verifica-se a funcionalidade e a precisão da metodologia adotada para o estudo das cascas cilíndricas

enrijecidas, onde através de uma formulação simples e facilmente automatizável pode-se conhecer realisticamente o ganho de rigidez da estrutura com a adição dos enrijecedores. Nos exemplos abordados, em função do grande espaçamento entre os enrijecedores, os valores das deflexões laterais dos pontos nodais localizados entre dois enrijecedores consecutivos mostraram-se próximos daqueles observados em uma casca cilíndrica isotrópica de comprimento equivalente.

Convém destacar que, baseado na experiência adquirida até o momento, esta forma sistemática de tratamento numérico das cascas cilíndricas com enrijecedores pode ser aplicada às cascas cujas relações geométricas  $R/t$  e  $L/R$  variam de 500 a 2000 e 0.5 a 1, respectivamente.

Objetiva-se, como etapa subsequente a este trabalho, a inclusão da não-linearidade física do material e uma análise mais rigorosa das tensões predominantes que se desenvolvem nos enrijecedores ao longo de todo o processo de carregamento. Presume-se também que através da mesma formulação teórica adotada aqui possam ser desenvolvidos bons programas para análise de estruturas laminares.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Prof. Paulo Batista Gonçalves (PUC-Rio) pelas sugestões e revisão do texto, à Izabel Pereira pela confecção das figuras e ao CNPq pelo subsídio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- [1] DnV. Buckling Strength Analysis of Mobile Off-Shore Units, Classification NOTas, October, 1987.
- [2] ESTEFEN, S.F. Collapse of Ring Stiffened Cylinders. PhD Thesis, University of London (Imperial College), 1984.
- [3] ANDRADE, V.S. Análise de Cascas Cilíndricas Enrijecidas, Discretizadas em Elementos da Casca e Enrijecedor, por Diferenças Finitas, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1985.

- [4] WANG, J.T.S. and HSU, T.M. Discrete Analysis of Stiffened Composite Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, vol. 11, no. 11, pp. 1753-1761, 1985
- [5] GHAVAMI, K. and ANDRADE, V.S. A General Formulation for the Analysis of Stiffened Cylindrical Shells, in *Optimization in Mathematical Physics*, edited by B. Brosowski and E. Martensen, Verlag Peter Lang, vol. 34, Frankfurt, 1986.
- [6] SILVEIRA, R.A.M. *Análise Não-Linear Geométrica de Cascas Cilíndricas Isotrópicas e Enrijecidas*, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1990.
- [7] SANDERS Jr., J.L. Nonlinear Theories for Thin Shells, *J. Appl. Math.*, vol. 21, pp. 21-36, 1963.
- [8] GHAVAMI, K. e SILVEIRA, R.A.M. *Formulação Matemática do Método dos Enrijecedores Discretizados para Casas Cilíndricas Reforçadas em Duas Direções*, Relatório Interno - RI 10/89, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, agosto de 1989.
- [9] VINSON, J.R. *Structural Mechanics: The Behavior of Plates and Shells*, by John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [10] BRUSH, D.O. and ALMROTH, B.O. *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw Hill, 1975.
- [11] CHAJES, A. *Stability and Collapse Analysis of Axially Compressed Cylindrical Shells*, in *Shell Structures: Stability and Strength*, edited by R. Narayana, Elsevier Applied Science Publishers, London, 1985.

## GLOBAL MIXED ADAPTIVE METHODS FOR FINITE ELEMENTS

### MÉTODOS ADAPTATIVOS GLOBAIS PARA ELEMENTOS FINITOS

Estevam Barbosa de Las Casas - Membro ABCM

Departamento de Engenharia de Estruturas

Escola de Engenharia da UFMG

Belo Horizonte MG, Brasil

#### ABSTRACT

*An adaptive mesh refinement method conjugating an initial remeshing of an user-defined grid and a global increase in the order of the interpolating polynomials over the domain is described. The error indicator used in the implementation of the algorithm is based on the approximation of the discretization error by the interpolation error. Emphasis is given for the implementation of the method for plane problems in elasticity.*

**Keywords:** Computational Mechanics ■ Finite Element Method ■ Adaptive Process ■ Discretization Error

#### RESUMO

*Um método adaptativo para refinamento de malhas é descrito, conjugando uma redefinição inicial da malha determinada pelo usuário com um aumento global na ordem dos polinômios de interpolação no domínio. O indicador de erro utilizado na implementação do algoritmo é baseado na aproximação do erro de discretização pelo erro de interpolação. O trabalho enfatiza uma implementação do método para problemas de elasticidade plana.*

**Palavras-chave:** Mecânica Computacional ■ Método dos Elementos Finitos ■ Processos Adaptativos ■ Erro de Discretização

## INTRODUCTION

The development of automatic procedures to improve the results obtained from a finite element analysis has been the subject of much effort since the 70's. The relevance of the matter can never be overestimated, as an inappropriate discrete model will produce poor results, which, even when detected by a criterious analysis of the output, will require the definition of a new model and therefore an increase in time and computer effort.

The improvement of an initial mesh requires the minimization of components of the error. A priori error estimates are based on previous knowledge of the behavior of the solution, and although useful for a number of particular cases [1], cannot be used for general problems. Several a posteriori error estimators have appeared in the literature [2], and proposed as a bases for adaptive refinement techniques. Convergence of the refinement process is attained when a quasi-optimal, improved mesh is generated, taking the discretization error as the object function. A trajectory of meshes [3] is generated, based on the error estimated from intermediate results in the adaptive process. The improved meshes in the trajectory provide a better basis for the estimators, accelerating convergence.

The current techniques for the refinements, after estimating the errors, are:

- a) To relocate the nodes in the domain ( $r$  method or remeshing)
- b) To add new elements in selected parts of the domain ( $h$  method)
- c) To increase the order of the interpolation polynomials in regions where the error is estimated to be large ( $p$  method).

Strategies b and c have in common the fact that they increase the number of degrees of freedom in the model, and mixed strategies combining  $h - p$  and  $r - h$  have been proposed. Each scheme has its advantages and disadvantages in aspects such as required data structure and management, compatibility with existing finite element procedures, complexity of the resulting algorithm, rate of convergence, optimality of the obtained meshes, etc. The choice of an estimator implies in compromises between accuracy and simplicity, the latter involving



computer effort, the former capability to detect critical regions of the domain, specially for poor initial meshes.

## REFINEMENT STRATEGY

Fixing the number of degrees of freedom in a discrete model, the optimum mesh has a constant discretization error for all elements [4]. Remeshing schemes try to obtain an equal distribution of the error by moving the nodes from regions with good estimated accuracy in the results to regions with high error estimates. A measure of error dispersion is used as a stopping criterion, and the obtained mesh is a quasi-optimum model for the defined number of d.o.f.

If the number of d.o.f. is allowed to increase ( $h$  and  $p$  methods), critical regions of the domain must be identified, based on the estimators. Some elements are then refined, either by subdivision into new elements or by increasing the order of the interpolation polynomials. For the  $h$  method, irregular nodes are introduced at interelement boundaries, and special data structures and modifications in the assembly procedure must be performed. Additional geometric considerations are required to avoid regularity problems. For the  $p$  method, neighboring elements with different interpolation functions in common sides also generate the need for special data management.

A mixed method, combining the  $r$  and the  $p$  (or  $h$ ) method of refinement is described in this paper, where all refinements are performed in a global way, involving the entire domain. As the remeshing generates a mesh with good homogeneity of the error, there is no need for a search for regions with high error estimates, and all elements are candidates for refinement. The  $r - p$  method increases in this second step the order of all interpolation polynomials, using a library of higher order elements. The  $r - h$  method [1] proceeds to a global subdivision of every element in the model, keeping the characteristics of the original (father) elements. A program for microcomputers has been developed in FORTRAN 77 using rectangular elements for plane problems in elasticity incorporating  $r - h$  and  $r - p$  refinements.

## ERROR INDICATOR

For the purpose of the refinement process, an estimation of the local error for the elements is not required, as an indication of the ratio among the estimated errors in the model is sufficient. This relative measure is called error indicator, providing the basis for comparison between the estimated accuracy for the elements in the domain.

The interpolation error, measured in the Sobolev norm, is used to approximate the discretization error in the elements. Taking  $h^2 \leq bA$ , with  $b$  a positive constant and  $A$  the element area, it can be shown [5] that

$$\|u - u_h\|_m \leq C\sqrt{bA}^{(k+1-m)/2} \|u\|_{k+1}$$

where  $\|\cdot\|$  and  $|\cdot|$  are the Sobolev norm and semi-norm,  $u$  the exact solution to the boundary value problem,  $k$  the order of the interpolation polynomials,  $h$  the diameter of the circle circumscribing the element and  $m$  an integer so that  $0 \leq m \leq k$ ;  $C$  a positive constant valid for all elements in a given mesh and  $u_h$  the finite element solution.

For the calculation of the norm in the indicator, it is necessary to evaluate derivatives of order  $k + 1$  of the solution  $u$  (which in the adaptive process is replaced by  $u_h$ ). To approximate  $\partial^{k+1}u_h/\partial x^{k+1}$ , a least square fit of  $\partial^k u_h/\partial x^k$  at Gaussian locations is performed, and the resulting function (of order 1) is used to calculate the required derivatives [11].

## REMESHING

The first step in the mixed algorithm consists in modifying the nodal locations to redistribute the error, making elements with large error smaller and increasing the nodal density in regions with large errors. The nodes are attracted towards the center of mass of each element, with a force proportional to the indicated error. The new nodal coordinates are calculated based on the weighted average of the distances from each node to the center of gravity of the neighboring elements, with the estimated errors as weights. The calculated change in nodal position is then multiplied by a factor  $\beta$ , which might be used to slow down modifications within a refinement cycle. Significant modifications

on a poor discretization may delay convergence of the adaptive process, as the basis for the error indicators is not yet accurate.

In order to maintain the geometry of the boundaries, and to ensure that external nodal actions are not relocated during the process, restrictions are imposed on the modifications of the mesh. Those restrictions are of two types:

- a) The node is not considered in the relocation scheme, maintaining its original position. This option is specially useful for corner nodes and nodes submitted to external actions (such as point loads)
- b) The node is restricted to move within a path fixed in the input data and defined by its location and that of two other nodes. This option is useful for nodes in the boundary of the domain, and for internal boundaries between two different classes of elements (such as different material properties). It should be noted that imposed restrictions constitute restraints to the full optimization of the mesh.

At each nodal relocation, the Jacobian of the modified elements is calculated. When a Jacobian is found to be negative, the element is collapsed into a 4 noded triangle by fixing the new nodal location in the line defined by the neighboring nodes. The nodal forces for distributed loads are recalculated for each mesh.

## GLOBAL REFINEMENTS

After remeshing, assuming a reasonable error distribution in the domain, an increase in the number of d.o.f. is required to improve the model. From an original mesh with 4 node isoparametric elements, the program allows two levels of refinements: the substitution of the elements for 8 or 12 node elements, by the insertion of one (or two) nodes per element side at the mid point of each and every element. The parameters related to the new nodes are calculated, including a redefinition of the nodal loads in case of distributed loading. The refinement within a cycle is done element by element, and the already generated nodes resulting from a previous element subdivision are skipped, after being identified using an array containing the neighbors to that element. Another consideration to be taken is the increase in the number of Gaussian integration points for higher order elements. A global  $h$  refinement can be performed as

an alternative, through the division of every element in the domain into four sub elements.

During global refinements, the attributes for the new nodes are derived from the two corner nodes in the side of the father element. Boundary conditions and restrictions to relocation are taken as equal to the least restrictive between the two original nodes, and equivalent nodal loads are recalculated for the refined grid.

## SOLUTION PROCEDURE AND ADAPTIVE CONTROL

An over-relaxation solver is used for the systems of linear equations. The system of equations is modified at each refinement cycle, making an efficient solver more relevant. With the use of an iterative algorithm, the solutions for previous cycles can be used to accelerate convergence, while the initial values for the unknowns after a global refinement can be interpolated from the previous result. The number of iteration steps is kept small at each cycle, as only an indication of the error is required.

To control the adaptive process, a performance index IP is required, comparing a global measure of the error indicators in two different improvement cycles. As the objective is to obtain an equally distributed error, a measure of the error dispersion is used as a performance index. In this work, the selected performance index is given by  $IP = \max e_i / \min e_i$ , where  $e_i$  is the error indicator. The process is discontinued when IP reaches an user defined value, or when a limiting number of cycles is performed. Besides these control parameters, restrictions to nodal relocations must be provided. The number of Gaussian points for higher order elements in the  $p$  step are modified internally by the program.

## APPLICATIONS

### Simply supported beam with concentrated load

A simply supported beam subjected ( $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0$ , span = 10 m, width = 1 m) to a point load ( $2 \times 10^4 \text{ N}$ ) at mid-span is used a first application of the mixed adaptive method, using an initial uniform grid consisting of four

node isoparametric plane stress elements. The middle node of the right side is fixed and symmetry is imposed at the left, with the point load applied at the top left node. The adaptive refinements should be able to indentify the local disturbances in the linear distribution of normal stresses due to the point load and the punctual support, refining more the mesh in these areas. The improved meshes are shown in figure 1, and the results in terms of energy are given in Table 1. The elasticity solution used for the strain energy [6] does not take into account the curvature increase due to the effect of the supports, although including the localized effect of the load.

Table 1. Maximum Strain Energy for Beam Problem at mid height

Trajectory	Degrees of Freedom	Energy (N.m)
elasticity	—	340.4
0r	83	324.9
1r	83	325.7
7r	83	325.7
0r-h	295	340.3
1r-h	295	340.9
1r-p	271	345.8
0r-2p	379	345.4
7r-2p	379	350.4

In this example the 1r trajectory already reduces the IP value by a factor 3. Figure 2 shows the obtained stresses at the top of the beam for various trajectores for  $\beta = 1$ . As expected, the improvements in the local stress distribution are larger than when indicated by an overall measure of the quality of the mesh.

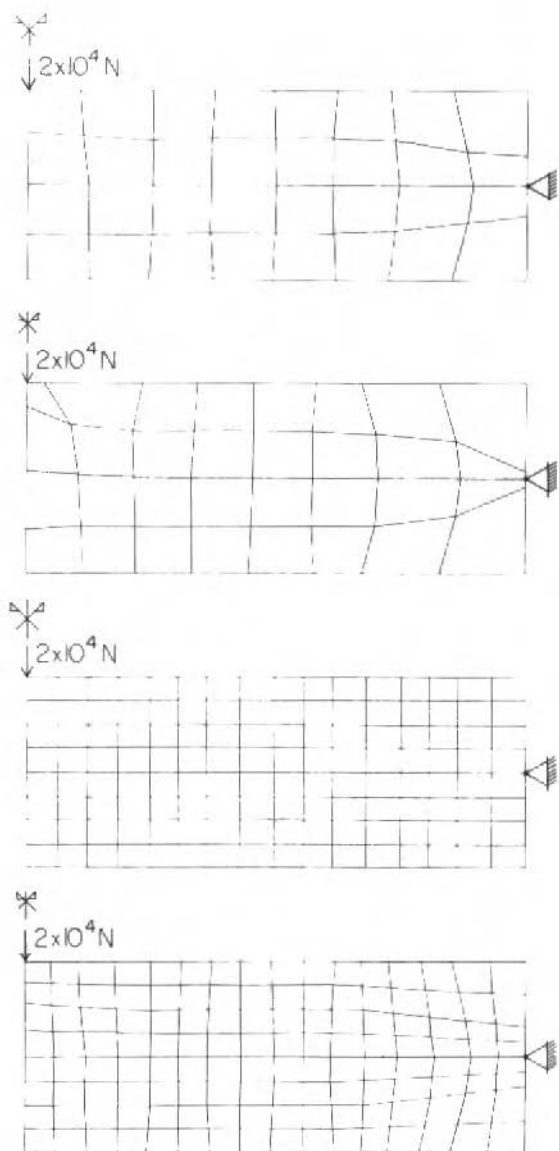


Figure 1. Grids for Beam Problem. Half-span=5 m, Load=  $1 \times 10^7 \text{ N}$ ,  $\nu = 0$ . Trajectories: 4r, 7r, 0r-h, 1r-h.

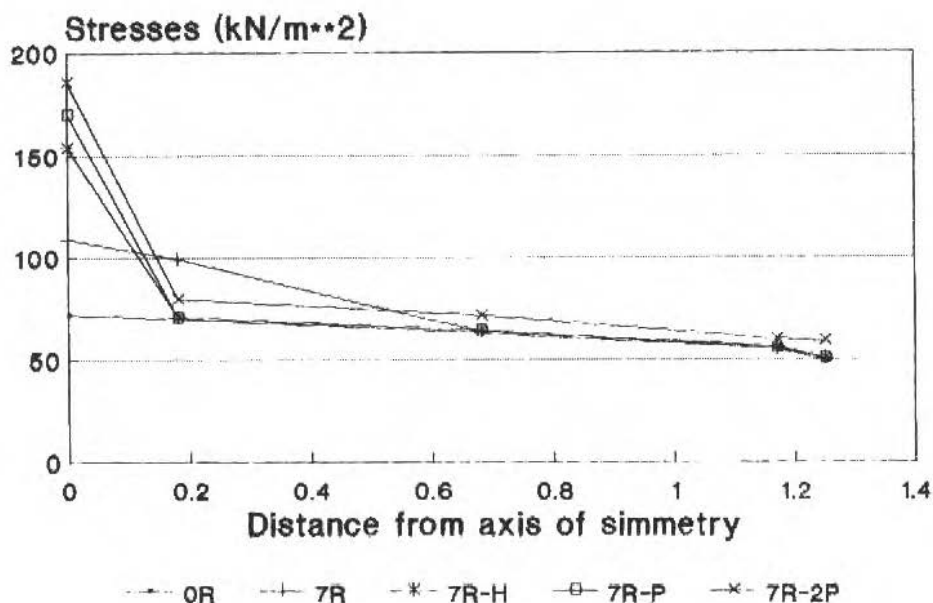


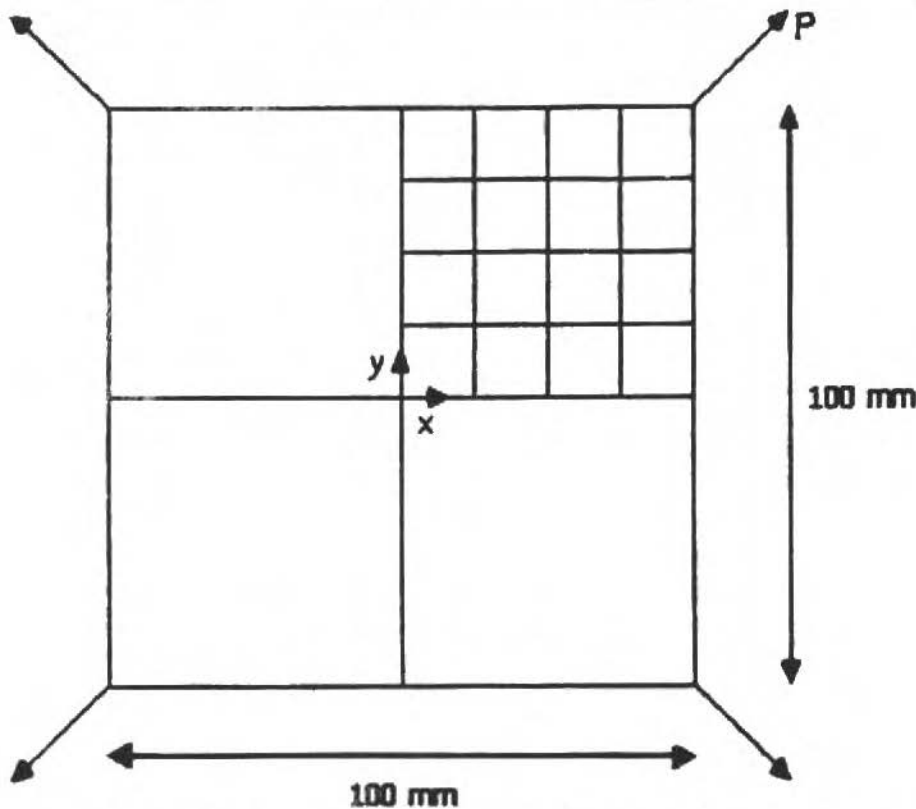
Figure 2. Normal stresses at upper boundary for beam problem.

### Membrane subjected to corner tractions

A membrane of unit thickness subjected to traction forces at the corners is analyzed with an initial uniform mesh (figure 3). This problem has been previously studied by Carrol [7], who found the optimum mesh for various numbers of degrees of freedom by including the nodal coordinates in the functional to be minimized by the finite element method. Table 2 gives the potential energy for different trajectories taking  $\beta = 1$ , and the resulting grids are shown in figure 4. Higher gradients are expected at the corner, with a larger error for the uniform mesh at the region close to the point of applications of the load. The restraints to the free relocation of the boundary nodes play an important role in the optimality of results [1].

Table 2. Displacements for various trajectories

Trajectory	Degrees of Freedom	Displacement (N.m)
optimum	40	14.4093
0r	40	6.8444
7r	40	8.5986
7r-p	112	12.8010
7r-2p	184	14.1955
7r-h	144	11.0152
0r-p	112	7.9754
0r-h	144	7.9688
0r-2p	184	8.1544

Figure 3. Membrane problem -  $P = 25 \times 10^5 N$ ,  $E = 1 \times 10^7 MPa$ ,  $\nu = 0$ .



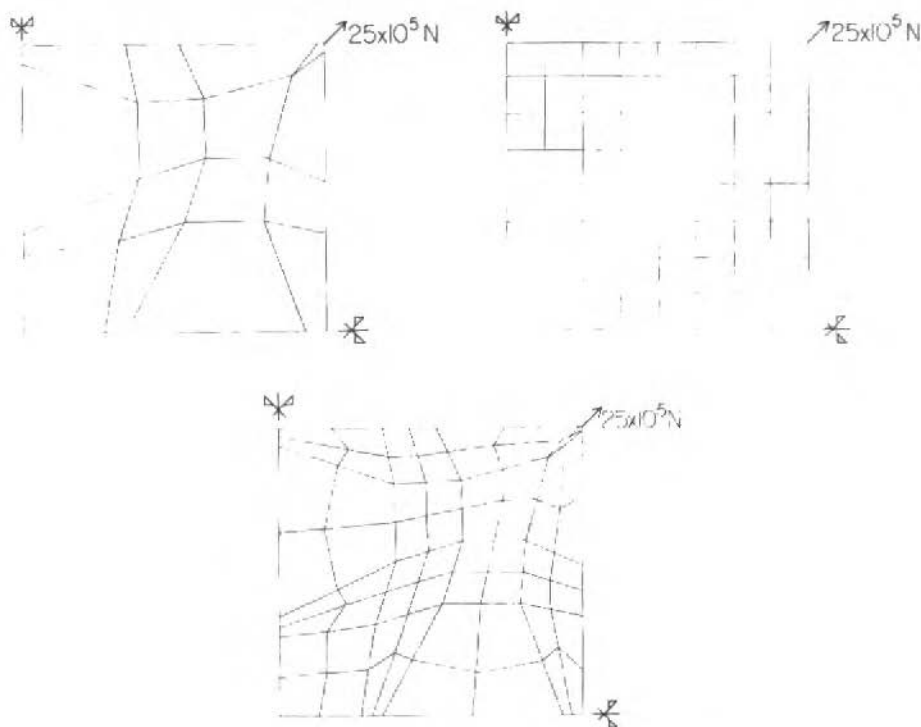


Figure 4. Grids for membranes. Trajectories: 7r, 0r-h, 7r-h.

## CONCLUSIONS

The described algorithm provides an alternative path for mesh improvement, performing the bulk of the computational work on a coarse grid, and implementing the refinements in a simple, straight forward way. R-p refinements have shown to be efficient when compared to r-h, the latter being more versatile, as it does not require additional elements in the library nor modifications in the number of integration points. The problem of high aspect ratios can be minimized by an interaction of the user with the program, modifying the initial mesh in order to avoid constraints in nodal relocation in critical zones of the domain. A more integrated and efficient equation solver is being developed to take advantage of the characteristics of the adaptive process.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to acknowledge the financial support by CNPq for the development of this work.

## REFERENCES

- [1] LAS CASAS, E.B. R-h Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method, Ph.D. thesis, Purdue University, 1988.
- [2] NOOR, A.K. and BABUSKA, I. Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions, *Finite Elements in Analysis and Design*, **3** (1987) 1-27.
- [3] RHEINBOLDT, W.C. Adaptive Mesh Refinement Process for Finite Element Solutions, *IJNME*, **17** (1981) 649-662.
- [4] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. Analysis of Optimal Finite Element Meshes in  $\mathbb{R}^1$ , *Mathematics of Computation*, **33** (1979) 435-463.
- [5] DIAZ, A.R. Optimization of Finite Element Grids Using Interpolation Error, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1982.
- [6] TIMOSHENKO, S. *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, 1934.
- [7] CARROL, W.E. On the Reformulation of the Finite Element Method, *Computer and Structures*, **8** (1979) 547-552.

## A NOTE ON THE VELOCITY OF CRACK PROPAGATION IN TENSILE FRACTURE

### UMA NOTA SOBRE A VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM FRATURA À TRAÇÃO

Jorge D. Riera

CPGEC

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre - Rio Grande do Sul

Brasil

Marcelo M. Rocha

Institut für Mechanik

Universität Innsbruck

Austria

#### ABSTRACT

*An overview is given of available theoretical solutions for the limiting speed of a propagating crack in a linearly elastic material. Within this context, results obtained by means of the dynamic analysis of a discrete model are given and compared with the existing prediction equations. Finally, a modified equation for the limiting crack speed, that includes the fracture toughness of the material as a governing factor, is tentatively proposed.*

**Keywords:** Fracture ■ Crack Speed ■ Crack Propagation ■ Rupture ■ Dynamic Fracture

#### RESUMO

*Apresenta-se uma revisão das soluções teóricas disponíveis para a determinação da velocidade limite de propagação de trincas em materiais com comportamento linear elástico. Neste contexto, são apresentados os resultados obtidos através da análise dinâmica de um modelo discreto e comparados com equações disponíveis na literatura. Finalmente, propõe-se uma equação modificada para o cálculo da velocidade limite de propagação da trinca, que inclui o efeito de um fator de tenacidade à fratura do material.*

**Palavras-chave:** Fratura ■ Velocidade de Formação da Trinca ■ Propagação de Trincas ■ Ruptura ■ Fratura Dinâmica

## NOTATION

$a$	Crack length
$a_0$	Initial crack length
$V$	Velocity of crack propagation
$E$	Young's Modulus
$\nu$	Poisson's coefficient
$\rho$	Specific mass
$C_p$	Velocity of the $P$ -wave
$C_r$	Velocity the Rayleigh wave
$K_I$	Stress intensity factor (Mode I)
$K_{IC}$	Critical stress intensity factor (Mode I)
$G_f$	Crack surface energy
$f_t$	Ultimate tension stress
$\epsilon_p$	Strain at ultimate tension stress
$R_f$	Rupture factor
$k_{rn}$	Ductility factor for normal bars
$k_{rd}$	Ductility factor for diagonal bars
$D_f$	Damping constant
$\sigma(t)$	Applied stress
$u(t)$	Applied displacement

## INTRODUCTION

Although unstable crack propagation constitutes an essentially dynamic phenomenon, the bulk of the work done in fracture mechanics is concerned with static solutions aimed at the prediction of the onset of sudden rupture. There is therefore comparatively little evidence, either of theoretical or experimental character, about the dynamic characteristics of the rupture process. This is particularly true in connection with concrete, rock, or similarly nonhomogeneous materials. In fact, due to the presence of these nonhomogeneities, strong arresting mechanism may hinder the crack propagation, resulting in a sort of "spasmodic" fracturing process.

Precisely in order to study several features of the fracture process in nonhomogeneous materials, such as crack velocity, branching and coalescence of pre-existing cracks, a procedure for the determination of the dynamic response of

a discrete representation of the material is being developed since 1984. The initial efforts were directed at the reproduction of well established results of linear elastic fracture mechanics (LEFM), for macroscopically *homogeneous materials*. Only after verifying *all aspects* of the response and prediction capabilities of the model, features characterizing different types of nonhomogeneities will be introduced.

In this paper, previous theoretical results related to the speed of fracture propagation in an homogeneous material are summarized in a brief overview, before the numerical solutions are described. It is shown that the numerical results are fully compatible with the available prediction equations for the crack speed. Finally, on the basis of the entire body of information available to the authors, a revised equation for the limiting speed of crack propagation in a infinite plate is proposed, which takes into account the fracture toughness of the material and the applied stresses.

## FUNDAMENTAL ASPECTS OF CRACK PROPAGATION

There seems to be sufficient evidence indicating that, under certain ideal conditions, a rapidly propagating crack grows with constant speed. Such speed would then constitute a material property, just as the *P*-wave and the *S*-wave velocities in the medium. There have been several attempts to determine the limiting speed of a propagating crack, which can be classified in two broad groups: theoretical analyses on the basis of simplified, usually partly static descriptions and numerical analyses by means of finite element, finite differences of discrete models, applied to specific geometrical situations but with less restrictive basic assumptions.

The first theoretical result concerning the limiting speed in mode I fracture is generally attributed (Kanninen and Popelar) [1] to Mott [2] who considered an infinite body subjected to a remote tensile stress  $\sigma$ , containing a propagating crack with length  $2a(t)$ . Provided that no external work is supplied, conservation of energy then requires that

$$L = \frac{1}{2} k\rho a^2 V^2 \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} + 4\gamma a = \text{constant} \quad (1)$$

in which the first term, containing an undetermined numerical constant  $k$ , represents, according to Mott, the kinetic energy associated with a constant crack speed, provided that  $V \ll \sqrt{E/\rho} = c_p$ . The second and third terms denote the elastic strain energy and the work performed in opening the crack, according to the classical Griffith theory. If the total energy is constant, then its total derivative must be zero

$$\frac{\partial L}{\partial V} dV + \frac{\partial L}{\partial a} da = 0 \quad (2)$$

Assuming now, following [2], that  $dV/da = 0$ , it follows from eqs.(1)-(2) that

$$V = c_p \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{1 - \frac{a_0}{a}} \quad (3)$$

From (3), Mott concluded that the crack speed tends to a limit value that is an (undetermined) fraction of the  $P$ -wave velocity and does not depend on fracture toughness nor on the stress level.

Robert and Wells [3] were able to compute the constant  $k$  appearing in Mott's formulation by numerically evaluating the kinetic energy in quasi static crack growth. Thus, resorting to Westergaard's solution for the displacements in the static problem, complemented by a judicious choice of the limits of integration - since the kinetic energy of the plate is not convergent - they calculated, for a Poisson's value of 0.25, a value  $\sqrt{2\pi/k}$  equal to 0.38. Thus

$$V = 0.38 c_p \sqrt{1 - \frac{a_0}{a}} \quad (4)$$

Kenninen and Popelar [1], in discussing the pitfalls of Moths' and Roberts & Wells approaches, do point out that experimental values for the crack speed in both glasses and metals are however in rough agreement with eq. (4).

Stroh [4] noted that if the limiting velocity is assumed independent of the surface energy, then it should coincide with the Rayleigh velocity. According to this notion, which anticipated later results due to Freund [5 to 9], the velocity

of crack propagation cannot exceed the speed  $c_R$  of a Rayleigh wave in the medium. Note that for  $\nu = 0.25$ ,  $c_R \cong 0.58 c_p$ .

Independently, Dulaney and Brace [10], (see also Berry [11]), introduced a correction to Mott's formulation, eliminating the need for the assumption that  $dV/da = 0$ , which led to the following limiting crack speed equation

$$V = c_p \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (5)$$

Of course, the problem of evaluating  $k$  remained open. Adopting Roberts and Wells [3] value would lead to

$$V = 0.38 c_p \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (6)$$

Kanninen and Popelar [2] regard any effort to improve on eq. (3.6) superfluous, since Freund [5] found that for an infinite medium under tensile loading the limiting crack velocity is given by

$$V = c_R \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (7)$$

That it may not be exactly so will become apparent in the discussion of numerical results. At this point, it is only germane to quote again Kanninen and Popelar, who state that the fact that observed crack speeds tend to agree somewhat better with eq. (6) than with eq. (7) is somewhat fortuitous.

Results from the two dimensional elastodynamic problem of a crack-tip moving with instantaneous speed  $V$  in the direction of the crack path tangent, due to Freund and Clifton (see also Freund [9]), will be reproduced next. These are referred to as crack-tip Cartesian coordinate system  $(x_1, x_2)$  with the  $x_2$ -direction coinciding with the crack path tangent direction. The crack surfaces are traction free. The spatial distribution of stress and deformation for points in the immediate neighbourhood of the crack-tip were determined as an interior asymptotic expansion, with its dominant term satisfying a standard boundary value problem. Under those limiting conditions, the following general result

was established: for elasto-dynamic crack growth, the spatial dependence of the crack-tip stress components  $s_{ij}$  is universal and is given with respect to the local system  $(x_1, x_2)$  by

$$s_{11} = K_1(t) B \left[ (1 + 2\alpha_p^2 - \alpha_s^2) \cos(\theta_p/2)/(2\pi r_p)^{\frac{1}{2}} - 4\alpha_s\alpha_p \cos(\theta_s/2)/(1 + \alpha_s^2)(2\pi r_s)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (8)$$

$$s_{12} = 2K_1(t) \alpha_p B \left[ \sin(\theta_p/2)(2\pi r_p)^{\frac{1}{2}} - \sin(\theta_s/2)/(2\pi r_s)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (9)$$

$$s_{22} = K_1(t) B \left[ -(1 + \alpha_s^2) \cos(\theta_p/2)/(2\pi r_p)^{\frac{1}{2}} - 4\alpha_s\alpha_p \cos(\theta_s/2)/(1 + \alpha_s^2)(2\pi r_s)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (10)$$

as  $r \rightarrow 0$  for mode I. The subscripts  $p$  and  $s$  refer to the dilatational and shear deformations with characteristic wave speeds  $c_p$  and  $c_s$ , respectively, and

$$\alpha_p = (1 - v^2/c_p^2)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha_s = (1 - v^2/c_s^2)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$B = (1 + \alpha_s^2)/R(v) \quad R(v) = 4\alpha_s\alpha_p - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (12)$$

$$x_1 + i\alpha_p x_2 = r_d e^{i\theta_p} \quad x_1 + i\alpha_s x_2 = r_s e^{i\theta_s} \quad (13)$$

The stress components have been normalized with respect to the relation

$$K_1(t) = \lim \left[ (2\pi r)^{\frac{1}{2}} s_{22}(r, 0, t) \right] \quad \text{as } r \rightarrow 0 \quad (14)$$

The time dependent scalar quantity  $K_I$  is the dynamic stress-intensity factor for crack extension in mode I. The angular variation of the transverse stress ("hoop" stress), for a fixed radial distance  $r$  is shown for several crack-tip speeds in Figure 1. These results are very similar to those obtained in an earlier analysis by Yoffe [12]. The results corresponding to (8)-(9) for elastostatic fracture mechanics were first presented by Irwin [13] and Williams [14]. Using a similar technique, Rice [15] established the equivalent result for steady growth, while Nilsson [16] and Achenbach and Bazant [17] considered the case of non-uniformly moving crack-tips.



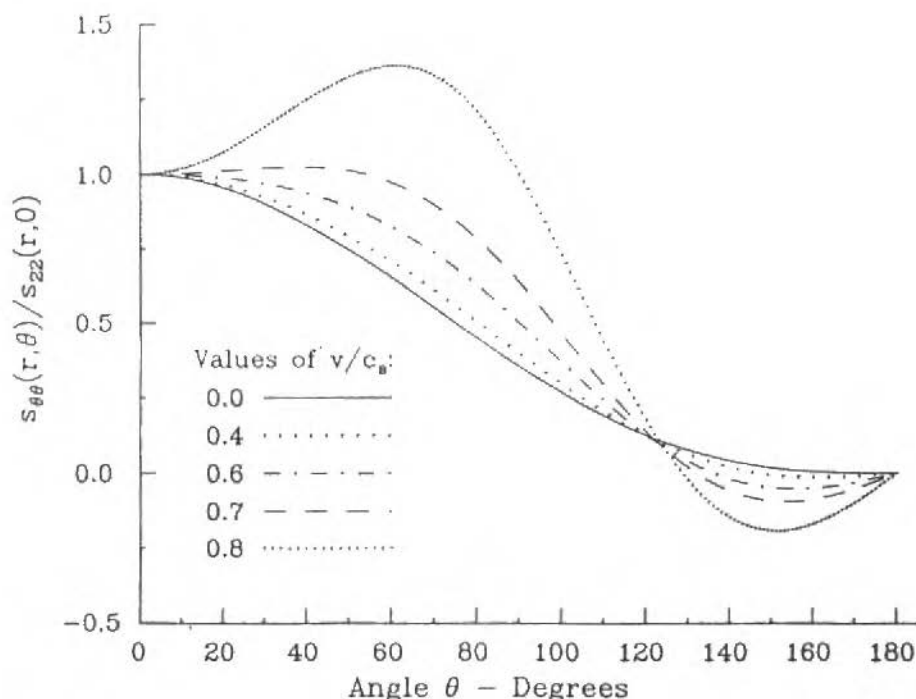


Figure 1. Angular variation of the hoop stress for the elastic near-tip stress field given in (8-10) for several crack-tip speeds (reproduced from Freund [9]).

## DESCRIPTION OF NUMERICAL SOLUTION

The discrete model employed in the studies reported herein starts from earlier developments in aeronautical engineering in which, for purposes of structural analysis it is often necessary to substitute truss-like structural systems by a continuous medium. Nayfeh and Hefzi [18] established the equivalence requirements between the cubic arrangement shown in Figure 2 and on orthotropic elastic medium. Hayashi [19] and Riera [20] extensively tested the model in linear and geometrically nonlinear analyses of elastic beams, beam-columns and plates. In case of an isotropic elastic material, the stiffness of the longitudinal bars in the equivalent discrete model is given by

$$AE_n = \alpha EL^2 \quad (\text{bar length: } L) \quad (15)$$

while for the diagonal bars

$$AE_d = 2\delta\alpha EL^2/\sqrt{3} \quad (\text{bar length: } \sqrt{3} L/2) \quad (16)$$

in which

$$\alpha = (9 + 8\delta)/(18 + 24\delta) \quad (17)$$

$$\delta = 9\nu(4 - 8\nu) \quad (18)$$

$\nu$  being Poisson's ratio.

In the discrete dynamic model, masses are concentrated at nodal points. The central finite difference scheme is used for explicit numerical integration in the time domain. Although the model proposed by Nayfeh and Hefzi adequately represents the interior of an elastic, orthotropic medium, a number of problems must be solved in the implementation of the procedure, on account of boundary effects, since boundary surfaces rarely intersect only nodal points. In fact, when bars are cut, additional nodes must be created in the boundary region. These problems, however, are not related with the crux of the matter and will not be further discussed in here.

The extension of the model to the study, initially, of linearly elastic fracture mechanics (LEFM) problems is based on the requirement that, as fracture takes place, the dissipated energy is proportional to the newly generated surfaces. Thus, the so-called Hillerborg model shown in Figure 3 is adopted as an effective stress-strain curve for each individual element.

Let's recall now that the critical stress intensity factor in mode I fracture may be expressed in the form

$$K_{IC} = \chi f_t a_0^{1/2} \quad (19)$$

in which  $f_t$  denotes the remote field tensile stress,  $a_0$  is the fracture size and  $\chi$  a nondimensional factor that depends on the problem geometry. On the other hand, the critical surface energy  $G_f$  is related to  $K_{IC}$  by means of

$$\begin{aligned} G_f &= K_{IC}^2/E' \\ E' &= E/(1 - \nu^2) \quad (\text{plain strain condition}) \end{aligned} \quad (20)$$

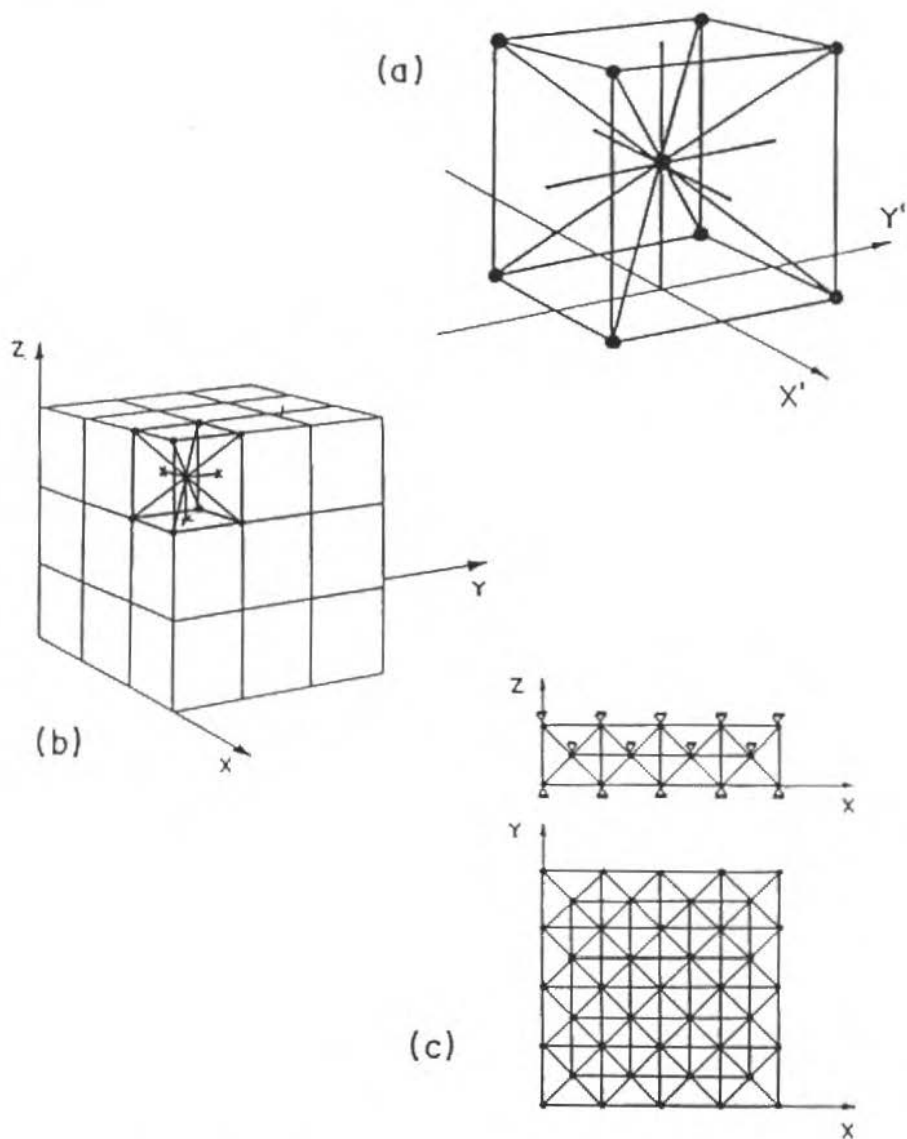


Figure 2. (a) Basic cubic module, (b) generation of a prismatic body and (c) representation of a plate in plane strain state (no  $z$ -displacement).

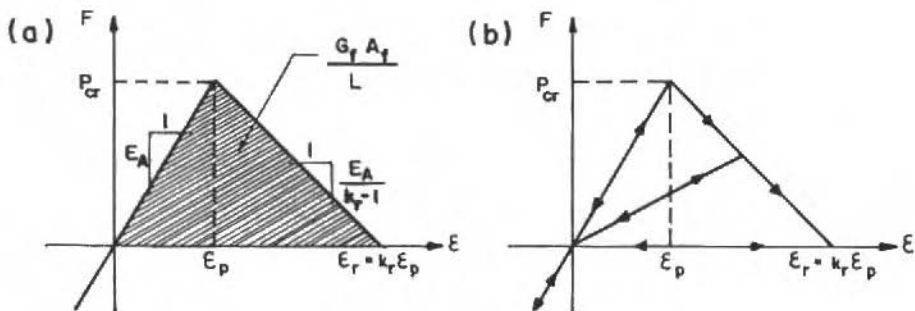


Figure 3. (a) Constitutive relation and parameters definition, (b) loading and unloading paths.

Now, since the stress and strain when the load in the element reaches its peak are in the one-dimensional case related by

$$f_t = E \epsilon_p \quad (21)$$

it may be easily verified that

$$\epsilon_p = R_f \left[ \frac{G_f}{E(1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (22)$$

in which  $R_f$  denotes a rupture factor, defined by Rocha [21], which can be interpreted as a parameter quantifying the influence of a real or fictitious material imperfection, causing the rupture

$$R_f = \frac{1}{\chi \alpha_0^{1/2}} \quad (23)$$

As indicated above, the coefficient  $k_r$  is chosen in order to satisfy the requirement that the area under the diagram be proportional to the influence surface for the element under consideration. For the longitudinal bars

$$\int_0^{\epsilon_r} F(\epsilon) d\epsilon = \frac{G_f A_f}{L} = \frac{k_m \epsilon_p^2 E}{2} \quad (24)$$

Substituting in (24) the value of the integral, as well as the influence area  $A_f = c_A L^2$ , the nondimensional coefficient  $c_A$  numerically evaluated for the cubic truss model being 0.1385, leads to:

$$k_m = \frac{2c_A(1-\nu^2)}{\alpha R^2 L} \quad (25)$$

It may be shown that for the diagonal bars

$$k_{rd} = 2 k_m / \sqrt{3} \quad (26)$$

Note that the apparent ductility coefficients  $k_r$  given above depend both on material properties and on the geometrical dimension  $L$  of the elements. Because the energy dissipation in opening the fracture cannot be less than the strain energy available in the element,  $k_{rn}, k_{rd} \geq 1$ . This implies that there is an upper limit for the element length  $L$ , which cannot exceed a critical, maximum size. The stress-strain diagram of Figure 3 is herein designated elementary constitutive relation (ecr). It was verified by [21] that, for brittle materials, the actual shape of the stress-softening branch is a secondary factor in the characterization of the fracture process. The ecr must not be confused with macroscopic, global, of apparent stress-strain relations observed in testing laboratory specimens. It must be interpreted as simply a numerical technique to assure the correct energy dissipation.

The model described above was validated by the determination of the dynamic response of a rectangular plate in plane strain with an initial symmetrical crack, as shown in Figure 4. The following data applies to Example A:

- Young's modulus:  $E = 3.0 \times 10^{10} \text{N/m}^2$
- Poisson's coefficient:  $\nu = 0.2$ ; ( $\alpha = 5/12$ )
- Specific mass:  $\rho = 2400 \text{kg/m}^3$
- Damping constant:  $D_f = 2000 \text{s}^{-1}$  (mass-proportional viscous damping, resulting for this plate in approximately 2% of critical)

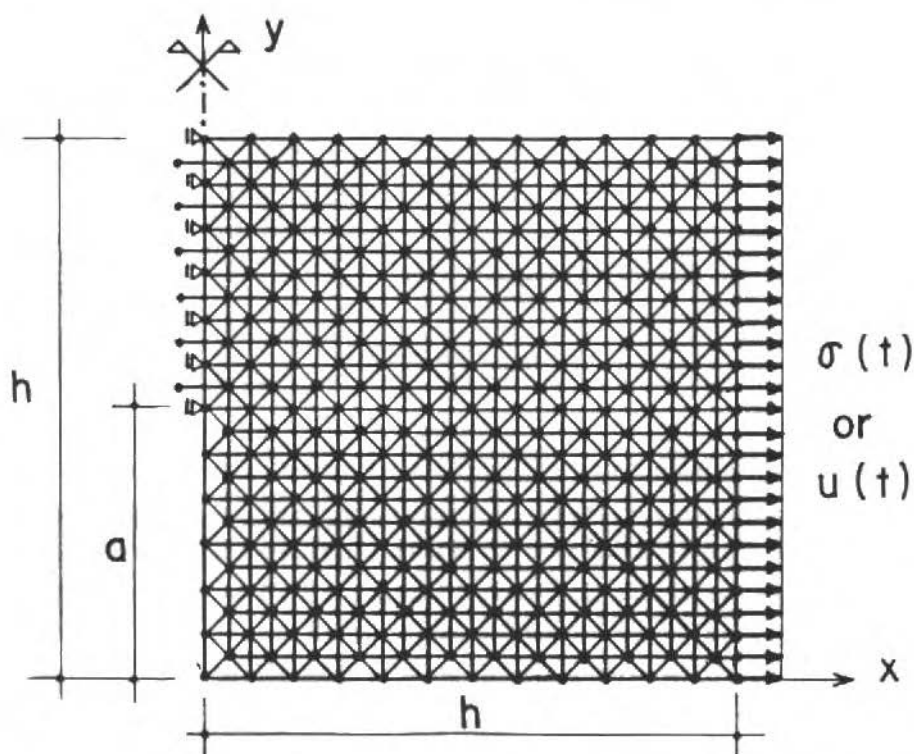


Figure 4. Discrete representation of the LEFM problem (Example A) considered for validation of the numerical model (due to the symmetry, just one half of the single-edge cracked plate is modeled).

Both a uniform boundary stress  $\sigma(t)$ , and a uniform boundary displacement  $u(t)$  were applied, according to the following laws

$$\dot{\sigma}(\tau) = \dot{\sigma}_f [1 - e^{-(\tau/t_0)}] \quad (27)$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_f [1 - e^{-(t/t_0)}] \quad (28)$$

in which  $\dot{u}_f/h$  and  $\dot{\sigma}_f$  denote the strain and stress rates in the numerical experiments. Unless otherwise indicated,  $\dot{\sigma}_f = 10^6 (N/m^2)s^{-1}$ , and  $\dot{u}_f = (0.1h)s^{-1}$ . In such manner, the expected conditions in a laboratory experiment

under constant strain (stress) were simulated. Additional details of these studies are given by Riera and Rocha [20], who discuss the model's ability to predict the velocity of crack propagation. Some results, however, will be reproduced in the following.

For an infinitely long plate, with width  $h$  and a lateral crack of length  $a_0$ , subjected to remote tensile stress  $\sigma$ , the stress intensity factor is given by

$$K_1 = \sigma a^{\frac{1}{2}} \left[ 1.99 - 0.41(a_0/h) + 18.70(a_0/h)^2 - 38.48(a_0/h)^3 + 53.85(a_0/h)^4 \right] \quad (29)$$

As general indication of the performance of the discrete model, the influence of the  $a/h$  ratio on the critical stress is shown in Figure 5 in which the values corresponding to stress-controlled loading are compared with the static LEFM expression (29).

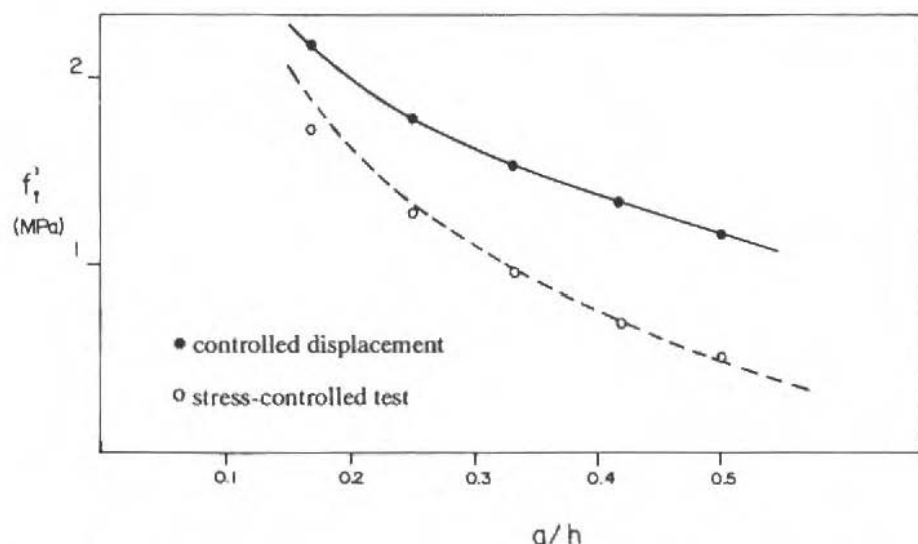


Figure 5. Influence of the  $a/h$  ratio on the critical stress  $f_t$  for Example A (the curves represent the theoretical solution).

Finally, the scale effect predicted by LEFM can be seen in Figure 6, both for displacement or stress-controlled conditions. The numerical results and the theoretical, static LEFM solution are virtually identical in all cases, thus providing evidence about the adequacy of the model for the study of fracture in homogeneous media.

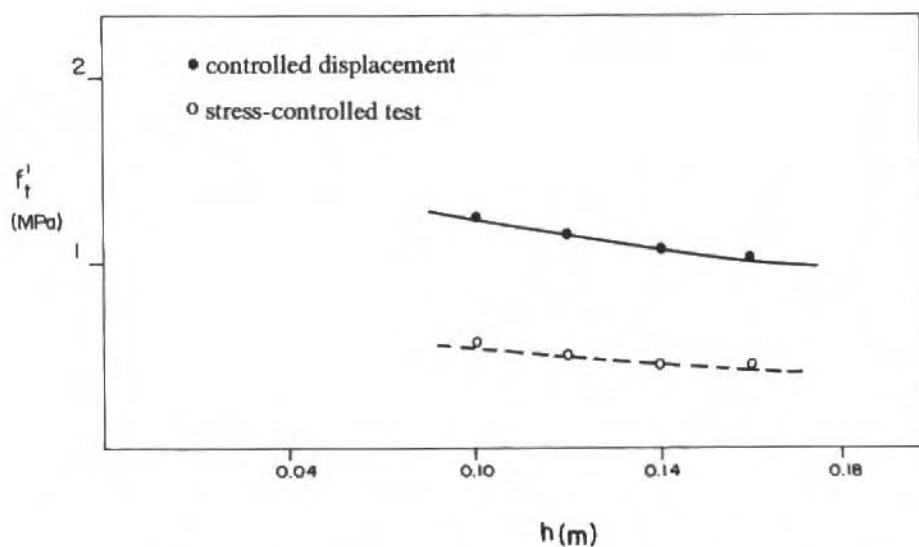


Figure 6. Influence of the specimen size on the critical stress  $f_t$  for Example A (the curves represent the theoretical solution).

## DYNAMIC CRACK PROPAGATION IN HOMOGENEOUS PLATE

The energy balance in the model during the numerical integration is carefully monitored. Figure 7 shows the evolution of different forms of energy of relevance in the rupture process in the course of one of the simulation discussed in section 4. The kinetic energy and the work dissipated by damping were also computed, but are not included in the graph. Observe that the fracture energy grows smoothly until a plateau is reached, indicating the end of the rupture process, that is, the complete separation of the plate in two parts.



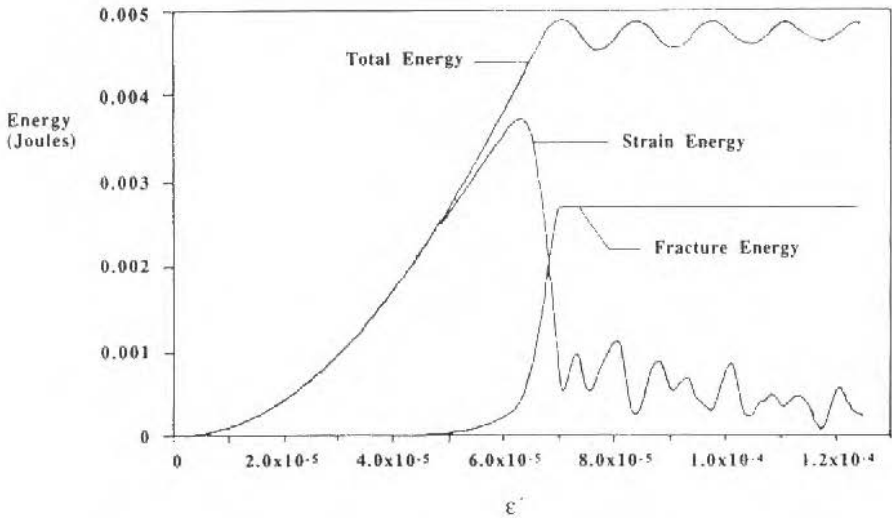


Figure 7. Energy components in numerical analysis (Example A).

The instantaneous length of the fracture  $a(t)$  is represented, for the same case, in Figure 8. Also note that the global deformation  $\epsilon'$  associated to the critical stress occurs somewhat after crack initiation. Finally, the evolution of the stress intensity factor may be seen Figure 9.

The speed of crack propagation for various values of  $G_f$  is indicated in Figure 10. In every case the peak velocity was found to be in the range defined by eqs. (6) and (7).

In fact, approximate solutions to very similar problems had already been obtained using finite elements by Yagawa et. al. [22] and finite differences by Kanazawa et. al. [23], while Broberg [24] had presented earlier a theoretical solution to the plate with a symmetrical notch.

It should be underlined at this point that, as indicated in Section 4, a small amount of viscous damping was assumed to exist in the model (Kelvin-type material). Although the issue is rarely mentioned in the literature, it is conceivable that material damping may also influence the velocity of crack

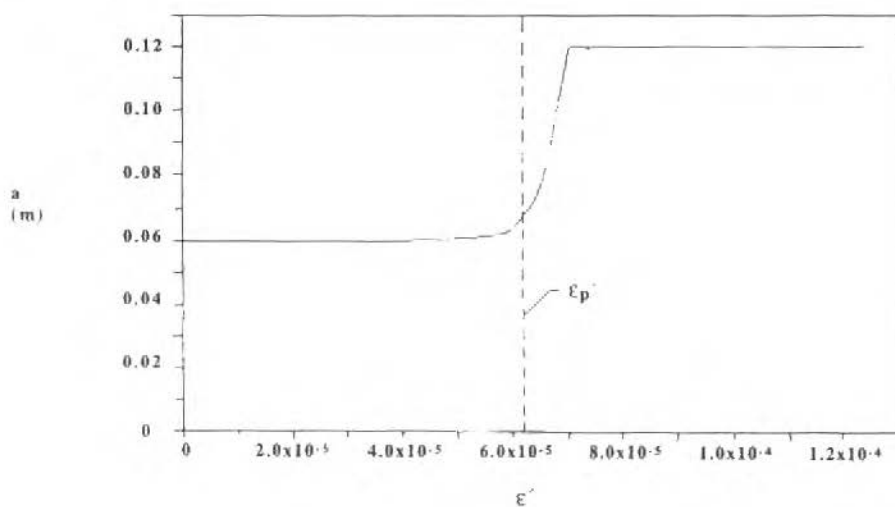


Figure 8. Evolution of crack in numerical analysis (Example A).

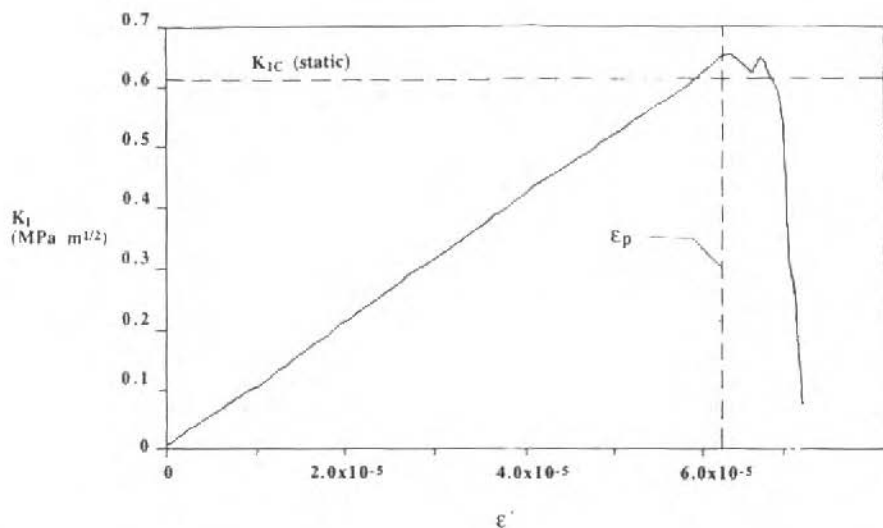


Figure 9. Evolution of stress intensity factor in numerical analysis (Example A).

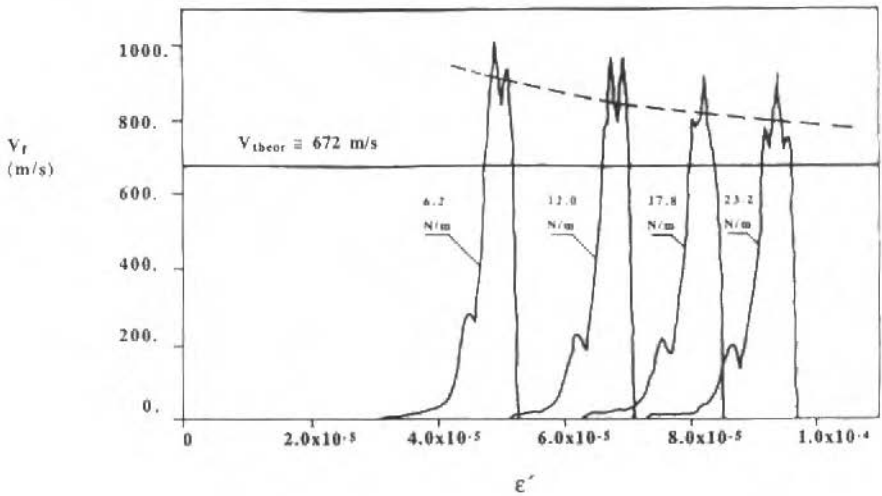


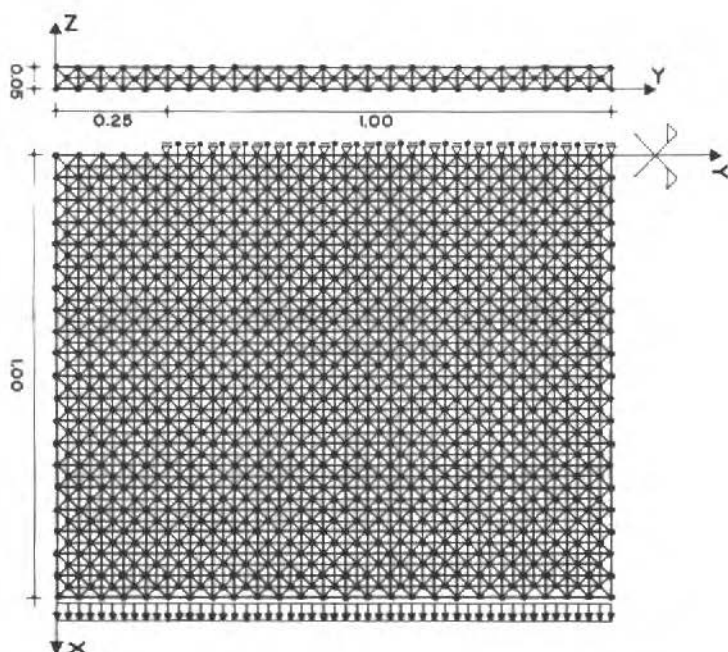
Figure 10. Speed of crack propagation for different values of  $G_f$ . The horizontal axis represents strain times  $10^5$  (Example A).

propagation. In order to obtain additional evidence on the influence of both  $G_f$  and  $D_f$  on the evolution of the crack, another plate with different  $a/h$  ratio and discretization level was analyzed.

The geometrical dimensions and the discrete model (Example B) employed are shown in Table 1 and Figure 11. A comparison of the crack velocity with and without material damping can be seen in Figure 12. Similar results for other cases suggest that, for small damping as may be expected in concrete, rock or metals, viscous material damping may be expected to exert only a secondary influence on the velocity of crack propagation in mode I fracture. Attention may then be directed to the effect of  $G_f$  and the way of loading. Figure 13 shows the shape of the crack near the crack tip for various  $G_f$  values and times after the beginning of unstable crack propagation.

**Table 1. Parameters for Example B (Plane strain, stress controlled)**

$E = 3.0 \times 10^{10} N/m^2$	$D_f = 1000 s^{-1}$	$L_c = 0.05 m$
$\nu = 0.2$	$G_f = \text{variable}$	$\dot{\sigma}_f = 500 MPa$
$\rho = 2400 kg/m^3$	$\Delta t = 8.5 \mu s$	$t_0 = 0.001 s$

**Figure 11. Geometry of plate for Example B.**

The evolution of the crack speed for the different cases studied (controlled stresses) is presented in Figure 14. It is again verified that for the most fragile material ( $G_f = 10 N/m$ ), the peak speed is very close to the Rayleigh wave velocity  $C_r$ . As the fracture toughness increases, however, the peak velocity appears to tend to a value somewhat higher than  $0.38 C_p$ .

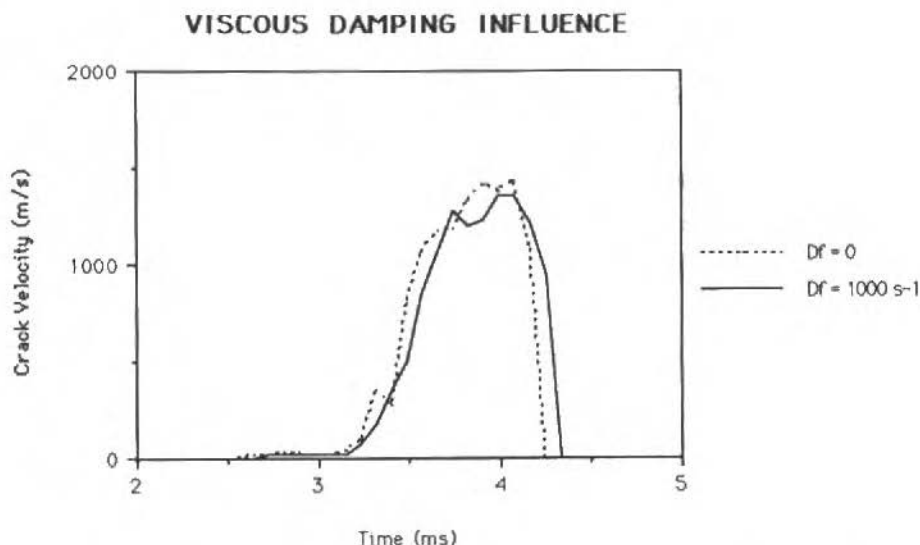


Figure 12. Velocity of crack propagation with and without material damping (Example B).

### A CRITICAL LOOK AT THE VELOCITY OF CRACK PROPAGATION

The results presented in last section strongly suggest that the limiting speed of crack propagation is influenced by the fracture toughness, which does not appear in either Eq.(6) or (7). It was verified that, as  $G_f$  tends to zero, the limit crack speed in the finite plate does approach the Rayleigh wave velocity. Moreover, it decreases with increasing  $G_f$ , apparently towards a value around or somewhat higher than  $0.38 C_p$ . It is interesting to observe that, according to Figure 1, when the crack speed exceeds about 60% of the shear wave velocity, then the peak hoop stress in the vicinity of the crack-tip does not occur at  $\theta = 0$ , but at  $\theta \cong 60^\circ$ , suggesting a tendency for the crack to follow a curved path. At any rate, the speed at which the peak hoop stress no longer takes place at  $\theta = 0^\circ$  is, roughly (see also Yoffe [12])

$$V = 0.60 C_s = 0.60(0.64 C_p) = 0.38 C_p \quad (30)$$

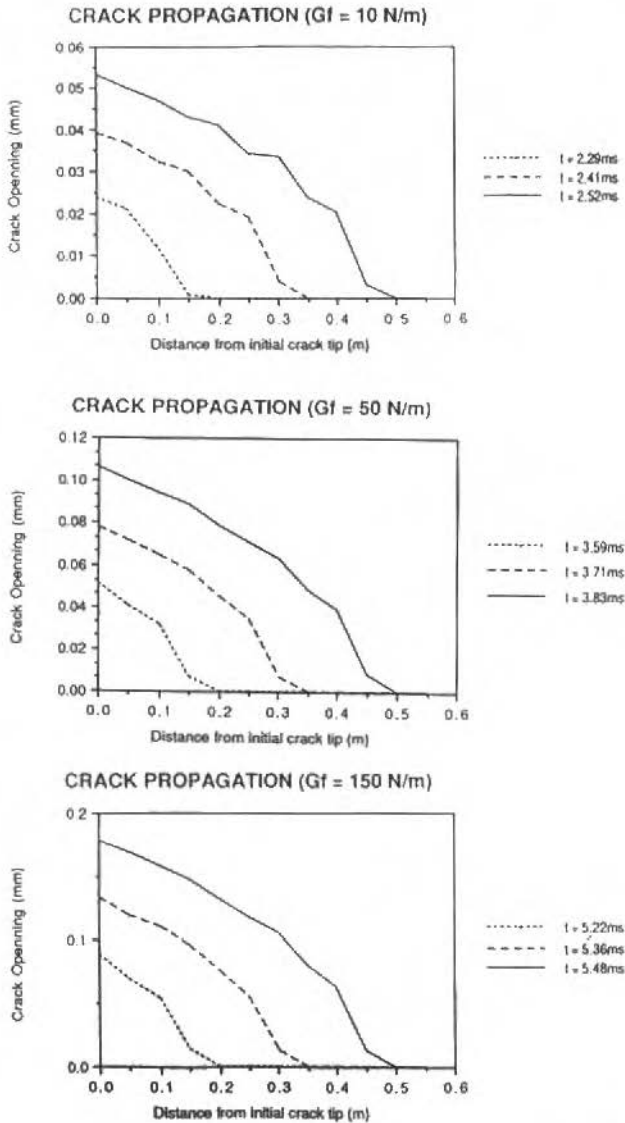


Figure 13. Shape of the crack near the crack tip for various  $G_I$  values and times after the beginning of unstable crack propagation (See also Figure 14).

is clearly demonstrated by the spikes presented by the  $V - \varepsilon'$  diagrams of Figure 12. It is admitted that (low) viscous material damping has a minor effect on the response. The influence of the type and the velocity of loading (stress or displacement controlled) are presently under investigation.

## CONCLUSIONS

As part of the evaluation of a dynamic fracture analysis by means a discrete model, the numerical solutions for the velocity of crack propagation in an homogeneous plate with an initial lateral crack are compared with available theoretical predictions. It was verified that the results of the numerical analyses are totally compatible with existing evidence. In addition, the model showed that in finite plates the limiting crack speed tends to decrease as the fracture toughness increases, conclusion that is possibly applicable as well to infinite plates. On that basis, a modified equation for the limiting crack speed is proposed.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This research was partly financed by CNPq, FINEP and CAPES (Brasil). The support of the Bundesministerium für Wissenschaft and Forschung (Austria) is also gratefully acknowledged.

## REFERENCES

- [1] KANNINEN, M.F. and POPELAR, C.H. *Advance Fracture Mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 1985.
- [3] MOTT, N.F. *Fracture of Metals: Theoretical Considerations*, Engineering, Vol. 165, 1948, pp. 16-18.
- [3] ROBERTS, D.K. and WELLS, A.A. *The Velocity of Brittle Fracture*, Engineering, Vol. 178, 1954, pp. 820-821.
- [4] STROH, A.N. *A Theory of the Fracture of Metals*, *Advances in Physics*, Vol. 6, from *Phil. Mag. Sypol*, 1957, pp. 418-465.

- [18] NAYFEH, A.H. and HEFSY, M.S. Continuum Modeling of Three-Dimensional Truss-Like Space Structures, *AIAA Journal*, 16(8), Aug. 1978, pp. 779-787.
- [19] HAYASHI, Y. Sobre um Modelo de Discretização de Estruturas Tridimensionais Aplicado em Dinâmica não Linear, M.Sc. Dissertation, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1982.
- [20] RIERA, J.D. Local Effects in Impact Problems in Concrete Structures. Proceedings, Conf. on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, Oct. 3-5, 1984, Vol. 3, pp. 57-79.
- [21] ROCHA, M.M. Ruptura e Efeito de Escala em Materiais Não-Homogêneos, Master's Thesis, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Univ. Fed. do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1989.
- [22] YAGAWA, G., SAKAI Y. and ANDO, Y. Analysis of Rapidly Propagation Crack Using Finite Elements, in *Fast Fracture and Crack Arrest*, ASTM STP 627, Ed. by Hahn/Kanninen, 1977, 109-122.
- [23] KANAZAWA, T., MACHIDA, S. and TERAMOTO, T. Preliminary Approaches to Experimental and Numerical Study on Fast Crack Propagation and Crack Arrest, in *Fast Fracture and Crack Arrest*, ASTM STP 627, Ed. by Hahn/Kanninen, 1977, 39-58.
- [24] BROBERG, K.B. On the Speed of a Brittle Crack, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, 1964, 546-547.



## A NOTE ON THE SOFTENING BEHAVIOR FOR THE BLATZ-KO ELASTIC MATERIAL UNDER PLANE DEFORMATION

### UMA NOTA SOBRE O AMOLECIMENTO DE MATERIAIS ELÁSTICOS DE BLATZ-KO EM ESTADOS DE DEFORMAÇÕES PLANAS

Edgar Nobuo Mamiya\* - Membro ABCM  
Adair Roberto Aguiar  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
22453, Rio de Janeiro RJ, Brasil

\*Present Address:  
Instituto Politécnico do Rio de Janeiro  
28600, Nova Friburgo RJ, Brasil

#### ABSTRACT

*The softening behavior of the Blatz-Ko hyperelastic material is analysed here under homogeneous plane strain conditions. It is observed that this material instability depends not only on the strain state itself but also on the deformation process considered.*

**Keywords:** Hyperelastic Materials ■ Material Softening Behavior ■ Material Instability ■ Finite Deformations

#### RESUMO

*No presente trabalho, analisa-se o comportamento de amolecimento do material hiperelástico de Blatz-Ko sob condições de deformações planas homogêneas. Observa-se que esta instabilidade material não depende só do estado de deformação em si mas também do processo de deformação considerado.*

**Palavras-chave:** Materiais Hiperelásticos ■ Amolecimento ■ Instabilidade Material ■ Deformações Finitas

## INTRODUCTION

Softening behavior can be thought as the inability of a material to increase the stress in response to a corresponding increase of strain. Although this material instability is usually associated to inelastic constitutive laws, it can also be observed for elastic deformations. Usually it appears associated to the localization of deformations, giving rise to the necking effect, for instance. Nevertheless, these two concepts — softening and localization — are not equivalent. In the context of finite elasticity, the last phenomenon was extensively studied by Knowles and Sternberg [1], [2], [3], who determined conditions for the emergence of strain discontinuities, called elastostatic shocks. Specifically for the Blatz-Ko material under plane deformations, Knowles and Sternberg found the following bounds for the strong ellipticity domain:

$$2 - \sqrt{3} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \quad (1)$$

where  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are the principal stretches associated the strain state. A survey of other material stability criteria can be found, for example, in the review presented by Beatty [4]. In the present work, the bounds for the hardening behavior of the Blatz-Ko elastic material are analysed for the set of homogeneous plane strain deformations. Three tensile tests — uniaxial, simple shear an isotropic strains — are studied with respect to the possibility of observing a softening behavior.

## SOFTENING OF ISOTROPIC HYPERELASTIC MATERIALS

The softening behavior of a material is characterized by a decline of stress as a response to an increase of strain. The choice of the measures for the stresses and the strains is of fundamental importance for this definition. In the present study, if  $\dot{F}$  is the rate of deformation gradient  $F = \text{Grad}\chi$  and  $\dot{P}$  is the corresponding rate of first Piola-Kirchhoff stress, a material is said to soften at a configuration  $\chi$ , in the direction  $\dot{F}$  if

$$\dot{P} \dot{F} < 0 \quad (2)$$

In opposition to (2), if this inequality is reversed for any of  $\dot{F}$ , the material is said to harden. The last condition is known as the Coleman-Noll inequality

[5]. One can remark the fact that the condition (2) depends strictly upon the mechanical properties of the material, without taking into account any particular characteristic of the boundary conditions involved. Thus, the softening behavior is said to constitute a material instability.

For hyperelastic materials, the first Piola-Kirchhoff stress tensor  $P$  can be defined as the derivative of the strain energy density function  $\hat{e}(F)$  with respect to the measure of deformation  $F$ . In terms of Gateaux derivatives, one can write

$$P \cdot \dot{F} = D\hat{e}(F) \cdot \dot{F} \quad (3)$$

The derivative of the expression (3) in the direction  $\dot{F}$  gives

$$(DP(F) \cdot \dot{F}) \cdot \dot{F} = \dot{P} \cdot \dot{F} = (D^2 \hat{e}(F) \cdot \dot{F}) \cdot \dot{F} \quad (4)$$

Hence, from (2) and (4) one can say that the positiveness of the linear operator  $D^2 \hat{e}(F)$  determines the hardening behavior of the material. This means that this material stability is verified whenever the density  $\hat{e}$  is locally a strictly convex and twice differentiable function of  $F$ . When the strict convexity condition fails for any neighborhood of a strain state  $F$  (out from rigid motions), the softening behavior can appear. As material objectivity is expected, the deformation gradient  $F$  can be replaced by the rotationless measure of strain  $U = \sqrt{F^T F}$ .

If  $X$  is material point and  $x = \chi(X)$  is its image under the configuration mapping  $\chi$ , the deformation gradient  $F$  is a linear mapping from the tangent space  $T_X$  to the tangent space  $T_x$ . By considering appropriate orthonormal bases  $G_1, G_2, G_3$  for  $T_X$  and  $g_1, g_2, g_3$  for  $T_x$ , the linear operator  $F$  can be written as

$$F = \lambda_1 g_1 \otimes G_1 + \lambda_2 g_2 \otimes G_2 + \lambda_3 g_3 \otimes G_3 \quad (5)$$

where  $\lambda_1, \lambda_2$  and  $\lambda_3$  are the principal stretches associated to  $F$ .

If the strain energy density density function  $\hat{e}(F)$  describes an isotropic and frame indifferent hyperelastic material, then it can be written in a simpler form as

$$\hat{e} = e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (6)$$

and the convexity of  $\hat{e}(F)$  can be studied by analysing the simpler function  $e(\lambda)$ . The strict convexity of  $e(\lambda)$ , and hence the hardening behavior, is verified whenever all the eigenvalues of the Hessian

$$H = D^2 e(\lambda) \quad (7)$$

are simultaneously positive. The failure of this condition is here exploited specifically for the characterization of the softening behavior of Blatz-Ko materials.

### MATERIAL STABILITY FOR THE BLATZ-KO MODEL

The Blatz-Ko material [6] describes some compressible isotropic and hyperelastic foamed polyurethane elastomers. The corresponding strain energy density function considered in this study has the form

$$\hat{e}(F) = \frac{\mu}{2} \left( 2I_3^{1/2} + \frac{I_2}{I_3} - 5 \right) \quad (8)$$

where the scalar parameter  $\mu$  characterizes the material and

$$I_2 = \frac{1}{2} [(tr C)^2 - tr(C^2)] \quad ; \quad I_3 = \det C \quad (9)$$

are respectively the second and the third invariants of the right Cauchy-Green strain tensor  $C = F^T F$ .

Consider a homogeneous plane strain deformation characterized by the strain measure  $F$ :

$$F = \lambda_1 g_1 \otimes G_1 + \lambda_2 g_2 \otimes G_2 + g_3 \otimes G_3 \quad (10)$$

The corresponding right Cauchy-Green stress tensor  $C$  is given by

$$C = \lambda_1^2 G_1 \otimes G_1 + \lambda_2^2 G_2 \otimes G_2 + G_3 \otimes G_3 \quad (11)$$

From (11), it is possible to compute the invariants of  $C$ :

$$I_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad (12)$$

Hence, the strain energy density function, expressed in terms of the principal stretches  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  assumes the representation

$$e(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\mu}{2} \left( 2\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 4 \right) \quad (13)$$

The derivative of (8) with respect to  $F$  gives the mechanical response function of the Blatz-Ko material

$$\hat{P}(F) = \mu F \cdot [(\det C)^{1/2} \mathbf{1} - C^{-1}] \cdot C^{-1} \quad (14)$$

or, as a function of the principal stretches  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \mu [(\lambda_2 - \lambda_1^{-3}) g_1 \otimes G_1 + (\lambda_1 - \lambda_2^{-3}) g_2 \otimes G_2 + (\lambda_1\lambda_2 - 1) g_3 \otimes G_3] \quad (15)$$

The material stability considered here is characterized by the positiveness of the operator  $H = D^2 e(\lambda)$ . From (13)

$$H = D^2 e(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 3\lambda_1^{-4} & 1 \\ 1 & 3\lambda_2^{-4} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Each eigenvalue  $\kappa$  of  $H$  satisfies the condition

$$\det(H - \kappa \mathbf{1}) = 0 \quad (17)$$

which can be rewritten, in terms of (16), as:

$$\kappa^2 - 3\mu(\lambda_1^{-4} + \lambda_2^{-4}) \kappa + \mu^2(9\lambda_1^{-4} \lambda_2^{-4} - 1) = 0 \quad (18)$$

The corresponding roots

$$\kappa_{1,2} = \frac{3}{2} \mu(\lambda_1^{-4} + \lambda_2^{-4}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{[-3\mu(\lambda_1^{-4} + \lambda_2^{-4})]^2 - 4\mu^2(9\lambda_1^{-4} \lambda_2^{-4} - 1)} \quad (19)$$

are both positives provided the term  $9\lambda_1^{-4} \lambda_2^{-4} - 1$  in expression (19) is positive. Thus, the condition

$$\lambda_1 \lambda_2 < 3^{1/2} \quad (20)$$

must be observed.

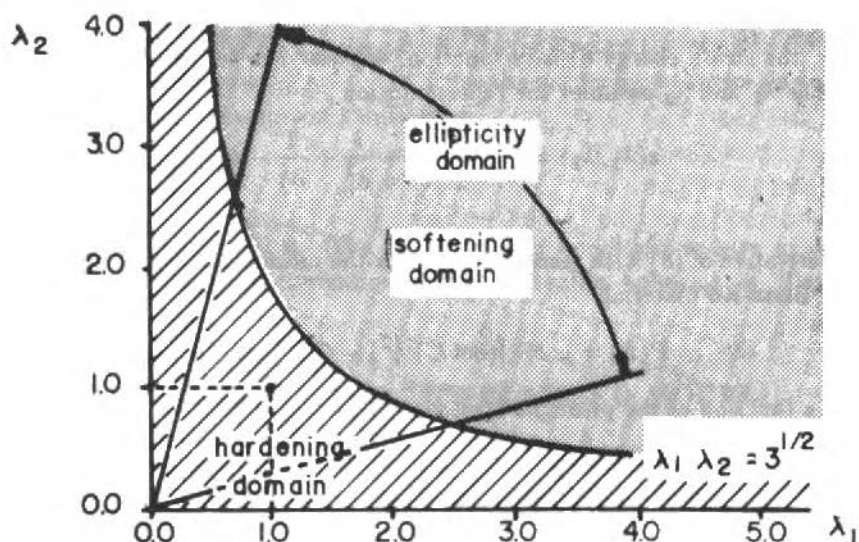


Figure 1. Hardening and softening domains

The Figure 1 illustrates the domains of hardening and softening behaviors in the space spanned by the stretches  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , for the Blatz-Ko material described by (8). The same Figure shows the ellipticity domain obtained by Knowles and Sternberg and expressed by (1). As can be seen, the domains of convexity and of ellipticity are not the same.

When the condition (20) is verified, both eigenvalues  $\kappa_i$ ,  $i = 1, 2$ , are positive and the hardening behavior is observed for any direction  $\hat{F}$  considered (out from rigid motions). On the other hand, when (20) fails, only one of the eigenvalues becomes negative, the other one remaining strictly positive. This means that, under this condition, there are directions  $\hat{F}$  for which the softening behavior (2) appears, while for other directions the hardening behavior is still verified. The determination of the directions  $\hat{F}$  for which the softening condition (2) is actually observed is obtained by considering the explicit computation of  $\dot{P} \cdot \hat{F}$  for the Blatz-Ko constitutive model. Let the perturbation  $F$  be characterized by the unitary vector  $v = (\lambda_1, \lambda_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , as illustrated in Figure 2, where the angle  $\theta$  determines the direction of  $v$ .

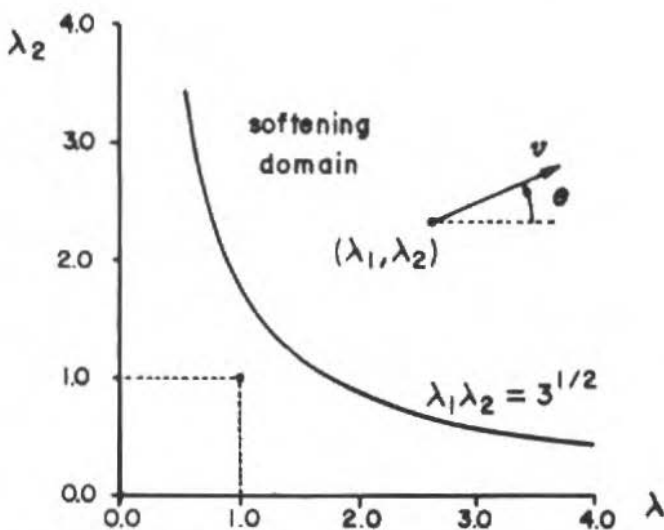


Figure 2. Perturbation of the strain state in the softening domain

The derivative of  $P(F)$  in the direction  $v$  is given by

$$DP(\lambda_1, \lambda_2) \cdot v = \frac{d}{d\alpha} P(\lambda_1 + \alpha \cos \theta, \lambda_2 + \alpha \sin \theta)_{\alpha=0} \quad (21)$$

which, specifically for  $P$  expressed by (15), gives

$$\begin{aligned} \dot{P} &= DP(\lambda_1, \lambda_2) \cdot v \\ &= (\sin \theta + 3\lambda_1^{-4} \cos \theta) g_1 \otimes G_1 + (\cos \theta + 3\lambda_2^{-4} \sin \theta) g_2 \otimes G_2 \\ &\quad + (\lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta) g_3 \otimes G_3 \end{aligned} \quad (22)$$

As  $\dot{F}$  is given by

$$\dot{F} = DF(\lambda_1, \lambda_2) \cdot v = \cos \theta g_1 \otimes G_1 + \sin \theta g_2 \otimes G_2 \quad (23)$$

the softening condition (2) can be rewritten as

$$\dot{P} \cdot \dot{F} = 3(\lambda_1^{-4} \cos^2 \theta + \lambda_2^{-4} \sin^2 \theta) + \sin 2\theta < 0 \quad (24)$$

## SOME TENSILE TESTS

In this section, the strict hardening and the actual softening conditions given respectively by expressions (23) and (24) are applied to the study of the softening behavior in some simple tensile tests, always under the assumption of plane strains.

### The Uniaxial Tensile Test

Consider the uniaxial tensile test for which  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are such that

$$P_{22} = \lambda_1 - \lambda_2^{-3} = 0 \quad (25)$$

or

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1/3} \quad (26)$$

Under this condition, the behavior of the stress component  $P_{11}$

$$P_{11}(\lambda_1) = \mu(\lambda_1^{-1/3} - \lambda_1^{-3}) \quad (27)$$

can be illustrated in the Figure 3. As the stretch  $\lambda_1$  increases from 1 to  $3^{3/4}$ , the value of  $P_{11}$  increases monotonically: the material hardens in order to stabilize the strain increment. Nevertheless, for values of  $\lambda_1$  greater than  $3^{3/4}$ , the softening behavior appears. This fact agree with the stability criterion given by (20). Indeed,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_1^{-1/3} = \lambda_1^{2/3} < 3^{1/2}$$

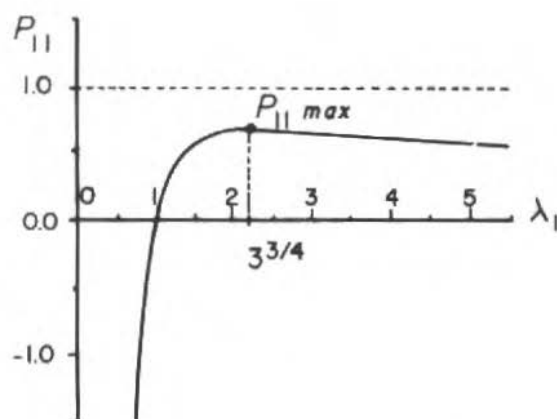
and hence the material stability is observed whenever

$$\lambda_1 < 3^{3/4} \quad (28)$$

along the uniaxial tensile test. For  $\lambda_1 = 3^{3/4}$ , the Hessian of  $\epsilon$  assumes the value

$$H = \mu \begin{pmatrix} 3^{-2} & 1 \\ 1 & 3^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$



Figure 3. Evolution of  $P_{11}$  during the uniaxial tensile test

with eigenvalues

$$\kappa_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_2 = \left(9 + \frac{1}{9}\right) \mu \quad (30)$$

The kernel of  $H$  is spanned by the eigenvector

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (31)$$

which is also the tangent to the tensile test path at the point  $(\lambda_1, \lambda_2) = (3^{3/4}, 3^{-1/4})$ , as illustrated in Figure 4.

If the direction (31) is considered, the expression (24) gives:

$$\dot{P} \cdot \dot{F} = \left(\frac{1}{3} \cos \bar{\theta} + 3 \sin \bar{\theta}\right)^2 = 0 \quad (32)$$

where  $\bar{\theta} = \tan^{-1}(-\frac{1}{9})$ . For any other direction,  $\dot{P} \cdot \dot{F}$  is positive.

Whenever  $\lambda_1 < 3^{3/4}$ , the scalar product  $\dot{P} \cdot \dot{F}$  is strictly positive for all  $\dot{F}$  considered and hence the tensile test is stable under any perturbation. On the

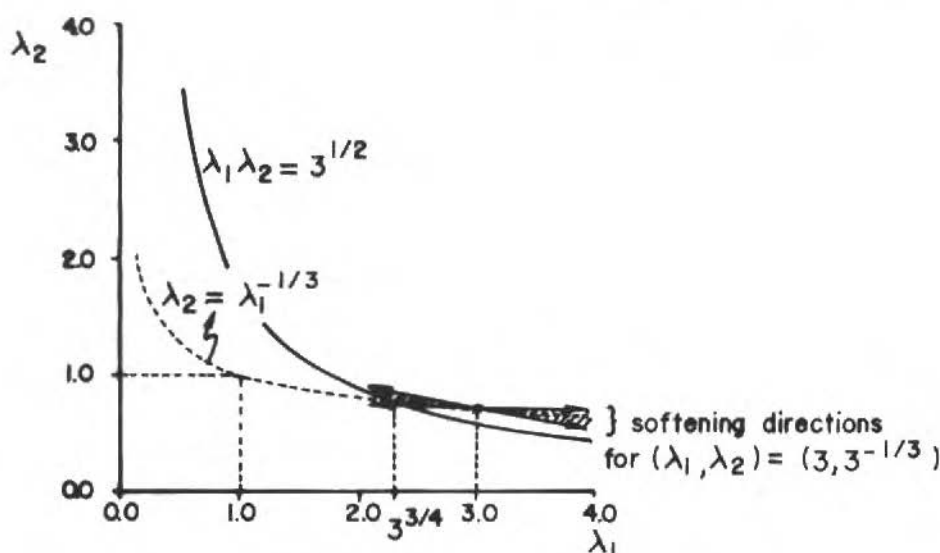


Figure 4. The uniaxial tensile test

other hand, for  $\lambda_1 > 3^{3/4}$ , not only the tensile test becomes unstable, but also the softening instability can be verified for a set of perturbations out from the tangent to the test path. For example, if  $\lambda_1 = 3$ , the inequality (2) can be observed for any perturbation spanned by  $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$  such that

$$-11.43^\circ < \theta < -1.17^\circ \quad (33)$$

Finally, it should be interesting to remark the fact that the softening behavior appears, in the uniaxial tensile test, before the loss of ellipticity detected by Knowles and Sternberg in [3].

### The Simple Shear Tensile Test

The simple shear tensile test can be characterized by the mapping

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3 \quad (34)$$

if a cartesian system of coordinates is considered. By choosing an appropriate base, its deformation gradient can be represented as

$$F = \lambda_1 g_1 \otimes G_1 + \lambda_1^{-1} g_2 \otimes G_2 + g_3 \otimes G_3 \quad (35)$$

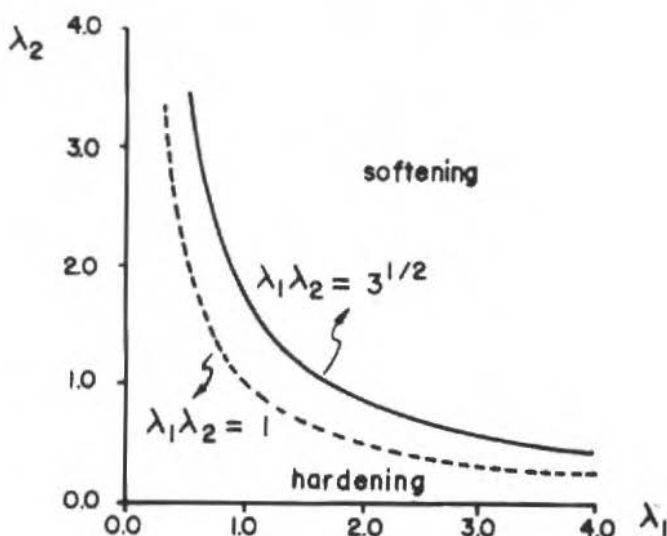


Figure 5. The simple shear tensile test

where

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4}}} \quad (36)$$

The verification of the condition (20)

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_1^{-1} = 1 < 3^{1/2} \quad (37)$$

for any value of  $\lambda_1$  ensures the hardening behavior of the material for any shear level, as illustrated in Figure 5.

### The Isotropic Strain Tensile Test

In this tensile test the principal stretches  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are equal to each other and the first Piola-Kirchhoff stress tensor can be represented by

$$P(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_1^{-3}) g_1 \otimes G_1 + (\lambda_1 - \lambda_1^{-3}) g_2 \otimes G_2 + (\lambda_1^2 - 1) g_3 \otimes G_3 \quad (38)$$

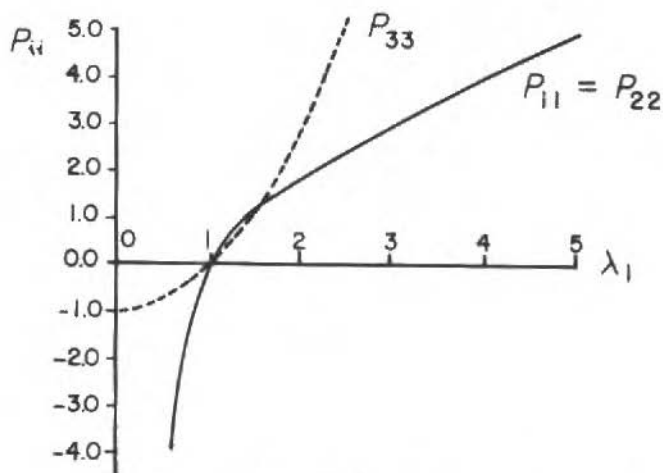


Figure 6. Evolution of  $P_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , in the isotropic strain tensile test

All the stress components are increasing functions of  $\lambda_1$ , as shown in Figure 6. Nevertheless, the stability criterion (20) states that the strict hardening behavior is verified only for:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1^2 < 3^{1/2} \quad (39)$$

or

$$\lambda_1 < 3^{1/4} \quad (40)$$

When  $\lambda_1$  reaches the bounding value, the associated Hessian becomes

$$H = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

and the associated eigenvalues are

$$\kappa_1 = 0 \quad ; \quad \kappa_2 = 2 \quad (42)$$

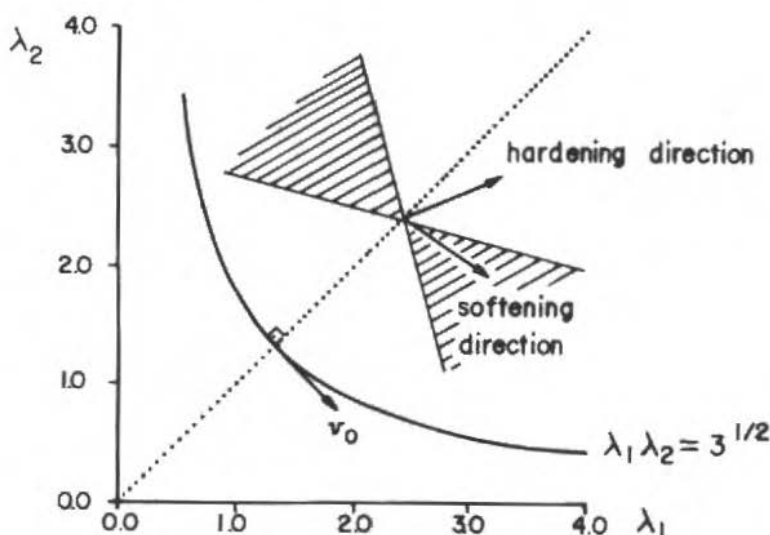


Figure 7. The isotropic strain tensile test

The kernel of  $H$ , which characterizes the softening direction, is spanned by the vector

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

and hence the direction of the material instability is orthogonal to the path followed by the tensile test, as shown in Figure 7.

The softening behavior of the material subjected to this tensile test can be illustrated by considering the quantity  $\dot{P} \cdot \dot{F}$  along the test path. As  $\lambda_1$  assumes values smaller than  $3^{1/4}$ , the scalar product between  $\dot{P}$  and  $\dot{F}$

$$\dot{P} \cdot \dot{F} = 3\lambda_1^{-4} + \sin 2\theta \quad (44)$$

is positive for any perturbation  $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ . When  $\lambda$  reaches the value  $3^{1/4}$ , the expression (44) remains still positive for almost any  $\theta$ , with exception to  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ , corresponding to the kernel of  $H(3^{1/4})$ . Finally, as  $\lambda_1$  becomes greater than  $3^{1/4}$ , one defines a set of directions

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1}(-3\lambda_1^{-4}) < \theta < \frac{1}{2} \sin^{-1}(-3\lambda_1^{-4})$$

and

(45)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1}(-3\lambda_1^{-4}) < \theta < \pi + \frac{1}{2} \sin^{-1}(-3\lambda_1^{-4})$$

for which the quantity  $\dot{P} \cdot \dot{F}$  is negative and thus the softening behavior is verified.

### CONCLUDING REMARKS

The softening behavior is studied here specifically for the Blatz-Ko material under the set of homogeneous plane deformations. The fact that, even for hyperelastic materials, the softening phenomenon is not a state property, but rather presents a direction dependence, is remarkable. As the global convexity condition is not verified for any objective strain energy density function under the hypothesis of large deformations, the softening behavior should be expected for a wide class of solid materials, should the inelastic behavior (and thus the energy dissipation functions) be present or not.

### ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by FAPERJ under contract number E-29/170.343-88 and by CNPq under contract number 305123/88-2.

### REFERENCES

- [1] KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E. On the Ellipticity of the Equations of Nonlinear Elastostatics for a Special Material. *Journal of Elasticity*, **5** (1975) 341-361.
- [2] KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E. On the Failure of Ellipticity of the Equations for Finite Elastostatic Plane Strain. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **63** (1977) 321-336.
- [3] KNOWLES, J.K. and STERNBERG, E. On the Failure of Ellipticity and the Emergence of Discontinuous Deformation Gradients in Plane Finite Elastostatics. *Journal of Elasticity*, **8** (1978) 329-379.
- [4] BEATTY, M.F. Topics in Finite Elasticity: Hyperelasticity of Rubber, Elastomers, and Biological Tissues - with Examples. *Appl. Mech. Rev.* **40** (1987) 1699-1734.

- [5] TRUESDELL, C. and NOLL, W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik, Vol.iii/3, Springer, Berlin.
- [6] BLATZ, P.J. and KO, W.L. Application of Finite Elastic Theory to the Deformation of Rubbery Materials. Transactions of the Society of Rheology, VI (1962) 223-251.

## FORMULAÇÃO H AUTO-ADAPTATIVA DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

### H-ADAPTIVE BOUNDARY ELEMENT FORMULATION FOR ELASTICITY PROBLEMS

J.A. Costa Jr.\*

R.B.V. Pessolani\*\*

Departamento de Engenharia Mecânica\*

Departamento de Engenharia Civil\*\*

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

22453 Rio de Janeiro RJ, Brasil

#### RESUMO

*Este artigo apresenta a implementação de um refinamento de malha auto-adaptativo para problemas planos de elasticidade, usando o Método dos Elementos de Contorno. Uma técnica de redução de erro é aplicada para controlar a evolução no elemento e na solução global, mediante a comparação da evolução do erro em duas iterações seguidas. Mediante essa técnica, o método decide onde o refinamento é necessário. Vários exemplos são ilustrados, mostrando a aplicabilidade do método, utilizando funções de interpolação constantes, lineares e quadráticas.*

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno ■ Refinamento Auto-Adaptativo ■ Método dos Elementos Finitos ■

#### ABSTRACT

*This paper presents the implementation of a self-adaptive mesh refinement to solve plane elasticity problems, using the Boundary Element Method. An error reduction method is utilized which observes variation in the local element and global solutions for two successive meshes. Based on these values, the method decides where further mesh refinement is needed. This adaptive technique is then utilized to analyze various elasticity problems. Numerical results for constant, linear and quadratic boundary elements are presented.*

**Keywords:** Boundary Element Method ■ Self-Adaptive Mesh Refinement ■ Finite Element Method ■



## INTRODUÇÃO

Desde o advento dos computadores digitais e acentuando-se atualmente a grande difusão dos microcomputadores pessoais, as técnicas numéricas tem sido largamente utilizadas na solução de problemas de engenharia. Com o auxílio de um programa de análise de Elementos Finitos ou Elementos de Contorno a tarefa do projetista passou a ser a de elaborar os dados de entrada, gerando uma malha de elementos e, após a sua execução, a de verificar o grau de precisão dos resultados, baseado na sua sensibilidade e experiência profissional.

Este processo contudo, apesar de ser simples, pode se tornar demorado, pois no caso da solução não ser satisfatória, o projetista deve rediscutir a malha, rearranjando os dados de entrada, e submetendo outra vez o programa. Refaz-se este processo quantas vezes forem necessárias para se alcançar uma solução mais aproximada.

As linhas de pesquisa atuais, estão se voltando para os programas auto-adaptativos, ou seja, programas de análise em que o usuário fornece apenas os dados de geometria e carregamento mínimo para se descrever o problema em questão, e o próprio programa em função de um estimador de erro analisa os resultados e chega à conclusão de quais são as áreas mais afetadas. Tomam-se então providências sem qualquer interferência externa segundo as diversas categorias de programas adaptativos:

- i)  $h$ , que refina a malha em zonas de maior erro;
- ii)  $p$ , em que o grau da função de interpolação é mudado localmente;
- iii)  $r$ , o número de nós é mantido constante e a malha é distorcida de forma a reposicionar os nós em áreas de maior erro;
- iv)  $hp$ , como uma combinação das duas primeiras.

Este processo, além das vantagens de economia de tempo, possui também a de prevenir contra possíveis erros de avaliação do projetista, que o leva a considerar como satisfatórios os resultados errôneos.

Em Elementos Finitos a técnica adaptativa tem sido pesquisada por vários autores, entre eles Babuska [05-07], que introduziu estimadores de erro baseados em um desenvolvimento matemático, e Zienkiewicz [21-22] que introduziu um estimador intuitivo, baseado na norma da energia global de deformação e de fácil implementação computacional. Este estimador associado a um gerador de malha, aumenta em muito a eficiência de um programa pelo MEF. Outro trabalho que merece destaque é o de Oden e outros [10], que sistematizaram uma técnica  $h_p$  para Elementos Finitos.

Em Elementos de Contorno, a técnica P-adaptativa foi inicialmente proposta por Alarcón e outros [2-3], que utilizaram as funções hierárquicas de Peano [11]. Eles mostraram que a técnica P converge exponencialmente para uma grande variedade de problemas, apresentando contudo alguns inconvenientes nas regiões com singularidade. Esta técnica trás ainda outro inconveniente, que é a de ser necessário o desenvolvimento de programas específicos para este fim, não podendo ser aplicados como um pré e pós processador em um programa de Elementos de Contorno já existente.

Em vista disso, Rencis e Mullen [15-16] desenvolveram a técnica  $h$  para problemas de Potencial e Elasticidade, utilizando um estimador de erro baseado na convergência assintótica de Wendland [17-18]. Este estimador feito para elementos com função de interpolação constante, se mostrou bem mais versátil e facilmente aplicável a qualquer programa já existente.

Este trabalho apresenta uma formulação  $h$  para problemas de elasticidade baseado nos conceitos proposto Rencis e Mullen nas referências [15-16]. Elementos constantes, lineares e quadráticos são utilizados na discretização do contorno e também algumas alterações do estimador de erro proposto por Rencis e Mullen [16] foram estudados. Vários exemplos são apresentados de forma demonstrar o aprimoramento da solução do problema com o uso de elementos lineares e quadráticos. Esta formulação tem como grande vantagem a possibilidade de ser implementada em qualquer programa de MEC, sem ter que alterar a estrutura básica dos programas clássicos de MEC.

## PRELIMINARES E FORMULAÇÃO DO MEC

A formulação de Elementos de Contorno para problemas de elasticidade bidimensional de corpos elásticos e isotrópicos, baseando-se na identidade de Somigliana [5], fornece:

$$C_{ij}(p)u_j(p) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(p, q)u_j(q)d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, q)t_j(q)d\Gamma(q) \quad (1)$$

onde  $p$  é um ponto do domínio  $\Omega$ ,  $q$  um ponto do contorno  $\Gamma$  do mesmo domínio,  $u_{ij}^*(p, q)$  e  $t_{ij}^*(p, q)$  são, respectivamente, os campos de deslocamento e forças de superfícies da solução de Kelvin [5] e  $C_{ij}(p)$  são os coeficientes que dependem da geometria do contorno e do ponto  $p$ . Os coeficientes  $C_{ij}(p)$  são iguais a  $\delta_{ij}$  se  $p$  é um ponto do interior e igual a  $\frac{1}{2}\delta_{ij}$  se  $p$  é um ponto do contorno suave,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

A solução numérica aproximada do problema é obtida dividindo o contorno em  $N_e$  elementos, isto é:

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{N_e} \Gamma_n \quad (2)$$

sendo que dentro de cada elemento os campos de deslocamentos e forças de superfícies são aproximados por:

$$\begin{aligned} u_i(p) &\simeq \bar{u}_i(p) = \sum_{k=1}^{N_n^i} \phi_k(q)u_i^k, (q \in \Gamma_n); \\ t_i(p) &\simeq \bar{t}_i(p) = \sum_{k=1}^{N_n^i} \phi_k(q)t_i^k(q \in \Gamma_n) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo  $N_n^i$  o numero de funções de interpolação utilizadas para aproximar a componente  $i$  dos campos mencionados anteriormente, no elemento  $\Gamma_n$ .

O número total de funções de interpolação utilizadas para aproximar as componentes físicas  $i$  no contorno é:

$$N = \sum_{h=1}^{N_e} N_n^i \quad (4)$$

sendo o número de graus de liberdade do problema igual à  $2N$ .

A forma discreta da equação (1), se reduz na seguinte expressão de resíduo:

$$\rho_i(p) = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^{N_j} \left[ T_{ij}^l(p) u_j^l - U_{ij}^l(p) T_j^l \right] \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{ij}^l(p) &= C_{ij}(p) \phi_l(p) + \int_{\Gamma_n} t_{ij}^*(p, q) \phi_l(q) d\Gamma(q); \\ U_{ij}^l(p) &= \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(p, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (6)$$

que são obtidas substituindo-se na equação (1) a discretização definida em (3). De forma a obter um sistema com  $2N$  graus de liberdade a partir da equação (1), utiliza-se o Método da colocação que implica na obtenção de resíduo zero definido pela equação (5), nos  $N_i$  nós do contorno, isto é:

$$\rho_i(p^k) = 0;$$

o que resulta na conhecida matriz [5],

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (7)$$

onde  $1 \leq k \leq N_i$  e  $1 \leq i \leq 2$ .

Os coeficientes das matrizes  $[G]$  e  $[H]$  são obtidos pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} G_{ij}^{kl} &= U_{ij}^l(p^k) \\ &= \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(p^k, q) \phi_l(q) d\Gamma(q); \end{aligned} \quad (8)$$

$$H_{ij}^{kl} = C_{ij}(p^k) \phi_l(p^k) - \int_{\Gamma_n} t_{ij}^*(p^k, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) \quad (9)$$

onde as integrais podem ser calculadas usando uma integração numérica tipo Gauss [5].

Uma vez que o problema foi formulado, a equação (1) possui  $N$  incógnitas num total de  $2N$  graus de liberdade. Logo, aplicando as condições de contorno, esta equação pode ser transformada num sistema linear de equações [5]:

$$AX = B \quad (10)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$u_i(q) = \bar{u}_i(q) \quad (q \in \Gamma_u); \quad (11)$$

$$t_i(q) = \bar{t}_i(q) \quad (q \in \Gamma_t). \quad (12)$$

onde  $\bar{u}_i(q)$  e  $\bar{t}_i(q)$  são valores conhecidos no contorno.

## FORMULAÇÃO ADAPTATIVA

Atualmente, em métodos numéricos é de considerável importância o controle do erro obtido pela aproximação numérica na solução dos problemas de

$h^{i-1}$  = tamanho do elemento no refinamento ( $i - 1$ )

$k$  = constante que depende de  $h$

$O((h^{i-1})^3)$  = termo de mais alta ordem de erro no refinamento ( $i - 1$ )

Para o refinamento  $i$ , têm-se:

$$\int_{\Gamma} (u^i - u)^2 d\Gamma = k(h^i)^2 + O((h^i)^3) \quad (14)$$

Subtraindo a equação (14) de (13) e fazendo  $u = u^i$  que é a solução mais próxima da exata até o momento, é possível obter a seguinte expressão:

$$\Delta u_i = \int_{\Gamma} (u^{i-1} - u^i)^2 d\Gamma = k(h^{i-1})^2 - k(h^i)^2 \quad (15)$$

Determinando o valor de  $k$  na expressão anterior, têm-se:

$$k = \frac{\Delta u_i}{\left(1 - \frac{(h^i)^2}{(h^{i-1})^2}\right) \cdot (h^{i-1})^2} \quad (16)$$

Para se obter o número de divisões necessárias por elemento dentro de uma determinada tolerância ( $\epsilon$ ), pode-se escrever baseado em (13):

$$\epsilon \cdot \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma = k(h^{i-1+n})^2 \quad (17)$$

sendo o termo da esquerda a tolerância ( $\epsilon$ ) em função de  $k$  e do tamanho do elemento na  $(i - 1 + n)$  iteração ideal.

Na iteração ideal, pode-se definir o tamanho do elemento como sendo:

$$h^{i-1+n} = \frac{h^{i-1}}{n} \quad (18)$$

onde,  $n$  = número de divisões necessárias para a iteração ideal.

Igualando a expressão (17) em (16) e isolando o valor de  $n$ , é possível obter a seguinte expressão:

$$(n_j^{i+1})^2 = \frac{\Delta u_j^i}{\left(1 - \frac{(h_j^i)^2}{(h_j^{i-1})^2}\right)} \cdot \epsilon \cdot \int_{\Gamma} u^i d\Gamma \quad (19)$$

sendo:

$$\Delta u_j^i = \int_{\Gamma} (u^{i-1} - u^i)^2 d\Gamma \quad (20)$$

onde  $n_j^{i+1}$  é o número de divisões necessárias para o elemento  $j$  na iteração  $i + 1$ .

As equações (20) e (17) quando a função  $u$  é constante, fig. 1., reduzem-se às seguintes expressões:

$$\Delta u_j^i = (u_j^{i-1} - u_j^i)^2 \cdot h_j^i \quad (21)$$

$$\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} (u_j^i)^2 \cdot h_j^i \quad (22)$$

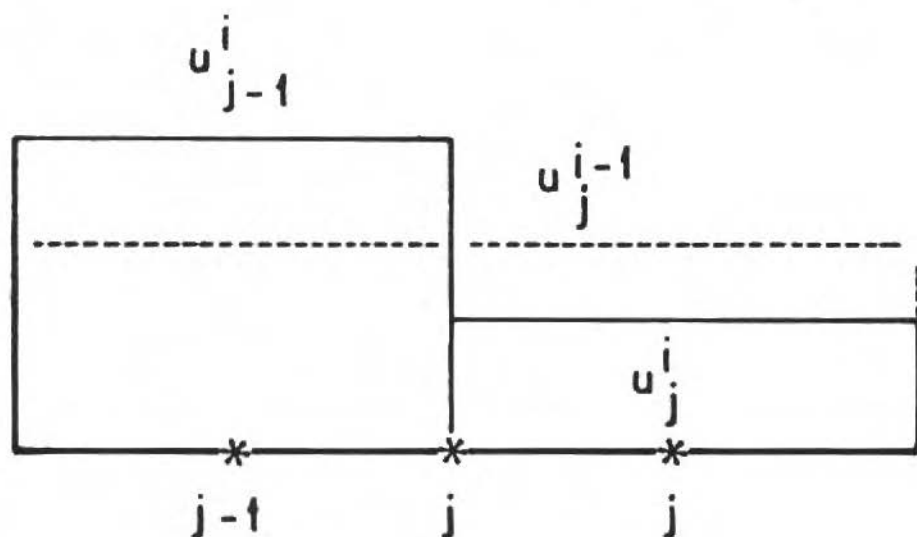


Figura 1 - Elemento constante após duas iterações sucessivas  $i - 1$  e  $i$

As equações anteriores foram deduzidas por Rencis e Mullen na ref. [16]. No caso em que é suposta uma variação linear das variáveis do problema, para um elemento  $j$  com os nós  $j$  e  $j + 1$  pertencentes ao elemento, fig. (2), têm-se:

$$\Delta u_j^i = \frac{h_j^i}{3} \left[ (u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i-1} - u_j^i)(u_{j+1}^{i-1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i-1} + u_j^i) \right] \quad (23)$$

$$\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{h_j^i}{3} \left[ u_{j+1}^2 + u_j^2 \cdot u_{j+1}^2 - u_j^2 \right] \quad (24)$$

Para a variação quadrática do potencial no interior do elemento  $j$ , com os nós  $j_1, j_2$  e  $j_3$  pertencentes ao elemento, conforme fig. 3, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta u_j^i = & \frac{h_j^i}{15} \left[ 2(u_{j_1}^{i-1} - u_{j_1}^i) + 8(u_{j_2}^{i-1} - u_{j_2}^i) + 2(u_{j_3}^{i-1} - u_{j_3}^i) + \right. \\ & + 2(u_{j_1}^{i-1} - u_{j_1}^i) \cdot (u_{j_3}^{i-1} - u_{j_3}^i) - (u_{j_2}^{i-1} - u_{j_2}^i)(u_{j_3}^{i-1} - u_{j_3}^i) + \\ & \left. + 2(u_{j_1}^{i-1} - u_{j_1}^i) \cdot (u_{j_3}^{i-1} - u_{j_3}^i) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma = \sum_j \frac{h_j^i}{3} \left[ 2u_{j_1}^2 + 8u_{j_2}^2 + 2u_{j_3}^2 + 2u_{j_1}^i \cdot u_{j_2}^i \cdot u_{j_3}^i + 2u_{j_1}^i \cdot u_{j_2}^i \right] \quad (25)$$



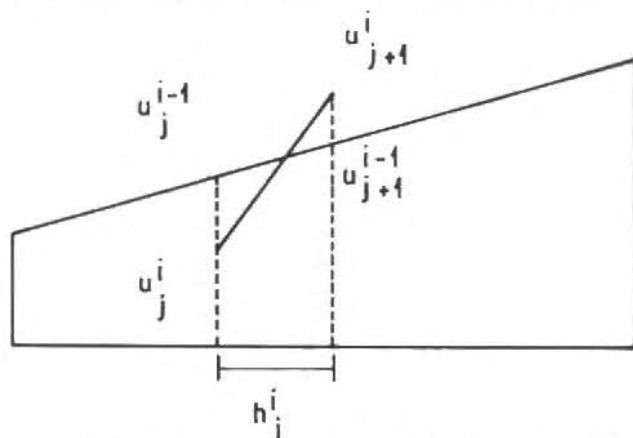


Figura 2. Elemento Linear após duas iterações sucessivas.

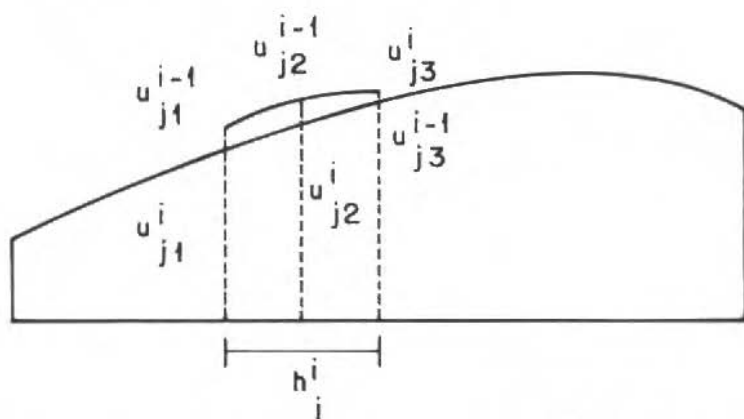


Figura 3. Elemento Quadrático após duas iterações sucessivas.

Antes de aplicar os estimadores de erro, deve-se proceder a uma transformação de coordenadas dos deslocamentos, pois os termos de  $u$  nas expressões anteriores se referem a deslocamentos na direção do elemento  $j$  em análise.

Logo, para um caso geral da figura 4, têm-se a seguinte transformação

$$\begin{Bmatrix} u'_{j1} \\ u'_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

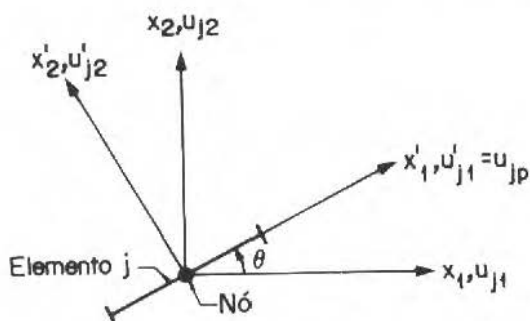


Figura 4. Transformação dos graus de liberdade para um elemento qualquer.

Há ainda a necessidade de se ter um parâmetro que meça o erro global cometido, pois à medida que se diminui desigualmente o tamanho dos elementos, gerando elementos muito menores que outros, podem-se introduzir erros numéricos. O parâmetro de controle de erro global serve tanto para indicar que uma solução obtida já está dentro da tolerância fixada, como também como um controle de possíveis erros numéricos que fazem com que a solução não convirja. A expressão é a seguinte:

$$\left( \int_{\Gamma} (u^i)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma} (u^{i-1})^2 d\Gamma \right)^{1/2} \leq \epsilon \left( \int_{\Gamma} (u^i)^2 d\Gamma \right)^{1/2} \quad (27)$$

Sendo cada uma das integrais calculadas de acordo com as expressões e com as funções de interpolação correspondentes.

Se a relação anterior (27) for verdadeira, a solução obtida estará dentro da tolerância global fixada.

Para analisar a evolução do erro global é necessário considerar as integrais das últimas três iterações sucessivas através da seguinte relação:

$$\left( \int_{\Gamma} (u^i - (u^{i-1})^2) d\Gamma \right)^{1/2} < \left( \int_{\Gamma} (u^{i-1})^2 - (u^{i-2})^2) d\Gamma \right)^{1/2} \quad (28)$$

Se a relação anterior for verdadeira a solução estará convergindo. Caso contrário, estarão ocorrendo erros numéricos que farão com que a solução não convirja. O programa então deverá interromper a sua execução com a resposta mais correta sendo a iteração  $i - 1$ , mesmo que ainda não se tenha chegado à aproximação desejada.

Foram desenvolvidos os programas ELASTCON, ELASTILIN E ELASTQUA-para teoria elasticidade com funções de interpolação constante, linear e quadrática, e o fluxograma genérico está mostrado na figura 18.

A técnica desenvolvida não prevê a discretização dos elementos com  $u$  prescrito. Sendo assim, implementou-se uma rotina de discretização destes elementos, em que o usuário fornece o número de divisões desejadas, via teclado. Esta rotina é bastante útil, pois apesar da solução na maioria dos casos já ser satisfatória, pode-se ainda tentar melhora-la ou obter uma distribuição mais uniforme dos elementos, ou ainda, obter alguns valores intermediários, sem ter que recorrer a uma interpolação manual da função.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

EXEMPLO 1 - Console curto com carga concentrada na extremidade:

Para o caso de elasticidade, resolveu-se o problema clássico de um console curto sujeito a um carregamento uniformemente distribuído na sua extremidade, conforme mostrado na fig. 5. O console é quadrado, de lado unitário sendo o carregamento uniformemente distribuído de valor igual a 1,0 N/m. As constantes físicas do problema estão também especificadas ao lado da figura.

O problema foi resolvido pela técnica h-adaptativa proposta e utilizando-se as três funções de interpolação. As discretizações iniciais e finais estão mostradas nas figs. 6 a 8.

Note-se que ocorreu uma discretização não uniforme, ou seja, na extremidade do console onde a variação dos valores dos deslocamentos é maior, verificou-se um aumento do número de elementos requeridos para uma boa solução em comparação com as outras regiões do problema. Isto vem constatar a vantagem

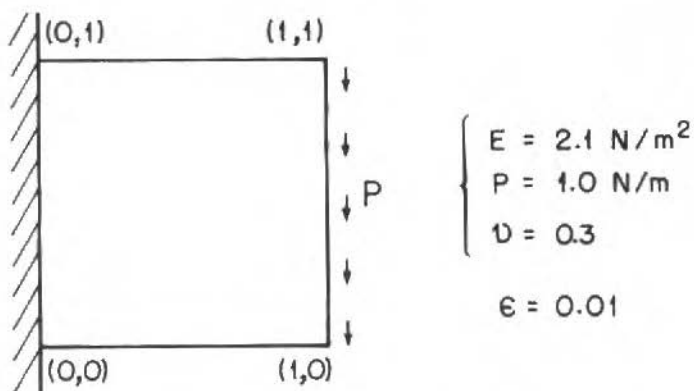


Figura 5. Geometria e condições de contorno

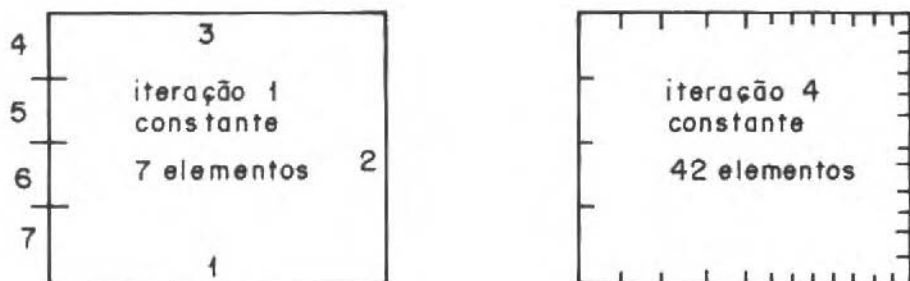


Figura 6. Interação inicial e final com elemento constante

e a necessidade das técnicas adaptativas para problemas de Engenharia, onde estas formulações possuem uma teoria de erro embutida.

Para visualizar uma maior ilustração de grau de precisão da técnica proposta, apresenta-se na figura 9 a evolução do erro global de deformação obtidos utilizando os diversos elementos. O gráfico está em escala logarítmica, sendo que o eixo horizontal representa o logaritmo natural do número de elementos e o eixo vertical o logaritmo natural do erro global conforme a expressão (28). Os pontos assinalados em cada função do gráfico, indicam as diversas iterações.

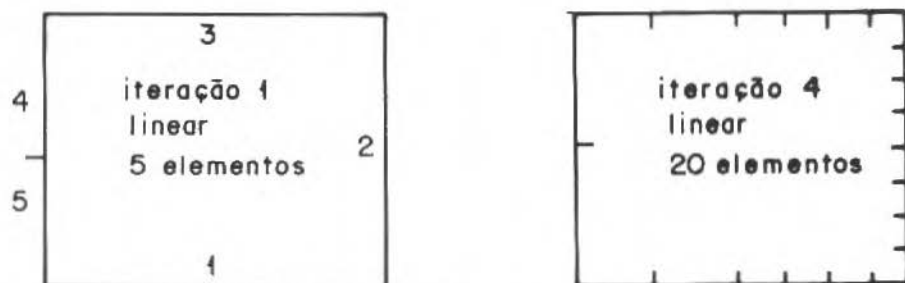


Figura 7. Interação inicial e final com elemento linear

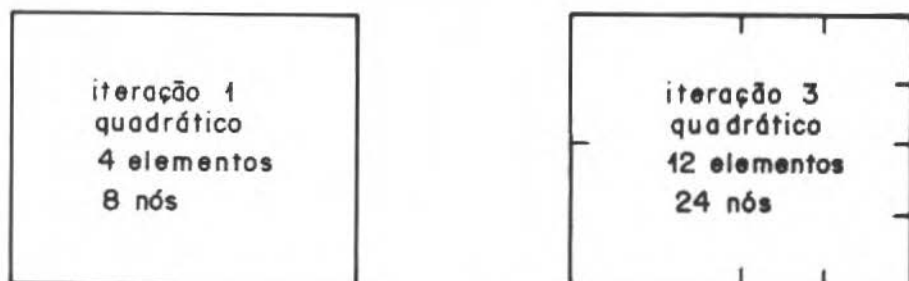


Figura 8. Interação inicial e final com elemento quadrático

Note-se que as três funções possuem um erro global final próximo e de ordem pequeno. Contudo, o número de elementos requeridos para a função quadrática foi muito menor em relação as demais.

Para mostrar a precisão dos resultados da técnica h-adaptativa, apresenta-se a figura 10, em que se expressa a deformação na linha média em relação ao eixo vertical das diversas soluções comparadas com a solução analítica. Pode-se reparar na boa aproximação das diversas soluções em relação ao resultado analítico.

#### EXEMPLO 2 - Placa com furo no centro

Neste exemplo, se trata de um problema clássico em análise estrutural que é o problema de uma placa submetida a uma tensão uniforme de tração nas suas extremidades e com um orifício no centro, conforme é mostrado na figura

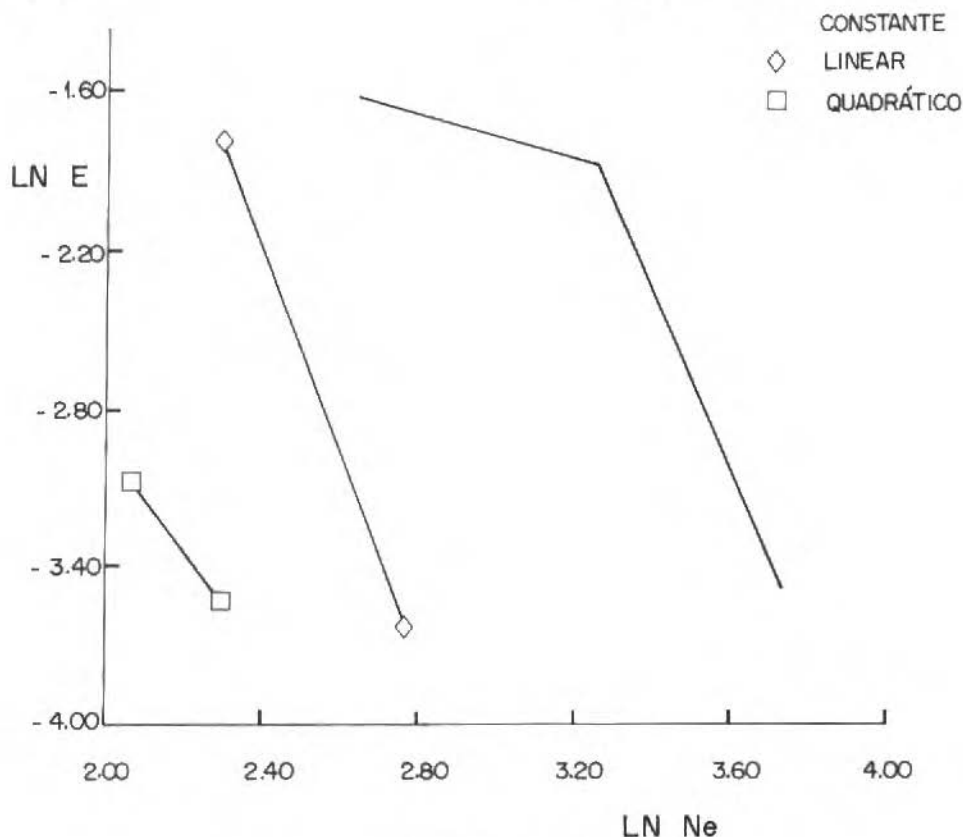


Figura 9. Evolução erro deformação

11, onde nesta figura mostra-se também as dimensões e as propriedades físicas utilizadas.

Devido à simetria do problema, este pode ser simplificado em um sistema estrutural equivalente, conforme ilustrado na fig. 12.

Na seção transversal em torno da zona do furo, existe uma região de alta concentração de tensões, aumentando à medida que mais se aproxima do furo. Este é um problema em que a utilização de um programa adaptativo se torna indispensável, pois uma discretização uniforme dos elementos poderá induzir o usuário a erros. Isto ocorre devido à não uniformidade da distribuição das tensões e deformações, especialmente nas regiões próximas do furo.

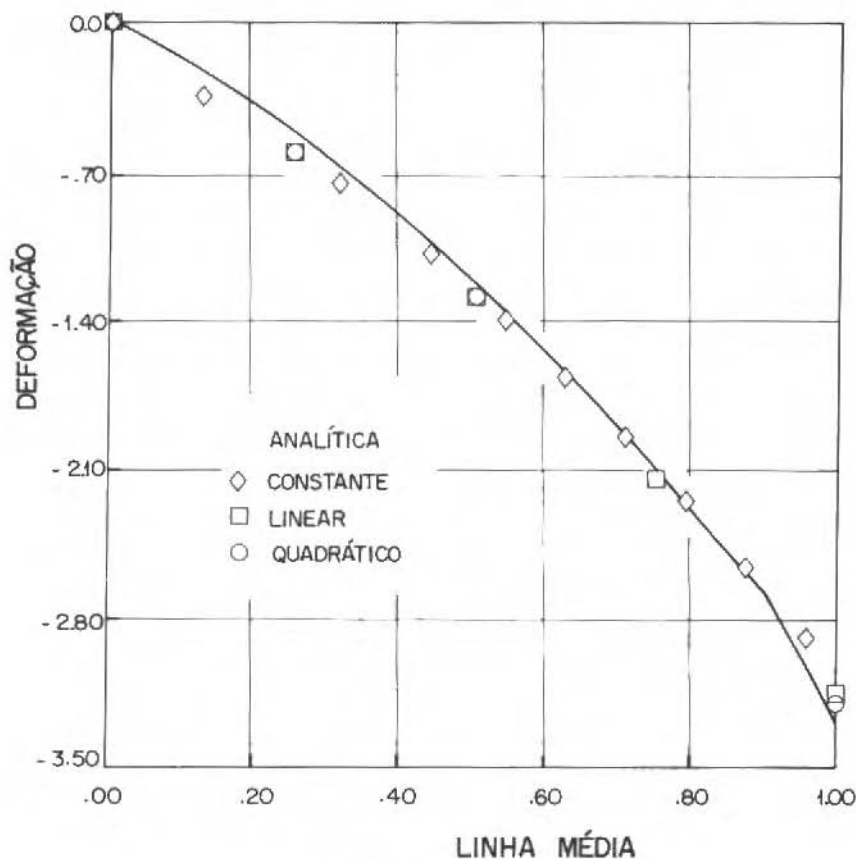


Figura 10. Deformação no eixo Y

Com o objetivo de mostrar a evolução das sucessivas discretizações das diferentes funções de interpolação, mostra-se nas figuras 13 à 15 a divisão dos elementos das sucessivas iterações com elementos constantes, lineares e quadráticos. Observe-se um maior refinamento da malha nas proximidades do furo executado pelo programa.

As tensões resultantes na região próxima do furo são apresentadas na figura 16, para as diversas funções de interpolação, e comparadas à solução analítica. Pode-se verificar pelo gráfico, que a solução obtida utilizando elementos

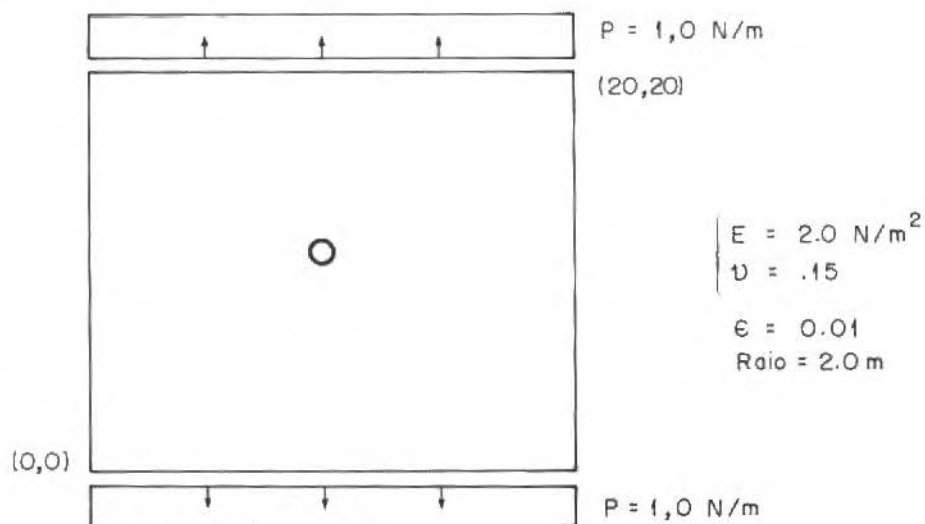


Figura 11. Geometria e condições de contorno Exemplo 2

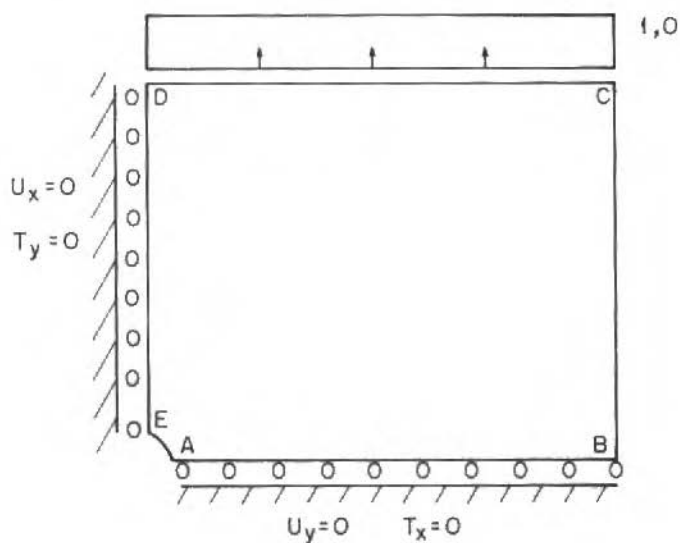


Figura 12. Sistema estrutural equivalente



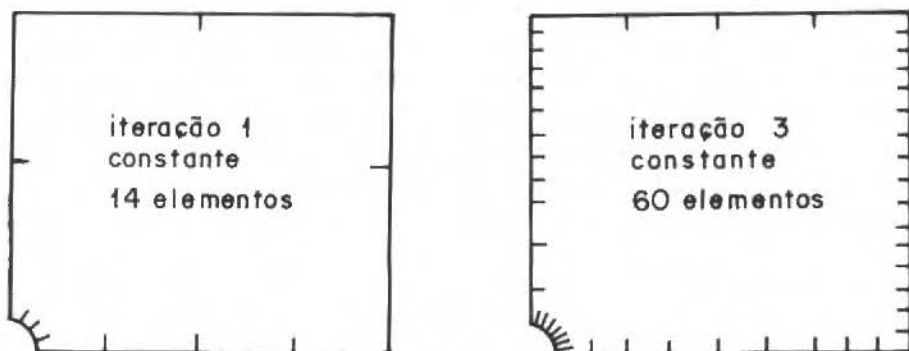


Figura 13. Iteração inicial e final com elemento constante

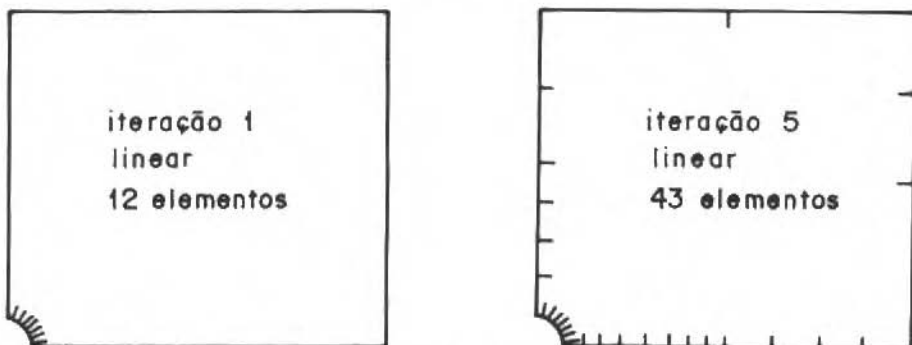


Figura 14. Iteração inicial e final com elemento linear

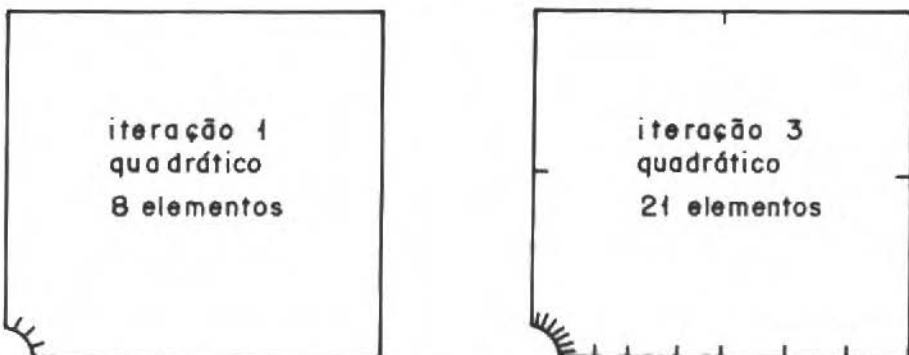


Figura 15. Iteração inicial e final com elemento quadrático

quadráticos está em perfeita concordância com a solução analítica para este ponto crítico do problema. A tensão obtida neste ponto foi de 2,99 MPa, muito próxima ao valor analítico que é de 3,0 MPa. Uma melhor aproximação poderia ser obtida utilizando-se elementos curvos.

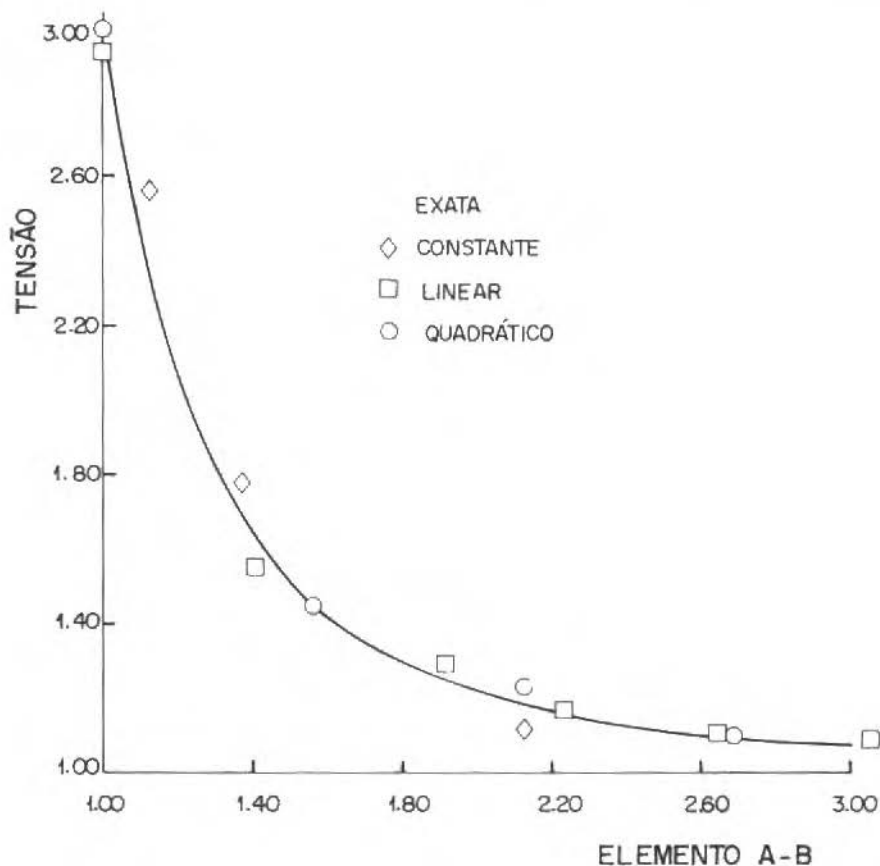


Figura 16. Tensões na sessão do furo

No gráfico 17 é mostrado a evolução do erro global para deslocamentos para cada iteração, em função do número de elementos. Nota-se uma maior precisão com um menor número de nós quando se utilizam elementos quadráticos.

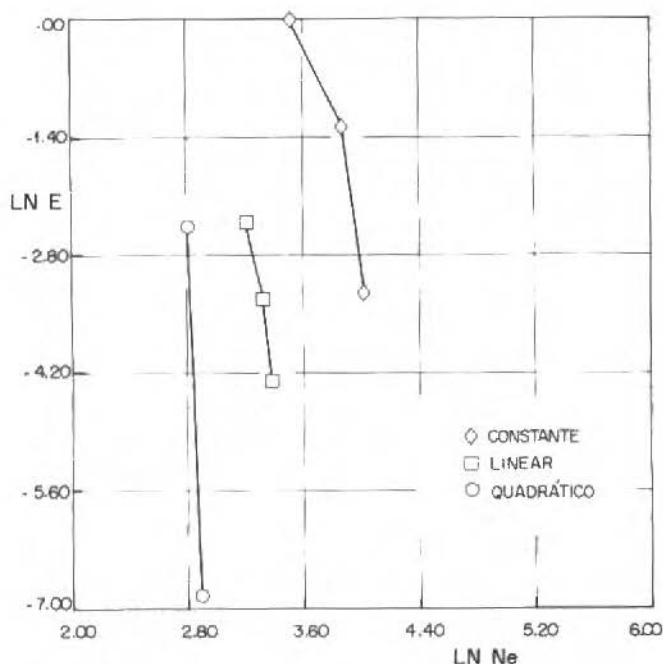


Figura 17. Evolução erro deformação

## CONCLUSÕES

Foi apresentado em medidor  $h$  adaptativo para o Método dos Elementos de Contorno, aplicada a problemas de Teoria da Elasticidade.

Como vantagens da formulação  $h$ -adaptativa apresentada pode-se destacar a simplicidade de implementação em programas de MEC, não sendo necessário o desenvolvimento de programas específicos para este fim, podendo ser aplicado como um pré e pós-processador para qualquer programa de análise. Observou-se também que o medidor de erro adotado fornece bons resultados, mesmo na presença de zonas de singularidade, onde se exige uma maior discretização pela alta variação de deslocamentos.

Apesar do estimador ser baseado na variação de deslocamentos e de serem refinados somente os elementos em que o deslocamento é prescrito, mostrou-se

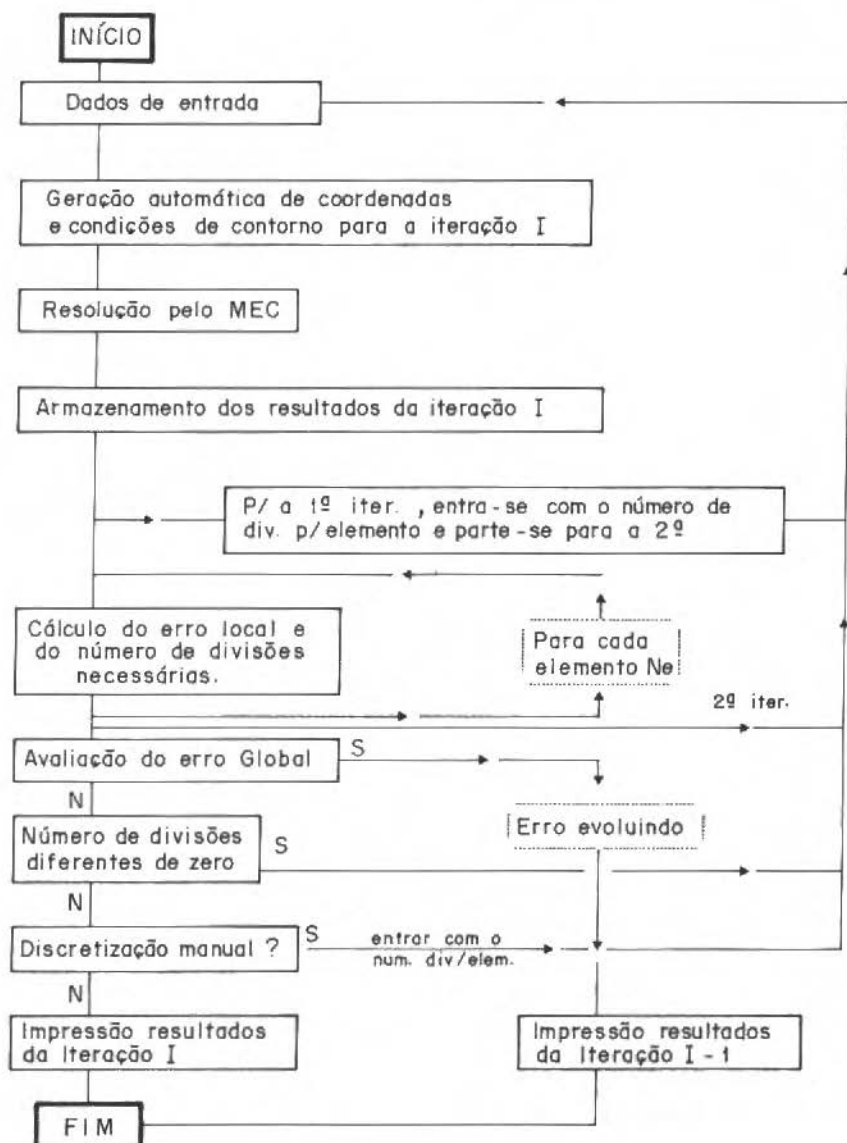


Figura 18. Fluxograma do processo H-adaptativo

que a precisão obtida para os demais elementos é satisfatória. Para se melhorar a solução nessas regiões obtendo uma discretização mais uniforme, recorreu-se a uma rotina em que o usuário entra com o número de divisões para cada elemento. Esta rotina levou a uma maior precisão dos resultados.

Como futuros trabalhos, pode-se destacar o desenvolvimento de um medidor de erro voltado para a técnica hp e que analisa além da variação dos deslocamentos, a variação de tensões. O medidor deverá detectar também as áreas onde será necessário aplicar a técnica h, subdividindo os elementos e onde aplicará a técnica p, aumentando o grau de interpolação dos mesmos.

## REFERÊNCIAS

- [1] Alarcón, E., Reverter, A. e Molina, J., Hierarchical Boundary Elements, *Comp. and Struct.*, 20, 151-156, 1985.
- [2] Alarcón, E. e Reverter, A., P-Adaptive Boundary Elements, *Int. J. Num. Meth. Engng*, 23, 801-829, 1986.
- [3] Alarcón, E., Avia L. e Reverter A., On the Possibility of Adaptive Boundary Elements, *Proc. of the int. Conf. on Accuracy Estimates and Adaptative Refinements in Finite Element Comp. (ARFEC)*, Lisboa, 1984.
- [4] Alarcón, E., Cerrolaza, M., Gong-Lera, M.S., Elastostatics p-adaptive B.E. for micros, *Software for Engng. Workstation*, January, vol. 4, 1988.
- [5] Babuska I. and Szabó, On the Rates of Convergence of the Finite Element Method, *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol 18, 323-341, 1982.
- [6] Babuska I. and Dorr M.R., Error estimates for the Combined h and p Version of the Finite Element Method, *Numer. Math*, vol 25, 257-277, 1981.
- [7] Babuska, I., and Rheinboldt, W.C., A Posteriori Error Estimates for Finite Element Computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, 736-754, 1978.
- [8] Brebbia, C.A., *The B.E.M. for Engineers*, Pentech Press, London, Halstead Press, New York, 1978.
- [9] Carey, G.F. e Kennon, Adaptive Mesh Redistribution for a Boundary Method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24, 2315-2325, 1987.

- [10] Onden, J.T., Demkowicz L., Rachomicz W. e Hardy O., Tomard a Universal H-P Adaptive Strategy, *Comp.Meth. in Appl. Mech. and Engng*, vol. 77, n<sup>o</sup> 1 e 2 , 1989.
- [11] Peano, A.G., Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plane Bending, *Comput. and Maths. with Appls*. 2, No. 3-4, 1979.
- [12] Rank, E., Adaptive B.E.M., *Boundary Elements IX*, C.A. Brebbia Eds. , pag. 259-278, 1984.
- [13] Rank, E., A Posteriori Error Estimates and Adaptive refinement for Some Boundary Integral Element Methods, *Proc. of the Int. Conf. on Accuracy Refinements in Finite Element Comp. (ARFEC)*, Lisboa, 1984.
- [14] Rank, E., Adaptive h-, p- and h-p Versions for Boundary Intergral Elements Methods, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engng*, vol. 28, 1335-1349, 1989.
- [15] Rencis, J.J. e Jong, K.Y., A Self-Adaptive H-Refinement Technique for the B.E.M., *Comp Methods in appl. Mech. and Eng.* , 1988.
- [16] Rencis, J.J. e Mullen, R.L., Solution of Elasticity Problems by a Self Adaptive Mesh Refinement Technique for Boundary Element Computation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 1509-1527, 1986.
- [17] Wendland, W.L. Asymptotic Accuracy and Convergence, em *Progress in B.E.M. (C.A. Brebbia Ed.)* 289-313, Pentech Press, London, Plymouth, 1981.
- [18] Wendland, W.L., On Asymptotic Error Analysis and Underlying Mathematical Principles for B.E.M., em *Boundary Element Technique in Computer Aided Engineering*, (C.A. Brebbia Ed.), Martines Nijhoff Plublishera, 417-436, 1984.
- [19] Wendland, W., Splines Versus Trigonometric Polynomials, h-versus p-version in 2D Boundary Intergral Methods, *Preprint Nr. 925*, TH Darmstedt, Fashbereich Mathematik, 1985.
- [20] Wendland, W.L. and Yu, D., Adaptive B.E.M. for Strongly Elliptic Integral Equations, *Seminar Analysis and Anwendungen*, Universitat Stuttgart, Mathemattuber Institut A., Bericht Nr 4, 1988.
- [21] Zienkiewicz, O.C., Gago, J.P. and Kelly D.W., The Hierarchical Concept in Fnite Eement Aalysis, *Computers & Structures*, vol 16, 53-65,1983.

- [22] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol 24, 337-357, 1987.

## OBJETIVO E ESCOPO

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas visa a publicação de trabalhos voltados ao projeto, pesquisa e desenvolvimento nas grandes áreas das Ciências Mecânicas. É importante apresentar os resultados e as conclusões dos trabalhos submetidos de forma que sejam do interesse de engenheiros, pesquisadores e docentes.

O escopo da Revista é amplo e abrange as áreas essenciais das Ciências Mecânicas, incluindo interfaces com a Engenharia Civil, Elétrica, Metalúrgica, Naval, Nuclear, Química e de Sistemas. Aplicações da Física e da Matemática à Mecânica também serão consideradas.

Em geral, os Editores incentivam trabalhos que abranjam o desenvolvimento e a pesquisa de métodos tradicionais bem como a introdução de novas idéias que possam potencialmente ser aproveitadas na pesquisa e na indústria.

---

## AIMS AND SCOPE

The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is concerned primarily with the publication of papers dealing with design, research and development relating to the general areas of Mechanical Sciences. It is important that the results and the conclusions of the submitted papers be presented in a manner which is appreciated by practicing engineers, researchers, and educators.

The scope of the Journal is broad and encompasses essential areas of Mechanical Engineering Sciences, with interfaces with Civil, Electrical, Metallurgical, Naval, Nuclear, Chemical and System Engineering as well as with the areas of Physics and Applied Mathematics.

In general, the Editors are looking for papers covering both development and research of traditional methods and the introduction of novel ideas which have potential application in science and in the manufacturing industry.

### Notes and Instructions To Contributors

1. The Editors are open to receive contributions from all parts of the world; manuscripts for publication should be sent to the Editor-in-Chief or to the appropriate Associate Editor.
2. (i) Papers offered for publication must contain unpublished material and will be refereed and assessed with reference to the aims of the Journal as stated above. (ii) Reviews should constitute an outstanding critical appraisal of published materials and will be published by suggestion of the Editors. (iii) Letters and communications to the Editor should not exceed 400 words in length and may be: Criticism of articles recently published in the Journal; Preliminary announcements of original work of importance warranting immediate publication; Comments on current engineering matters of considerable actuality.
3. Only papers not previously published will be accepted. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made in some cases of papers published in annals or proceedings of conferences. The decision on acceptance of a paper will be taken by the Editors considering the reviews of two outstanding scientists and its originality, and contribution to science and/or technology.
4. All contributions are to be in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
5. Manuscripts should begin with the title of the article, including the English title, and the author's name and address. In the case of co-authors, both addresses should be clearly indicated. It follows the abstract; if the paper's language is different from English, an extended summary in this language should be included. Up to five words for the paper are to be given. Next, if possible, should come the nomenclature list.
6. Manuscripts should be typed with double spacing and with ample margins. Material to be published should be submitted in triplicate. Pages should be numbered consecutively.
7. Figures and line drawing should be originals and include all relevant details; only excellent photocopies should be sent. Photographs should be sufficiently enlarged to permit clear reproduction in half-tone. If words or numbers are to appear on a photograph they should be sufficiently large to permit the necessary reduction in size. Figure captions should be typed on a separate sheet and placed at the end of the manuscript.



ÍNDICE / CONTENTS

R.A. da Mota Silveira e Khosrow Ghavami	Análise Não-Linear Geométrica de Cascas Cilíndricas Enrijecidas sob Compressão Axial	185
E.B. de Las Casas	Global Mixed Adaptive Methods for Finite Elements	205
J.D. Riera and M.M. Rocha	A Note on the Velocity of Crack Propagation in Tensile Fracture	217
E.N. Mamiya and A.R. Aguiar	A Note on the Softening Behavior for the Blatz-Ko Elastic Material under Plane Deformation	241
J.A. Costa Jr. e R.B.V. Pessolani	Formulação H Auto-Adaptativa de Elementos de Contorno para Problemas de Elasticidade	257