# Revista Brasileira de Ciências Mecânicas

Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences

3

PUBLICAÇÃO DA ABCM - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

VOL. XV - Nº 3 - 1993 ISSN 0100-7386

# REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS
# JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

**REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**
**JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**
Vol. 1. Nº 1 (1979) -
Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas
Trimestral
Inclui referências bibliográficas.
1. Mecânica
ISSN-0100-7386

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS** publica trabalhos que cobrem os vários aspectos da ciência e da tecnologia em Engenharia Mecânica, incluindo interfaces com as Engenharias Civil, Elétrica, Química, Naval, Nuclear, Aeroespacial, Alimentos, Agrícola, Petróleo, Materiais, etc., bem como aplicações da Física e da Matemática à Mecânica.

Publicação da /Published by
**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**
**THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

Secretária da ABCM: Ana Lucia Fróes de Souza
Av. Rio Branco, 124-18º andar - Rio de Janeiro - Brasil
Tel. / Fax (021) 222-7128

Presidente: **Arthur Palmeira Ripper**
Vice-Presidente: **Sidney Stuckenbruk**
Secret. Geral: **Agamenon R. E. Oliveira**
Secretário: **Carlos Alberto de Almeida**
Diretor de Patrimônio: **Luiz Fernando Salgado Candiota**

**EDITOR:**
**Leonardo Goldstein Jr.**
UNICAMP - FEM - DETF - C.P 6122
13083-970 Campinas - SP
Tel: (0192) 39-3006 Fax: (0192) 39-3722

**EDITORES ASSOCIADOS:**
**Agenor de Toledo Fleury**
IPT - Instituto de Pesquisas Tecnológicas
Divisão de Mecânica e Eletricidade - Agrupamento de Sistemas de Controle
Cidade Universitária - C.P. 7141
01064-970 São Paulo - SP
Tel: (011) 268-2211 R-504 Fax: (011) 869-3353

**Carlos Alberto Carrasco Altemani**
UNICAMP - FEM - DE - C.P. 6122
13083-970 Campinas - SP
Tel: (0192) 39-8435 Fax: (0192) 39-3722

**José Augusto Ramos do Amaral**
NUCLEN - NUCLEBRÁS ENGENHARIA. S.A.
Superintendência de Estruturas e Componentes Mecânicos.
R. Visconde de Ouro Preto, 5
22250-180 - Rio de Janeiro - RJ
Tel: (021) 552-2772 R-269 ou 552-1095 Fax: (021) 552-2993

**Walter L. Weingaertner**
Universidade Federal de Santa Catarina
Deptº de Engª Mecânica - Lab. Mecânica de Precisão
Campus - Trindade - C.P. 476
88049 Florianópolis - SC
Tel: (0482) 31-9395/34-5277 Fax: (0482) 34-1519

**CORPO EDITORIAL:**

Alcir de Faro Orlando (PUC - RJ)
Antonio Francisco Fortes (UnB)
Armando Albertazzi Jr. (UFSC)
Atair Rios Neto (INPE)
Benedito Moraes Purquerio (EESC - USP)
Caio Mario Costa (EMBRACO)
Carlos Alberto de Almeida (PUC - RJ)
Carlos Alberto Martin (UFSC)
Clovis Raimundo Maliska (UFSC)
Emanuel Rocha Woiski (UNESP - FEIS)
Francisco Emílio Baccaro Nigro (IPT - SP)
Francisco José Simões (UFPb)
Genesio José Menon (EFEI)
Hans Ingo Weber (UNICAMP)
Henrique Rozenfeld (EESC USP)
Jair Carlos Dutra (UFSC)
João Alziro Herz de Jornada (UFRGS)
José João de Espindola (UFSC)
Jurandir Itizo Yanagihara (EP USP)
Lirio Schaefer (UFRGS)
Lourival Boehs (UFSC)
Luis Carlos Sandoval Goes (ITA)
Marcio Ziviani (UFMG)
Moyses Zindeluk (COPPE - UFRJ)
Nisio de Carvalho Lobo Brum (COPPE - UFRJ)
Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)
Paulo Afonso de Oliveira Soviero (ITA)
Paulo Eigi Miyagi (EP USP)
Rogerio Martins Saldanha da Gama (LNCC)
Valder Steffen Jr. (UFU)

REVISTA FINANCIADA COM RECURSOS DO
*Programa de Apoio a Publicações Científicas*
MCT CNPq FINEP
FAPESP - Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo

**RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences**
*Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 210-220*

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Monitoramento Indireto da Vida da Ferramenta de Torneamento Usando Parâmetros Elétricos da Máquina-Ferramenta

## *Indirect Monitoring of Turning Tool Life Using Electrical Parameters of the Machine Tool*

**D. U. Braga**
Depto. Engenharia Mecânica - FUNREI
Praça Frei Orlando, 170 - São João Del Rei
MG - Brasil - 36300

**A. E. Diniz e N. L. Cupini**
DEF/FEM/UNICAMP - Caixa Postal 6122
Campinas - SP - Brasil - 13081

### Abstract

The automatic determination of tool life in machining processes is a task that must be carried out in order to achieve the complete automated process in a flexible manufacturing system. Many different kinds of tool life automatic monitoring have been tried lately in order to reach this goal, like acoustic emission, vibration signals, cutting force, cutting temperature and so on. Each of them has its advantages ând disadvantages. The monitoring of the electrical parameters of the machine motors is also one of the systems that have been experimented. Its main advantages compared with other sensing systems are: a) it is non intrusive - all measurements are done far from the cutting zone; b) it is very simple and cheap.

This work has the purpose to verify the feasibility of using the electrical parameters of the machine tool motors to indirectly establish the moment to change the tool in rough turning operations. The armature current of the main and feed motors and the armature voltage of the main motor were digitized and stored in the computer memory for further analysis. Two electrical circuits were built in order to make the signal suitable to be read by the A/D board. The purpose of the first one was to reduce the voltage of the main motor (with values up to 400 V) to values that could be input in the A/D board (up to 10 V). The second one had the purpose of changing the values of current in proportional values of voltage. Several experiments were carried out with different feeds and cutting speeds (all cutting conditions typical of rough turning), turning the AISI 1045 steel with carbide inserts (ISO P10).

The conclusions of this work are: a) the armature current of the main motor showed to be a reliable parameter to establish the end of tool life in rough turning, where the goal is just to remove a great amount of material without closed tolerances and good surface finish. In these cases, just the tool breakage is undesirable, what can be easily avoided through this kind of monitoring; b) the indirect monitoring of the electrical parameters of the machine tool can be done in real time, and it is very simple and cheap, what makes its utilization in industries very feasible; c) the armature current of the main motor can not be used as a parameter to establish the end of tool life, if the criterion is a value of $V_B$ smaller than 0.8 mm; d) the growth of the current values with flank wear (or cutting length) is more sensitive to high values of feed and cutting speed; e) the crater wear formation is not responsible for the stabilization of the current values in the intermediary stage of cutting.

**Keywords**: Monitoring of Machining, Turning, Tool Life, Tool Wear

### Resumo

Este trabalho tem o objetivo de verificar a viabilidade de utilização dos parâmetros elétricos dos motores da máquina-ferramenta para estabelecer indiretamente o momento da troca da ferramenta em operações de torneamento de desbaste. As correntes de armadura dos motores principal e de avanço e a tensão de armadura do motor principal foram digitalizadas e armazenadas na memória do computador a fim de facilitar a análise posterior. Diversos ensaios foram realizados variando-se avanço e velocidade de corte no torneamento do aço 1045 com pastilhas de metal duro. As conclusões deste trabalho representam uma contribuição que reforça o uso da corrente elétrica consumida pelo motor principal da máquina-ferramenta como um parâmetro adequado, que pode ser utilizado na previsão do momento de quebra da ferramenta. Dado este fato e também por ser a medição da corrente elétrica um método simples, barato e não intrusivo de monitoramento, ele é de grande valia para a determinação em tempo real da vida de ferramenta de torneamento de desbaste.

**Palavras-chave**: Monitoramento da Usinagem, Torneamento, Vida da Ferramenta, Desgaste

Manuscript received: October 1992. Technical Editor: Walter L. Weingaertner

## Introdução

Cada vez mais se tem demandado flexibilidade dos sistemas produtivos, a fim de que não haja um declínio da produtividade dos sistemas, mesmo em face das tendências mundiais de consumo que exigem a diminuição do tamanho dos lotes e do tempo de vida dos produtos. Esta flexibilidade tem sido alcançada através da chamada automação flexível, onde as novas tecnologias das áreas de eletrônica e computação são aplicadas no projeto e produção dos bens. Uma das maiores barreiras para se conseguir uma produção totalmente automatizada é o desenvolvimento de processos de usinagem capazes de serem realizados sem a presença do homem. Para se cumprir este objetivo é necessário que se tenha um sistema de monitoramento e controle do processo que consiga estabelecer o momento de troca da ferramenta em tempo real, realize automaticamente esta troca e também possa variar as condições de usinagem visando a otimização do processo (Dornfeld, 1984; Teti, 1989; Majima, 1989).

Nos processos de usinagem convencionais, a troca da ferramenta deve ser realizada em bases estatísticas, procurando-se sempre realizar tal troca dentro de uma confiança pré-estabelecida de que o parâmetro que estabelece o fim da vida ainda não foi ultrapassado. Isto torna o processo ineficiente, já que muitas ferramentas são trocadas antes do momento adequado (Diniz e Cupini, 1992), causando maiores gastos com ferramentas e maiores tempos de máquinas paradas. Por outro lado, sistemas de monitoramento em tempo real do processo que possibilitem a ótima utilização das ferramentas, tem uso limitado na indústria (Tonshoff e Wuflsberg, 1987), principalmente a brasileira, que ainda não se convenceu das vantagens de utilização de tais sistemas, apesar de já existirem diversos destes sistemas disponíveis no mercado. Este fato incentivou a realização do presente trabalho.

Mesmo em uma fábrica não automatizada, o monitoramento em tempo real é uma maneira fácil de gerar e atualizar dados confiáveis de usinagem a serem armazenados em um banco de dados de condições de corte e utilizados em diversas máquinas-ferramenta.

Diferentes tipos de sistemas de monitoramento do processo de usinagem em tempo real vem sendo desenvolvidos, tais como emissão acústica, vibração, esforços de corte e parâmetros elétricos da máquina-ferramenta, todos com suas vantagens e desvantagens. O sistema de monitoramento usando os parâmetros elétricos dos motores da máquina tem algumas características positivas, tais como:

- É simples, barato e fácil de ser montado na máquina;
- Não é intrusivo, já que todo o sistema é colocado longe da região de corte, perto dos motores da máquina.

É lógico que tal sistema também possui características negativas, tais como um alto tempo de reconhecimento de uma falha no processo (em relação a outros sistemas de monitoramento) e a impossibilidade de se trabalhar com os componentes dinâmicos do processo (que vai ser comentada mais a frente).

O objetivo deste trabalho é correlacionar os parâmetros elétricos dos motores principal e de avanço do torno com o desgaste e quebra da ferramenta em torneamento de desbaste e também explicar o comportamento destes parâmetros à medida que o desgaste da ferramenta cresce.

## Nomenclatura

$a_p$ = profundidade de usinagem (mm)
b = comprimento de corte (mm)
f = avanço (mm/volta)
$F_c$ = força de corte
h = espessura de corte (mm)
I = corrente de armadura do motor principal (A)
$I_f$ = corrente de armadura do motor de avanço (A)
$K_s$ = pressão específica de corte
$K_{s1}$ = $K_s$ para h = 1 mm
$l_c$ = comprimento de corte (m)
R = resistência elétrica
V = voltagem de armadura do motor principal
$v_c$ = velocidade de corte (m/min)
$V_B$ = desgaste de flanco
$W_{el}$ = potência elétrica
$W_{mec}$ = potência mecânica
$\eta$ = rendimento mecânico

## Correlação entre os Parâmetros Elétricos da Máquina e o Desgaste e Quebra da Ferramenta

A potência ou a corrente elétrica consumidas pela máquina-ferramenta são proporcionais à potência mecânica consumida pelo processo e, com isso, proporcionais também aos esforços de corte. Em outras palavras, medir parâmetros elétricos é medir indiretamente os esforços de corte. A diferença reside no fato de que, quando os parâmetros elétricos são medidos, é inviável realizar a análise dinâmica do processo, já que o sistema elétrico atua como um filtro no qual somente as frequências baixas são analisadas. Isto não acontece quando se faz a medição das forças com dinamômetro piezoelétrico. Assim, quando apenas as baixas frequências de variação dos esforços de corte interessarem, como é o caso deste trabalho, o monitoramento dos parâmetros elétricos citados acima é adequado.

Apesar de serem diversos os fatores de influência sobre o valor e comportamento dos esforços de corte (Majima, 1989; Stein e Shin, 1986), particular atenção interessa ser dedicada neste trabalho à evolução destes esforços sob o efeito da variação dos desgastes de flanco e de cratera, que ocorrem na ferramenta durante a evolução do processo de usinagem.

O desgaste de flanco contribui sempre no sentido de aumentar os esforços de corte. Este fato ocorre por causa do aumento da força de atrito diante do sempre gradativo crescimento da área de contato entre a peça e a ferramenta na superfície de folga desta. A presença do desgaste de flanco pode ser imaginada como responsável pelo aparecimento de um "chanfro" na superfície de folga que, além de ter sua largura sempre crescente, apresenta um ângulo de folga (ou de "chanfro") efetivo negativo e próximo de zero grau. Todo este processo é evolutivo com o progresso da usinagem.

A evolução do desgaste de cratera representa a introdução de uma alteração geométrica na superfície de saída da ferramenta. Esta alteração é sentida devido a um aumento do valor do ângulo de saída efetivo, o que acarreta uma diminuição dos esforços de corte. Entretanto, deve ser considerado que a frequência de aparição do desgaste de cratera diminui quando são utilizadas ferramentas com o quebra-cavacos adequado para as condições de corte utilizadas e/ou quando se utiliza ferramentas com cobertura, principalmente com cobertura de $Al_2O_3$, (Sandvik,1993).

Desta forma, podem ocorrer os seguintes fatos:

- O desgaste de flanco ser tal que sua influência seja preponderante sobre a influência do desgaste de cratera, o qual pode ser inexistente ou evoluir de forma relativamente desprezível diante do primeiro. Assim sendo, os esforços de corte serão sempre crescentes à medida que o desgaste evoluir com o decorrer do processo, até a quebra da ferramenta.
- O desgaste de cratera evolui de forma não desprezível em relação ao desgaste de flanco. Neste caso ocorrerá uma tendência de equilíbrio entre os efeitos dos dois tipos de desgaste, ocorrendo, portanto, uma variação menos acentuada dos esforços de corte, que será regida pelo grau de preponderância de cada um dos efeitos provenientes da ação dos desgastes de flanco e de cratera (Filippi e Ippolito, 1969). Depois de um determinado tempo de corte, quando os desgastes já atingiram um valor elevado, os esforços passam a crescer devido à grande deterioração da ponta da ferramenta.

Portanto, em qualquer das situações acima, ocorrerá um período de evolução no processo em que a influência dos desgastes estará provocando uma taxa de variação dos esforços de corte que prenuncia a quebra da ferramenta. O enfoque central deste trabalho está justamente voltado para a realização de ensaios que permitam comprovar os fenômenos acima descritos, para operações de torneamento em circunstâncias delimitadas pela abrangência objetivada no trabalho

Diversos autores procuraram monitorar o desgaste e quebra de ferramentas de torneamento através da medição da corrente elétrica do motor principal (Stein e Shin, 1986; Dan e Mathew, 1990; Mannam e Broms, 1989). Alguns deles (Stein e Shin, 1986; Dan e Mathew, 1990) concluíram que a sensibilidade da corrente ao crescimento dos desgastes não é tão boa quando comparada com outros sistemas de monitoramento, mas sua sensibilidade à quebra da ferramenta é muito alta (dá sinais de que a quebra está prestes a acontecer), o que a torna um ótimo parâmetro para ser usado em torneamento de desbaste.

A Fig. 1 (Mannam e Broms, 1989) ilustra os diversos níveis de corrente para diferentes estágios de desgaste de ferramenta. Nota-se que existe uma grande diferença entre os valores de corrente para ferramenta nova e aqueles obtidos quando a ferramenta se encontra na iminência da quebra. Dessa forma, pode-se admitir um valor intermediário da corrente que limite a ocorrência da quebra da ferramenta, com consequente ganho de custo e tempo de manufatura.

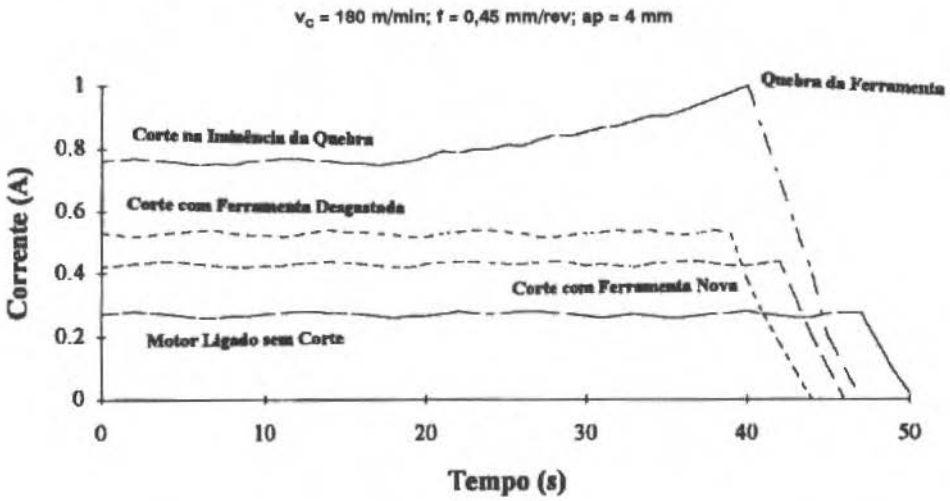



**Fig. 1 Valores de corrente para diferentes estágios de corte (Mannam and Broms,1989)**

## Materiais e Métodos Experimentais

A máquina-ferramenta utilizada foi um torno CNC com 22,4 KW de potência, com motor principal e motores de avanço movidos por corrente contínua. Os parâmetros elétricos sensoreados foram as correntes de armadura dos motores principal e de avanço e a tensão de armadura do motor principal. Os sinais de corrente elétrica foram obtidos utilizando-se um sensor de efeito "Hall" com precisão de 0,1 V/A, isto é, cada ampere que passa pelo fio circundado pelo sensor causa uma variação de 0,1 V na saída do mesmo. Assim, tem-se uma voltagem proporcional à corrente que se quer monitorar, a qual pode ser medida através do sistema placa analógica/digital - computador. O sinal de tensão de armadura do motor principal pode atingir até 400 V, voltagem muito alta para entrar na placa que faz a conversão analógico-digital. A máxima tensão que esta placa aceita é de 10 V. Devido a isto, o sinal teve que passar por um redutor, cuja relação entre os sinais de saída e de entrada é de 100 vezes. Para cada peça usinada, obteve-se um arquivo com dez pontos amostrados de cada um dos parâmetros monitorados. A média desses pontos amostrados por peça forneceu um valor para cada parâmetro (I, $I_f$, V) que pôde ser relacionado com o respectivo comprimento de corte, até o limite de fim de vida da ferramenta. Depois de saírem dos sensores, os sinais passavam por uma placa de conversão analógico-digital e eram armazenados na memória de um computador PC AT para posteriores análises.

O motor elétrico de corrente contínua que aciona o eixo-árvore da máquina possui excitação independente de campo e de armadura. O controle da velocidade de rotação de seu eixo é feito pela variação linear da tensão de armadura, mantendo a corrente de campo em seu valor nominal, até que se atinja uma rotação limite chamada de rotação base. Nessa faixa de rotação, o motor fornece potência linearmente proporcional à rotação da máquina. Para rotações acima da rotação base, o controle da rotação é feita pela variação da corrente de campo, mantendo constante a tensão nominal da armadura e, consequentemente, a potência elétrica até o limite de rotação da máquina. Neste trabalho, procurou-se manter a rotação sempre acima da rotação base (1050 RPM na máquina utilizada), para que a variação da rotação fosse feita pela corrente de campo, que não foi correlacionada com os desgastes da

ferramenta. Nestas condições, os parâmetros elétricos provenientes da armadura do motor se mantém praticamente constantes com a rotação e suas variações dependem apenas da variação de carga do eixo-árvore da máquina.

Antes do início dos ensaios propriamente ditos, foi realizado um ensaio com o propósito de verificar se o sistema de monitoramento montado na máquina (sensores de efeito Hall, redutor de tensão, placa A/D) estavam de fato funcionando. Considerando-se um processo de torneamento em que a velocidade de corte e o avanço são constantes, a potência elétrica consumida pela máquina é proporcional à profundidade de usinagem, ou seja:

$$W_{el} = RI^2 \qquad F_c = K_{s1} bh^{(1-z)} = K_s bh = K_s a_p f$$

$$W_{el} = W_{mec}/\eta \qquad W_{mec} = F_c v_c$$

$$W_{mec} = K_s f a_p v_c$$

$$I^2 = (K_s f a_p v_c) / (R\eta)$$

Considerando-se que o valor de $a_p$ não influencie o valor de $K_s$, já que a relação $a_p/f$ é grande (Ferraresi, 1977) e que R e $\eta$ são constantes, tem-se que:

$$I^2 = Ka_p$$

onde $K = (K_s f v_c) / (R\eta)$

A Fig. 2 mostra a relação entre o quadrado da corrente útil de armadura quando varia-se a profundidade de usinagem. Pode-se ver que, realmente, $I^2$ mostrou-se quase que diretamente proporcional a $a_p$ (equação da reta aproximada via regressão linear - $I^2 = 336,43a_p - 44,5$ - coeficiente de correlação - $R^2 = 0,9887$), provando que o sistema montado mediu corretamente a corrente de armadura.

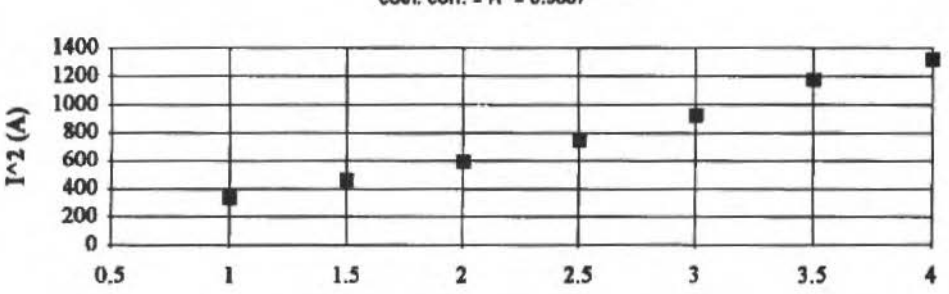



**Fig. 2 Quadrado da corrente de armadura vs. profundidade de usinagem**

As ferramentas utilizadas foram pastilhas intercambiáveis de metal duro P 10 código ISO TNNM 160404 com porta-ferramenta PTGNR 2525M16. A Tabela 1 mostra as condições de usinagem no primeiro tipo de experimentos. Nestes ensaios, o objetivo era correlacionar o desgaste da ferramenta e os parâmetros elétricos dos motores. Cada experimento terminava quando $V_B$ atingia 1.0 mm. Para o próximo experimento, uma nova aresta era colocada na posição de corte. Além destes ensaios, outros dois experimentos foram realizados, ambos usando o mesmo tipo de ferramenta. No primeiro destes, um "desgaste de flanco artificial" foi construído na ferramenta, a fim de que somente a influência deste tipo de desgaste pudesse ser analisada, sem a presença do desgaste de cratera. Referido "desgaste artificial" foi feito retificando-se um chanfro na superfície de folga da ferramenta de tal maneira que este simulasse o efeito do desgaste de flanco real. Embora os efeitos do "desgaste de flanco artificial" e

do desgaste de flanco real não sejam necessariamente equivalentes, esta foi a forma idealizada no trabalho para simular tal efeito. Este experimento foi feito com $v_c$ = 300 m/min, f = 0,25 mm/rev e $a_p$ = 2 mm. No segundo destes experimentos, o ensaio somente foi interrompido quando a ferramenta quebrou devido ao desgaste excessivo. As condições de usinagem deste ensaio foram $v_c$ = 300 m/min, f = 0,30 mm/rev e $a_p$ = 2 mm.

**Tabela 1 Condições de usinagem do primeiro tipo de experimentos**

| Número do experimento | $v_c$ (m/min) | f (mm/rev) | $a_p$(mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 250 | 0,25 | 2 |
| 2 | 250 | 0,20 | 2 |
| 3 | 250 | 0,30 | 2 |
| 4 | 200 | 0,25 | 2 |
| 5 | 300 | 0,25 | 2 |

## Resultados e Discussões

A Fig. 3 mostra o comportamento do desgaste de flanco (3a) e da corrente de armadura do motor principal (3b) em função do comprimento de corte, para os 3 avanços ensaiados, bem como o comportamento da corrente de armadura do motor principal (I) em função do avanço, para dois diferentes valores de desgaste de flanco ($V_B$). Nas Figs. 3, 4, 5 e 6, a corrente I é a diferença entre a corrente medida durante o corte e a corrente medida com o eixo-árvore rodando na mesma rotação em que o corte aconteceu, mas em vazio. Com isto, I é a corrente realmente necessária para realizar o corte. A corrente de armadura do motor de avanço ($I_f$) e a voltagem de armadura do motor principal (V) também foram medidas, mas não foram usadas na análise porque $I_f$ apresentou uma grande dispersão de ponto para ponto e V não variou com o comprimento de corte.

As discussões embasadas na Fig. 3 e apresentadas a seguir, consideram o aspecto positivo da pequena dispersão observada nos resultados, a qual oscilou entre 5 a 10% dos valores médios estimados.

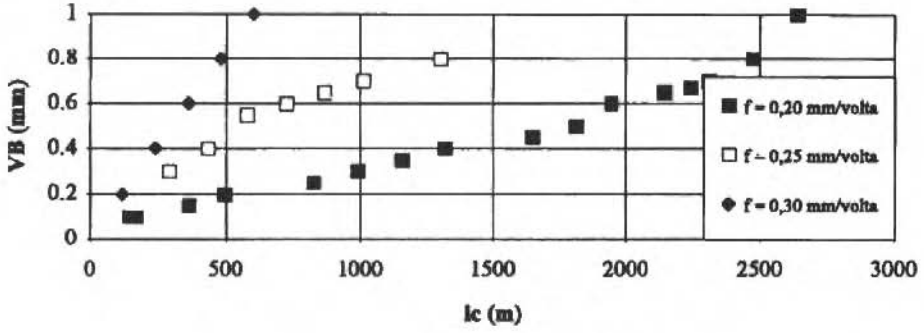
Pode ser visto nas Figs. 3a e 3b que o gradiente do aumento da corrente em relação ao comprimento de corte é muito menor que o gradiente de aumento do desgaste de flanco, principalmente para avanços pequenos. À medida que se aumenta o avanço, o gradiente de crescimento da corrente também aumenta. Para que fosse possível verificar se a corrente de armadura do motor principal é um bom parâmetro para estabelecer o momento de troca da ferramenta de torneamento em desbaste, a Fig. 3c foi construída, com base nos valores representados nas Figs. 3a e 3b . Dois valores de $V_B$ (0,4 e 0,8 mm) foram escolhidos e, para estes dois valores, o comprimento de corte foi obtido nas mesmas tabelas que geraram a Fig. 3a, para os 3 avanços. Com estes valores de $l_c$, os valores de corrente foram obtidos nas tabelas que geraram a Fig. 3b para cada um dos avanços. Assim, na Fig. 3c tem-se os valores de corrente que estabeleceriam o fim da vida da ferramenta para critérios de fim de vida baseados em $V_B$ = 0,4 mm e $V_B$ = 0,8 mm. Como foi visto, as Figs. 3a, 3b e 3c foram construídas a partir dos dados obtidos nos ensaios, cujas Tabelas de resultados não constam neste trabalho. Por este motivo, embora seja possível obter-se uma a partir das demais (ou a Fig. 3c a partir das Figs. 3a e 3b), este procedimento levaria a imprecisões.

Na Fig. 3c, pode-se verificar que:

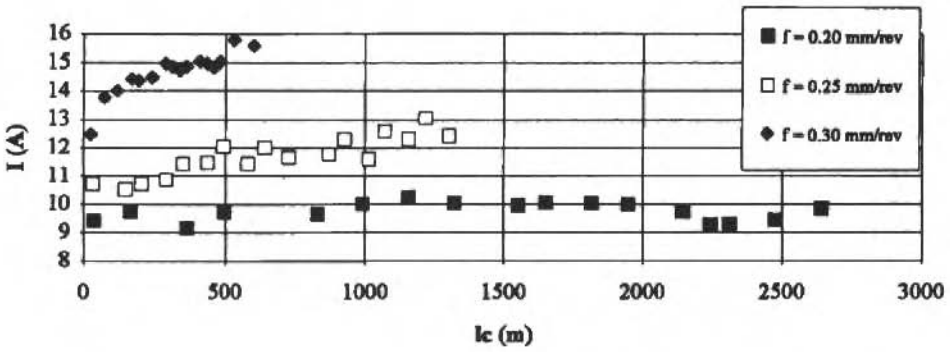
a) A corrente do motor cresce à medida que se aumenta o avanço para os dois valores de $V_B$ - é importante conhecer-se a relação entre as condições de usinagem e a corrente que estabelece o fim de vida da ferramenta, a fim de que valores diferentes dos ensaiados possam ser utilizados na situação real de produção.

b) A diferença entre os pontos referentes aos dois valores de $V_B$ é maior para os dois maiores valores de avanço, mas mesmo no ponto de maior diferença, esta ainda é pequena, não ultrapassando 1 A (menos do que 10% do valor absoluto).

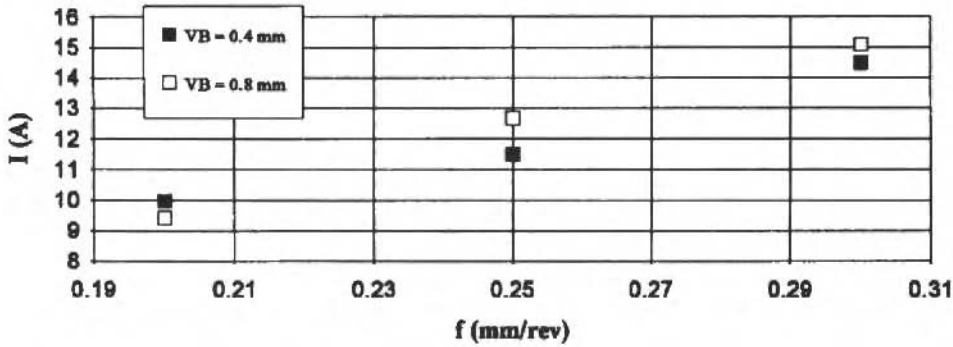
Com isto, pode-se concluir que a corrente não deve ser usada para estabelecer o fim da vida da ferramenta, pelo menos quando o critério de fim de vida for $V_B$ menor ou igual a 0,8 mm.




a Desgaste de flanco ($V_B$) vs. comprimento de corte ($l_c$)



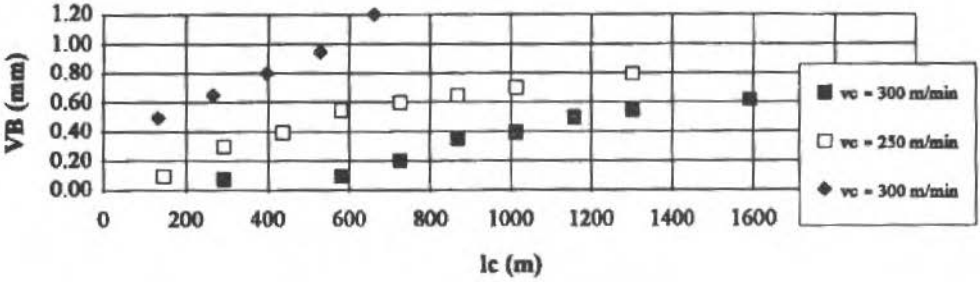

b Corrente do motor principal (I) vs. comprimento de corte ($l_c$)



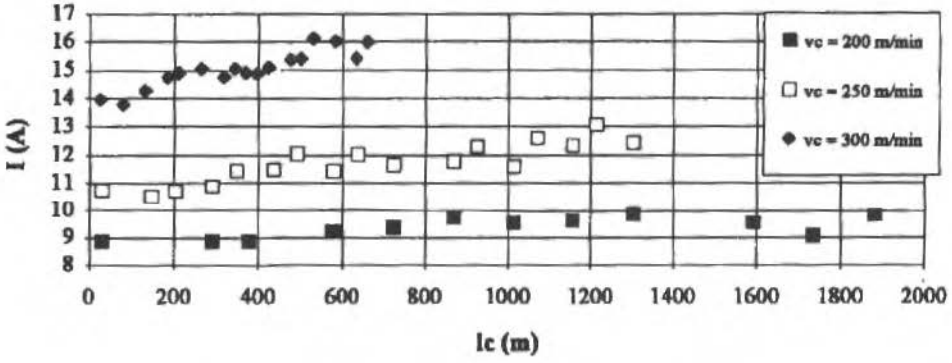

c Corrente do motor principal (I) vs. avanço (f)

Fig. 3 Ensaios com diferentes avanços

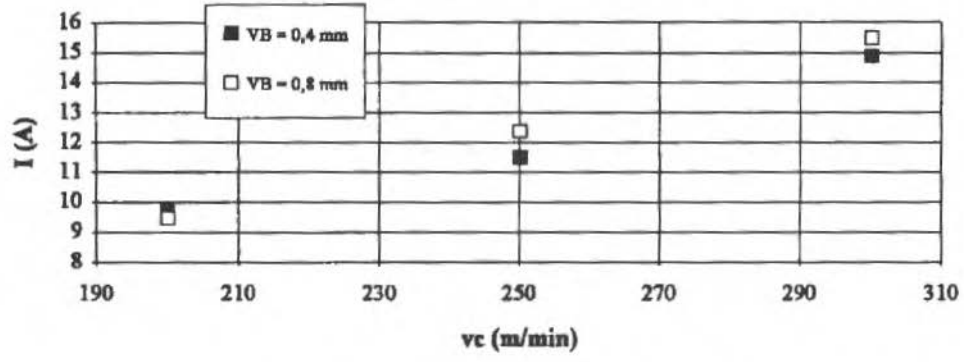
A Fig. 4 mostra a relação entre o desgaste de flanco (4a) e a corrente de armadura (4b) do motor principal com o comprimento de corte, para três velocidades de corte e a relação entre corrente de armadura e velocidade de corte (4c) para $V_B$ = 0,4 e 0,8 mm (a Fig. 4c foi construída de maneira análoga à Fig. 3c).




a Desgaste de flanco ($V_B$) vs. comprimento de corte ($v_c$)




b Corrente do motor principal (I) vs. comprimento de corte ($l_c$)




c Corrente do motor principal (I) vs. velocidade de corte ($v_c$)

Fig. 4 Ensaios com diferentes velocidades de corte

Conclusões semelhantes podem ser extraídas da Fig. 4c, isto é:

a) A corrente do motor cresce à medida que se aumenta a velocidade de corte para os dois valores de $V_B$.

b) A diferença entre os pontos referentes aos dois valores de $V_B$ é maior para os dois maiores valores de velocidade de corte, mas mesmo no ponto de maior diferença, esta ainda é pequena, não sendo suficiente para se conseguir, via monitoramento da corrente, estabelecer com confiança o valor do desgaste de flanco. Isto vem confirmar a inadequabilidade da corrente como parâmetro de estabelecimento do fim da vida da ferramenta quando o critério usado for $V_B$ menor ou igual a 0,8 mm.

Baseados nestes resultados, outros dois experimentos foram realizados: o primeiro com o objetivo de pesquisar a influência do desgaste de cratera no aumento da corrente, procurando-se explicar porque a corrente praticamente não varia com o comprimento de corte (Figs. 3b e 4b); no segundo experimento, o ensaio somente foi interrompido na quebra da ferramenta, a fim de se avaliar a viabilidade de usar a corrente de armadura para previsão do momento anterior à este evento.

Como já foi citado neste trabalho, a literatura diz que, quando o desgaste de cratera e o de flanco acontecem simultaneamente, a força de corte (e, consequentemente, a corrente do motor principal) tende a se estabilizar durante um período intermediário da vida da ferramenta. Isto ocorre porque o desgaste de flanco tende a aumentar a força e o desgaste de cratera tende a diminuí-la. A soma destas contribuições tornariam a força constante com o comprimento de corte neste período. Para evitar a influência do desgaste de cratera (que esteve presente em todos os experimentos das Figs. 3 e 4) e verificar se a explicação acima é correta ou não, o desgaste de flanco foi acelerado artificialmente e a corrente do motor principal monitorada nestas condições. Os resultados estão mostrados na Fig. 5. Pode-se ver que, mesmo quando somente acontece o desgaste de flanco, o comportamento da corrente é similar àquele que acontece quando da presença dos dois tipos de desgaste, contradizendo o que é citado pela literatura. Quando $V_B$ é pequeno (menor que 0,3 mm) o valor da corrente também é pequeno. Quando $V_B$ atinge 0,5 mm (período intermediário de corte) os valores de corrente se tornam constantes até $V_B$ = 0,85 mm. Quando $V_B$ = 1,25 mm, a quebra da ferramenta está próxima e a corrente volta a crescer.

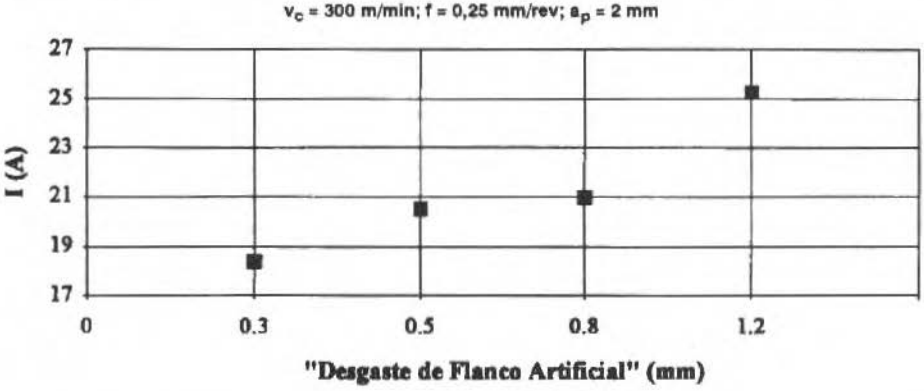



**Fig. 5 "Desgaste de flanco artificial" vs. corrente de armadura**

A Fig. 6 mostra o comportamento da corrente do motor principal contra o comprimento de corte até a quebra da ferramenta (na verdade, um lascamento que provocou um súbito aumento do desgaste de flanco), que aconteceu quando $V_B$ era da ordem de 1,5 mm. O comportamento da corrente foi similar ao citado acima, isto é, seu valor cresceu rapidamente no começo, ficou estável durante um período intermediário e voltou a crescer próximo da quebra da ferramenta. Este modelo de crescimento faz com que a corrente do motor seja um bom parâmetro para ser utilizado para evitar-se a quebra da ferramenta. Quando seus valores começam a crescer novamente, depois de um período de estabilidade (no caso deste trabalho perto de $V_B$ = 0,85 mm), é o momento de se parar o processo para se evitar a

quebra da ferramenta, o que causaria grandes danos ao porta-ferramenta e à peça. Além disso, quando este valor é ultrapassado e a ferramenta chega a se quebrar, a corrente imediatamente cai, o que torna a quebra facilmente reconhecível. Em operações de torneamento em desbaste, onde tolerâncias apertadas e bom acabamento superficial não são importantes, o desgaste pode ser grande. Nestes casos, não é necessário se estabelecer um valor de $V_B$ como critério de fim de vida da ferramenta e a única coisa que é fundamental é se evitar a quebra. Portanto, a corrente de armadura do motor principal é um bom parâmetro para se estabelecer indiretamente o fim da vida da ferramenta em operações de torneamento em desbaste.

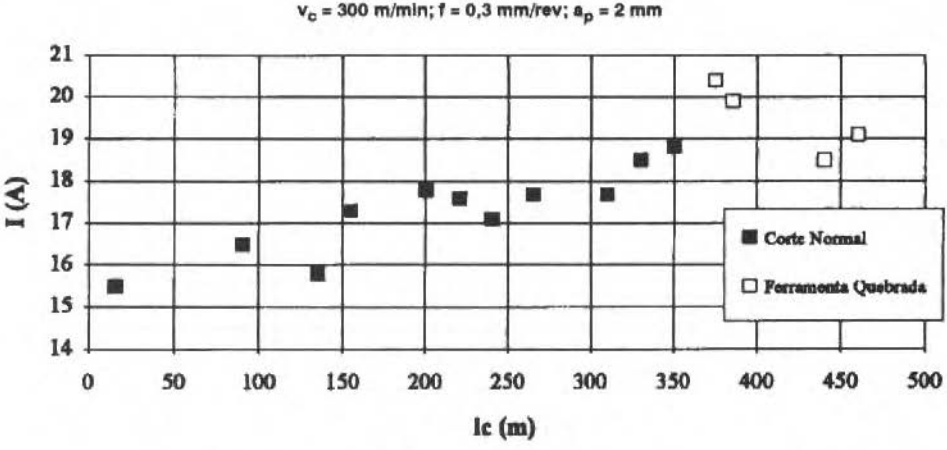



**Fig. 6 Corrente de armadura vs. comprimento de corte até a quebra da ferramenta**

## Conclusões

Baseado nos resultados deste trabalho pode-se concluir que, para a usinagem de aço 1045 com ferramentas de metal duro:

1) A corrente de armadura do motor principal mostrou-se um parâmetro confiável para se estabelecer o fim da vida da ferramenta em operações de torneamento em desbaste, onde o objetivo é somente remover uma grande quantidade de material e não obter tolerâncias apertadas e bom acabamento superficial. Nestes casos, somente a quebra da ferramenta é indesejável, o que pode ser facilmente evitado pelo monitoramento deste parâmetro.
2) O acompanhamento dos valores dos parâmetros elétricos da máquina-ferramenta pode ser feito em tempo real de uma maneira muito simples e barata e, por isso, a sua utilização em um sistema de controle automático do processo é bastante viável.
3) A corrente de armadura do motor principal não pode ser usada como um parâmetro para se estabelecer o fim da vida da ferramenta, se o critério for um valor de $V_B$ menor ou igual a 0,8 mm.
4) O crescimento dos valores da corrente com o aumento do desgaste de flanco (ou comprimento de corte) é mais sensível para altos valores de avanço e velocidade de corte.
5) A formação do desgaste de cratera não é responsável pela estabilização dos valores de corrente no período intermediário de corte.

## Referências

Dan, L. and Mathew, J., 1990, "Tool Wear and Failure Monitoring Techniques for Turning - A Review", Int. Journal Mach. Tools Manufact., 30, 4, pp. 579-598.

Diniz, A. E. and Cupini, N. L, 1992, "The Surface Roughness in Turning Process: Criterion of Tool Life and Its Relationship with Tool Wear", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, XIV(1), pp. 41-56.

Domfeld, D. A., 1984, "The Role of Acoustic Emission in Manufacturing Process Monitoring", Proc. Conf. on Sensor Technology for Untended Manufacturing, Schaumburg, Illinois, USA, SME Techn. Paper MS84-924, pp. 69-74.

Ferraresi, D., 1977, "Fundamentos da Usinagem dos Metais", Editora Edgard Blucher, São Paulo, Brazil.

Fillipi A. De and Ippolito, R., 1969, "Adaptive Control In Turning: Cutting Forces and Tool Wear Relationship for P10, P20, P30 Carbides", Annals of the CIRP,17, pp. 377-385.

Majima, T., 1989, "Monitoramento do Processo de Corte com Sensores", Máquinas e Metais, 276, pp. 24-33.

Mannam, A. M. and Broms, S., 1989, "Monitoring and Adaptative Control of Cutting Process by Means of Motors Power and Current Measurements", Annals ofthe CIRP, 38,1, pp. 347-350.

Sandvik Coromant, 1993, "Herramientas de Tornear", Catálogo Sandvik Coromant C-1000:4-SPA Suécia.

Stein, J. L and Shin, K. C., 1986, "Current Monitoring of Field Controlled DC Spindle Drivers", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 108, pp. 289-295.

Teti, R., 1989, "Tool Wear Monitoring Through Acoustic Emission", Annals of the CIRP, 38, 1, pp. 99-102.

Tonshoff, H. K. and Wulfsberg, J. P., (1987) "Developments and Trends in Monitoring and Control of Machining Process", Annals of the CIRP, 37/2, pp. 611-622.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 221-230

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Homopolar Welding: Mechanical and Metallurgical Evaluation

**Roseana da Exaltação Trevisan**
Depto. de Engenharia de Fabricação
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP
Caixa Postal 6122 - 13083-970 - Campinas - SP

## Abstract

This paper reports on recent research into the mechanical and metallurgical evaluation of the homopolar pulsed weld (HPW) process for welding 90 mm diameter, ASTM-1035 and API-X52 steel pipe. Several experiments were performed that varied process control parameters, one at a time and identified the effects on the weld properties. Conventional metallographic, microhardness, toughness and fracture toughness techniques were used for this evaluation. However, the process control parameters investigated did not improve the weld toughness. The reduced toughness at the weld line of the HPW process is attributed to the large grain size present on this region.

**Keywords**: Homopolar Welding, High Strength Steel, Toughness, Microhardness, Macro- and microstructure

## Introduction

Construction of seabed line pipe using the conventional S-lay technique is expected to reach a fundamental limit at a depth of approximately 1 Km, due to the high bending stresses imposed on the pipe. The J-lay technique would reduce the pipe bending stresses and extend the depth at which pipe could be laid, but would also decrease the number of available weld stations on the lay barge. The Homopolar Pulsed Welding (HPW) process is being investigated as a mean to weld line pipe fast and reliably, thus making the J-lay technique feasible. Other attractive offshore/deep water application include on-site fabrication of tension legs and underwater repair of risers, pipe, and structures.

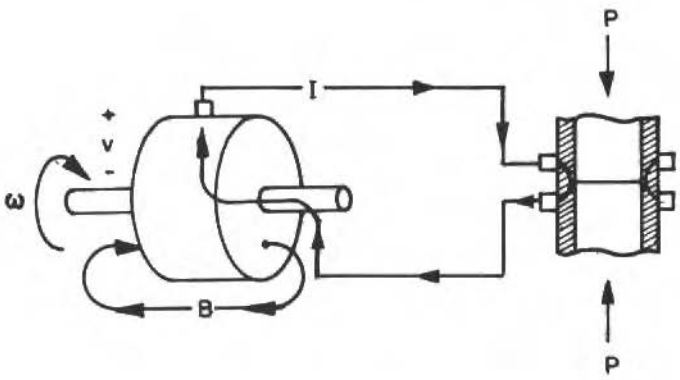



**Fig. 1 The homopolar pulsed weld process discription**

In homopolar welding (HPW) (Fig. 1), a homopolar generator (HPG) is used to produce a single pulse of electrical power to resistively heat the interface between two workpieces. When the interface reaches forging temperature, an axial upset load is applied to forge the pieces together (Harville, Trevisan and Gully, 1991). No melting occurs and the weld itself takes less than 3s, independent of cross-sectional area. Total cycle time is between 2 and 3 min, depending on the horsepower rating of the homopolar motoring system. The heat input is concentrated at the interface, due the constriction

Manuscript received: June 1993. Technical Editor: Walter L. Weingaertner

resistance between contacting surfaces, this resistance is function of contact pressure and surface preparation. The heat generated by the weld current induces complex phase transformations on those regions, resulting in different characteristics.

This paper describes in detail the influence of a few process control parameters on weld quality on ASTM 1035 and API 5L steel pipes. The effects of welding on the micro and macrostructure, hardness distribution and the toughness in weld zone were studied.

## Experimental Procedure

Initial tests were done in ASTM 1035 commercial steel pipe (Trevisan, Harville and Gully,1992). The welding was carried out with a HPW process. Through visual examination and mechanical testing, weld parameters were optimized. The best weld conditions are listed in Table 1. The optimum homopolar welding conditions were also performed on a high-strength pipe of API 5L grade X-52 of 90 mm diameter and 10 mm thickness (Trevisan, Harville and Gully,1993). For the flat surface preparation, the faying surfaces were machined perpendicular to the outside cylindrical surface with a perpendicularly value not exceeding 25 μm. Because the current pulse occurs in such a short time frame, the current does not have the opportunity to evenly distribute itself as in the case of non uniform interface resistance. Subsequently, specimen alignment and surface preparation becomes very critical process control parameters. Initial tests, on ASTI 1035 pipe steel, consisted of keeping all the control parameters shown in the Table 1 constant and varying the initial pressure. After optimization work was completed, three welds were fabricated using optimum parameters with three different initial pressures: 22, 25 and 28 MPa. After that, the welding conditions listed in Table 1 with 28MPa of initial pressure were used in the API 5L pipe steel.

**Table 1 Current optimum welding parameters**

| Weld Specimen | |
|---|---|
| Weld area | 2.716 $mm^2$ |
| Interface geometry | flat, butt weld |
| Surface preparation | 63 rms, lather turned |
| **HPW Parameters** | |
| Initial energy stored | 3.2 MJ |
| Magnetic field vs. time | 1.2 T (constant) |
| Initial load | 22-25-28 MPa |
| Forging load | 138 MPa |
| Load vs. time profile | step increase at 0.6 s into pulse |
| Current vs. time profile | 290 KA - 3 s pulse length |
| Power vs. time profile | 774 KW peak at 128 ms |
| Energy deposited in the weld | 442 KJ |

### Weld Characterization

Representative welds were sectioned (under conditions of flood lubrication), mounted in epoxy and mechanically polished. Macrostructural characteristics were revealed by etching with 20% Nital reagent. For microstructural study, the specimens were mechanically polished to 0.05 μm grif followed by a 2% Nital etch. For metallography evaluation, optical metallography was used.

The HPW was also characterized by toughness using Charpy tests at room temperature and the results were evaluated with others. Notched fracture toughness was performed using the Charpy-Notches located in the weld line, the heat affected zone (HAZ) and in the base metal. At the HAZ, the notches were located as close as possible to the fine grained region. Fig. 2 shows two examples of

notch location. In Fig. 2a, the notch is located on the weld line and in Fig. 2b, the notch is on the HAZ. After the Charpy toughness tests, the fracture surfaces were examined with a scanning electron microscope (SEM).

## Results from ASTEM-1035 Pipe Steel

The macrostructure appearance of the weld produced by the homopolar process can be seen in Fig. 3. The figure shows that the weld is formed basically by three regions: Base Metal (A) - Heat Affected Zone (B) - Weld Line (C). Macrostructures showed the HAZ on either side of the interface to be symmetrical. The widths of these various structurally altered zones vary considerably depending on the welding parameters, but the form is fairly repeatable.

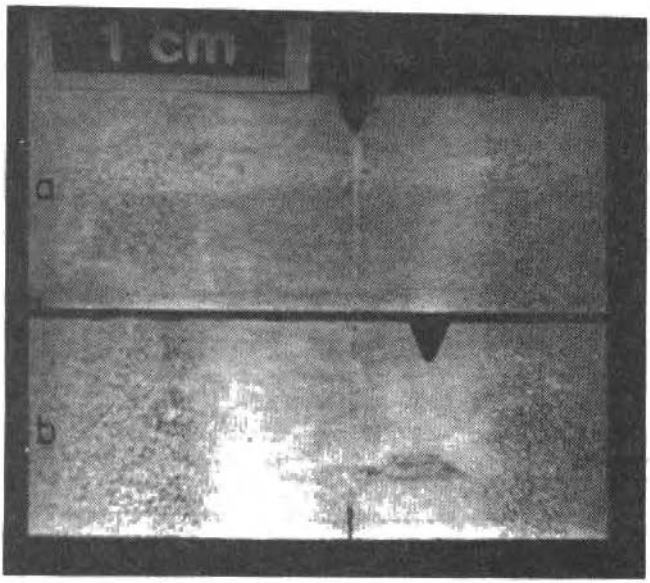



**Fig. 2 Two examples of notch locations: (a) on the weld line; (b) on the HAZ**

Microscopic observation also provides evidence of different microstructures at the same weld line, indicating in homogeneity of the microstructure. Independently of the initial pressure, the weld line microstructure is not uniform and two different microstructures exist at the same weld line. A coarse grained Widmanstatten ferrite was present at the weld outer diameter (OD) and inner diameter (ID). The center of the pipe wall shows a refined grain structure with the microstructure consisting of small grains of ferrite and cementite. Their location on the weld and typical microstructure are indicated in Figs. 4a and b. This lack of uniformity was observed in all samples, independent of steel and of initial pressure.

The base metal in the vicinity of the weld line is subjected to a complex thermal cycle in which all temperature, from the melting range of the steel down to mere warming, are involved. A transverse macrostructure from the unaffected base metal to the weld interface is also shown in Fig. 3.

For these particular weld parameters, the shape of the HAZ typically neck down in the center of the pipe wall and expands axially at both the OD and ID of the pipe. It is believed this happened during the forging stage of the joint, when the hottest and consequently softest material is extruded out from the middle of the weld line.

The energy data obtained from Charpy tests are generally used to compare weld zone properties with those of base metal or other welds. The Fig. 5 shows the energy data obtained from Charpy test carried out at different regions in the same weld. Those results indicate that the weld interface regions has the lowest toughness when compared with the parent metal and the fine-grained region at the HAZ. The Charpy tests results were similar for the three welds independent of the initial pressure used. In all cases, the weld interface had the lowest toughness. The only difference noticed was that welds made with low initial pressure presented more uniform results.

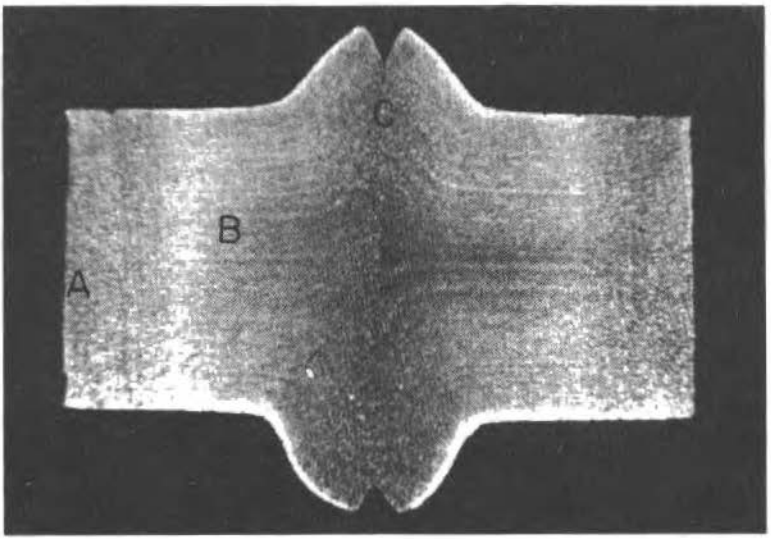



**Fig. 3 Macroetructure observed in a homopolar weld showing transversal uniformity at the weld line**

It is well known that coarse grained materials have been more susceptible to brittle fracture and poorer in toughness than fine grained materials (Siewert et al.,1989). The reduced toughness at the weld line of the HPW process could be attributed to the large grain size of this region.

It is important to emphasize that the toughness of the HAZ, of the modern normalized structural steel plate immediately away from this fusion location, is usually very good and little difficulty appears to have been encountered in obtaining more than adequate Charpy impact toughness (Walker, 1987). Considering that the HPW does not have composition changes occurring at the weld line, the parent metal has to be considered with more detail.

In order to improve the HPW toughness, new experiments were conducted with a API-X52 steel pipe.

## Results from API-X52 Pipe Steel

The welding parameters used on API-X52 were the optimum homopolar welding conditions that had been established with ASTM 1035 pipe steel as high initial pressure (28 MPa) test. Also, cast structure was not observed in the weld line, verifying that the welds were performed under solid-state conditions.

Macrostructures showed the HAZ on the either side of the interface is symmetrical. The upset that occurs on the pipe outer diameter (OD) and inner diameter (ID) are also symmetrical. These upsets are observed in all welding of thermomechanically processed steels. Micrographic study reveals that the microstructure at the weld region shows range and variety. The weld line is composed mostly of coarse grains of ferrite; adjacent to the weld line is the coarse-grained Widmanstatten ferrite. Beyond this is a

finer-grained zone with the microstructure consisting of small grains of ferrite and cementite. Farther away from the interface, into the base metal, the structure consists of interleaving bands whose microstructure is a fine-grained conglomerate of ferrite and pearlite.

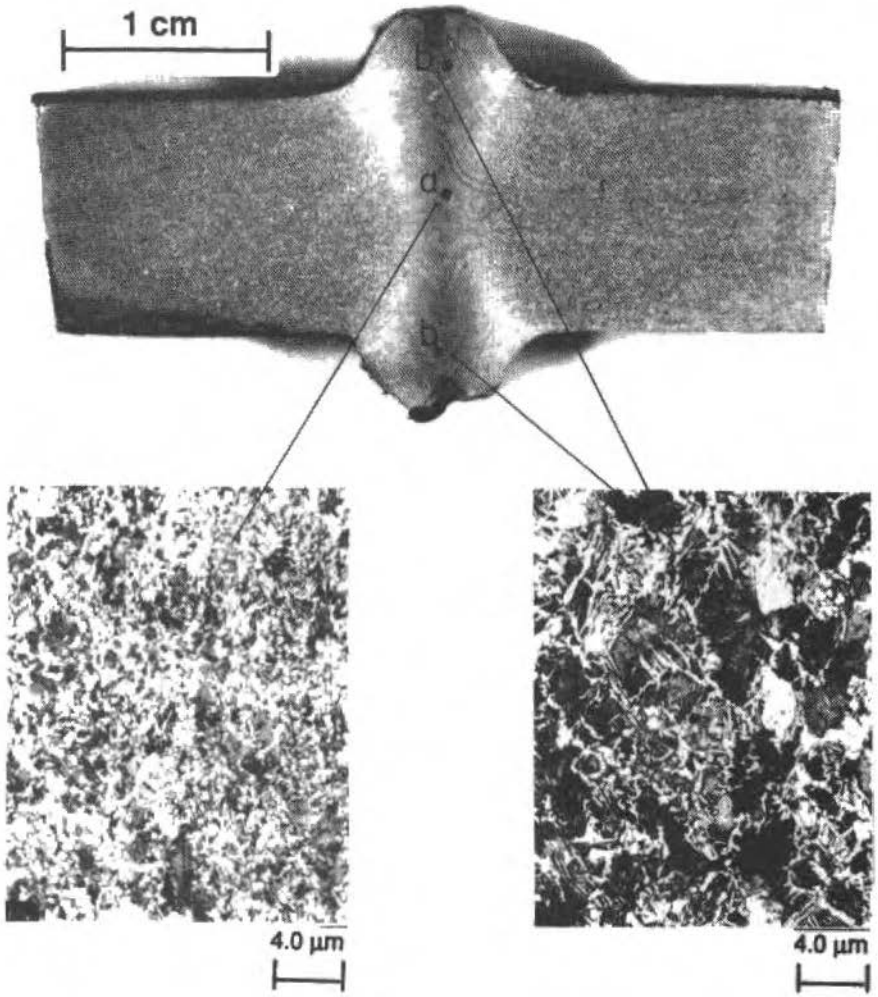



**Fig. 4 Transverse section shows the macro and microstructure in the typical fusion weld line of the HPW**

The results obtained from the impact tests carried out on Charpy V-Notch specimens at room temperature are shown in Fig. 6. Those results show a conspicuous variation in toughness in the weld joint. The lowest impact energy values were obtained in the weld line.

After the Charpy toughness test, the fracture surfaces were examined. The SEM examination was conducted to help evaluate the toughness results. Fig. 7 and 8 show a typical fracture surface from the parent metal and weld line, respectively, from the impact specimen. No porosity was observed on the fracture surface at the weld line, as mentioned previously in this paper. The weld line exhibits a brittle cleavage fracture surface and shows little evidence of plasticity. The parent metal presents a ductile fracture, characterized by dimpling of the surface due to localized plastic flow.

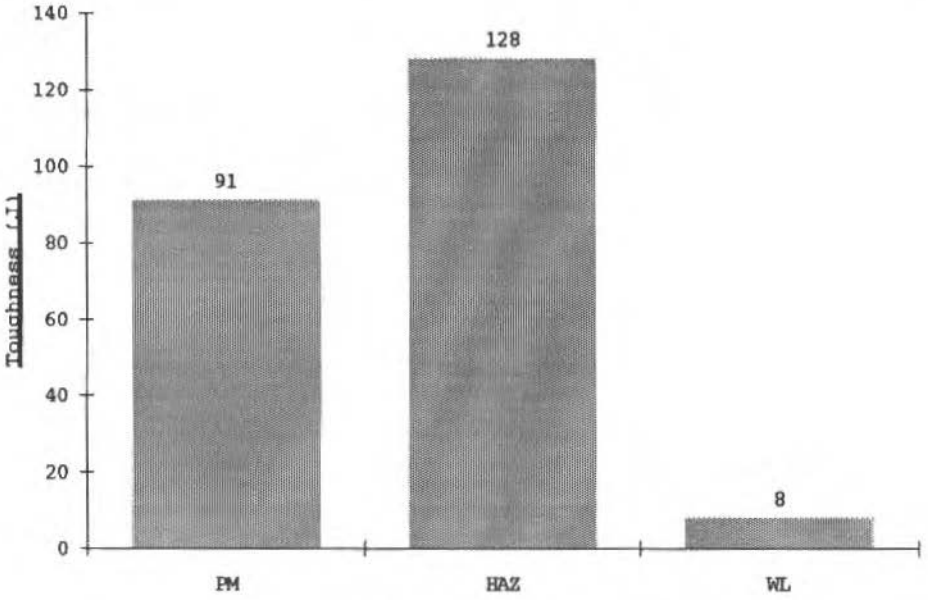



Fig. 5 Charpy impact energy as a function of different regions in homopolar weld

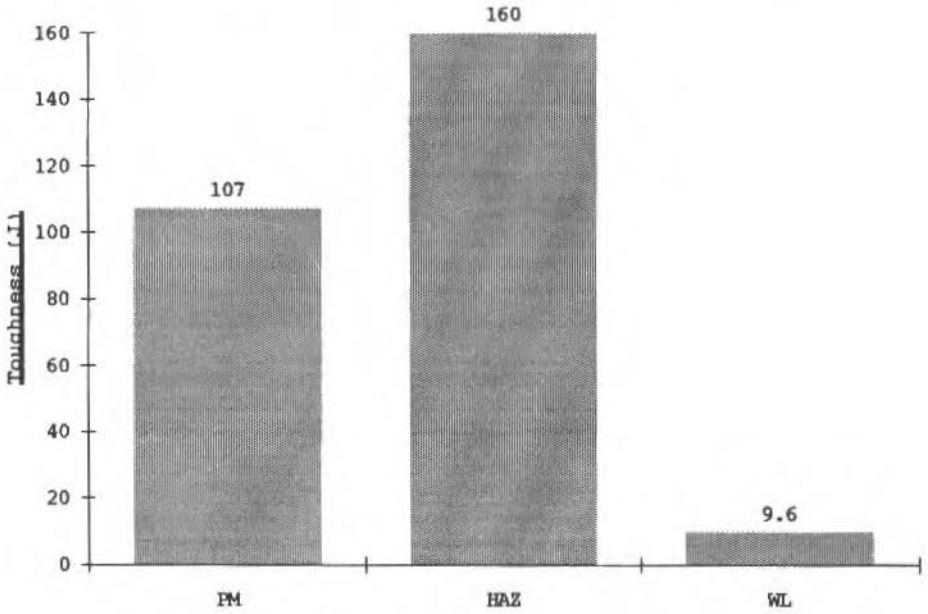



Fig. 6 Charpy impact energy results from different regions in the homopolar weld

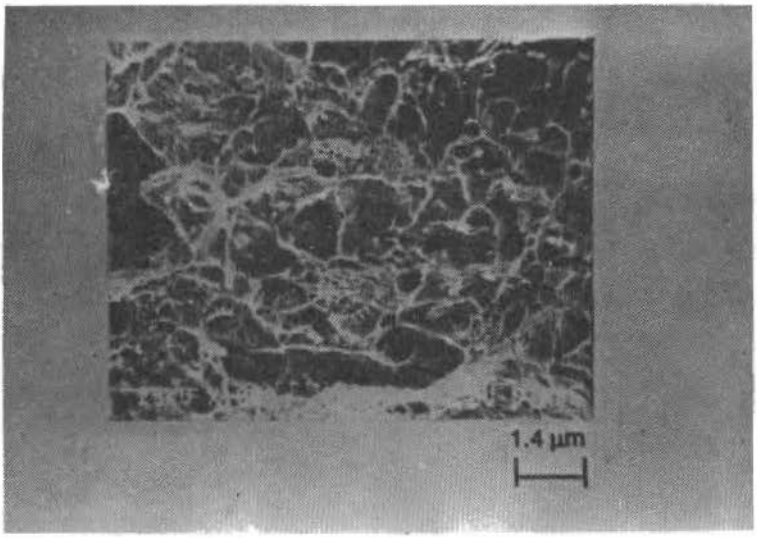



Fig. 7 SEM micrograph on fracture surface of Charpy specimen from parent metal

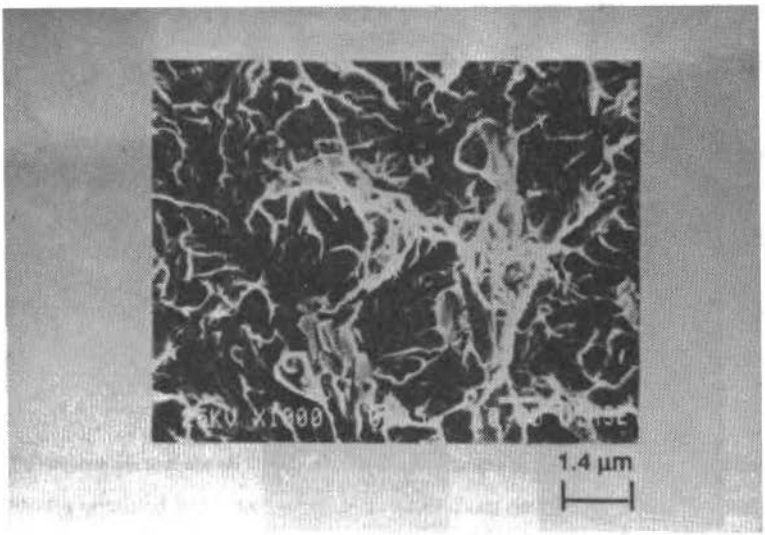



Fig. 8 SEM micrograph of fracture surface of Charpy specimen from weld line

Fig. 9 shows an etched cross-section and hardness distribution of the welded joint in the as-welded condition. As shown in the figure, a softened region can be seen in the visible weld line. Minimum microhardness values were measured in the area of the ferrite line at the weld. The maximum hardeness was in the coarse-grained Widmanstatten ferrite region, close to the ferrite line.

The hardness value in the fine-grained zone is slightly higher than that of the base metal. In the region of the interleaving bands of ferrite and pearlite, the hardness remains equal to that of the base metal.

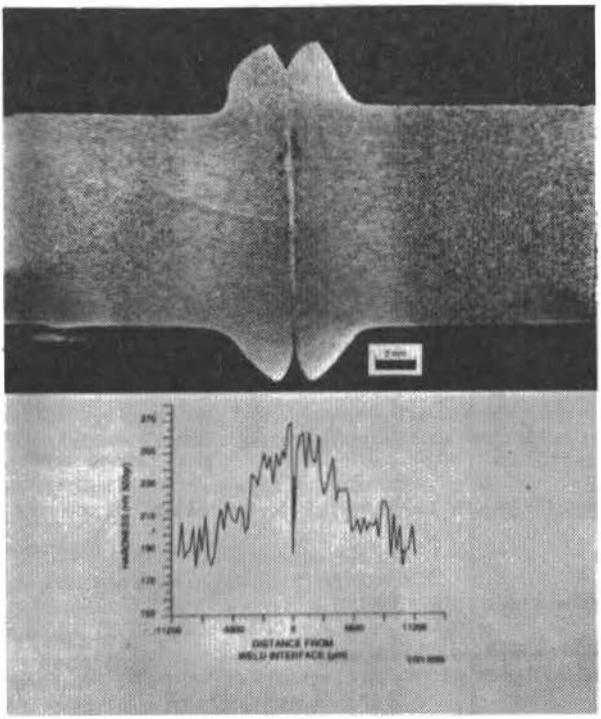


**Fig. 9 Macrostructure and hardness distribution of the welded joint**

## Discussion

No cast structure was observed in any weld line, meaning that homopolar welding is a solid-state welding process. The weld line is only detectable as a region in which the grain size is different from that of the immediately adjoining areas. However, all the metallurgical transformations on solid state occur like a fusion weld. At the HPW the microstructural transformations are basically the same; only, the fusion region does not exist (Fig. 10) (Trevisan, Harville and Gully, 1992). In HPW, the grain growth zone is present at the weld line.

In fusion welding, the HAZ can be conveniently divided into a number of subzones from fusion region to unaffected base metal. Each subzone refers to different type of microstructure and each structural type possess different mechanical properties. Specific attention has been focused towards the evaluation of the risk of a local brittle region within the HAZ. Attention has been concentrated on the problem that is related to the assessment of fracture resistance of small regions of grain-coarsened structure within the HAZ immediately adjacent to the fusion line as shown in Fig. 10. The extent or volume of coarse grained regions will be most significantly influenced by heat input and composition.

At the HPW the microstructural transformations are basically the same; only, the fusion region does not exist. No decaburized layer or oxide inclusion are detectable in the weld region, such as observed with conventional forge welding (Samuel,1980). Also, there is no porosity observed at the weld line.

The sharp decrease in hardness and the low toughness values at the weld line are due to the ferrite zone found there. Typically, the soft zones have higher resistance to impact load than the harder zone (Kuchuk, Kazymov and Krivenko, 1969). However, as seen by the toughness results, in Figs. 5 and 6, the weld line presents lower toughness than the HAZ and the base metal. It has been shown that the grain size of ferrite is a particularly important variable for improving the ductility of the steel (Honeycombe,1982), and reduction of grain size improves fracture toughness (Kuo,1987). In homopolar welds examined here, even though the coarse-grained ferrite zone is found only at the bond line itself, it appears to be enough to lower the impact toughness significantly. Reduction of ferrite grain size should improve the impact toughness.

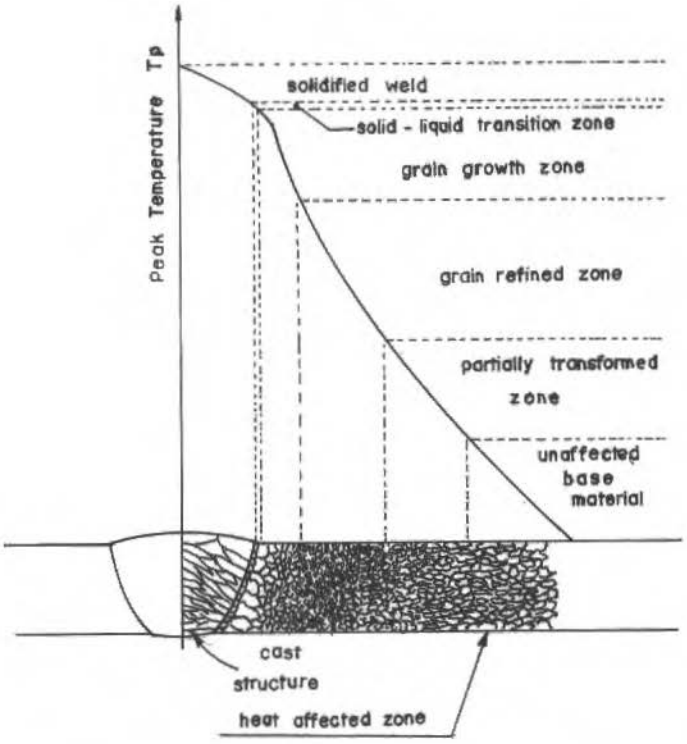



**Fig. 10 A schematic diagram of the various subzones at the typical fusion weld**

It is important to emphasize that the toughness of the HAZ, of the modern normalized structural steel plate immediately away from this fusion line location, is usually very good and little difficulty appear to have been encountered in obtaining more than adequate Charpy impact toughness (Walker, 1987). Considering that the HPW does not have composition changes occurring at the weld line, the parent metal has to be considered with more details.

## Conclusions

- The homopolar pulsed welding is a solid state welding process. The weld shows no porosity or lack of bonding at the welding line.
- In the HPW process of ASTM 1035 steel pipe, the welds were improved significantly using optimum welding parameters. The welds exhibited low toughness levels at room temperature, and the process control parameters investigated did not improve the weld toughness. The low toughness is probably due to the coarse grains present at the weld line.
- The results conducted on AFI 5L Grade X-52 pipe steel show that the homopolar pulsed weld also presents low toughness and low hardness at the weld line, in the as welded condition.

## Acknowledgements

The author wishes to thank the FAPESP and UNICAMP in Brazil for their support during this work, and the Engineers Gully, J. H. and Harville, M. W. at The University of Texas at Austin, TX. USA for the technical support.

## References

Harville, M. W., Trevisan, R. E. and Gully, J. H., 1991, "Homopolar Pulsed Welding for Offshore Applications", proceedings of the Brazil Offshore 91 VIII International Symposium on Offshore Engineering, Vol. 1, pp. 24, Rio de Janeiro, Brazil.

Honeycombe, R. W. K., 1982, "Steel Microstructure and Properties" ASM, pp. 31

Kuchuk-Yatsenko, S. I., Kazymov, B. I. and Krivenko, B. I., 1990, "Flash Welding of Large High-Strength Steel Pipe", Welding Journal, Vol. 69, pp. 47

Kuo, S., 1987, "Welding Metallurgy", John Wiley & Sons, pp. 326.

Samuel, L. E., 1980, "Optical Microscopy of Carbon Steel", ASM, pp. 411.

Siewert, T. A., Reed, R. P., Shepherd, D. A. and Sobczynki, S. P., 1989, "Weld Cracking in Massive Steel Forging", Welding Journal, Vol. 66, pp. 23.

Trevisan, R. E., Harville, M. W. and Gully, J. H., 1992, "Homopolar Pulsed Welding of Steel Pipe: Effects of Controlled Parameters on Weld Properties", Proceedings of the Offshore Mechanics and Arctic Engineering 11th International Conference, Vol. 3, pp. 113, Calgary, Canada.

Trevisan, R. E., Harville, M. W. and Gully, J. H.,1993, "Evaluating the use of Homopolar Pulsed Welding on High-Strength Steel Pipe", Welding Journal, Vol. 72, pp. 43.

Walker, E. F., 1989, "Steel Quality, Weldability and Toughness", Proceedings of the 3rd International ECSC Offshore Conference on Steel in Marine Structures (SIMS1987), Delf, Netherland, Vol. 3, pp. 1.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 231-249

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Esquemas de Alta Ordem para a Solução de Escoamentos de Fluidos sem Dispersão Numérica

## *High Order Schemes for the Solution of Fluid Flows without Numerical Dispersion*

**Carlos Henrique Marchi**

Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor - SINMEC
Depto. Eng. Mecânica/UFSC Caixa Postal 476, CEP 88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: EMC1CHI@BRUFSC.BITNET

### Abstract

This paper advances the new numerical scheme CEL which permits high order schemes to be used without the undesired numerical dispersion. Three new interpolation functions are proposed: CDS-L, QUICK-L and ADS. The performance of these functions are compared with available schemes in the literature, as the UDS, CDS, WUDS, FIC, QUICK and TVD. Diffusive/advective and advective/transient one-dimensional problems are solved. The best agreement with analytical and numerical solutions was obtained with the ADS, followed by the TVD, QUICK-L and CDS-L.

**Keywords**: Numerical Methods, Finite Volume, Numerical Diffusion, Numerical Dispersion, Numerical Schemes, Fluid Flows.

### Resumo

São fornecidas explicações para as causas da difusão e dispersão numéricas. Introduz-se o procedimento CEL que permite resolver escoamentos de fluidos usando esquemas de alta ordem sem haver dispersão numérica. Três novas funções de interpolação são propostas: CDS-L, QUICK-L e ADS. O desempenho destas funções é comparado a alguns esquemas disponíveis na literatura: UDS, CDS, WUDS, FIC, QUICK e TVD. Problemas do tipo advectivo-difusivo e advectivo-transiente unidimensionais são resolvidos. O esquema ADS foi o que proporcionou a melhor concordância entre as soluções numéricas e exatas dos problemas resolvidos, seguido pelos esquemas TVD, QUICK-L e CDS-L.

**Palavras-chave**: Métodos Numéricos, Volumes Finitos, Difusão Numérica, Dispersão Numérica, Funções de Interpolação, Escoamentos de Fluidos.

## Introdução

### Motivação

No âmbito do Método dos Volumes Finitos (Roache,1976; Patankar,1980; Minkowicz et al.,1988), o tipo de função de interpolação que se adota pode ser considerado como uma das principais características de um modelo numérico, senão a principal, responsável pela qualidade da solução obtida. Entende-se por função de interpolação, ou esquema numérico, o meio utilizado para se expressar o valor da incógnita do problema, e de sua derivada normal, nas faces dos volumes de controle que são usados para discretizar o domínio de cálculo.

Outras características de um modelo numérico como o método de solução do sistema linear de equações, solução simultânea ou segregada, método de acoplamento pressão-velocidade, além da própria função de interpolação, influenciam a taxa de convergência do processo iterativo ou o custo computacional envolvido na solução de um problema. Estas características não afetam a solução em si. Em oposição, funções de interpolação diferentes fornecem resultados numéricos também diferentes. Outra questão importante refere-se à malha utilizada, se é ou não estruturada.

A motivação deste trabalho está associada ao desenvolvimento e aplicação de funções de interpolação que apresentem melhor desempenho do que aquelas habitualmente empregadas com o Método dos Volumes Finitos.

Manuscript received: September 1992. Technical Editor: Carlos Alberto Carrasco Altemani

## Difusão e Dispersão Numéricas

A definição do termo difusão numérica, também conhecido por viscosidade artificial, difusão falsa ou dissipação numérica, e a explicação de suas causas são assuntos ainda de muita controvérsia na literatura (Patankar, 1980; Silva, 1991; Roache, 1972; Sharif e Busnaina, 1993; Raithby, 1976a). Adotam-se no presente trabalho as definições dadas por Sharif e Busnaina (1993) para os termos difusão e dispersão numéricas. Por "difusão numérica" será entendido como qualquer efeito que tenda a suavizar ou amortecer gradientes ou descontinuidades presentes na solução exata de um problema (Fig. 1a). Os efeitos que resultam em oscilações na solução (Fig. 1b) serão denominados de "dispersão numérica". Tanto a difusão numérica quanto a dispersão numérica são erros introduzidos na solução de um problema via função de interpolação.

Sabe-se que esquemas de primeira ordem como o UDS, Upstream Difference Scheme, (Courant et al., 1952; Patankar, 1980) não produzem dispersão numérica, no entanto, em geral, apresentam elevados níveis de difusão numérica. Já nos esquemas de segunda ou mais alta ordem, os níveis de difusão numérica são menores, às vezes muito menores. Entretanto, dependendo do escoamento em consideração, todos provocam o surgimento de oscilações que podem comprometer totalmente o significado físico da solução obtida. Exemplos de esquemas de alta ordem são: CDS (Central Difference Scheme) (Patankar, 1980), UDS de 2ª ordem (Price, 1966) e QUICK (Leonard, 1979). Normalmente, define-se a ordem de um esquema como a ordem do erro de truncamento da função de interpolação em relação à série de Taylor (Hirsch, 1991). Assim, como a função do esquema CDS é uma reta, o seu erro de truncamento será proporcional a $\Delta x^2$ e, portanto, o esquema CDS é considerado de 2ª ordem no espaço.

Com base em constatações práticas, pode-se dizer que se o tipo da função de interpolação for diferente do tipo da solução exata, a difusão numérica manifesta-se na solução numérica. O caso ideal ocorre quando o tipo da função de interpolação é idêntico àquele da solução exata e, assim, a solução numérica concordará perfeitamente com a solução exata do problema, como na Fig. 1a, já que a difusão numérica estará ausente. Por exemplo, considere-se um problema cuja solução exata seja dada por uma função senoidal. Se a solução numérica for obtida através de qualquer função de interpolação que não seja uma senóide, apresentará difusão numérica. Acrescente-se que a comparação entre o tipo da função de interpolação e o tipo da solução exata deve ser local. Isto é conseqüência do fato de que o tipo da solução exata pode variar ao longo do espaço.

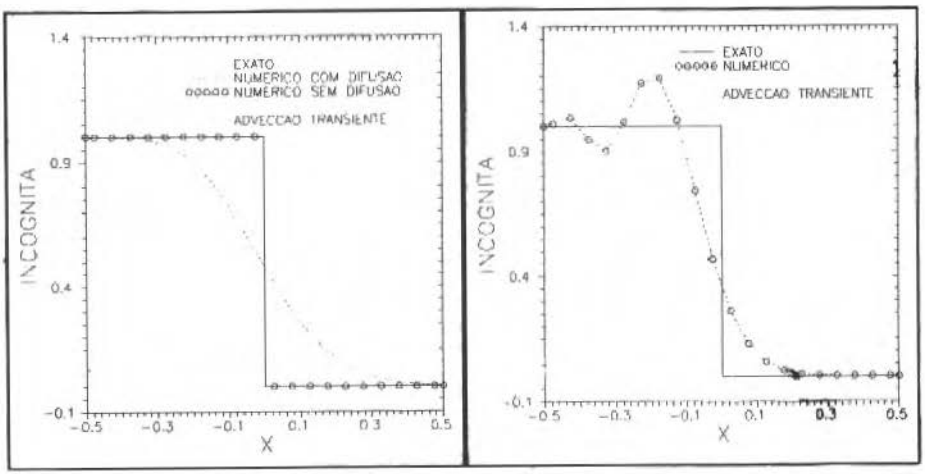



**Fig. 1a Exemplo de difusão numérica; b Exemplo de dispersão numérica**

De acordo com a definição dada ao termo difusão numérica e a explicação de sua causa, acima, deve-se notar que a difusão numérica não ocorre apenas em escoamentos multidimensionais, como geralmente pensa-se (Patankar, 1980; Patel et al., 1985; Nieckele, 1985), também pode ocorrer em problemas unidimensionais, mesmo em regime permanente.

Tão importante quanto o tipo da função de interpolação é o sentido de propagação da informação, ou seja, se o esquema é à montante (UDS) ou à jusante (DDS, Downstream Difference Scheme), em relação ao sentido do escoamento, da interface do volume de controle em consideração. Esta afirmação pode ser melhor entendida através da Fig. 1a. A solução exata é de primeira ordem (considerando a definição da ordem dos esquemas numéricos) com uma descontinuidade em x = 0 no tempo t. A solução numérica, representada pela linha tracejada, foi obtida com uma função de interpolação de primeira ordem mas com avaliação à montante (UDS). Com isso, ocorreu difusão numérica. Já na obtenção da solução representada pelos círculos usou-se UDS antes da descontinuidade e DDS a partir daí, resultando na perfeita concordância da solução numérica com a exata.

A explicação sobre a causa da difusão numérica, dada acima, concorda bem com os ótimos resultados que vêm sendo obtidos com os esquemas do tipo TVD (Total Variation Diminishing) (Harten, 1983; Roe, 1985; Hirsch, 1990; Ortega et al., 1991). Estes esquemas têm a capacidade de variar ao longo do espaço tanto a sua ordem como o sentido de propagação da informação usada, assumindo comportamentos do tipo UDS, CDS ou DDS. Com isso diminui-se consideravelmente a difusão numérica.

## Objetivos

Os esquemas geralmente empregados junto ao Método dos Volumes Finitos são o UDS, Exponencial (Spalding, 1972), WUDS (Raithby e Torrance, 1974) e Power-Law (Patankar, 1980). Tem-se observado (Smith e Hutton, 1982; Patel et al.,1985; Nieckele,1985) que estes esquemas introduzem muita difusão numérica nas soluções. Para contornar este problema, malhas bastante refinadas têm sido usadas, além de outros artifícios. Outro esquema, mas menos utilizado, é o QUICK. Embora apresente menos difusão numérica, não raro, a solução obtida contém oscilações (Chen e Falconer, 1992).

Em face ao exposto acima, os objetivos do presente trabalho são:

1) Introduzir um procedimento, denominado CEL (Coeficientes Explicitamente Limitados), que permite o emprego de esquemas de alta ordem sem, no entanto, a solução ser contaminada por dispersão numérica.

2) Aplicar o procedimento CEL às funções de interpolação do tipo CDS e QUICK gerando os esquemas CDS-L e QUICK-L.

3) Introduzir um novo esquema numérico chamado ADS (Adaptable Difference Scheme).

## Nomenclatura

$a$ = valor mínimo do coeficiente A para não haver oscilação
$A$ = coeficiente do sistema linear
$B$ = termo indepente do sistema linear
$C$ = número de Courant
$E,W$ = volumes de controle a leste e a oeste de P
$L$ = comprimento do domínio de cálculo
$M$ = massa
$\dot{M}$ = fluxo de massa
$n$ = número de volumes de controle do domínio
$P$ = volume de controle elementar
$Pe$ = número de Peclet
$r$ = fator do esquema TVD
$t$ = tempo
$x$ = coordenada espacial
$\alpha$ = coeficiente do termo advectivo da função de interpolação
$\beta$ = coeficiente do termo difusivo da função de interpolação
$\Gamma$ = coeficiente da difusão
$\Delta t$ = intervalo de tempo
$\Delta x$ = comprimento do volume de controle
$\rho$ = massa específica
$\phi$ = incógnita genérica do problema
$\psi$ = limitador do esquema TVD

**Subscritos**

$e,w$ = faces leste e oeste do volume P
$E,W$ = colunes de controle a leste e a oeste de P
$o$ = contorno esquerdo do domínio de cálculo
$P$ = volume de controle elementar
$L$ = contorno direito do domínio de cálculo

4) Comparar o desempenho dos esquemas propostos (CDS-L, QUICK-L e ADS) àqueles disponíveis na literatura: UDS, CDS, WUDS, QUICK, FIC e TVD.

## Equação Governante

Visando atingir os objetivos propostos, a equação escolhida para efetuar a comparação entre os esquemas numéricos é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

onde $\rho$, u e $\Gamma$ são constantes e representam a massa específica, a velocidade e o coeficiente de difusão; t e x são o tempo e a coordenada espacial; e $\phi$ é a incógnita do problema.

Embora a Eq. 1 seja linear e unidimensional, ela é suficiente para mostrar os efeitos indesejáveis da difusão e dispersão numéricas sobre a solução de um problema. Complexidades adicionais como multidimensionalidade, não-linearidades e equações acopladas só contribuiriam para dificultar a aplicação do procedimento CEL e a realização das comparações entre os esquemas.

## Funções de Interpolação

Utilizando-se o Método dos Volumes Finitos (Roache, 1976; Patankar, 1980; Minkowicz et al., 1988), a Eq. 1 é integrada sobre o volume de controle elementar P, delimitado pelas faces oeste (w) e leste (e), Fig. 2, e ao longo do tempo obtendo-se

$$\frac{M}{\Delta t}(\phi_P - \phi_P^o) + \dot{M}(\phi_e - \phi_w) = \Gamma\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right] \qquad (2)$$

onde $\Delta t$ representa o intervalo de tempo e

$$M = \rho\Delta x \qquad (3)$$

$$\dot{M} = \rho u \qquad (4)$$

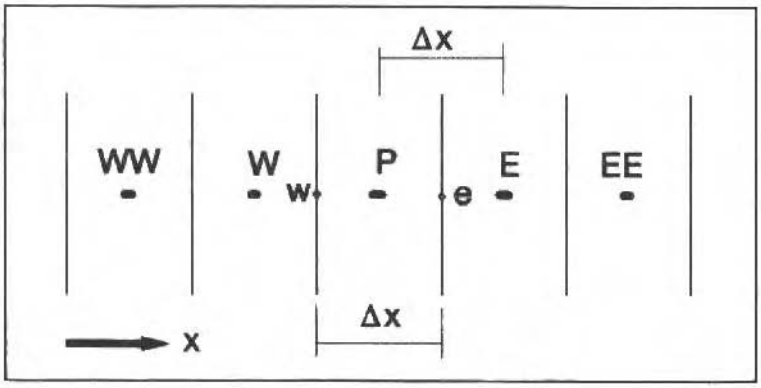



**Fig. 2 Discretização do domínio de cálculo**

Na integração da Eq. 1, considerou-se $\rho$, u e $\Gamma$ constantes ao longo do tempo e do espaço. Assim, a massa do volume de controle (M) e o fluxo de massa ($\dot{M}$) através de suas faces são constantes em todo o domínio de cálculo. Todas as incógnitas $\phi$ e suas derivadas da Eq. 2 são avaliadas no nível de tempo $t + \Delta t$, exceto o termo $\phi_P^o$ que é considerado conhecido e avaliado no nível de tempo t. Portanto, uma formulação totalmente implícita está sendo empregada.

Os diversos tipos de função de interpolação surgem da forma escolhida para se expressar o valor da incógnita $\phi$, e de sua derivada normal, nas faces dos volumes de controle. Generalizando, para a face leste pode-se escrever (Raithby e Torrance, 1974)

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e)\,\phi_P + (1/2 - \alpha_e)\,\phi_E \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \beta_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x} \tag{6}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ dependem do tipo da função de interpolação. Substituindo-se as Eqs. 5 e 6, e suas análogas para a face oeste, na Eq. 2 obtém-se

$$A_P \phi_P = A_e \phi_E + A_w \phi_W + B_P \tag{7}$$

onde

$$A_e = -\dot{M}\,(1/2 - \alpha_e) + \beta_e \Gamma / \Delta x \tag{8}$$

$$A_w = \dot{M}\,(1/2 + \alpha_w) + \beta_w \Gamma / \Delta x \tag{9}$$

$$A_P = A_P^o + A_e + A_w \tag{10}$$

$$B_P = A_P^o \phi_P^o \tag{11}$$

$$A_P^o = M / \Delta t \tag{12}$$

A Eq. 7 representa um sistema linear de equações com três diagonais não-nulas ($A_P$, $A_e$, $A_w$) mais o termo independente ($B_P$), relaciona o volume de controle P a seus dois vizinhos: os volumes leste (E) e oeste (W), e é o resultado da aplicação de um método numérico sobre a Eq. 1 que modela um fenômeno físico. A seguir são apresentados cinco tipos de funções de interpolação disponíveis na literatura.

## Esquema UDS

O esquema à montante ou UDS (Upstream Difference Scheme) é o mais simples e estável de todos. Foi desenvolvido por Courant et al. (1952). Para aplicá-lo basta considerar $\beta = 1$ e

$$\alpha = \begin{array}{ll} 1/2 & \text{se } u \geq 0 \\ -1/2 & \text{se } u < 0 \end{array} \tag{13}$$

### Esquema CDS

Admitindo-se um perfil linear para $\phi$ entre os volumes P e E (Fig. 2) tem-se o esquema CDS (Central Difference Scheme). Neste esquema $\beta = 1$ e

$$\alpha = 0 \tag{14}$$

### Esquema WUDS

O esquema WUDS (Upstream-Weighted Difference Scheme) foi proposto por Raithby e Torrance (1974) e resulta da solução exata de um problema advectivo-difusivo, unidimensional, em regime permanente e sem qualquer termo fonte, ou seja, a Eq. 1 sem o termo transiente. Esquemas semelhantes ao WUDS foram anteriormente propostos, como no trabalho de Allen e Southwell (1955) e no esquema exponencial de Spalding (1972) e, posteriormente, no esquema Power-Law de Patankar (1980). Os coeficientes $\alpha$ e $\beta$, para o esquema WUDS, são dados por (Raithby, 1976b)

$$\beta = \frac{(1 + 0.005Pe_{\Delta x}^2)}{(1 + 0.05Pe_{\Delta x}^2)} \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{Pe_{\Delta x}^2}{(10 + 2Pe_{\Delta x}^2)} \tag{16}$$

onde $Pe_{\Delta x}$ é o número de Peclet de malha e é dado por

$$Pe_{\Delta x}^2 = \frac{\dot{M}\Delta x}{\Gamma} \tag{17}$$

As Eqs. 15 e 16 são aproximações das soluções exatas (exponenciais) que são muito custosas de se computar.

### Esquema QUICK

A idéia básica que Leonard (1979) utilizou ao propor o esquema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) foi a de usar um polinômio quadrático para obter o valor de $\phi$ nas faces dos volumes de controle. Para isso, dois volumes à montante e um à jusante da face em consideração são empregados. Para a face oeste, por exemplo, se $u \geq 0$, os volumes WW, W e P (Fig. 2) são empregados. Neste trabalho, utiliza-se uma versão recente do esquema QUICK (Hayase et al., 1992) que, segundo seus autores, é mais estável, converge mais rapidamente e garante a obtenção de resultados fisicamente realísticos. Isto é conseguido somando-se ao esquema UDS uma correção ($\Delta\phi$). Assim, para a face oeste e $u \geq 0$, por exemplo, tem-se

$$\phi_w = \phi_W + \Delta\phi_w^* \tag{18}$$

$$\Delta\phi_w^* = (3\phi_P^* - 2\phi_W^* - \phi_{WW}^*)/8 \tag{19}$$

As incógnitas $\phi$ sem asterisco são tratadas implicitamente no sistema linear e aquelas com asterisco, explicitamente, como um termo fonte, sendo englobadas pelo termo $B_p$. As expressões resultantes para os coeficientes do sistema linear de equações são as mesmas das Eqs. 8 a 12, exceto o termo independente cuja expressão passa a ser (para $u \geq 0$)

$$B_p = A_P^{\circ}\phi_P^{\circ} + \dot{M}\,(5\phi_P^{*} - \phi_W^{*} - 3\phi_E^{*} - \phi_{WW}^{*})\,/8 \tag{20}$$

Os valores assumidos por $\alpha$ e $\beta$ são os mesmos do esquema UDS. Deve-se notar que o termo $B_p$ depende da própria solução do problema. Desta forma, o esquema QUICK necessita de um ciclo iterativo para atualizá-lo.

### Esquema FIC

Será denominado de FIC (Função de Interpolação Completa) o esquema que usa a própria equação diferencial do problema, com todos os seus termos, para obter a função de interpolação. O esquema FIC pode ser considerado uma extensão dos esquemas usados nos trabalhos de Allen e Southwell (1955) e Spalding (1972). Foi inicialmente aplicado por Schneider (1986) e, recentemente, por Souza e Maliska (1990) e Souza (1992).

Seguindo o esquema FIC de Souza (1992), primeiramente a Eq. 1 é integrada sobre um volume de controle centrado no ponto "e" da Fig. 2, resultando em

$$\frac{M}{\Delta t}(\phi_e - \phi_e^{\circ}) + \dot{M}\,(\phi_E - \phi_P) = \frac{2\Gamma}{\Delta x}(\phi_E + \phi_P - 2\phi_e) \tag{21}$$

e isolando-se $\phi_e$ da Eq. (21) obtém-se

$$\phi_e = \phi_e^{\circ} + \left(\frac{2C}{Pe_{\Delta x}} - C\right)\phi_E + \left(\frac{2C}{Pe_{\Delta x}} + C\right)\phi_P \tag{22}$$

onde C é o número de Courant que é dado por

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \tag{23}$$

Substituindo-se a Eq. 22, e sua análoga para a face oeste, na Eq. 2 e considerando a Eq. 6 com $\beta = 1$ para as derivadas normais, chega-se às expressões para os coeficientes do esquema FIC e que são dadas por

$$A_e = \frac{\Gamma}{\Delta x} + \dot{M}\left(C - \frac{2C}{Pe_{\Delta x}}\right) \tag{24}$$

$$A_w = \frac{\Gamma}{\Delta x} + \dot{M}\left(C + \frac{2C}{Pe_{\Delta x}}\right) \tag{25}$$

$$B_p = A_P^{\circ}\phi_P^{\circ} + \dot{M}\,(\phi_w^{\circ} - \phi_e^{\circ}) \tag{26}$$

As expressões para $A_P$ e $A_P^{\circ}$ continuam sendo as mesmas dadas pelas Eqs. 10 e 12.

## Refutação do Dogma dos Coeficientes Positivos

Existe uma corrente na área da Dinâmica dos Fluidos Computacional que estabeleceu a regra de que os coeficientes de um sistema linear de equações, como na forma apresentada pela Eq. 7, têm que ser positivos para não haver dispersão numérica (Roache, 1976; Patankar, 1980; Patel et al., 1985; Nieckele, 1985; Hayase et al., 1992; Prakash, 1984; Schneider e Raw, 1986). Contudo, esta regra pode

ser considerada um dogma pois não existe prova da sua veracidade, exceto para problemas extremamente simples como aqueles governados pela Eq. 1 sem o termo transiente. Além disso, é sabido de experimentos numéricos realizados com a Eq. 1 que soluções sem dispersão numérica podem ser obtidas com valores negativos do coeficiente $A_e$.

Poucos são os trabalhos encontrados na literatura que buscam refutar o dogma dos coeficientes positivos, como pode ser visto em Thompson et al. (1985) e Hirsch (1990). Outro exemplo é o trabalho de Silva (1991) que, com base em experimentos numéricos para problemas tridimensionais axissimétricos com ondas de choque, obteve soluções sem dispersão numérica mesmo com coeficientes negativos.

A seguir introduz-se um procedimento, denominado CEL (Coeficientes Explicitamente Limitados), que permite resolver escoamentos de fluidos empregando esquemas de alta ordem sem haver dispersão numérica, mesmo que existam coeficientes negativos.

## Procedimento CEL

Para um problema advectivo-difusivo em regime permanente, a Eq. 7 se reduz a

$$(A_e + A_w)\,\phi_P = A_e\phi_E + A_w\phi_W \qquad (27)$$

Arbitrando-se $\phi_W = 5$, $\phi_E = 1$, e $A_W = 0{,}6$, pode-se verificar na Tabela 1 o resultado de $\phi_P$, obtido da Eq. 27, para diferentes valores do coeficiente $A_e$. Quando $A_e$ tende ao infinito, $\phi_P$ resulta igual a $\phi_E$, o que corresponde a um esquema à jusante (DDS) e que é o oposto ao esquema UDS. Para $A_e = A_w$, o resultado de $\phi_P$ é a média aritmética entre $\phi_E$ e $\phi_W$. Quando $A_e = 0$, $\phi_P = \phi_W$ que é o resultado do esquema UDS. Finalmente, com valores negativos de $A_e$, a dispersão numérica manifesta-se, isto é, $\phi_P$ resulta em valores que ficam fora do intervalo entre $\phi_E$ e $\phi_W$. Invertendo-se os valores das incógnitas, ou seja, $\phi_W = 1$ e $\phi_E = 5$, verifica-se novamente que quando $A_E = 0$, $\phi_P = \phi_W$ e que para valores negativos de $A_e$ ocorre dispersão numérica. Quaisquer que sejam os valores arbitrados para $\phi_E$, $\phi_W$ e $A_w$ (sempre > 0 para u > 0) os mesmos resultados qualitativos serão obtidos.

Considere-se agora a inclusão de um termo fonte na Eq. 27. Desta forma tem-se

$$(A_e + A_w)\,\phi_P = A_e\phi_E + A_w\phi_W + B_P \qquad (28)$$

A Eq. 28 pode representar, por exemplo, a equação de conservação da quantidade de movimento linear em regime permanente. Neste caso, o termo fonte está relacionado ao gradiente de pressão. A Tabela 2 foi montada admitindo-se $\phi_W = 5$, $\phi_E = 1$, $A_w = 0{,}6$ e $B_P = -0{,}6$. Como se pode verificar nesta tabela, mesmo para valores negativos de $A_e\,(=-0{,}1)$, obtém-se um resultado para $\phi_P\,(=4{,}60)$ sem dispersão numérica, já que $\phi_W > \phi_P > \phi_E$. O valor mínimo de $A_e$ para que não haja dispersão numérica é -0,15, correspondendo mais uma vez a $\phi_P = \phi_W$.

**Tabela 1 Valores de $\phi_P$ obtidos com a Eq. 27**

| $A_e$ | $\infty$ | 10,0 | 0,6 | 0,1 | 0,0 | -0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi_P$ | 1,00 | 1,23 | 3,00 | 4,40 | 5,00 | 5,07 |

**Tabela 2 Valores de $\phi_P$ obtidos com a Eq. 28**

| $A_e$ | $\infty$ | 0,6 | 0,0 | -0,1 | -0,15 | -0,16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi_P$ | 1,00 | 2,50 | 4,00 | 4,60 | 5,00 | 5,09 |

Comparando-se as Tabelas 1 e 2 pode-se concluir que o valor mínimo do coeficiente $A_e$ para que não haja oscilação ocorre quando $\phi_P = \phi_W$. Considerando-se isto, deduz-se da Eq. 7 o valor mínimo do coeficiente leste, denotado por $a_e$, para evitar a dispersão numérica. A expressão obtida é

$$a_e = A_P^o \frac{(\phi_W - \phi_P^o)}{(\phi_E - \phi_W)} \tag{29}$$

Ressalte-se que a expressão acima é válida para $u > 0$. Se $u < 0$, o coeficiente que possui um valor mínimo admissível para não haver dispersão numérica é o coeficiente oeste ($A_W$), e o coeficiente leste poderá assumir qualquer valor.

A causa da dispersão numérica pode ser interpretada da seguinte forma, considerando-se o caso da Eq. 27 e $u > 0$: o fluxo de $\phi$ que entra no volume de controle P pela face oeste é dado por $A_W \phi_W$. Se $A_e > 0$, existe um fluxo de $\phi$ que sai do volume P pela face leste e é igual a $A_e \phi_e$ e não há dispersão. Mas, quando $A_e < 0$ o fluxo de $\phi$ é reverso, isto é, há um fluxo de $\phi$ entrando no volume P através da face leste. Com isso, ocorre um acúmulo de $\phi$ no volume P e surge a dispersão numérica (overshoot). O contrário também pode ocorrer (undershoot) quando existem fluxos de $\phi$ saindo do volume P pelas faces oeste e leste. Como mostrado acima, existindo um termo fonte positivo ou mesmo negativo, como na Eq. 28, pode haver um fluxo reverso de $\phi$ na face leste até um determinado limite sem que ocorra dispersão.

Deve-se admitir que um problema advectivo-difusivo unidimensional, sem termo fonte, em regime permanente, e que não use o tempo como coordenada iterativa, é um caso muito simples. Só neste tipo de problema é que o termo $A_P^o$ é nulo pois $\Delta t \to \infty$ e, assim, a Eq. 29 fornece $a_e = 0$. Portanto, na grande maioria dos problemas da Dinâmica dos Fluidos, a regra que estabelece a necessidade de sempre se usar coeficientes positivos é incorreta. Como se pode verificar na Eq. 29, o valor mínimo e o sinal do coeficiente leste $a_e$, para que não haja dispersão numérica, dependem dos valores assumidos por $\phi_W$, $\phi_E$ e $\phi_P^o$. Já que $A_P^o > 0$, $a_e$ tanto pode ser negativo quanto positivo.

## Funções de Interpolação Limitadas

A seguir são introduzidos no presente trabalho duas novas funções de interpolação com base nos esquemas CDS e QUICK, anteriormente descritos, e que serão denominadas de CDS-L e QUICK-L. A letra "L" vem da palavra "limitado". O conceito de esquemas limitados foi introduzido por Van Leer (1973) e Boris e Book (1973) e está associado à eliminação da dispersão numérica em esquemas de alta ordem, como os esquemas CDS e UDS de 2ª ordem.

No desenvolvimento dos esquemas CDS-L e QUICK-L, a limitação será imposta sobre o valor que o coeficiente leste ($A_e$) poderá assumir. Se $A_e \geq a_e$, com $a_e$ dado pela Eq. 29, a solução não apresentará dispersão numérica.

### Esquema CDS-L

Igualando-se a Eq. 8 ao coeficiente $a_e$ obtém-se o valor mínimo que $\alpha_e$ pode assumir, denotando-se por $\alpha_e^L$, e cuja expressão é

$$\alpha_e^L = \frac{1}{2} + \frac{a_e}{\dot{M}} - \frac{\beta_e^*}{Pe_{\Delta x}} \tag{30}$$

Assim como a Eq. 29 só é válida para $u > 0$, a Eq. 30 só tem sentido para $Pe_{\Delta x} > 0$. Uma expressão semelhante pode ser deduzida para $\alpha_w^L$ se $Pe_{\Delta x} < 0$. Substituindo-se as Eqs. 4, 12 e 29 em 30 obtém-se

$$\alpha_e^L = \frac{1}{2} + \frac{1}{C}\frac{(\phi_W - \phi_P^o)}{(\phi_E - \phi_W)} - \frac{\beta_e^*}{Pe_{\Delta x}} \tag{31}$$

Os valores assumidos pelos coeficientes $\beta_e^*$, $\beta_e$ e $\alpha_e$ são

$$\beta_e^* = [2MAX(1; Pe_{\Delta x})]^{-1} \tag{32}$$

$$\beta_e = MIN(1; 4\beta_e^*) \tag{33}$$

$$\alpha_e = \begin{matrix} 0 \quad se \quad \alpha_e^L \le 0 \\ MIN(0{,}5; \alpha_e^L) \quad se \quad \alpha_e^L > 0 \end{matrix} \tag{34}$$

onde MIN(g;h) e MAX(g;h) representam os valores mínimo e máximo entre g e h, respectivamente. O coeficiente $\alpha_e^L$ funciona como um limitador de $\alpha_e$ e tem a função de eliminar a dispersão numérica. No cálculo do coeficiente $\beta_e^*$, e por extensão $\beta_e$, incluiu-se o efeito do número de Peclet para haver coerência com a física do problema.

Em um método numérico conservativo, deve-se garantir que o fluxo da propriedade conservada que sai pela face leste do volume P (Fig. 2) seja igual ao que entra pela face oeste do volume E. Para isso, o valor do coeficiente $\alpha_w$ do volume E($\alpha_w^E$) tem que ser igual ao coeficiente $\alpha_e$ do volume P($\alpha_e^L$), ou seja

$$\alpha_w^E = \alpha_e^P \tag{35}$$

Da mesma forma deve-se proceder com os coeficientes $\beta_e$ e $\beta_w$. Dois destaques devem ser feitos a respeito da Eq. 30. O primeiro refere-se a um problema advectivo-difusivo em regime permanente. Neste caso, como já foi explicado, $a_e = 0$. Com este resultado e com as Eqs. 32, 33 e 34 verifica-se que para $Pe_{\Delta x} \le 1$, $\alpha_e^L \le 0$ e não ocorrerá dispersão numérica no esquema CDS ($\alpha_e = 0$). Com $Pe_{\Delta x} > 1$ tem-se $\alpha_e^L > 0$ e $\alpha_e$ tem que ser maior que zero para evitar oscilações. Deve-se lembrar que no esquema CDS para $Pe_{\Delta x} < 2$ não há oscilação. Isto não ocorre com o CDS-L porque o coeficiente $\beta$ varia com $Pe_{\Delta x}$. Por exemplo, no caso do problema 1 que será apresentado mais adiante, $Pe_{\Delta x} = 2{,}4$, com isso $\alpha_e = \alpha_e^L = 0{,}41$ e $\beta_e = 0{,}83$. No caso limite, quando $Pe_{\Delta x} \to \infty$ resultará em $\alpha_e = \alpha_e^L \to 0.5$ e $\beta_e \to 0$.

O segundo destaque está relacionado a não-linearidade que o cálculo de $\alpha_e^L$ introduz na solução de um problema. Como se pode ver na Eq. 31, o coeficiente $\alpha_e^L$ depende da própria solução de $\phi$ e, portanto, é necessário um ciclo iterativo para atualizar os coeficientes dados pelas Eq. 8 a 10.

## Esquema QUICK L

Considere-se a avaliação de $\phi$ na face leste do volume P (Fig. 2) através de um polinômio quadrático envolvendo os volumes W, P e E, como ocorre no esquema QUICK para u > 0. Assim, tem-se

$$\phi_e^* = \phi_P^* + \frac{1}{8}(3\phi_E^* - 2\phi_P^* - \phi_W^*) \tag{36}$$

onde o asterisco denota que os valores de $\phi^*$ são conhecidos de um nível iterativo anterior. Portanto, o cálculo de $\phi_e^*$ é explícito. Conhecidos os valores de $\phi_P^*$, $\phi_e^*$ e $\phi_E^*$ pode-se isolar o coeficiente $\alpha_e$ da Eq. 5 e obter-se

$$\alpha_e^* = \frac{2(\phi_e^* - \phi_P^* - \phi_E^*)}{2(\phi_P^* - \phi_E^*)} \tag{37}$$

Finalmente, o valor do coeficiente $\alpha_e$ do esquema QUICK-L é dado por

$$\alpha_e = \text{MIN}\left[0{,}5\,;\,\text{MAX}(-0{,}5\,;\,\alpha_e^*\,;\,\alpha_e^L)\right] \tag{38}$$

onde $\alpha_e^L$ é obtido da Eq. 30 ou 31. É importante notar a generalidade das Eqs. 37 e 38. Diversos outros esquemas podem ser elaborados como o QUICK-L. A única diferença estará na expressão usada para se calcular o valor de $\phi_e^*$. Tendo isto em mente, um novo esquema será apresentado mais adiante, sendo denominado ADS.

Da mesma forma como no esquema CDS-L, apenas o coeficiente $\alpha_e$ de cada volume de controle deve ser calculado. Os coeficientes $\alpha_w$ são obtidos da Eq. 35. As expressões para $\beta_e^*$ e $\beta_e$ são dadas pelas Eqs. 32 e 33.

### Esquema TVD

Os esquemas do tipo TVD (Total Variation Diminishing) foram desenvolvidos com base em critérios que evitam o surgimento de oscilações na solução numérica de problemas unidimensionais. Um trabalho pioneiro destes esquemas é o de Harten (1983). Para equações unidimensionais há provas matemáticas de que os esquemas TVD não apresentam dispersão numérica, o que não ocorre para equações multidimensionais (Hirsch, 1990; Ortega et al., 1991).

Existem diversos limitadores do tipo TVD disponíveis na literatura, como pode ser visto no livro de Hirsch (1990). O esquema TVD escolhido para ser utilizado neste trabalho, devido ao seu ótimo desempenho, é denominado Superbee, foi proposto por Roe (1983) e é dado por

$$\psi_e = \text{MAX}[0;\text{MIN}(2r_e;1);\text{MIN}(r_e;2)] \tag{39}$$

onde

$$r_e = \frac{(\phi_P^* - \phi_W^*)}{(\phi_E^* - \phi_P^*)} \tag{40}$$

Uma relação entre $\psi_e$ e $\alpha_e$ pode ser deduzida, obtendo-se

$$\alpha_e = \frac{1}{2}(1 - \psi_e) \tag{41}$$

Deve-se mencionar que as Eqs. 40 e 41 são válidas para $u > 0$ e que o fator $r_e$ introduz uma não-linearidade no cálculo de $\psi_e$ e, conseqüentemente, em $\alpha_e$. Dependendo do valor de $r_e$, o parâmetro $\psi_e$ varia entre zero e dois. Com isso, o coeficiente $\alpha_e$ assume valores entre -0,5 e 0,5. Portanto, o esquema Superbee apresenta um comportamento que vai do esquema UDS ($\alpha_e = 0{,}5$), passa pelo CDS ($\alpha_e = 0$) e pode chegar ao DDS ($\alpha_e = -0{,}5$). Quando necessários, os coeficientes $\beta_e^*$ e $\beta_e$ são calculados através das Eqs. 32 e 33.

## Esquema ADS

Como já foi dito, as Eqs. 37 e 38 são gerais possibilitando a criação de diversos novos esquemas para se obter o valor de $\phi_e^*$. Sendo assim, desenvolveu-se o esquema ADS com base em experimentos numéricos realizados que visavam verificar em que situações um esquema deveria apresentar um comportamento do tipo UDS, CDS ou DDS. O esquema ADS (Adaptable Difference Scheme) é introduzido neste trabalho, a seguir.

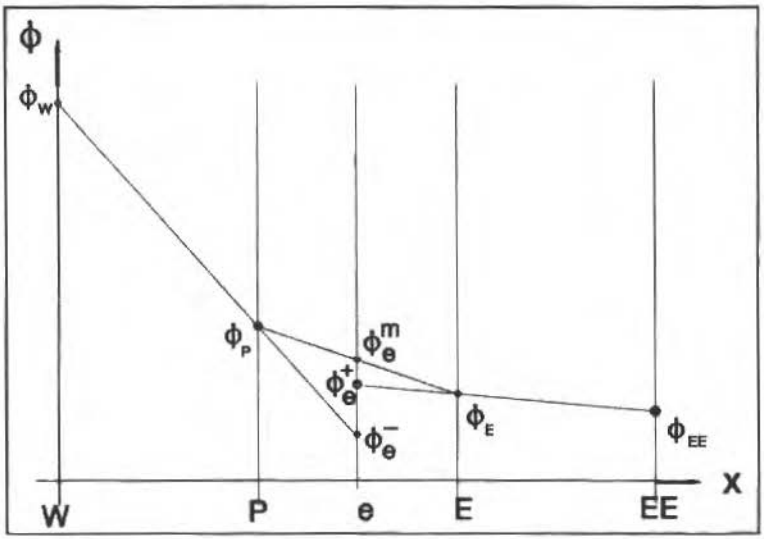



**Fig. 3 Parâmetros usados no esquema ADS**

Inicialmente devem ser calculados os parâmetros $\phi_e^-$, $\phi_e^m$ e $\phi_e^+$, que estão representados na Fig. 3, através das seguintes expressões

$$\phi_e^- = \phi_P^* + \frac{1}{2}(\phi_P^* - \phi_W^*) \tag{42}$$

$$\phi_e^m = \frac{1}{2}(\phi_P^* + \phi_E^*) \tag{43}$$

$$\phi_e^+ = \phi_E^* - \frac{1}{2}(\phi_{EE}^* - \phi_E^*) \tag{44}$$

Como se pode notar, $\phi_e^-$ é obtido pela extrapolação linear de $\phi_W$ e $\phi_P$ sobre a face leste (e) do volume de controle P; $\phi_e^m$ é a média aritmética entre $\phi_P$ e $\phi_E$; e $\phi_e^+$ resulta da extrapolação linear de $\phi_{EE}$ e $\phi_E$ sobre a face leste do volume P. O valor de $\phi_e^*$ é dado por

$$\phi_e^* = \mathrm{MAX}\left[\mathrm{MIN}(\phi_e^-, \phi_e^m); \mathrm{MIN}(\phi_e^-, \phi_e^+); \mathrm{MIN}(\phi_e^m, \phi_e^+)\right] \tag{45}$$

correspondendo ao valor intermediário entre $\phi_e^-$, $\phi_e^m$ e $\phi_e^+$. No caso do exemplo mostrado na Fig. 3, $\phi_e^* = \phi_e^+$. Calculado $\phi_e^*$, pode-se obter $\alpha_e^*$ através da Eq. 37 e, finalmente, o coeficiente $\alpha_e$ por meio da Eq. 38. Os coeficientes $\alpha_e^L$, $\beta_e^*$ e $\beta_e$ são calculados através das Eqs. 30, 32 e 33. Ressalte-se que no

esquema ADS o parâmetro $\phi_e^*$ não depende do sentido do escoamento, ao contrário dos esquemas QUICK, QUICK-L e TVD. Além disso, $\phi_e^*$ não é calculado através de uma função previamente estabelecida. Ele depende do comportamento da própria incógnita do problema.

## Avaliação das Funções de Interpolação

Neste item são apresentados os resultados de três problemas visando comparar o desempenho dos nove esquemas já descritos.

O método TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) de Peaceman e Rachford (1955) foi utilizado para resolver o sistema linear dado pela Eq. 7. Portanto, a solução do sistema é direta e, com isso, evita-se qualquer tipo de instabilidade. Em todos os problemas, considerou-se $\rho = 1 kg/m^3$.

Na obtenção dos resultados que serão mostrados a seguir não se teve a preocupação de analisar o custo computacional dos diversos esquemas. O número de volumes de controle, denotado por "n", foi escolhido de tal forma que pelo menos um dos esquemas obtivesse uma boa concordância com a solução exata de cada problema. Nos problemas transientes, as soluções foram obtidas com $\Delta t$ que proporcionasse resultados praticamente independentes de seu valor. Para os esquemas cujo parâmetro $\alpha$ depende da própria solução do problema (CDS-L, QUICK, QUICK-L, TVD e ADS), um ciclo iterativo para atualização dos coeficientes foi empregado e repetido dez vezes no problema 1 e cinco vezes nos problemas 2 e 3. Desta forma, soluções praticamente independentes deste ciclo foram obtidas.

### Problema 1

O primeiro problema é governado pela seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{46}$$

com as condições de contorno dadas por $\phi_o = 0$ e $\phi_o = 1$ e Pe = 12, $\Gamma = 10^{-3} kg/(ms)$, n = 5 volumes e L = 1m, onde Pe é o número de Peclet do problema e igual a $nPe_{\Delta x}$, e L é o comprimento do domínio de cálculo. Com os dados acima tem-se $Pe_{\Delta x} = 2{,}4$. Os resultados são mostrados na Fig. 4.

Como era de se esperar, o resultado obtido com o esquema WUDS coincide com a solução exata, e o CDS apresenta dispersão já que $Pe_{\Delta x} > 2$. Apesar do resultado obtido com o esquema QUICK não apresentar dispersão, a sua concordância com a solução exata não é boa; aumentando-se o $Pe_{\Delta x}$, a dispersão manifesta-se em seu resultado.

Os resultados obtidos com os esquemas TVD, ADS, CDS-L e QUICK-L foram bastante semelhantes e apresentam boa concordância com a solução exata, com um desempenho um pouco melhor do esquema TVD.

Surpreendentemente, a solução obtida com o esquema FIC foi a que apresentou mais difusão numérica, até mais do que o esquema UDS.

### Problema 2

O segundo problema constitui-se na advecção-transiente de um pulso de onda senoidal e que é governado por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = 0 \tag{47}$$

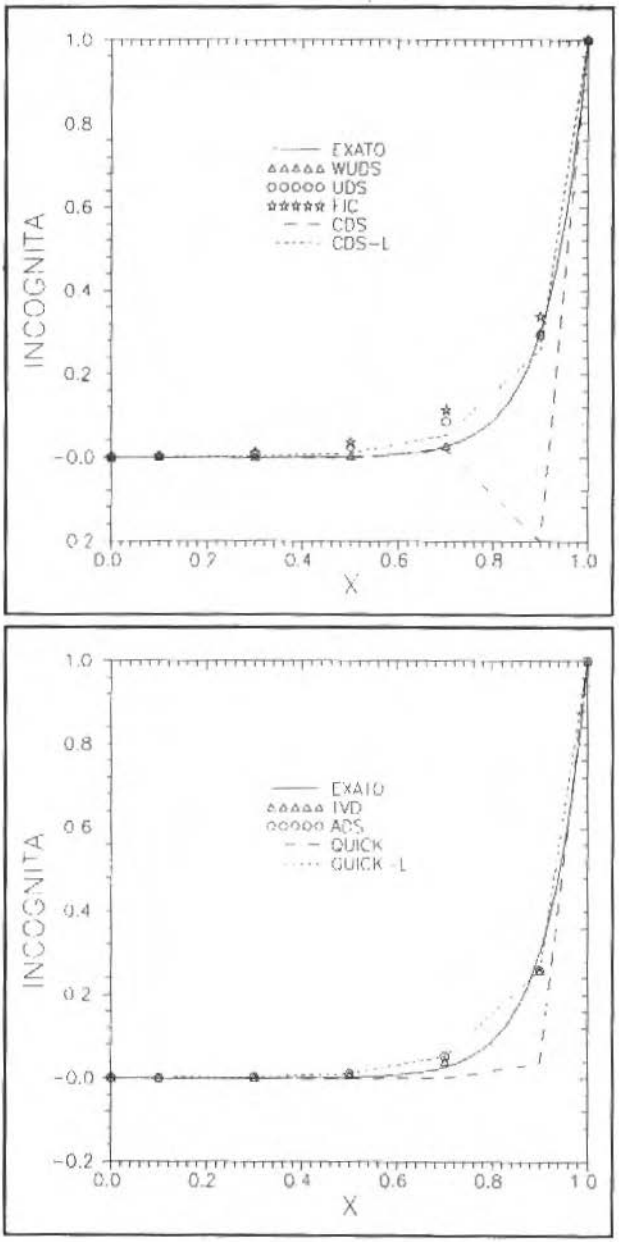



**Fig. 4 Resultados do problema 1**

A condição inicial é $\phi = 0$ e as condições de contorno são $\phi_L = 0$ e

$$\phi_o = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t \le 0.25\text{s} \\ \text{sen}[4\pi(t-0.25)] & \text{se } 0.25 < t < 0.75\text{s} \\ 0 & \text{se } 0.75 \le t \le 1.0\text{s} \end{cases}$$

com $C = 2\times10^{-3}$, $n = 20$ volumes, $\Gamma = 0$, $L = 0{,}5$ m e $\Delta t = 10^{-4}$s.

Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5 para o tempo de 1,0 segundo. As soluções obtidas com os esquemas CDS, FIC e QUICK apresentam oscilações. Portanto, mesmo com todas as restrições impostas ao esquema de Hayase et al. (1992), incluindo o uso de coeficientes positivos, o esquema QUICK apresenta oscilações dependendo do tipo de problema. Deve-se notar que os coeficientes $A_e$ e $A_w$ do esquema FIC, dados pelas Eqs. 24 e 25, são positivos no caso do problema 2 já que $Pe_{\Delta x} \to \infty$. Assim, de acordo com a literatura (Patankar, 1980), a solução obtida com o esquema FIC não poderia apresentar dispersão. Quando ocorre, a dispersão manifesta-se através do termo $B_P$ (Eq. 26); o mesmo ocorre com o esquema QUICK. O esquema UDS atenua drasticamente os pontos de máximo e mínimo.

Como pode-se ver na Fig. 5, os melhores resultados, em ordem crescente de concordância com a solução exata, foram obtidos com os esquemas CDS-L, QUICK-L, TVD e ADS, com destaque para o esquema ADS. Os resultados fornecidos pelos esquemas TVD e QUICK-L são muito semelhantes, com um desempenho um pouco melhor do TVD.

### Problema 3

O objetivo do último problema é mostrar o efeito da difusão numérica em problemas transientes, ou melhor, se a amplitude captada por um esquema numérico é mantida ao longo do tempo ou é ainda mais atenuada. Para isso, são emitidos três pulsos de onda retangular em $x = 0$ da seguinte forma

$$\phi_o = \begin{cases} 0 & \text{se } 0{,}0 \le t < 0{,}2\text{s} \\ 1 & \text{se } 0{,}2 \le t < 0{,}3\text{s} \\ 0 & \text{se } 0{,}3 \le t < 0{,}5\text{s} \\ 1 & \text{se } 0{,}5 \le t < 0{,}6\text{s} \\ 0 & \text{se } 0{,}6 \le t < 0{,}8\text{s} \\ 1 & \text{se } 0{,}8 \le t < 0{,}9\text{s} \\ 0 & \text{se } 0{,}9 \le t < 1{,}0\text{s} \end{cases}$$

com $\phi_L = 0$ e condição inicial de $\phi = 0$. A equação governante do problema é a Eq. 47. Os dados usados foram: $C = 5\times10^{-3}$, $n = 50$ volumes, $\Gamma = 0$, $L = 1{,}0$m e $\Delta t = 10^{-4}$s.

Os resultados do problema 3 são apresentados na Fig. 6 para o tempo de 1,0 segundo. Novamente, os esquemas FIC, CDS e QUICK implicaram em soluções onde muitas oscilações se fazem presentes. O resultado fornecido pelo esquema UDS apresenta tanta difusão numérica que praticamente eliminou dois dos pulsos. Como no problema anterior, os melhores resultados, em ordem crescente de concordância com a solução exata, foram obtidos com os esquemas CDS-L, QUICK-L, TVD e ADS. Novamente, o desempenho dos esquemas TVD e QUICK-L é bastante semelhante. Como se pode ver na Fig. 6, o esquema ADS forneceu o melhor resultado e que é praticamente independente do tempo, ou seja, a amplitude dos pulsos é mantida no decorrer do tempo. Todos os demais esquemas não conseguiram manter a amplitude dos pulsos. Note-se que apenas dois volumes de controle foram necessários para captar a amplitude de cada pulso com o esquema ADS .

É importante mencionar a existência de esquemas numéricos do tipo TVD que são capazes de captar descontinuidades em apenas 1 (um) volume de controle. No entanto, quando estes esquemas são aplicados em um problema como o número 2, a solução se parece mais com uma onda quadrada do que

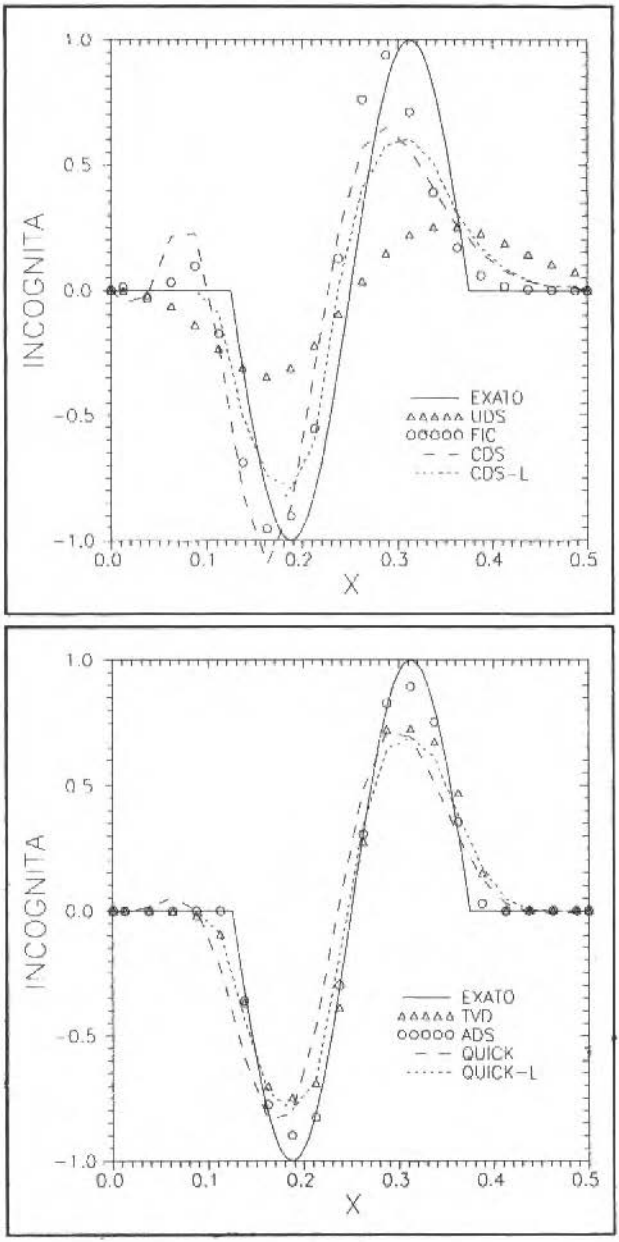



**Fig. 5 Resultados do problema 2 para t = 1s**

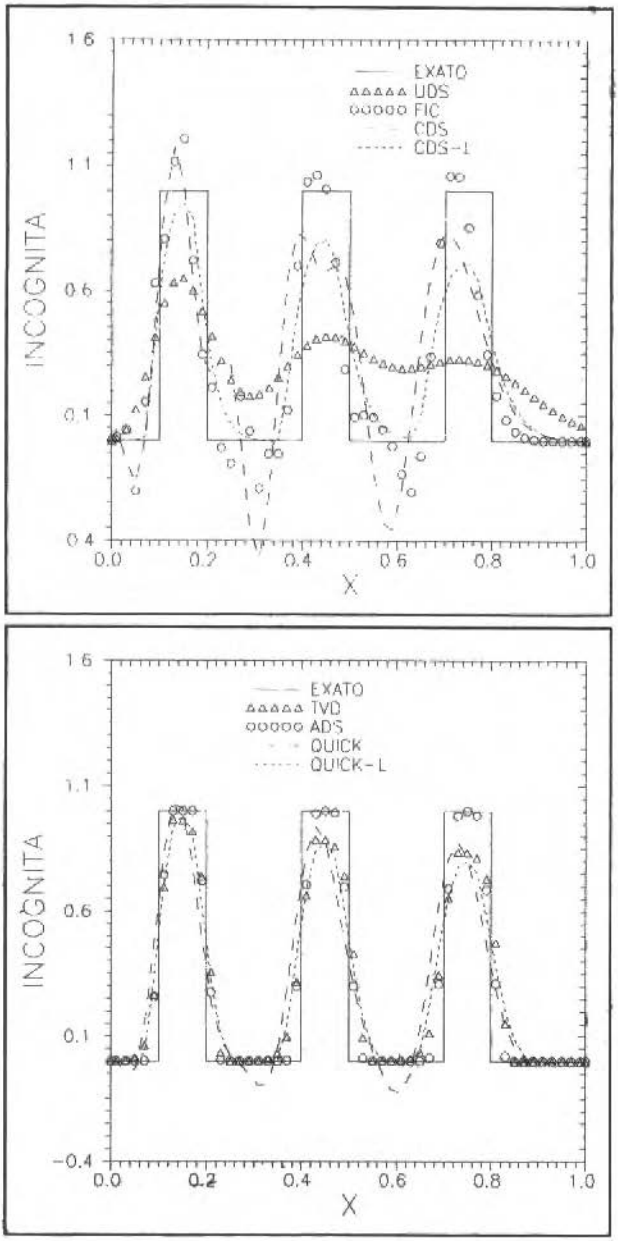



**Fig. 6 Resultados do problema 3 para t = 1s**

uma senóide (Hirsch, 1990). No caso de problemas puramente advectivos, o esquema WUDS resulta no UDS, ou seja, $\alpha_e = 10{,}5$ . Devido a este motivo, os resultados do esquema WUDS foram omitidos das Figs. 5 e 6.

## Conclusão

Foram explicadas as causas que provocam o surgimento de difusão e dispersão numéricas na solução de problemas de escoamentos de fluidos. Introduziu-se o procedimento CEL que permite usar esquemas de alta ordem sem com isso incorrer na manifestação de dispersão numérica nas soluções obtidas.

A regra de que todos os coeficientes de um sistema linear devem ser positivos para não haver dispersão numérica foi refutada. Verificou-se que nem sempre quanto maior é a ordem de um esquema melhor será a qualidade da solução obtida. Por exemplo, o esquema ADS de 2ª ordem suplantou o esquema QUICK de 3ª ordem.

Incorporou-se o procedimento CEL aos esquemas CDS e QUICK resultando nas funções de interpolação CDS-L e QUICK-L. Além desses dois, o esquema ADS foi proposto, também incorporando o procedimento CEL.

Entre os nove tipos de função de interpolação testados, os resultados numéricos que apresentaram a melhor concordância com as soluções exatas dos problemas resolvidos foram obtidos com o esquema ADS.

## Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) pelo financiamento deste trabalho.

Também agradeço ao prof. Dr. Antonio Fábio Carvalho da Silva, do SINMEC, pela leitura do manuscrito e pelas sugestões fornecidas para a sua melhoria.

## Referências

Allen, D. N. G. and Southwell, R. V., 1955, "Relaxation Methods Applied to Determine the Motion in Two Dimensions of Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder", Q. J. Mech. Appl. Math., Vol. 8, pp. 129-145.

Boris, J. P. and Book, D. L., 1973, "Flux Corrected Transport: I. SHASTA, a Fluid Transport Algorithm That Works", Journal Computational Physics, Vol. 11, pp. 38-69.

Chen, Y. and Falconer, R. A., 1992, "Advection-Diffusion Modelling Using the Modified Quick Scheme", Int. Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 1171-1196.

Courant, R, Isaacson, E. and Rees, S. M., 1952, "On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences", Comm. Pure and Applied Mathematics, Vol. 5, pp. 243-255.

Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", Journal Computational Physics, Vol. 49, pp. 357-393.

Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., 1992, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures", Journal of Computational Physics, Vol. 98, pp. 108-118.

Hirsch, C., 1990, "Numerical Computation of Internal and External Flows", J. Wiley & Sons, Chichester, Vol. 2.

Hirsch, C., 1991, "Numerical Computation of Internal and External Flows", 2 ed., J. Wiley & Sons, Chichester, Vol. 1.

Leonard, B. P.,1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59-98.

Minkowicz, W. J., Sparrow, E. M., Schneider, G. E. and Pletcher, R. H., 1988, "Handbook of Numerical Heat Transfer", J. Wiley & Sons, New York.

Nieckele, A. O., 1985, "Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Problems", Ph.D. Thesis, University of Minnesota.

Ortega, M. A., Carvalho, M. A. M. and Azevedo, J. L. F., 1991, "Comparison of Some Numerical Schemes for the Computation of Inviscid Flows with Strong Discontinuities", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. 13, pp. 309-336.

Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, New York.
Patel, M. K., Markatos, N. C. and Cross, M., 1985, "A Critical Evaluation of Seven Discretization Schemes for Convection-Diffusion Equations", Int. Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 5, pp. 225-244.
Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., 1955, "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", SIAM Journal, Vol. 3, pp. 28-41.
Prakash, C., 1984, "Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection-Diffusion Equation", Num. Heat Transfer, Vol. 7, pp. 165-182.
Price et al., 1966, J. Mathematics and Physics, Vol. 45, pp. 301-311
Raithby, G. D., 1976a, "A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow", Computer Methods in Applied Mechanics and Eng., Vol. 9, pp.75-103.
Raithby, G. D., 1976b, "Prediction of Dispersion by Surface Discharge; Report to Canada Centre for Inland Waters", Burlington, Ontario.
Raithby, G. D. and Torrance, K.E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Comp. Fluids, Vol. 2, pp. 191-206.
Roache, P. J., 1972, "On Artificial Viscosity", Journal of Computational Physics, V.10, pp.169- 184.
Roache, P. J., 1976, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa, Albuquerque, New Mexico.
Roe, P. L., 1985, "Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows", Proc. 1983 AMS-SIAM, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 163-193, Philadelphia.
Schneider, G. E., 1986, "A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow", Proc. AIAA 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference Boston, Massachusetts.
Schneider, G. E. and Raw, M. J., 1986, "A Skewed, Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element Convection-Diffusion Computation", Numerical Heat Transfer, Vol. 9, pp. 1-26.
Silva, A. F. C., 1991, "Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
Sharif, M. A. R. and Busnaina, A. A., 1993, "Evaluation and Comparison of Bounding Techniques for Convection-Diffusion Problems", Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, pp. 33-40.
Smith, R. M. and Hutton, A. G., 1982, "The Numerical Treatment of Advection: a Performance Comparison of Current Methods", Numerical Heat Transfer, Vol. 5, pp. 439-461.
Souza, S. M. A. G. U., 1992, Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Co-Localizadas com Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de Escoamento de Fluidos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
Souza, S. M. A. G. U. and Maliska, C. R., 1990, "Arranjo de Variáveis Co-Localizadas no Método de Volumes Finitos", Anais do XI Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, pp. 177-191, Rio de Janeiro.
Spalding, D. B., 1972, "A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 4, pp .551-559.
Thompson, H. D., Webb, B. W. and Hoffman, J. D., 1985, "The Cell Reynolds Number Myth", Int. Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 5, pp. 305-310.
Van Leer, B., 1973, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. I. The Quest Monotinicity", Lecture Notes in Physics, Vol. 18, pp. 163-168, Springer Verlag, Berlin.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 250-262

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Convecção Forçada Laminar ou Turbulenta em Tubos Submetidos a Fluxos de Calor com Variação Axial

## *Laminar and Turbulent Forced Convection Heat Transfer in a Tube with an Axially Varying Wall Heat Transfer*

**J. N. N. Quaresma**
Depto. de Engenharia Química
UFPA - Belém

**R. M. Cotta**
Programa de Engenharia Mecânica
EE - COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro

**C. M. Hackenberg**
Programa de Engenharia Química
COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro

### Abstract

The Integral Transform Method is applied to the solution of forced convection inside tubes, for both laminar and turbulent flow regimes. Prescrived heat flux in exponential form as a function of the axial coordinate is adopted for the tube wall boundary condition. Thermal entry region solutions are obtained for bulk temperature and Nusselt numbers distributions, which are then critically compared with those obtained through correlations of experimental results.
**Keywords**: Duct Flow Forced Convection, Axially Varying Wall Heat Transfer, Integral Transform Method

### Resumo

O método da transformada integral é aplicado à solução analítica da convecção forçada no interior de tubos para os regimes de escoamento laminar e turbulento. Adota-se como condição de contorno um fluxo de calor prescrito, função da coordenada axial, na forma exponencial. Soluções na região de entrada térmica são obtidas para as distribuições de temperatura média de mistura e números de Nusselt, que são então criticamente comparadas com aquelas obtidas através de correlações de resultados experimentais.
**Palavras-chave**: Convecção Forçada em Tubos, Fluxo de Calor com Variação Axial, Método da Transformada Integral

## Introdução

O estudo da transferência de calor convectiva no interior de dutos tem grande importância no dimensionamento de equipamentos térmicos. Condições de contorno de fluxo de calor prescrito na forma exponencial como função da coordenada axial, com valores apropriados do expoente, podem ser utilizadas para se prever resultados de coeficientes de transferência de calor em trocadores operando em contra-corrente ou em correntes paralelas (Shah e London, 1978; Kakaç et al., 1987).

Soluções analíticas de problemas de convecção forçada na região de entrada térmica de dutos, envolvem dificuldades relacionadas ao cálculo dos autovalores do problema de Sturm-Liouville associado. Com isso, muitos dos trabalhos encontrados na literatura são válidos somente para regiões bem afastadas da entrada do canal (Cotta e Özisik, 1986a; 1986b). O presente trabalho, para evitar essa dificuldade e portanto, calcular taxas de transferência de calor ao longo de todo o comprimento do tubo, utiliza o método da contagem de sinal (Mikhailov e Özisik, 1984) para o cálculo dos autovalores e das autofunções correspondentes com precisão controlada.

O problema do fluxo prescrito na forma exponencial foi pouco explorado na literatura apesar da sua grande importância na simulação de trocadores de calor. No regime laminar podemos citar o trabalho de Shah e London (1978) onde os autores apresentam uma solução para esse problema aplicando o teorema de Duhamel. Já no regime de escoamento turbulento, Hasegawa e Fujita (1968)

Manuscript received: September 1993. Technical Editor: Carlos Alberto Carrasco Altemani

resolveram a equação da energia numericamente e mostraram que os casos de fluxo prescrito uniforme e temperatura prescrita uniforme são casos particulares do problema com fluxo variável exponencialmente na região termicamente desenvolvida.

Um dos objetivos do presente trabalho é comparar os resultados para os números de Nusselt obtidos para os regimes de escoamento laminar e turbulento com as correlações empíricas mais usuais. Outro, é comparar o emprego da fórmula de inversão na solução do problema via transformação integral, com os resultados obtidos pelo procedimento de separação em soluções mais simples como descrito por Mikhailov e Özisik (1984), visando-se a aceleração de convergência das séries envolvidas.

Na solução do problema turbulento adotou-se dois modelos algébricos de difusividade turbulenta, quais sejam, o proposto por Azad e Modest (1981) e o modelo de Notter e Sleicher (1972), buscando-se uma avaliação crítica dessas duas propostas.

## Análise

Considera-se a convecção forçada laminar ou turbulenta de um fluido newtoniano com propriedades físicas constantes e perfil de velocidade completamente desenvolvido, na região de entrada térmica de um tubo sujeito a um fluxo de calor prescrito variando na forma exponencial com a coordenada axial. Desprezando-se os efeitos da condução axial, convecção natural, conjugação com as paredes, geração de calor devido à dissipação viscosa e considerando-se que o fluido entra no tubo a uma temperatura, $T_0$, uniforme, a equação da energia na sua forma adimensional é escrita como

$$W(R)\frac{\partial\theta(R,Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\,E(R)\frac{\partial\theta(R,Z)}{\partial R}\right] \quad \text{em} \quad 0<R<1 \quad Z>0 \tag{1}$$

sujeita às seguintes condições de entrada e de contorno,

$$\theta(R,0) = 0 \quad , \quad 0 \le R \le 1 \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_s(R,Z)}{\partial R}\right|_{R=0} = 0 \quad , \quad Z>0 \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(R,Z)}{\partial R}\right|_{R=1} = e^{-bZ} \quad , \quad Z>0 \tag{4}$$

As Eqs. 1 a 4 foram obtidas a partir da sua forma dimensional pela introdução dos seguintes grupos adimensionais,

$$Z = \frac{z/Dh}{RePr} \qquad \text{(para os escoamentos laminar e empistonado);}$$

$$Z = \frac{z/Dh}{C_m RePr} \qquad \text{(para o escoamento turbulento);}$$

$$R = \frac{r}{r_w};\ Re = \frac{u_m Dh}{\nu};\ Pr = \frac{\nu}{\alpha};\ \theta = \frac{T(r,z)-T_0}{(q_0 r_w/k)};\ E(R) = 1+\frac{E_h(r)}{\alpha};$$

$$E(R) = 1 \qquad \text{(para os escoamentos laminar e empistonado);}$$

$$W(R) = \frac{U(R)}{4} = \frac{u(r)}{4u_m} \qquad \text{(para os escoamentos laminar e empistonado);}$$

$$W(R) = U(R) = \frac{u(r)}{u_{max}} = \frac{u(r)}{C_m u_m} \qquad \text{(para o escoamento turbulento);}$$

$$b = BRePrDh \qquad \text{(para os escoamentos laminar e empistonado);}$$

$$b = \frac{BC_m RePr}{(4/Dh)} \qquad \text{(para o escoamento turbulento);}$$

onde,

$$U(R) = 2(1 - R^2) \quad \text{, para o escoamento laminar} \qquad (5a)$$

$$U(R) = 1 \quad \text{, para o escoamento empistonado} \qquad (5b)$$

Nas expressões acima Dh é o diâmetro hidráulico definido como $Dh = 2r_w$.

No regime de escoamento turbulento os perfis de velocidade e modelos algébricos de difusividade turbulenta considerados são os apresentados por Azad e Modest (1981) e Notter e Sleicher (1972).

O número de Nusselt local, Nu(z), é definido como,

$$Nu(Z) = \frac{h(z)\,Dh}{K} = \frac{2\dfrac{\partial\theta(R,Z)}{\partial R}\Big|_{R=1}}{\theta(1,Z) - \theta_{AV}(Z)} \qquad (6)$$

e o número de Nussel médio, $Nu_{AV}$, para um comprimento de tubo $Z_e$, é determinado da integração

$$Nu_{AV} = \frac{1}{Z_e}\int_0^{Z_e} Nu(Z)\,dZ \qquad (7)$$

Na solução do problema definido pelas Eqs. 1 a 4 através da técnica de expansão em autofunções, o problema de autovalor apropriado é tomado como (Cotta e Özisik, 1986a),

$$\frac{d}{dR}\left[R\,E(R)\frac{d\psi_i(R)}{dR}\right] + \mu_i^2 R\,W(R) = 0 \quad , \quad \text{em} \quad 0 < R < 1 \qquad (8)$$

$$\frac{d\psi_i(R)}{dR}\Big|_{R=0} = 0 \quad ; \quad \frac{d\psi_i(R)}{dR}\Big|_{R=1} = 0 \qquad (9a,b)$$

O problema para a temperatura no fluido dado pelas Eqs. 1 a 4 é resolvido pela aplicação do método da transformada integral (Mikhailov e Özisik, 1984), em termos das autofunções e autovalores do problema de autovalor definido pelas Eqs. 8 e 9, resultando,

$$\theta(R, Z) = \theta_{AV}(Z) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i} e^{-\mu_i^2 Z} \psi_i(R) H_i(Z) \tag{10}$$

onde,

$$H_i(Z) = \frac{\psi_i(1)}{\mu_i^2 - b} \{\exp[(\mu_i^2 - b) Z] - 1\} \tag{11}$$

$$N_i = \int_0^1 R\ W(R) \psi_i^2(R)\, dR \tag{12}$$

A temperatura média de mistura, $\theta_{AV}(Z)$, é determinada a priori na forma:

$$\theta_{AV}(Z) = \frac{[1 - e^{-bZ}]}{b \int_0^1 R \| W(R)\, dR} \tag{13}$$

A Eq. 10, apesar de representar a solução do problema 1, não é uma fórmula conveniente para fins computacionais. A razão para isso é que, a solução obtida pela técnica de expansão de autofunções tem uma convergência muito lenta, em particular para regiões próximas ao contorno, devido ao fato do problema de autovalor 8 não reproduzir a condição de contorno não-homogênea do problema original (1). Para evitar essa dificuldade é obtida uma forma alternativa dessa solução através do procedimento de separação (Splitting-up Procedure - Mikhailov e Özisik, 1984), onde se redefine o problema original pela superposição de problemas mais simples. Então, de acordo com o princípio da superposição, podemos escrever a solução para $\theta(R, Z)$ como,

$$\theta(R, Z) = \theta_{AV}(Z) + \theta_\phi(R) e^{-bZ} + \theta_t(R, Z) \tag{14}$$

Introduzindo-se a Eq. 14 nas Eqs. 1 a 4 podemos obter os problemas para $\theta_\phi(R)$ e $\theta_\phi(R, Z)$ na forma,

$$\frac{d}{dR}\left[R\ E(R) \frac{d\theta_\phi(R)}{dR}\right] + bR\ W(R) \theta_\phi(R) =$$

$$= \frac{R\ W(R)}{\int_0^1 R\ W(R)\, dR} \quad , \quad \text{em} \quad 0 < R < 1 \tag{15}$$

$$\left.\frac{d\theta_\phi(R)}{dR}\right|_{R=0} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{d\theta_\phi(R)}{dR}\right|_{R=1} = 1 \quad ; \quad \int_0^1 R\ W(R) \theta_\phi(R)\, dR = 0 \tag{16a,b,c}$$

$$W(R) \frac{\partial \theta_t(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}\left[R\ E(R) \frac{\partial \theta_t(R, Z)}{\partial R}\right] \quad , \quad \text{em} \quad 0 < R < 1, \quad Z > 0 \tag{17}$$

$$\theta_t(R, 0) = -\theta_\phi(R) \quad , \quad 0 \le R \le 1 \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial \theta_t(R,Z)}{\partial R}\right|_{R=0} = \left.\frac{\partial \theta_t(R,Z)}{\partial R}\right|_{R=1} = 0 \quad , \quad Z>0 \tag{19}$$

A solução do problema homogêneo 17 é obtida pelo método da transformada integral como caso particular do problema 1, resultando,

$$\theta_t(R,Z) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2 - b\,N_i} e^{-\mu_i^2 Z} \psi_i(1)\,\psi_i(R) \tag{20}$$

A solução para o problema de $\theta_\phi(R)$, Eqs. 15 e 16, no caso particular do escoamento empistonado, apresenta a seguinte forma explícita,

$$\theta_\phi(R) = \left[\frac{2}{b} - \frac{J_0(\sqrt{b}R)}{\sqrt{b}\,J_1(\sqrt{b})}\right] \tag{21}$$

Já no caso dos escoamentos laminar e turbulento a forma da função W(R) não permite que se obtenha uma solução analítica explícita, sendo aplicado um procedimento semi-analítico, como descrito por Quaresma (1991), para se obter a solução de $\theta_\phi(R)$.

Para completar a solução do problema 1, é necessário avaliar os autovalores, $\mu_i$, as autofunções, $\psi_i(R)$, e a integral de Normalização, $N_i$, do problema de autovalor 8. No presente trabalho eles são avaliados através do bem estabelecido método de contagem de sinal (Cotta e Özisik, 1986a e 1986b; Mikhailov e Özisik, 1984), que permite uma determinação precisa e automática de tantos autovalores quanto necessários para a convergência desejada, sem o risco de perda de nenhum deles.

A introdução da solução para o perfil de temperatura na parede do duto, $\theta(1, Z)$, na Eq. 6, fornece a expressão para o cálculo do número de Nusselt local,

$$Nu(Z) = \frac{2e^{-bZ}}{\theta_\phi(1)\,e^{-bZ} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2(1)}{N_i} \frac{1}{\mu_i^2 - b} e^{-\mu_i^2 Z}} \tag{22}$$

e o número de Nusselt médio é avaliado da Eq. 7 através da rotina de quadratura DQDAGS da biblioteca IMSL (1979).

## Resultados e Discussões

Foram obtidos resultados numéricos para os números de Nusselt local, $Nu(Z)$, e médio, $Nu_{AV}$, através de programas computacionais desenvolvidos em linguagem FORTRAN e implementados em mainframe VAX8810. A seguir discutiremos esses resultados para cada regime de escoamento considerado.

### Problema Laminar

Observou-se que os resultados obtidos pela aplicação direta da fórmula de inversão, Eq. 10, apresentam péssimas características de convergência com relação àqueles obtidos pelo procedimento de separação, até mesmo, em posições axiais bem afastadas da entrada, onde os resultados do procedimento de separação atingem convergência com poucos termos na série.

Os resultados dos números de Nusselt local e médio para o caso de fluxo prescrito uniforme, o que corresponde ao valor de b = 0 na condição de contorno 4, foram validados contra aqueles apresentados por Cotta e Özisik (1986a) e por Shah e London (1978), com excelente concordância em ambos os casos.

**Tabela 1 Comparação entre os números de Nusselt médio obtidos pela correlação empírica proposta por Sieder e Tate, com os obtidos através do escoamento empistonado e perfil parabólico, para o fluxo de calor exponencial**

| Z | $Nu_{AV}$ | | | Desvio Relativo | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1[a] | 2[b] | 3[c] | Dr1 - %[d] | Dr2 - %[e] |
| 0,0001 | 157,57 | 38,357 | 40,072 | 74,57 | 4,471 |
| 0,0002 | 116,51 | 31,107 | 31,806 | 72,70 | 2,246 |
| 0,0003 | 97,118 | 27,381 | 27,785 | 71,39 | 1,475 |
| 0,0004 | 85,211 | 24,968 | 25,244 | 70,37 | 1,104 |
| 0,0005 | 76,935 | 23,226 | 23,435 | 69,54 | ,09012 |
| 0,0006 | 70,748 | 21,883 | 22,053 | 68,83 | ,7775 |
| 0,0007 | 65,893 | 20,803 | 20,948 | 68,21 | ,6988 |
| 0,0008 | 61,951 | 19,907 | 20,036 | 67,66 | ,6502 |
| 0,0009 | 58,666 | 19,146 | 19,265 | 67,16 | ,6220 |
| 0,0010 | 55,874 | 18,489 | 18,600 | 66,71 | ,6030 |
| 0,0020 | 41,281 | 14,669 | 16,763 | 64,24 | ,6389 |
| 0,0030 | 33,621 | 13,215 | 12,897 | 61,64 | 2,046 |
| 0,0040 | 29,469 | 11,625 | 11,717 | 60,24 | ,7893 |
| 0,0050 | 26,625 | 10,787 | 10,877 | 59,15 | ,8306 |
| 0,0060 | 24,520 | 10,150 | 10,236 | 58,25 | ,8491 |
| 0,0070 | 22,882 | 9,6419 | 9,7223 | 57,51 | ,8441 |
| 0,0080 | 21,561 | 9,2240 | 9,3000 | 56,87 | ,8234 |
| 0,0090 | 20,467 | 8,8719 | 8,9419 | 56,31 | ,7891 |
| 0,0100 | 19,541 | 8,5695 | 8,6334 | 55,82 | ,7455 |
| 0,0200 | 14,562 | 6,8574 | 6,8523 | 52,94 | ,0737 |
| 0,0300 | 12,411 | 6,0619 | 5,9860 | 51,77 | 1,252 |
| 0,0400 | 11,177 | 5,5848 | 5,4387 | 51,34 | 2,616 |
| 0,0500 | 10,374 | 5,2645 | 5,0488 | 51,33 | 4,097 |
| 0,0600 | 9,8137 | 4,0354 | 4,7511 | 51,59 | 5,646 |
| 0,0700 | 9,4037 | 4,8648 | 4,5132 | 52,01 | 7,227 |
| 0,0800 | 9,0937 | 4,7341 | 4,3167 | 52,53 | 8,816 |

[a]Escoamento empistonado
[b]Escoamento laminar
[c]Correlação de Sieder e Tate
[d]Escoamento empistonado em relação à correlação
[e]Perfil parabólico em relação à correlação

Visando-se a comparação com correlações empíricas, no problema de fluxo prescrito na forma exponencial, os valores do coeficiente b, que aparece na condição de contorno 4, foram obtidos do balanço térmico em um tubo, quando se utiliza um coeficiente de transferência de calor médio, $\bar{h}$, calculado até o comprimento do tubo em questão, (Quaresma, 1991). Obtém-se então:

$$b = 4Nu_0 \qquad (23)$$

onde, $Nu_0$, é o número de Nusselt médio obtido através de correlações empíricas. Este valor de b é então utilizado para a solução analítica do problema e determinação do Nusselt médio teórico.

Na análise em questão utilizou-se os resultados dos números de Nusselt obtidos da correlação empírica proposta por Sieder e Tate (Kakaç e Oskay, 1987). A Tabela 1 apresenta resultados dos números de Nusselt médio para os casos de escoamento laminar e empistonado, bem como as comparações com os resultados obtidos pela correlação acima citada. Os resultados mostraram-se compatíveis com os obtidos para o caso do escoamento laminar onde o desvio apresentado é geralmente inferior a 1%, tornando-se mais acentuado somente para maiores valores de comprimento do tubo, na faixa de 4 a 8%, onde atinge-se o limite de validade da correlação. No caso do escoamento empistonado o desvio apresentado é da ordem de 50 a 70%.

Em outra análise, na Fig. 1, é observada a influência da variação do expoente b da condição de contorno 4, nos números de Nusselt local nas regiões de entrada térmica e termicamente desenvolvida. Observa-se que há pouca influência do expoente nos resultados em regiões próximas à entrada do tubo, tornando-se marcante em regiões mas afastadas da entrada e, à medida que o expoente cresce, há uma queda acentuada no número de Nusselt limite. Os valores do número de Nusselt limite são comparados com os apresentados por Shah e London (1978), com excelente concordância. O valor encontrado para o caso de b = 14,63, o que corresponde a 4 vezes o valor do número de Nusselt limite do problema de temperatura prescrita uniforme, concorda com o valor para essa situação como apontado por Shah e London (1974) e por Hasegawa e Fujita (1968).

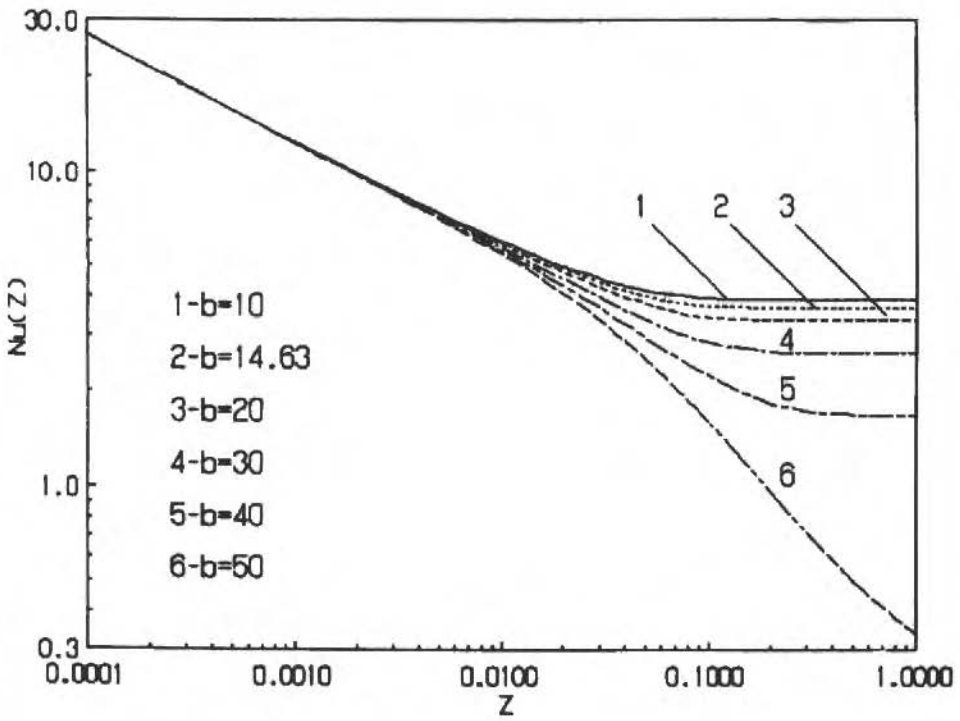



**Fig. 1 Influência do expoente b nos números de Nusselt local para o escoamento laminar.**

Na Tabela 2 são apresentados os valores de números de Nusselt local na região de entrada térmica para b = 14,63 e confrontados com os apresentados por Cotta e Özisik (1986b) para o caso de temperatura prescrita uniforme. Os resultados concordam entre si apenas no número de Nusselt limite, ficando evidente que o caso b = 14,63 só reproduz a situação de temperatura prescrita uniforme na região termicamente desenvolvida, o que não é apontado por Shah e London (1978) e Kakaç et al. (1987).

**Tabela 2 Comparação entre os números de Nusselt local para b = 14,63 no fluxo de calor exponencial, com os obtidos para o caso de temperatura prescrita uniforme**

| Z | Fluxo de calor exponencial | Temp, prescrita uniforme |
|---|---|---|
| 0,0001 | 27,265[a] | 22,279[b] |
| 0,0002 | 21,541 | 17,559 |
| 0,0003 | 18,769 | 15,277 |
| 0,0004 | 17,023 | 13,842 |
| 0,0005 | 15,784 | 12,824 |
| 0,0006 | 14,839 | 12,050 |
| 0,0007 | 14,086 | 11,433 |
| 0,0008 | 13,466 | 10,926 |
| 0,0009 | 12,942 | 10,498 |
| 0,0010 | 12,492 | 10,130 |
| 0,0020 | 9,9136 | 8,0362 |
| 0,0030 | 8,6776 | 7,0432 |
| 0,0040 | 7,9056 | 6,4296 |
| 0,0050 | 7,3614 | 6,0015 |
| 0,0060 | 6,9497 | 5,6812 |
| 0,0070 | 6,6235 | 5,4301 |
| 0,0080 | 6,3565 | 5,2269 |
| 0,0090 | 6,1325 | 5,0584 |
| 0,0100 | 5,9410 | 4,9161 |
| 0,0200 | 4,8775 | 4,1724 |
| 0,0300 | 4,4067 | 3,8942 |
| 0,0400 | 4,1422 | 3,7689 |
| 0,0500 | 3,9792 | 3,7100 |
| 0,0600 | 3,8740 | 3,6820 |
| 0,0700 | 3,8045 | 3,6688 |
| 0,0800 | 3,7578 | 3,6625 |
| 0,0900 | 3,7262 | 3,6595 |
| 0,1000 | 3,7045 | 3,6581 |
| 0,2000 | 3,6579 | 3,6568 |

[a]Presente trabalho
[b]Cotta & Özisik (1986b)

A Fig. 2 mostra os valores dos números de Nusselt local para b = 10, obtidos pelo procedimento de separação com diferentes números de termos nas séries e, sua comparação com aqueles obtidos através da solução analítica apresentada por Shah e London (1978), pela aplicação do teorema de Duhamel. A solução em série infinita apresentada pelos autores acima, fornece valores ainda não convergidos

mesmo para N = 50 termos, que lentamente se aproximam dos resultados convergidos obtidos pelo procedimento de separação. Assim, a expressão sugerida (Shah e London, 1978; Kakaç et al., 1987) deve ser evitada, ficando evidente a necessidade de muitos termos nessa série para se obter uma convergência completa na solução.

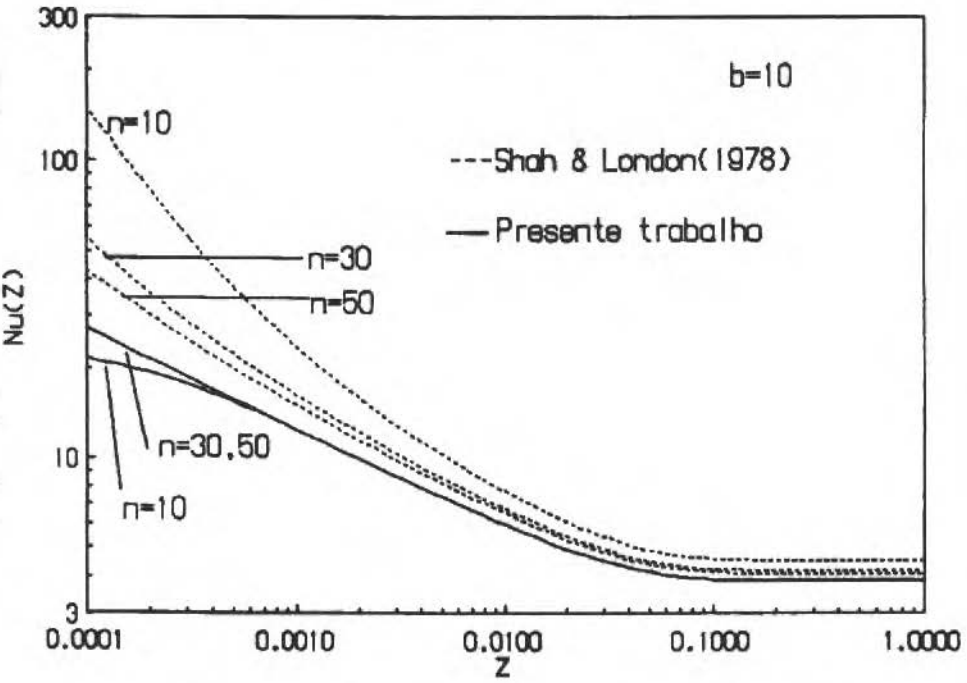



**Fig. 2 Convergência dos números de Nusselt local obtidos pelo procedimento de separação com os obtidos através da expressão de Shah & London (1978) para b = 10 no fluxo de calor exponencial**

## Problema Turbulento

Para o caso do fluxo de calor prescrito uniforme compara-se os números de Nusselt limite com os resultados teóricos apresentados por Siegel e Sparrow (1960) e com as correlações empíricas de Petukhov, Kirillov e Popov e de Gnielinski (Kakaç e Oskay, 1987). Os resultados encontram-se listados na Tabela 3 e pode-se verificar que os resultados obtidos a partir do modelo de Notter e Sleicher (1972) estão em boa concordância com as correlações empíricas acima citadas.

Na análise comparativa dos resultados para o caso de fluxo prescrito na forma exponencial, com aqueles obtidos através de correlações empíricas, os valores de b adotados na condição de contorno 4 foram determinados de maneira similar ao do problema laminar (Quaresma, 1991), resultando,

$$b = C_m Nu_0 \qquad (24)$$

As correlações empíricas utilizadas para se obter os resultados da presente análise foram aquelas propostas por Sieder e Tate, Dittus e Boelter e Petukhov, Kirillov e Popov (Kakaç e Oskay, 1987). Os resultados encontram-se listados nas Tabelas 4-6, onde observa-se que os valores encontrados pela aplicação da correlação de Petukhov, Kirillov e Popov têm melhor concordância com os valores encontrados pela utilização do modelo de difusividade turbulenta de Notter e Sleicher (1972).

**Tabela 3 Comparação dos números de Nusselt limites para o fluxo de calor prescrito uniforme**

| Re | Pr = 0,7 | Pr = 1,0 | Pr = 10,0 |
|---|---|---|---|
| $5 \times 10^4$ | 97,309[a] | 117,51 | 315,34 |
| | 96,591[b] | 119,30 | 326,44 |
| | 101,80[c] | - | 381,00 |
| | 104,50[d] | 128,7 | 381,90 |
| | 98,196[e] | 122,26 | 380,76 |
| $1 \times 10^5$ | 166,57 | 203,56 | 573,91 |
| | 177,84 | 222,00 | 642,02 |
| | 171,40 | - | 683,90 |
| | 179,80 | 224,00 | 700,00 |
| | 166,81 | 209,92 | 688,60 |
| $5 \times 10^5$ | 604,10 | 754,90 | 2353,4 |
| | 676,52 | 861,11 | 2793,6 |
| | 599,70 | - | 2722,0 |
| | 648,80 | 825,50 | 2865,0 |
| | 596,94 | 766,05 | 2785,6 |
| $1 \times 10^6$ | 1066,5 | 1343,2 | 4351,6 |
| | 1211,5 | 1551,7 | 5252,9 |
| | - | - | - |
| | 1141,0 | 1462,0 | 5280,0 |
| | 1050,1 | 1356,5 | 5125,3 |

[a]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Azad e Modest (1981)
[b]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Notter e Sleicher (1972)
[c]Siegel e Sparrow (1960)
[d]Correlação empírica proposta por Gnielinski
[e]Correlação empírica proposta por Petukhov, Kirillov e Popov

**Tabela 4 Comparação dos números de Nusselt limites para o fluxo de calor variável com os obtidos através da correlação empírica proposta por Sieder e Tate**

| Re | Pr = 0,7 | Pr = 1,0 | Pr = 10,0 |
|---|---|---|---|
| $5 \times 10^4$ | 93,985[a] | 114,77 | 314,80 |
| | 101,27[b] | 125,45 | 355,34 |
| | 117,29[c] | 132,10 | 284,60 |
| $1 \times 10^5$ | 161,51 | 199,36 | 573,10 |
| | 179,82 | 225,63 | 691,90 |
| | 204,22 | 230,00 | 495,52 |
| $5 \times 10^5$ | 590,51 | 743,28 | 2351,0 |
| | 667,52 | 854,35 | 3077,7 |
| | 740,06 | 833,50 | 1795,7 |
| $1 \times 10^6$ | 1045,6 | 1325,1 | 4347,6 |
| | 1194,6 | 1537,3 | 5875,8 |
| | 1288,5 | 1451,2 | 3126,5 |

[a]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Azad e Modest (1981)
[b]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Notter e Sleicher (1972)
[c]Correlação empírica proposta por Sieder e Tate

**Tabela 5 Comparação dos números de Nusselt limites para o fluxo de calor variável com os obtidos através da correlação empírica proposta por Dittus e Boelter**

| Re | Pr = 0,7 | Pr = 1,0 | Pr = 10,0 |
|---|---|---|---|
| $5 \times 10^4$ | 94,069[a] | 114,77 | 314,70 |
| | 101,19[b] | 125,45 | 360,18 |
| | 114,54[c] | 132,10 | 331,82 |
| $1 \times 10^5$ | 161,64 | 199,36 | 572,96 |
| | 179,81 | 225,63 | 696,99 |
| | 199,42 | 230,00 | 577,73 |
| $5 \times 10^5$ | 590,85 | 743,28 | 2650,6 |
| | 667,77 | 854,35 | 3083,0 |
| | 722,66 | 833,50 | 2093,6 |
| $1 \times 10^6$ | 1046,1 | 1325,1 | 4346,9 |
| | 1195,1 | 1537,3 | 5881,2 |
| | 1258,3 | 1451,2 | 3645,3 |

[a]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Azad e Modest (1981)
[b]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Notter e Sleicher (1972)
[c]Correlação empírica proposta por Dittus e Boelter

**Tabela 6 Comparação dos números de Nusselt limites para o fluxo de calor variável com os obtidos através da correlação empírica proposta por Petukhov, Kirillov e Popov**

| Re | Pr = 0,7 | Pr = 1,0 | Pr = 10,0 |
|---|---|---|---|
| $5 \times 10^4$ | 94,566[a] | 114,99 | 314,61 |
| | 100,55[b] | 124,92 | 364,01 |
| | 98,196[c] | 122,26 | 380,76 |
| $1 \times 10^5$ | 162,50 | 199,75 | 572,77 |
| | 179,49 | 225,24 | 701,97 |
| | 166,80 | 209,92 | 688,60 |
| $5 \times 10^5$ | 593,30 | 744,27 | 2349,6 |
| | 669,39 | 854,87 | 3090,7 |
| | 596,94 | 766,05 | 2785,6 |
| $1 \times 10^6$ | 1049,7 | 1326,3 | 4345,0 |
| | 1197,9 | 1538,3 | 5890,0 |
| | 1050,1 | 1356,5 | 5125,3 |

[a]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Azad e Modest (1981)
[b]Presente trabalho utilizando o perfil de difusividade turbulenta proposto por Notter e Sleicher (1972)
[c]Correlação empírica proposta por Petukhov, Kirilov e Popov

Na Fig. 3 é observada a influência do expoente b nos resultados do número de Nusselt local, adotando-se o modelo de difusividade turbulenta de Azad e Modest (1981), para Re = 50000 e Pr = 0,7. Pode-se verificar que no regime turbulento a variação de b tem pouca influência no comportamento dos números de Nusselt, em particular para números de Reynolds crescentes, mesmo para regiões mais afastadas da entrada do canal.

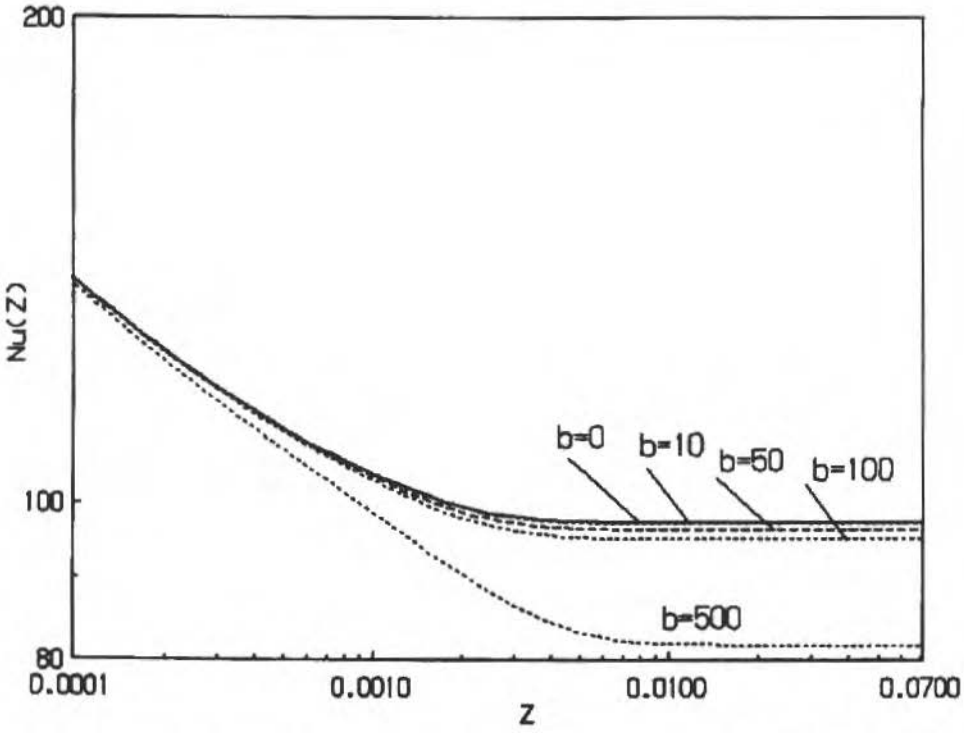



**Fig. 3 Influência do expoente b nos números de Nusselt local utilizando-se o modelo de difusividade turbulenta proposto por Azad e Modest (1981) para Pr = 0,7 e Re = 50000**

## Conclusões

O método da transformada integral acoplado ao procedimento de separação mostrou-se bastante eficiente na solução do problema proposto.

No regime de escoamento laminar, a compatibilidade dos resultados com os obtidos pela correlação de Sieder e Tate leva a dizer que o balanço térmico local, nestas condições de propriedades físicas constantes do fluido, reproduz bem os resultados do balanço térmico global. Por outro lado, o erro cometido ao utilizar o modelo de escoamento empistonado para se prever resultados de números de Nusselt é muito acentuado.

No regime turbulento, os resultados obtidos utilizando-se o modelo de difusividade turbulenta proposto por Notter e Sleicher (1972), demonstraram estar em melhor concordância com as correlações empíricas, que os obtidos com o modelo de Azad e Modest (1981). Essa diferença pode ser explicada pelo fato do perfil de difusividade turbulenta de Azad e Modest (1981) adotar o número de Prandtl turbulento igual à unidade. Esta hipótese afasta-se bastante dos resultados experimentais, principalmente em altos números de Reynolds e Prandtl. Portanto o fato do modelo de Notter e Sleicher (1972) apresentar uma expressão empírica para o cálculo do número de Prandtl turbulento faz com que se obtenha resultados mais realistas.

Uma outra constatação feita no problema turbulento é que, os valores dos números de Nusselt obtidos pela variação do expoente b da condição de contorno 4, apresentaram pouca diferença entre si, o que confirma que variações na condição de contorno têm pouca influência nos resultados para o regime turbulento, em particular para números de Reynolds elevados.

## Referências


Azad, F. H. e Modest, M. F. , 1981, "Combined Radiation and Convection in Absorbing, Emitting and Anisotropically Scattering Gas-Particulate Tube Flow", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 1681-1698.

Cotta, R. M. e Özisik, M. N., 1986a, "Laminar Forced Convection to Non-Newtonian Fluids in Ducts with Prescribed Wall Heat Flux", Int. Comm. Heat and Mass Transfer, Vol. 13, pp. 325-334.

Cotta, R, M e Özisik, M. N., 1986b, "Laminar Forced Convection of Power-Law Non-Newtonian Fluids Inside Ducts", Wärme- und Stoffübertragung, Vol. 20, pp. 211-218.

Gnielinski, V., 1976, Int. Chem. Eng, Vol. 16, p. 359.

Hasegawa, S. e Fujita, Y., 1968, "Trubulent Heat Transfer in a Tube with Prescribed Heat Flux", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.11, pp. 943-962.

IMSL Library (edn. 7), 1979, GNB Building, 7500 Ballaire Blvd., Houston, Texas.

Kakaç, S. e Oskay, R., 1987, "Correlations for Forced Convection in Ducts" 6th Nato Advanced Study Institute on Thermal-Hydraulics and Fundamentals of Two-Phase Flow Heat Exchanges, Portugal.

Kakaç, S., Shah, R. K. e Aung, W., 1987, "Hanbook of Single-Phase Convective Heat Transfer", John Wiley, New York.

Mikhailov, M. D. e Özisik, M. N., 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York.

Notter, R. H. e Sleicher, C. A., 1972, "A Solution to the Turbulent Graetz Problem - III. Fully Developed and Entry Region Heat Transfer Rates", Chem. Eng. Sci., Vol. 27, pp. 2073-2093.

Petukhov, B. S. in T. F. Irvine and J. P. Hartnett, eds., "Advances in Heat Transfer", Vol. 6, Academic Press, New York, 1970.

Quaresma, J. N. N., 1991, "Transformada Integral: Solução de Problemas de Convecção Forçada no Interior de Tubos", Tese M. Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Shah, R. K. e London, A. L., 1974, "Thermal Boundary Conditions and some Solutions for Laminar Duct Flow Forced Convection", J. Heat Transfer, Vol. 96, pp. 159-165.

Shah, R. K. e London, A. L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", Sup. 1, Advances in Heat Transfer, New York

Siegel, R. e Sparrow, E. M., 1960, "Comparison of Turbulent Heat-Transfer Results for Uniform Wall Heat Flux and Uniform Wall Temperature", J. Heat Transfer, Vol. 82, pp. 152-153

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 263-280

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Dynamical Behaviour Analysis of Multistage Centrifugal Pumps with Interstage Seals by a Modal Truncation Method

**Katia Lucchesi Cavalca**
UNICAMP - Departamento de Projeto Mecânico
Caixa Postal 6051 - CEP 13081-970 Campinas SP

**Nicolò Bachschmid**
Politecnico di Milano - Dipartimento di Meccanica
Sezione Meccanica dei Sistemi - 3. piano
CAP 20133 Milano Italia

## Abstract

This paper leads on the analysis of the dynamic behaviour of rotor-structure systems, by means of numerical simulations. The frequency response of this system in presence of interstage seals can be realistically predicted only if the supporting structure is accurately modelled. This paper shows an approach to evaluate the influence of the foundation on the dynamic response of the global system, which allows to consider any number of normal modes, even if this number is lower than the number of degrees of freedom associated to the connecting nodes of the mathematical model. This technique permits to study the well-known problem of the influence of the seals on the rotor response when the interaction between the rotor and the stationary parts is very strong.
**Keywords**: Rotor, Foundation, Seals, Connecting Points, Frequency Response

## Introduction

A package of programs (Diana et al.,1988; Curami and Pizzigoni,1981; Diana et al., 1982) has been developed in order to study the static and dynamic behaviour of rotor-oil film-structure systems. In this package the equations were evaluated in the frequency domain. The shaft and the structure were modelled by a Finite Element Method and the influence of the oil film in the bearing was taken into account through equivalent stiffness and damping coefficients evaluated by integrating the Reynolds equations (Diana and Ruggieri,1974; Ruggieri, 1976). The analytical method herein suggested was carried out considering the interaction between the rotor shaft and the supporting structure through the mechanical impedance matrix of the system. The independent variables of the foundation were considered as displacements $X_f$ of the nodes located at the supporting structure. The mechanical impedance matrix was obtained through the inversion of the flexibility matrix of the structure which can be defined considering the modal parameters of the foundation.

This procedure must consider as many normal vibration modes of the foundation as the degrees of freedom associated to the connecting points between the rotor and the foundation.

Generally the number of supports in turbomachinery varies from seven to eleven. Then, the number of normal modes necessary to the calculations is too high. Moreover, only a few of these modes actually contribute to the frequency response of the foundation at the connecting points.

The aim of this paper is to show, by means of numerical simulations, that the dynamic behaviour of the rotor with intermediate seals can be realistically predicted only if the supporting structure is accurately modelled.

Then, an approach to evaluate the influence of the supporting structure on the dynamic response of the global system is presented. The technique adopted here neglects instability problems and only forced vibrations are considered. It allows to consider any number of normal modes of the foundation, even if this number is lower than the number of degrees of freedom of the connecting points. Therefore, it permits to analyze the well-known problem of the influence of the seals on the rotor dynamic behaviour (Nordmann,1988; Black,1969; Childs,1982).

In rotor-structure systems connected only by hydrodynamic bearings, the interaction between the rotor and the foundation generally results in a significant lowering of the first critical speed of the rotor with respect to the values calculated neglecting the influence of the supporting structure. It may also

Manuscript received: March 1993. Technical Editor: Agenor de Toledo Fleury

lead to the appearance of the so-called foundation critical speeds in the frequency response of the rotor (Bachschmid et al.,1977). In standard calculations of critical speeds the presence of the supporting structure is generally considered introducing in the mathematical model of the rotor an appropriate 1 d.o.f. mass-spring-damper system in correspondence to each bearing in both vertical and horizontal directions. The results obtained from these calculations are, in most cases, satisfactory.

When the rotor presents intermediate seals, the dynamic connection between the rotor and its stationary parts (casing and foundation) exists not only at the bearing locations but also at each intermediate seal location. Therefore, the interaction between rotor and foundation is much stronger and occurs along the whole rotor shaft.

Several numerical results are analyzed. At first, the behaviour of a centrifugal pump supported by two multilobe bearings whose foundation is modelled by 1 d.o.f. systems at each bearing is simulated to observe the rotor behaviour.

The behaviour of the same rotor is also simulated considering the two bearings with thirteen cylindrical plain seals between them. In this case two models of the foundation are used: by introducing 1 d.o.f. systems in vertical and horizontal directions for each bearing and each seal of the system and by modelling the foundation through the Finite Element Method with a modal reduction. Significant changes in the behaviour of the system can be observed in presence of the seals and an accurate representation of the supporting structure in this case is very important.

## Mathematical Model

The mathematical model considers the whole system (rotor-supports-foundation) divided in two different subsystems: rotor-supports subsystem and foundation subsystem. In Fig. 1 the interaction forces between the foundation and the oil film ($\underline{R}_f$) are shown.

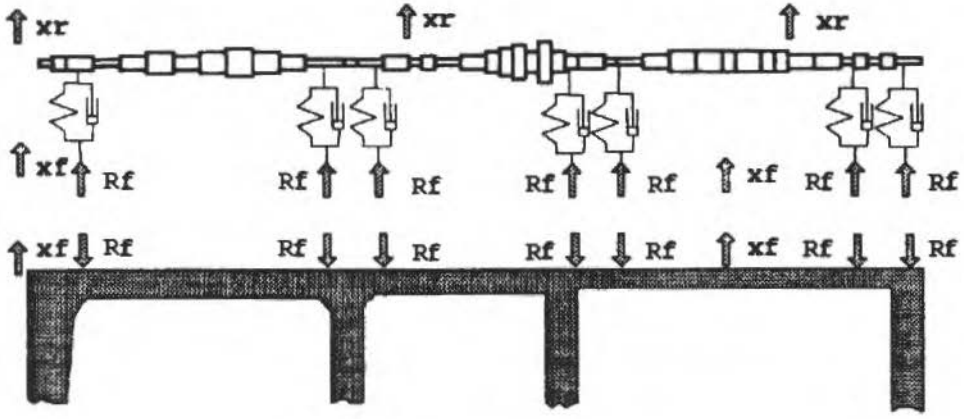



**Fig. 1 Rotor-oil film subsystem and foundation subsystem**

Defining $\underline{X}$ the vector containing both coordinates $\underline{X}_r$ of the rotor and $\underline{X}_f$ of the foundation connecting points, the equations of motion for the rotor-supports subsystem are:

$$[M^*]\ddot{\underline{X}} + [R^*]\dot{\underline{X}} + [K^*]\underline{X} = \underline{F}^* \qquad (1)$$

where:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_f \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{F}^* = \begin{bmatrix} \underline{F}_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_f \end{bmatrix}$$

$[M^*]$, $[R^*]$ and $[K^*]$ are respectively the mass, damping and stiffness matrices containing the mass matrix for each finite element of the rotor and the equivalent damping and stiffness matrices of the oil film for each bearing. In Eq. 1 $\underline{F}_r$ represents the vector of the external generalzed forces applied to the rotor and Rf contains the forces transmitted between rotor and foundation in each connecting node. $\underline{R}f$ forces are unknown and depend on both rotor and foundation dynamic behaviour. By matrix partitioning techniques the Eq. 1 can be rewritten as:

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [M_{rf}] \\ [M_{fr}] & [M_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{x}}_r \\ \ddot{\underline{x}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{rr}] & [R_{rf}] \\ [R_{fr}] & [R_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_r \\ \dot{\underline{x}}_f \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \\ [K_{fr}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_f \end{bmatrix} \qquad (2)$$

The equations of motion of the foundation subsystem can be written by means of a modal approach:

$$[m_f]\ddot{\underline{q}} + [r_f]\dot{\underline{q}} + [k_f]\underline{q} = -[\phi^t]\underline{R}_f \qquad (3)$$

In Eq. 3 $\underline{q}$ is the vector of the foundation modal coordinates corresponding to the coordinates $\underline{X}_f$ of the connecting points:

$$\underline{x}_f = [\phi]\underline{q} \qquad (4)$$

## Nomenclatura

$[E(\Omega_e)]$ =elastodynamic matrix of the system

$\underline{F}_r$ = external forces applied on the rotor

$\underline{F}_{Zi}$ = lagrangian component of the forces

$[H(\Omega_e)]$ =flexibility matrix of the foundation

$[I(\Omega_e)]$ =mechanical impedance matrix of the foundation

$[k_f]$ = modal stiffness matrix of the foundation

$[K^*]$ =stiffness matrix of the system

$[K_o]$ = equivalent stiffness matrix of the oil film

$[K_{orq}]$ =equivalent stiffness matrix of the oil film in hybrid coordinates

$[Kr]$ = stiffness matrix of the rotor

$[m_f]$ = modal mass matrix of the foundation

$[M^*]$ =mass matrix of the system

$[Mr]$ =mass matrix of the rotor

$\underline{q}$ = modal coordinates

$\underline{Q}_f$ = vector of the oil fil forces in hybrid coordinates

$[r_f]$ = modal damping matrix of the foundation

$\underline{R}_f$ = forces transmitted between rotor and foundation at the connecting points

$[R^*]$ = damping matrix of the system

$[R_o]$ = equivalent damping matrix of the system

$[R_{orq}]$ =equivalent damping matrix of the oil film in hybrid coordinates

Rr = damping matrix of the rotor

$\underline{X}_f$ = coordinates of the foundation at the connecting points with the rotor

$\underline{X}_r$ = coordinates of the rotor

$\underline{Z}$ = vector of the hybrid coordinates

$\delta^*W$ = virtual work done by the fluid film forces $\underline{R}_f$ and the external forces $\underline{F}_r$

$[\phi]$ = modal matrix

$\Omega_e$ = excitation frequency

$[\phi]$ is the matrix containing the foundation normal modes which are evaluated in correspondence to the connecting nodes. The $[\phi]$ matrix is rectangular with as many columns as the foundation vibration modes considered and as many rows as the degrees of freedom associated to the connecting nodes.

It is possible to define the connecting forces vector $\underline{R}_f$ between rotor and supporting structure as a function of $\underline{X}_f$ applying $\underline{q} = [\phi]^{-1}\underline{X}_f$, thus:

$$[M_f]\ddot{\underline{x}}_f + [R_f]\dot{\underline{x}}_f + [K_f]\underline{x}_f = -\underline{R}_f \tag{5}$$

where:

$$[M_f] = [\phi^t]^{-1}[m_f][\phi]^{-1}$$

$$[R_f] = [\phi^t]^{-1}[r_f][\phi]^{-1}$$

$$[K_f] = [\phi^t]^{-1}[k_f][\phi]^{-1}$$

This transformation is possible only if the $[\phi]$ matrix is square. In this case, it is necessary to consider a number of foundation natural frequencies equal to the number of degrees of freedom of the connecting nodes. Substituting Eq. 5 into Eq. 2:

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [M_{rf}] \\ [M_{fr}] & [M_{ff}] + [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{x}}_r \\ \ddot{\underline{x}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{rr}] & [R_{rf}] \\ [R_{fr}] & [R_{ff}] + [R_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_r \\ \dot{\underline{x}}_f \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \\ [K_{fr}] & [K_{ff}] + [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_r \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

These equations can be integrated both in the time domain and in the frequency domain. Harmonic external excitation forces applied to the rotor are given by Eqs. 7 to 10.

$$\underline{F}_r = \underline{F}_{ro}\exp(i\Omega_e t) \tag{7}$$

$$\underline{x}_r = \underline{x}_{ro}\exp(i\Omega_e t) \tag{8}$$

$$\underline{x}_f = \underline{x}_{fo}\exp(i\Omega_e t) \tag{9}$$

$$\underline{R}_f = \underline{R}_{fo}\exp(i\Omega_e t) \tag{10}$$

The equations of motion in the frequency domain become:

$$(-\Omega_e^2[M^*] + i\Omega_e[R^*] + [K^*] + [\tilde{I}(\Omega_e)])\underline{x}_o = \underline{F}_o \tag{11}$$

$$[E(\Omega_e)]\underline{x}_o = \underline{F}_o \tag{12}$$

with:

$$\left[\bar{I}(\Omega_e)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[\bar{I}(\Omega_e)\right] \end{bmatrix}$$

$[E(\Omega_e)]$ is the elastodynamic matrix of the whole system and $[I(\Omega_e)]$ is the mechanical impedance matrix of the foundation defined by means of the following expression:

$$[I(\Omega_e)]\underline{x}_{fo} = -\underline{R}_{fo} \tag{13}$$

Therefore, the mechanical impedance matrix can be obtained by the inversion of the flexibility matrix $[H(\Omega_e)]$:

$$\underline{x}_{fo} = -[H(\Omega_e)]\underline{R}_{fo}$$

$$[I(\Omega_e)] = [H(\Omega_e)]^{-1} \tag{14}$$

The method described above requires as many vibration modes of the foundation as degrees of freedom associated to the supports. So, the application of this procedure is quite limited in cases where the number of supports (bearings or seals) of the machine is high, because the identification of too many normal modes of the foundation could not be sufficiently accurate and the higher modes would have no physical sense.

However, even if all normal modes required were identified, the procedure may present some numerical problems due to the inversion of the flexibility matrix $[H(\Omega_e)]$.

The main point of this work is to analyze the dynamic behaviour of rotors strongly connected to the supporting structure by means of a high number of intermediate seals between the bearings. In these cases, the seals are also considered as supports of the rotor or connecting points between rotor and foundation in the mathematical model.

In order to avoid the limitations of the method previously described, the mathematical model is modified here with respect to the representation of the foundation.

The independent variables considered here are the rotor displacements $\underline{X}_r$ and the foundation modal coordinates $\underline{q}$, both contained in the vector $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = \begin{Bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{q} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

The equations of motion are obtained from the Lagrange equation, where the damping matrix $[R]$ liable for the dissipative energy in the system is given by:

$$[R] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{16}$$

The external and interactive forces acting in the system are written as:

$$F_{zi} = \frac{\delta^* W_i}{\delta^* Z_i} \tag{17}$$

$\delta^* W$ is the virtual work executed by the oil film forces $\underline{R}_r$ and the external forces $\underline{F}_r$:

$$\delta^* W = \begin{Bmatrix} \delta^* \underline{x}_r \\ \delta^* \underline{x}_f \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ -\underline{R}_f \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta^* \underline{x}_r \\ \delta^* \underline{x}_f \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

The components $\underline{R}_r$ are null except for the degrees of freedom associated to the supports. Substituting Eq. 4 in Eq. 18:

$$\delta^* W = \begin{Bmatrix} \delta^* \underline{x}_r \\ \delta^* \underline{q} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ -\underline{R}_f \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta^* \underline{x}_r \\ \delta^* \underline{q} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ -\underline{R}_f \end{bmatrix} \tag{19}$$

The oil film forces $R_r$ are non-linear functions of the displacements $\underline{X}_r$ and $\underline{X}_f$. These forces can be linearized (Diana and Ruggieri, 1974) as follows:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ -\underline{R}_f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [R_{orr}] & [R_{orf}] \\ [R_{ofr}] & [R_{off}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_r \\ \dot{\underline{x}}_f \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{orr}] & [K_{orf}] \\ [K_{ofr}] & [K_{off}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_f \end{Bmatrix} \tag{20}$$

The Eq. 20 can be written in hybrid coordinates $\underline{Z}$:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ -\underline{R}_f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [R_{orr}] & [R_{orf}] \\ [R_{ofr}] & [R_{off}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_r \\ \dot{\underline{q}} \end{Bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} [K_{orr}] & [K_{orf}] \\ [K_{ofr}] & [K_{off}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{q} \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$[R_o]$ and $[K_o]$ are the equivalent damping and stiffness matrices of the oil film, depending on the rotational velocity of the rotor.

Considering the Eqs. 19 and 21:

$$\{\underline{Q}_f\} = - [\Phi]^t [R_o] [\Phi] \dot{\underline{Z}} - [\Phi]^t [K_o] [\Phi] \underline{Z} \tag{22}$$

where:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\phi] \end{bmatrix}$$

The global matrix of the oil film in hybrid coordinates is indicated by $[R_{orq}]$ and $[K_{orq}]$. The oil film forces can be rewritten in hybrid coordinates:

$$\{\underline{Q}_f\} = -[R_{orq}]\dot{\underline{Z}} - [K_{orq}]\underline{Z} \tag{23}$$

Substituting the Eq. 23 in the Lagrange expression, the equations of motion of the complete system rotor-supports-foundation can be represented in hybrid coordinates:

$$\begin{bmatrix} [M_r] & 0 \\ 0 & [m_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{x}}_r \\ \ddot{\underline{q}} \end{Bmatrix} + \left[ \begin{bmatrix} [R_r] & 0 \\ 0 & [r_f] \end{bmatrix} + [R_{orq}] \right] \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_r \\ \dot{\underline{q}} \end{Bmatrix} +$$

$$\left[ \begin{bmatrix} [K_r] & 0 \\ 0 & [k_f] \end{bmatrix} + [K_{orq}] \right] \begin{Bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_r \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

These equations can be solved both in time and in frequency domain for any number of the foundation normal modes.

The approach proposed here makes possible the application of the mathematical model in the analysis of systems with very high number of supports.

## Description of the Pump and the Foundation

In order to verify the application of the approach proposed before, a six stage axially-split pump is analyzed. The pump is supported by two multilobe bearings and thirteen cylindrical plain seals are located between them.

The rotor shaft is modelled by a Finite Element Method using cylindrical beam elements. The other parts fixed to the shaft are taken into account as additional masses, neglecting their stiffness and considering only the effect of inertial mass. Fig. 2 shows a scheme of the rotor model with the location of bearings and seals.

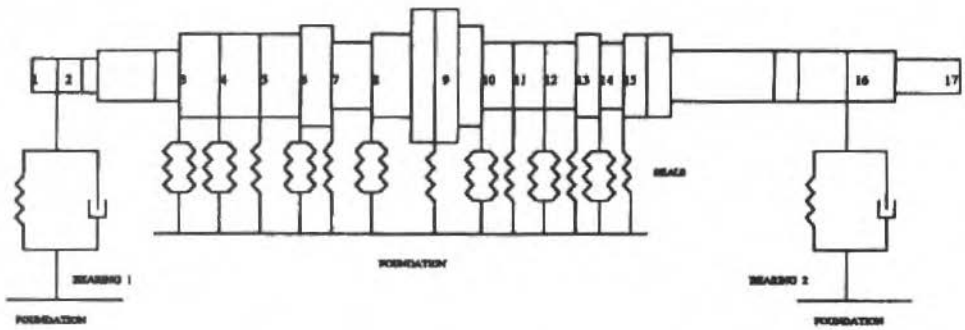



**Fig. 2 Scheme of the rotor with bearings and seals**

The stiffness and damping coefficients of the oil film are evaluated at several rotational speeds, taking into account the load on each bearing. The stiffness and damping coefficients of the bearing #1 in the X direction can be seen in Fig. 3

The stiffness coefficients of the seals are calculated considering the rotor centered with respect to the seals which are, therefore, unable to carry any load. A short seal theory is adopted and the method introduced by Allaire (1978) is used. For the sake of simplicity, the pressure drop is considered constant in the stiffness calculations and the damping factors of the seals are neglected. Fig. 4 shows a scheme adopted for the seals and Fig. 5 shows some stiffness coefficients curves of the seal #5.

Due to the symmetry and null-load of the seal, the stiffness coefficients in the X and Y directions are equal while the cross-coupled coeflficients are opposite in sign.

The supporting structure is modelled in two different ways:

a) 1 d.o.f. mass-spring-damper systems (Table 1) introduced in vertical and horizontal directions for each support (bearing or seal).

b) Finite element model of the foundation composed by 24 beam elements and 23 nodes (Fig. 6).

**Table 1 1 d.o.f. mass-spring-damper system**

| | |
|---|---|
| M = 10Kg | M = 10Kg |
| Kxx = $1\times10^{9}$N/m | Kxx = $1\times10^{5}$Ns/m |
| Kyy = $0.5\times10^{9}$N/m | Kyy = $0.5\times10^{5}$Ns/m |

The values above can be considered as standard assumptions in the absence of detailed calculations or experimental results.

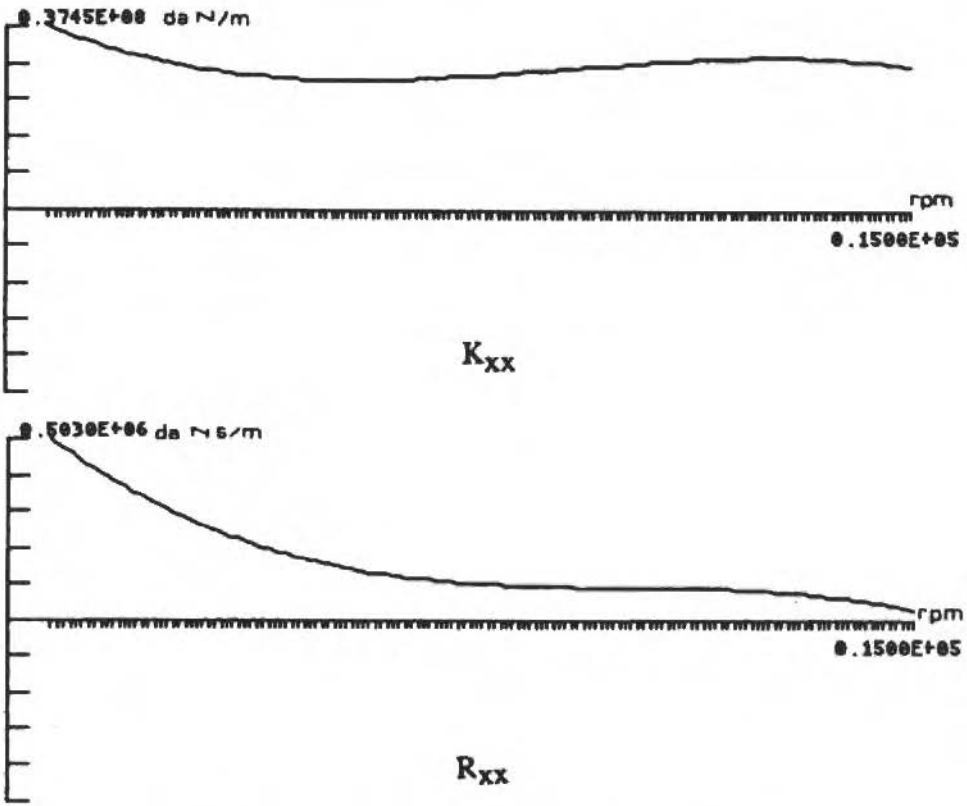



**Fig. 3 Stiffness and damping coefficients of the oil film (bearing #1)**

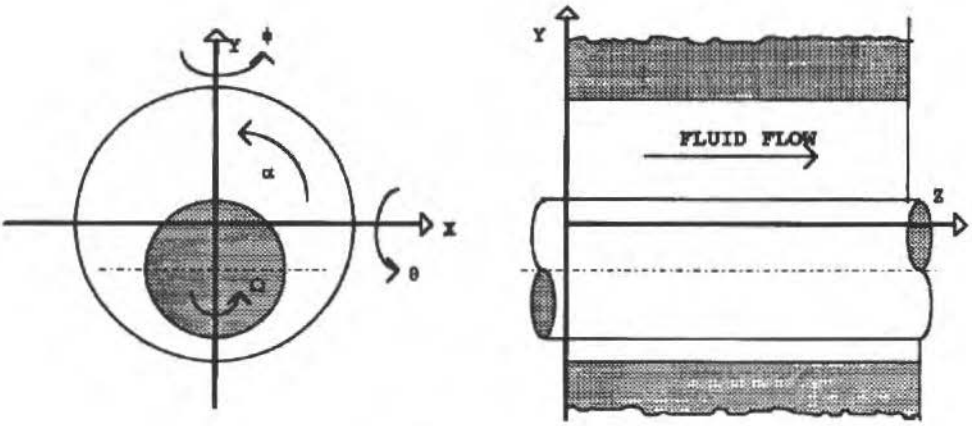



Fig. 4 Scheme of the seals

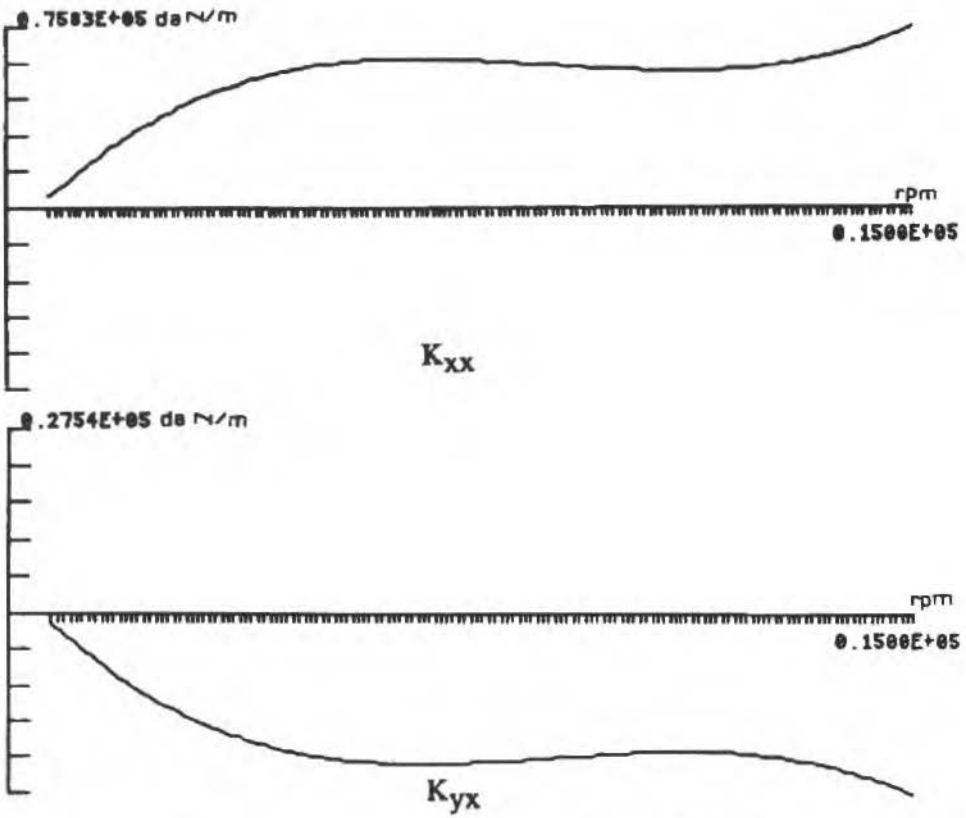



Fig. 5 Direct and cross-coupled stiffness coefficients of the seal #5

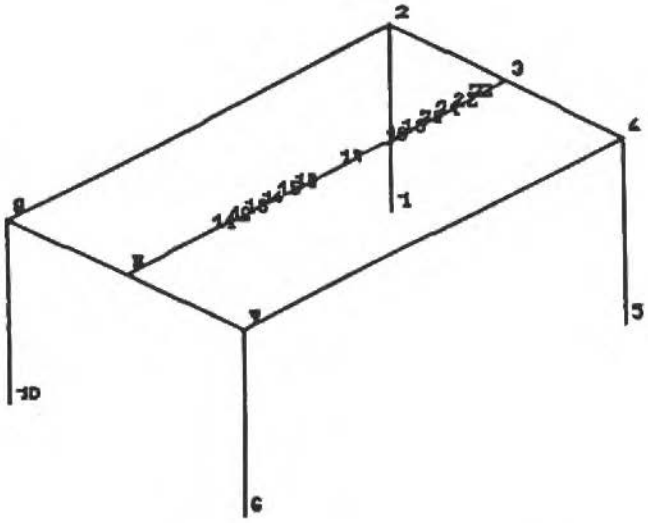



Fig. 6 Finite Element Model of the foundation

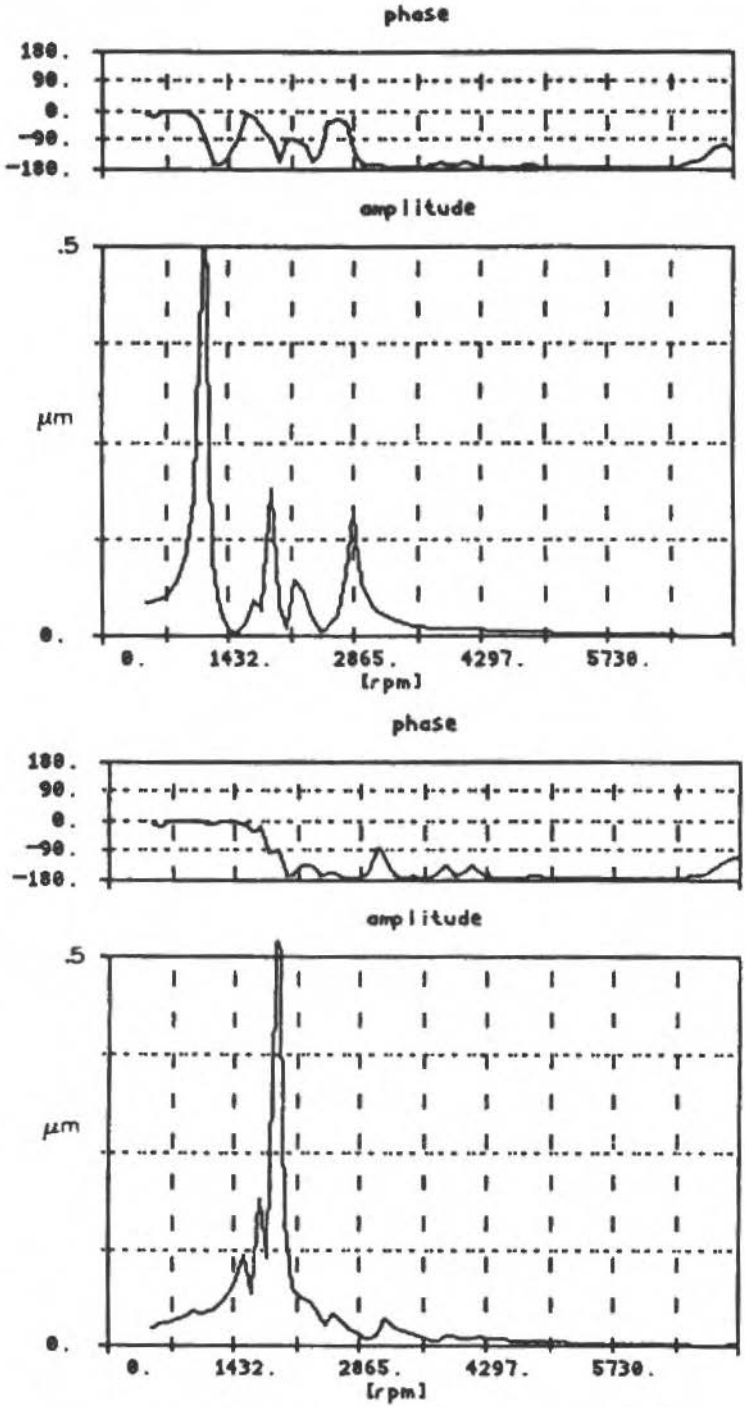



Fig. 7 Frequency response at the node #17: a horizontal; b vertical

The model of the foundation takes into account the stiffnesses and masses of the pump casing and it represents the complete supporting structure subsystem.

The frequency response curves of the foundation at the node 17 in horizontal and vertical directions are plotted in Fig. 7. An excitation force of 10 N is applied on this same node in both mentioned directions.

It is possible to observe from Fig. 7 that the lower dynamic stiffness at resonance is about $0.2\times10^8$N/m. Outside the resonance region the dynamic stiffness is about $2.0\times10^8$N/m, both in the horizontal and vertical direction.

As can be seen, even with an extremely simple model for the foundation, the frequency response is similar to real systems in terms of natural frequencies and dynamic stiffnesses.

The modal reduction analysis of the foundation results in three vertical vibration modes and four horizontal modes (Table 2).

**Table 2 Vertical and horizontal natural frequencies of the foundation**

| Vertical modes (rpm) | Horizontal modes (rpm) |
|---|---|
| 1200 | 1200 |
| 2000 | 2000 |
| 2400 | 2300 |
| | 3000 |

## Frequency Response of the Rotor

The frequency response of the rotor due to unbalancing forces is calculated by assuming the following configurations:

a) Rotor supported only by the two multilobe bearings in order to verify the natural frequencies of the rotor. The foundation is represented by 1 d.o.f. systems.

b) Rotor supported by bearings and seals with the foundation modelled by 1 d.o.f. systems.

c) Rotor supported by bearings and seals with the finite element model of the foundation.

### Rotor Supported by the Two Bearings

The frequency response of the rotor can be evaluated by the application of the mathematical model described before.

The foundation is represented by the 1 d.o.f. system of Table 1 which are introduced for each bearing in the two considered directions.

There are two unbalancing forces acting on the rotor: 1.25 Kg.mm on node 6 and 2.50 Kg.mm on node 20, both with the same phase.

The first and second critical speeds of the rotor are visualized in Fig. 8. As can be noticed, the first critical speed is at approximately 2500 rpm and the second critical speed is around 14000 rpm.

### Rotor Supported by Bearings and Seals

This analysis considers the foundation similarly to the previous one.

The rotor is supported here by two bearings and thirteen seals. In correspondence to each support a 1 d.o.f. system asdescribed in Table 1 is introduced.

The frequency response curve shown in Fig. 9 is relative to the bearing #1. In Fig. 9a a sharp peak can be noticed at 14000 rpm. The corresponding mode shape (Fig. 9b) has a rather high amplitude at the overhung coupling hub at one node between the bearings. This mode shape is quite similar to the second vibration mode of the rotor.

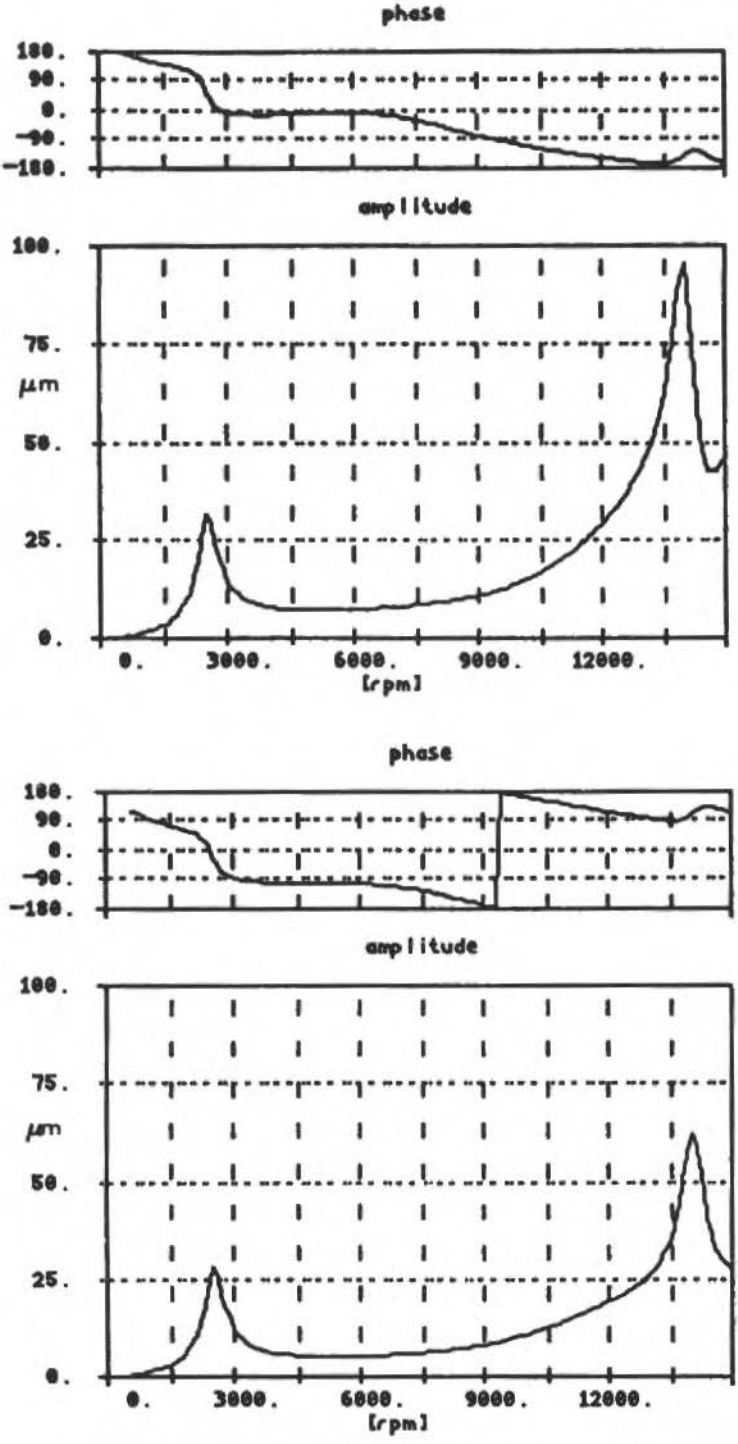



Fig. 8 Frequency response at the bearing #1: a horizontal; b vertical

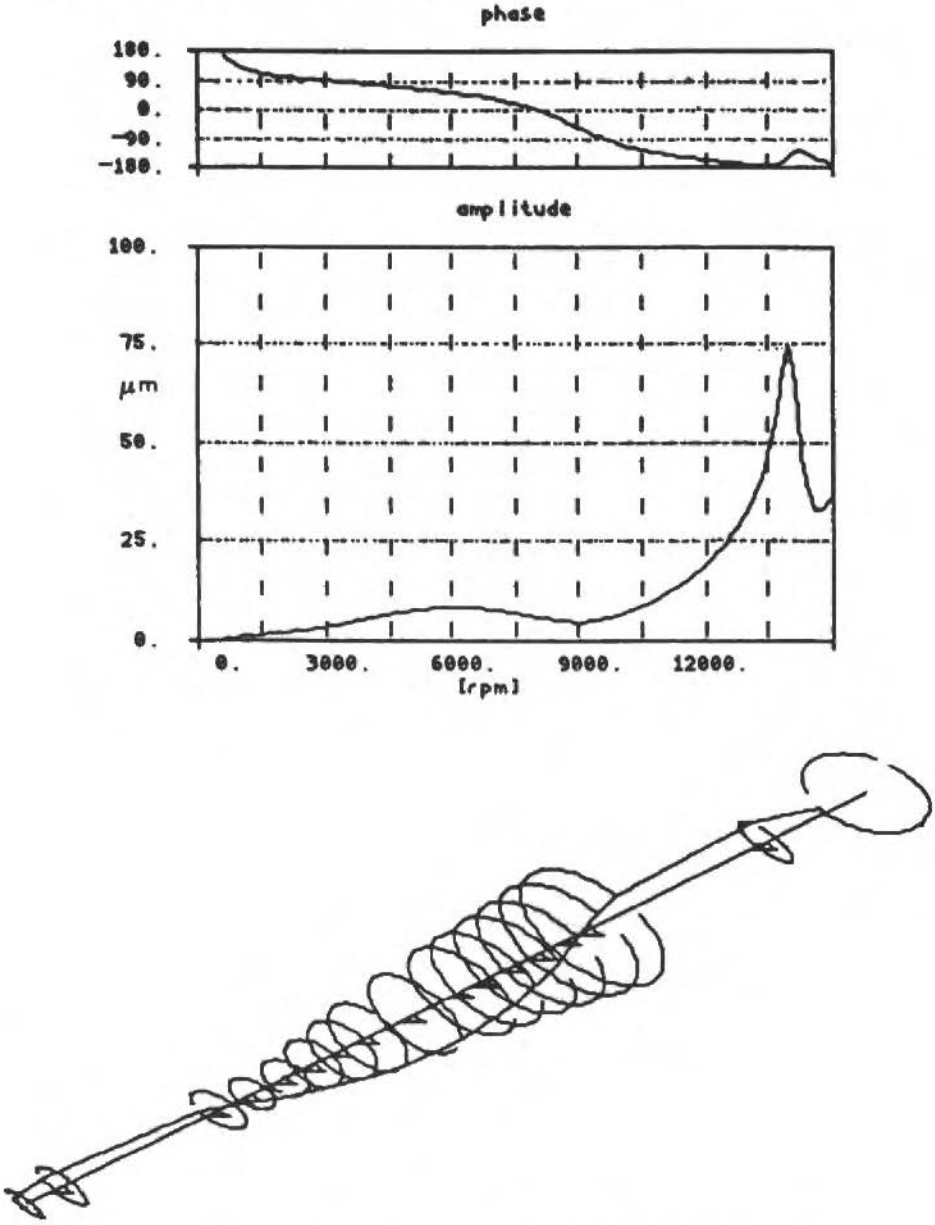



**Fig. 9 Frequency response at bearing #1: a horizontal amplitude; b mode shape at 14000 rpm**

A further very smooth peak can be noticed just bellow 6000 rpm. The corresponding mode shape is similar to the first mode of the rotor but there is a third node between the bearings.

Looking at the displacements at the seal #1 (Fig. 10a) the only maximum bellow 14000 rpm is found at 7000 rpm. The corresponding deflection shape (Fig. 10b) is still similar to the first mode. However, the first critical speed of the rotor is not clearly recognizable and it seems to be either shifted towards high rotational speeds or completely cancelled.

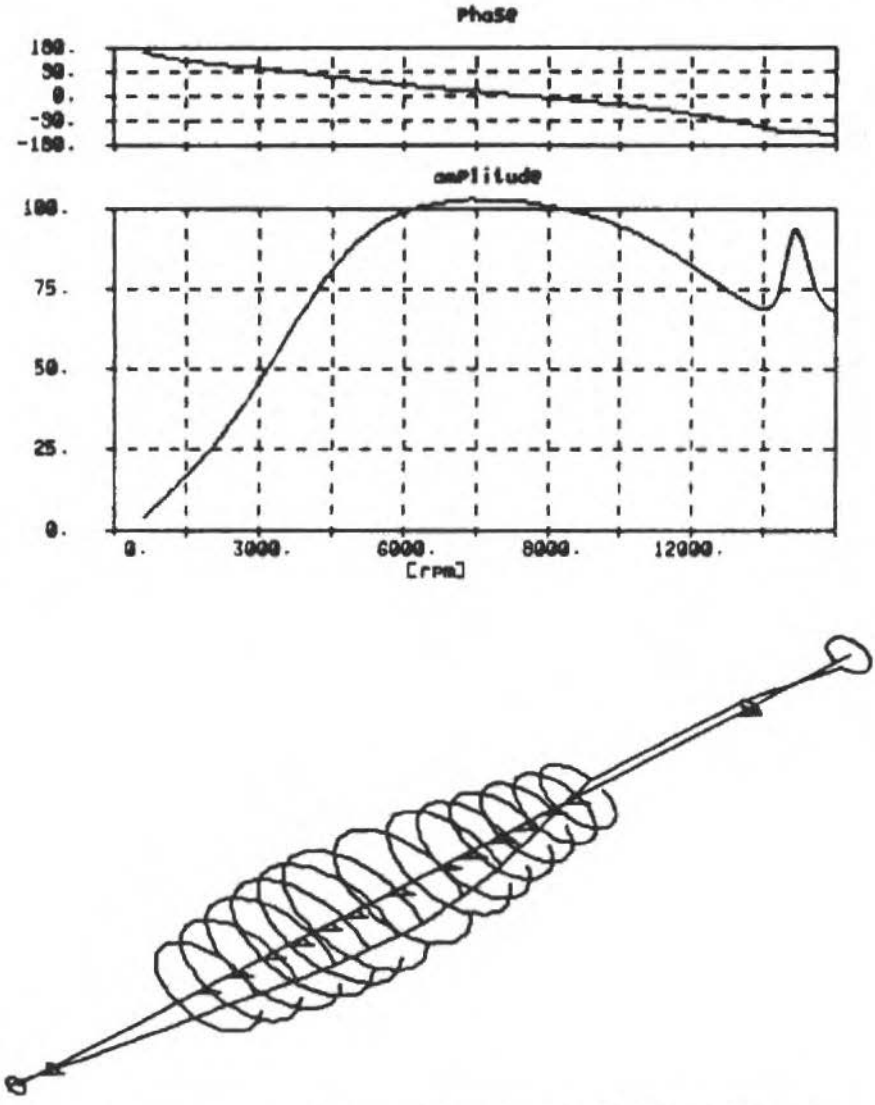



Fig. 10 Frequency response at seal #1: a horizontal amplitude; b mode shape at 7000 rpm

These results show that it is not possible to obtain an accurate response of the system using a 1 d.o.f. system to represent the supporting structure when rotor and foundation are strongly coupled due to the seals.

## Rotor Supported by Bearings and Seals with a Finite Element Model of the Foundation

Considering the rotor with fifteen supports as before, the frequency response is evaluated with the foundation modelled by a finite element method (Fig. 6). Applying a modal reduction to the model, the foundation is represented here as a seven degrees of freedom system (Table 2).

Even if the degrees of freedom associated to the supports are thirty, the mathematical approach proposed initially permits to solve this problem only having identified seven normal modes of the foundation.

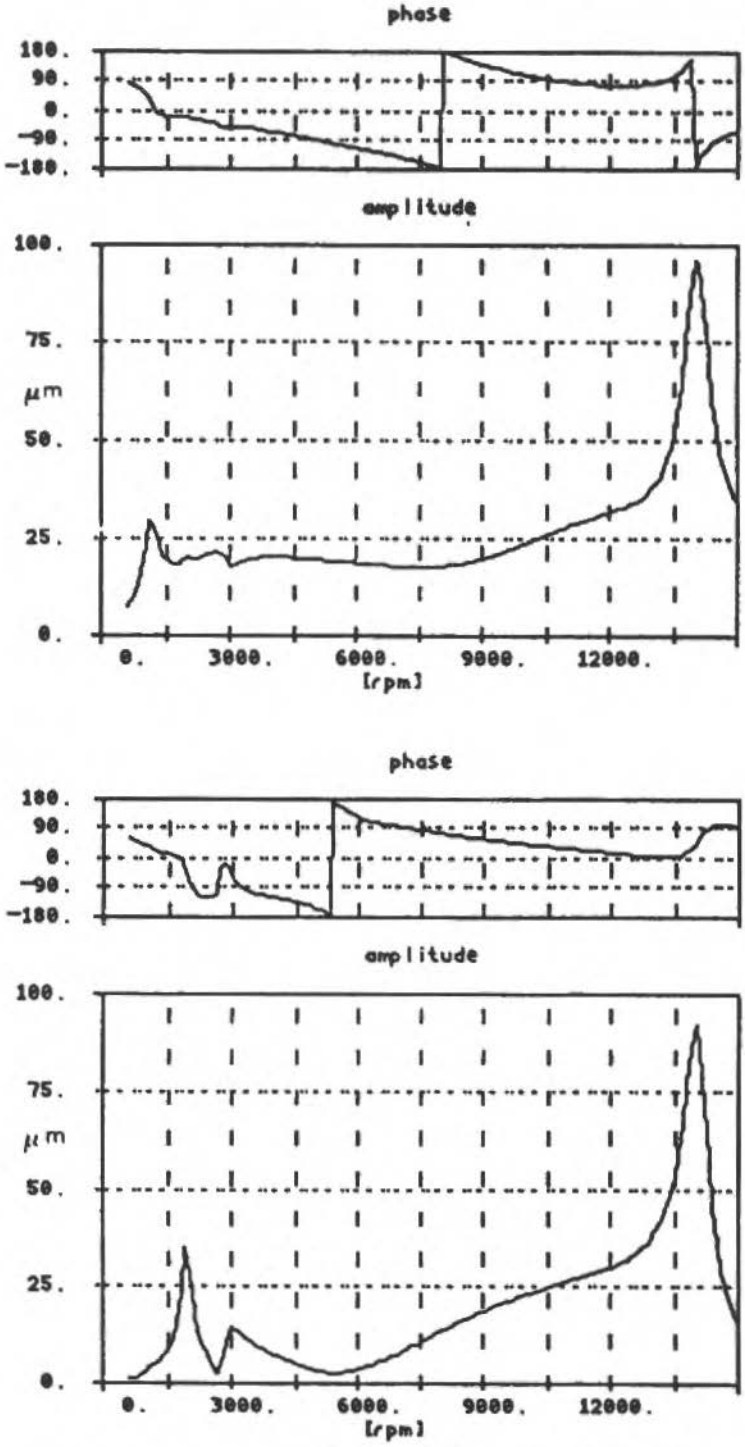



Fig. 11 Frequency response at bearing #1: a horizontal; b vertical

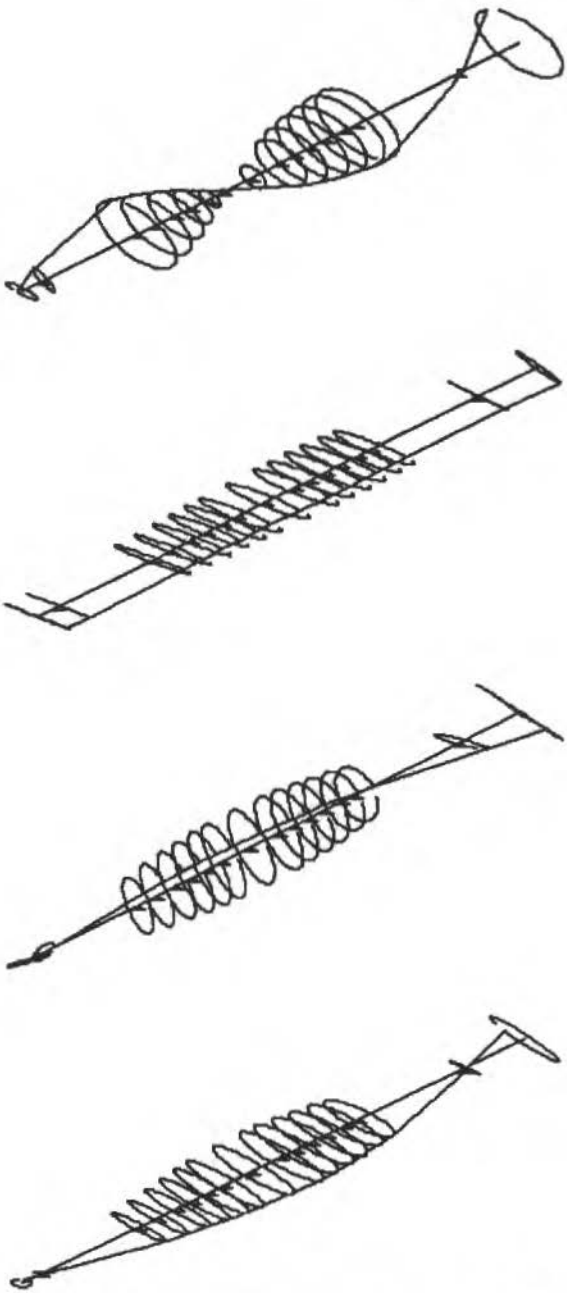


**Fig. 12 Vibration mode shapes: a 14000 rpm; b 1100 rpm; c 1900 rpm; d 2900 rpm**

Moreover, this representation of the foundation allows a more realistic evaluation of the frequency response of the system.

Fig. 11 shows the frequency response at the bearing #1 in horizontal and vertical directions.

Three peaks can be clearly recognizable: the last one at about 14000 rpm is the second critical speed of the rotor corresponding to the mode shape in Fig. 12a.

The first peak at 1100 rpm in the horizontal direction is a pure foundation natural frequency and its deflection mode is represented in Fig. 12b.

In vertical direction there is a peak at 1900 rpm which can be considered as a mixed mode between rotor and foundation (Fig. 12c). The deflection mode at this frequency is similar to the first vibration mode of the rotor, but it is still influenced by the foundation mode shape at the same frequency.

The classical first vibration mode of the rotor is shown in Fig. 12d and it corresponds to the critical speed of 2700-2900 rpm which can be observed in Fig. 11b.

It can be noticed that the first critical speed exists and it is split into two frequencies (1900 and 2900 rpm). Both speeds are not far from the original critical speed of the isolated rotor at 2500 rpm.

## Conclusions

This paper describes a hybrid mathematical model that allows to simulate the dynamical behaviour of rotor-supports-foundation systems in the frequency domain. The independent coordinates are the rotor displacements $\bar{X}_r$ and the modal coordinates of the foundation $\bar{q}$. This approach allows to take into account any number of vibration modes of the foundation. Therefore, it is no more necessary to define as many normal modes of the structure as the number of degrees of freedom associated to the supports.

The numerical simulations shows that in case of rotors with many seals between the bearings, which is common in multistage centrifugal pumps, an accurate modelling of the supporting structure is extremely important in order to recognize critical speeds and calculate frequency responses due to unbalance.

Although stability problems are not considered here, it is reasonable to assume that the conclusions above are valid also in the case of instability analysis.

## Acknoledgements

This study received a grant by MURST (Italy) and CNPq (Brazil).

## References

Diana G., Curami A., Pizzigoni B., 1988, "Computer Analysis of Rotor-Bearing Systems", International Centre for Mechanical Sciences, Rotordynamics 2-Problems in Turbomachinery, Springer-Verlag, Wien-New York.

Curami A., Pizzigoni B., 1981, "Un Programma di Calcolo Automatico per l'Analisi Statica di una Linea d'Alberi", L'Energia Elettrica, no. 12, pp. 494-502.

Diana G., Massa E., Pizzigoni B., Marcantoni-Taddei C., 1982, "A Forced Vibration Method to Calculate the Oil Film Instability Threshold of Rotor-Foundation System", IFToMM, Rome, pp. 207-214.

Diana G., Ruggieri G., 1974, "Sull'Instabilitá del Film d'Olio: Modello Analitico per Cuscinetti Cilindrici", L'Energia Elettrica, no. 3, pp. 1-9.

Diana G., Ruggieri G., 1974, "Sull'Instabilitá del Film d'Olio: Modello Analitico per Cuscinetti a Lobi", L'Energia Elettrica, no. 4, pp. 1-11.

Ruggieri G., 1976, "Un Metodo Aprossimativo per la Risoluzione dell'Equazione di Reynolds", L'Energia Elettrica, no. 2, pp. 86-96.

Nordmann R., 1988, "Seal Properties", Rotordynamics 2-Problems in Turbomachinery, Springer-Verlag, pp.153-173.

Black H.F., 1969, "Effects of Hydraulic Forces in Annular Pressure Seals on the Vibrations of Centrifugal Pump Rotor", JMES, Vol. II, no. 2, pp. 206-213.

Childs D.W., 1982, "Finite Length Solutions for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals", ASME 82-Lub-42.

Bachschmid N., Pizzigoni B., DiPasquantonio F., 1977, "A Method for Investigating the Dynamic Behaviour of a Turbomachinery Shaft on a Foundation", ASME 77-DET-16, DET Conference, Chicago(USA).

Allaire P.F., Lee C.C., Gunter E.J., 1978, "Dynamics of Short Eccentric Plain Seals with High Axial Reynolds Number", Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.15, no. 6, pp. 342-347.

**RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences**
*Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 281-285*

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# About the Angular Velocity of a Rigid Body in a Reference Frame

## *Sobre a Velocidade Angular de um Corpo Rígido em um dado Referencial*

**Roberto A. Tenenbaum**
Mechanical Engineering Department, COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68503 - 21945 - Rio de Janeiro - Brazil

**Abstract**

A short overview of the classical theoretical formulations for the concept of angular velocity of a rigid body that moves in a reference frame is presented. A new and rigorous proof of existence of an angular velocity tensor which differentiates with respect to time any vector fixed on the body is derived. It is also shown that the knowledge of the time derivatives of only two vectors fixed on the body is enough for the determination of the tensor.

**Keywords**: Analytical Dynamics, Angular Velocity, Rigid Body

## Introduction

The angular velocity of a rigid body that moves in a given reference frame is a fundamental concept in mechanical motion analysis, being established by Euler (1707-1783), more than two hundred years ago. Despite of its longevity, it is a concept usually treated in a very imprecise way in elementary texts on classical mechanics. Beer and Johnston (1972) and Meriam (1975) define the angular velocity vector as being the time derivative of the angular rotation of the body about an instantaneous axis, in the direction of the axis, which is, at least, a careless approach. Hibbeler (1974), following the same reasoning, provides a geometrical proof of the commutative law for infinitesimal rotation vectors with a common fixed origin. None of these formulations satisfy the minimum requirements of clearness for mathematical proofs.

Kane and Levinson (1985), with much more rigor, present a general and elegant definition for the angular velocity vector of a rigid body $B$ moving in a reference frame $R$ as the (unique) vector $\omega$ such that its cross-multiplication with any vector v fixed in the body produces the time derivative of the vector in the reference frame:

$$\frac{{}^{R}\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{v} = \omega \times \mathrm{v}$$

To prove the existence of such a vector, Kane and Levinson take a right-handed mutually perpendicular set of unit vectors fixed in the body, $b_1$, $b_2$, $b_3$, and show that the angular velocity can be expressed as

$$\omega = \dot{b}_2 \cdot b_3 b_1 + \dot{b}_3 \cdot b_1 b_2 + \dot{b}_1 \cdot b_2 b_3$$

where the dots denote time differentiation in the reference frame. It must be pointed out that this construction of the angular velocity vector demands the knowledge of the time derivatives of three mutually perpendicular unit vector fixed in the body.

Another approach also found in classical textbooks is Poisson's matrix formulation. Woodhouse (1987), for instance, defines a transition matrix $H$, shown to be orthogonal, between two consecutive rigid body configurations, and derives a rate of rotation matrix,

Manuscript received: May 1993. Technical Editor: Agenor de Toledo Fleury

$$\mathbf{\Omega} = \dot{H}H^T$$

which is skew-symmetric. $\mathbf{\Omega}$ is then shown to be the linear transform which, applied over any vector v fixed in the body, computes its time derivative in the reference frame:

$$\frac{{}^R d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}\mathbf{v}$$

Fixing an orthonormal triad on the body, the rate of rotation matrix can be expressed as

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

and the angular velocity vector as $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, where $\omega_1$, $\omega_2$ and $\omega_3$ are scalar functions. The proof of existence is implicit in the derivation and three vector time derivatives must also be known to derive the relationship.

Martins and Soares (1981) present an original alternative proof for the existence of the angular velocity vector via a minimization procedure. The paper deals only with elementary concepts from calculus and geometrical considerations, leading to a somewhat complicated formula for the angular velocity vector, depending only on two position vectors and their time derivatives in the reference frame. As the hypotesis rests on rigid body motion with a fixed point, three time derivatives are implicitly necessary to the angular velocity definition.

It is shown in this paper that the proof of the existence of the angular velocity can rest upon a minimal set of elements, with the tensor or vector operators requiring the knowledge of the time derivatives of only two arbitrary vectors fixed in the moving body.

## Derivation

The following general theorem will be derived: If $B$ is a rigid body moving in a reference frame $R$, then there exist a skew-symmetric tensor ${}^R\mathbf{T}^B$ and a vector ${}^R\omega^B$ such that: for any vector v fixed in $B$, its time derivative in $R$, $\dot{\mathbf{v}}$, can be expressed by

$$\dot{\mathbf{v}} = {}^R\mathbf{T}^B\mathbf{v} = {}^R\omega^B \times \mathbf{v}$$

The proof will be developed in six stages

**#1** Let p and q be two arbitrary linearly indepent vectors fixed in $B$ such that their time derivatives in $R$, $\dot{\mathbf{p}}$ and $\dot{\mathbf{q}}$ respectively, are not parallel. Let us now define the scalar

$$k = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} \qquad (1)$$

### Nomenclature

$b_1, b_2, b_3$ = set of mutually perpendicular unit vectors

$H$ = transition matrix between two rigid-body configurations

$H^T$ = the transpose of $H$

${}^R\mathbf{T}^B$ = angular velocity tensor of body $B$ in the reference frame $R$

$\omega$ = angular velocity vector

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ = angular velocity vector components

${}^R\omega^B$ = angular velocity of body $B$ in the reference frame $R$

$\Omega$ = a skew-symmetric tensor

$\mathbf{\Omega}$ = rate of rotation matrix

$\frac{{}^R d}{dt}$ = time derivative in the reference frame $R$

$\dot{\mathbf{v}}$ = short-form notation for time derivative of v in $R$

and the skew-symmetric tensor

$$\Omega = \dot{q} \otimes \dot{p} - \dot{p} \otimes \dot{q} \tag{2}$$

Then,

$$\Omega p = p \cdot \dot{p}\dot{q} - p \cdot \dot{q}\dot{p} = k\dot{p} \tag{3}$$

$$\Omega q = q \cdot \dot{p}\dot{q} - q \cdot \dot{q}\dot{p} = k\dot{q} \tag{4}$$

**#2** If $k = 0$, then, from Eqs. 3 and 4, $\Omega(p - q) = 0$ and, as p and q are not equal and arbitrary, $\Omega$ must vanish and, from Eq. 2, $\dot{p} \otimes \dot{q} = \dot{q} \otimes \dot{p}$. But this is not possible since $\dot{p}$ and $\dot{q}$ were assumed as non parallel.

**#3** It follows that $k \neq 0$ and one may define the tensor

$${}^{R}\mathbf{T}^{B} = \frac{1}{k}\Omega \tag{5}$$

which was, from Eqs. 3, 4 and 5, the time-derivation properties

$${}^{R}\mathbf{T}^{B} p = \dot{p} \tag{6}$$

$${}^{R}\mathbf{T}^{B} \dot{q} = \dot{q} \tag{7}$$

**#4** Defining the vector r, fixed in $B$, as

$$r = p \times q \tag{8}$$

it follows, since ${}^{R}\mathbf{T}^{B}$ is also a skew-symmetric tensor, that

$${}^{R}\mathbf{T}^{B} r = {}^{R}\mathbf{T}^{B} p \times q + p \times {}^{R}\mathbf{T}^{B} q = \dot{p} \times q + p \times \dot{q} = \dot{r} \tag{9}$$

**#5** Now, any vector v fixed in $B$ can be written as $v = \alpha p + \beta q + \gamma r$, where $\alpha$, $\beta$ and $\gamma$ are scalar constants. The time derivative of the vector v in $R$ will be then

$$\dot{v} = \alpha\dot{p} + \beta\dot{q} + \gamma\dot{r} = \alpha {}^{R}\mathbf{T}^{B} p + \beta {}^{R}\mathbf{T}^{B} q + \gamma {}^{R}\mathbf{T}^{B} r = {}^{R}\mathbf{T}^{B} v \tag{10}$$

as required.

**#6** To complete the proof one must only recall the tensor identity

$$(a \otimes b - b \otimes a)\, u = (a \times b) \times u \tag{11}$$

So, defining the angular velocity vector of the rigid body $B$ in the reference frame $R$ as

$$ {}^{R}\omega^{B} = \frac{1}{k}\dot{q} \times \dot{p} \tag{12} $$

it follows, from Eqs. 2, 5, 10, 11 and 12 that, for any v fixed in $B$,

$$ \dot{v} = {}^{R}\omega^{B} \times v \tag{13} $$

## Comments

In the derivation above, the existence of the angular velocity tensor ${}^{R}\mathbf{T}^{B}$ and the angular velocity vector ${}^{R}\omega^{B}$ is proved with the aid of only two arbitrary vectors fixed in the body, requiring no geometrical consideration of orthogonality condition. Indeed, p and q must not be relative position vectors for points fixed in the body. Actually, p and q can be any two independent vectors, even without the same physical dimension, with the sole condition that their time derivatives on the body must be null.

It should be also mentioned that the choice of two linearly independent vectors p and q fixed in $B$ so that $\dot{p}$ and $\dot{q}$ are also independent is not troublesome. Let $b_1$, $b_2$, $b_3$ be an arbitrary set of three mutually prependicular vector fixed in a rigid body $B$. Since they have constant modulus, $\dot{b}_j \cdot b_j = 0$, $j = 1, 2, 3$ so $\dot{b}_j$ must be orthogonal to $b_j$. If, for instance, $\dot{b}_1$ and $\dot{b}_2$ are, at a given instant, non parallel, then $b_1$ and $b_2$ may take the place of the vectors p and q in the construction of the angular velocity. If, otherwise, $\dot{b}_1$ and $\dot{b}_2$ are parallel, they must be also parallel to $b_3$, which is orthogonal to $\dot{b}_3$. In that case, $b_3$ and $b_2$ (or $b_3$ and $b_1$) can take the place of the vectors p and q. In other words, given any three linearly independent vectors fixed in a rigid body, it is always possible to pick two of them with non parallel time derivatives in a given reference frame.

As a final comment, it can be noticed that the proof of the existence of the angular velocity vector requiring only two time derivatives of vectors fixed in the body can be performed in a very similar way without any reference to matrix algebra - which would be interesting for didatic purposes at undergraduate level. Indeed, replacing, in the derivation, the definition of a skew-symmetric tensor, Eq. 2, by the vector

$$ w = \dot{q} \times \dot{p} \tag{2'} $$

Then,

$$ w \times p = k\dot{p} \tag{3'} $$

$$ w \times q = k\dot{q} \tag{4'} $$

The scalar k is then shown to not vanish, since $w \times (p - q) \neq 0$, and the angular velocity vector can be defined as

$$ {}^{R}\omega^{B} = \frac{1}{k}w \tag{5'} $$

which has the required time-derivation property, Eq. 13.

## References

Beer, F. P. and Johnston Jr., E. R., 1972, "Vector Mechanics for Engineers", McGraw-Hill, New York.
Hibbeler, R. C., 1974, "Engineering Mechanics: Dynamics", Macmillan Publishing Co., New York.
Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, "Dynamics: Theory and Applications", McGraw-Hill, New York.
Martins, L. C., Soares, P. P. M., 1981, "O vetor velocidade angular via um problema de minimização", Rev. Br. C. Mec., V. 3 (1), pp. 41-43, Rio de Janeiro.
Meriam, J. L., 1975, "Dynamics", John Willey, New York.
Woodhouse, N. N. J., 1987, "Introduction to Analytical Dynamics", Claredon Press, Oxford.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 286-301

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Navegação de um Veículo Autônomo por Ultra-Som em Ambientes Estruturados

## *Navigation of an Autonomous Vehicle by Ultrasound in Structured Environments*

**Celso M. Furukawa**
**Julio C. Adamowski**
**Lucas A. Moscato**
Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Caixa Postal 8174 - CEP 01065-970 - São Paulo - SP

### Abstract

An algorithm is described for estimating the position and orientation of an autonomous vehicle in structured, indoor, previously known, environments. Primary estimates of the vehicle's vector state are obtained odometrically. Ultrasound sensors measure the distance and orientation to geometric references of the environment. References are given by walls, corners and cylindric pillars. An Extended Kalman Filter performs the odometric estimation and processes the ultrasound measurements. Simulation results are presented. Uncertainties of estimates are sensibly reduced when distance and direction to references are processed. However, processing the direction to corners and cylinders provides results which are sensible to the delay inherent to the used method of direction determination.
**Keywords**: Mobile Robots, Navigation, Ultrasonics, Kalman Filter

### Resumo

Descreve-se um algoritmo para estimar a posição e a orientação de um veículo autônomo em ambientes estruturados, fechados e previamente conhecidos. Estimativas primárias do vetor de estados do veículo são obtidas odometricamente. Sensores de ultra-som procuram determinar a distância e a direção entre o veículo e referências geométricas do ambiente. Tais referências são constituídas por paredes, cantos e pilares cilíndricos. Emprega-se o Filtro de Kalman Estendido para realizar a estimação odométrica e o processamento das medidas por ultra-som. Resultados de simulações por computador são apresentados. Verificou-se que incertezas das estimativas são sensivelmente reduzidas processando-se a distância e a direção a referências. Entretanto, o processamento da direção a cantos e cilindros proporciona resultados bastante sensíveis ao atraso inerente ao método empregado para determinacão da direção.
**Palavras-chave**: Robôs Móveis, Navegação, Ultra-som, Filtro de Kalman

## Introdução

Um veículo autônomo pode ser entendido como um robô dotado de rodas, capaz de se locomover por meios próprios, sem a intervenção de operadores humanos. Cabe ao seu sistema de controle a tarefa de conduzi-lo com segurança de uma posição inicial a outra final.

Um dos principais problemas envolvidos é a determinação de sua localização dentro do ambiente de operação. Como mostra a Fig. 1, pode-se localizar completamente o veículo através das coordenadas x, y de um ponto fixo a ele, mais o ângulo $\theta$ de orientação de sua frente.

Escolhida uma trajetória a ser percorrida, o problema de navegação se resume em estimar a cada instante a posição e orientação do veículo, de modo a verificar se este não se afasta demasiadamente da trajetória desejada.

O grau de complexidade desta tarefa varia de acordo com as características do ambiente de operação. Neste trabalho, limitar-nos-emos a ambientes estruturados e fechados. Tratam-se tipicamente de ambientes projetados pelo homem, e portanto não abertos, não acidentados, cujos contornos são conhecidos a priori pelo sistema. Nestes casos, as áreas de circulação são bem demarcadas, o que nos permite mapear previamente os caminhos livres disponíveis.

Manuscript received: July 1993. Technical Editor: Agenor de Toledo Fleury

Apesar da complexidade destes ambientes estar muito aquém da encontrada em ambientes naturais e abertos, estudos nesta área encontram importantes aplicações em automação industrial. Veículos autônomos podem ser empregados em fábricas automatizadas para transportar peças e componentes de uma máquina para outra, onde seriam alimentados ou descarregados por braços robôs.

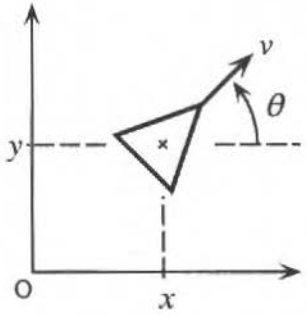



**Fig. 1 Posição e orientação do veículo no ambiente**

Integrando simplesmente o deslocamento de suas rodas no tempo, pode-se obter uma estimativa primária do estado do veículo, a qual denominaremos estimativa odométrica. Em condições normais, o erro desta estimativa não é grande após pequenos movimentos; no entanto, sua acuidade se deteriora ao longo de trajetos mais extensos.

Assim, o sistema deve corrigir sua estimativa periodicamente, referenciando-se a algum elemento fixo ao meio. Neste caso, é conveniente que tal elemento não se constitua em uma marca artificial, uma vez que isto implicaria uma preparação prévia do ambiente. Portanto, o elemento deve pertencer de algum modo à própria estrutura do ambiente.

Em muitos trabalhos nesta área, emprega-se algum tipo de visão artificial para se referenciar o veículo. Em Kriegman (1989) e Thorpe (1988), por exemplo, utilizam-se sistemas stereo de câmeras; já Elfes (1989) emprega imagem de contorno por sonar. Entretanto, requer-se um esforço computacional bastante grande para extrair as referências desejadas em meio ao volume de informação recebido. Isto impede que o processamento se dê com o veículo em movimento.

Nos trabalhos citados, aborda-se um problema mais amplo que é a navegação em ambientes não conhecidos, o que exige o uso de imagens para que se faça o reconhecimento do ambiente. No presente trabalho, a imposição de conhecimento prévio do ambiente, se por um lado limita a sua aplicação, por outro conduz a simplificações que permitem referenciar o veículo com quantidades mínimas de informação.

Tendo-se conhecimento do ambiente de operação, podemos mapear alguns elementos passíveis de serem localizados por sensores especializados. No caso de uma instalação predial, estes elementos podem ser fornecidos pelas paredes, cantos, portas e pilares que constituem seu contorno geométrico. Chamaremos estes elementos de referências geométricas (em seu artigo, Leonard (1991) refere-se a eles por *geometric beacon*; preferimos evitar o termo *beacon* pela conotação de "sinalizador acrescentado ao meio" que carrega).

Neste trabalho são empregados sensores de ultra-som para localizar referências geométricas, extraindo-as do contorno geométrico do meio, e determinando a distância e a direção entre elas e o veículo. E com isto, corrigir periodicamente a estimativa de estado do veículo.

## Referências Geométricas

O procedimento para se medir distâncias com ultra-som é bastante conhecido (veja Gross (1978), p. ex.). Emite-se um tom de ultra-som e mede-se o tempo decorrido até a chegada do seu primeiro eco. Este tempo é conhecido como tempo de vôo ou TOF (do inglês "Time of Flight"). Vejamos então como localizar elementos do ambiente através do ultra-som.

Imagine um transdutor montado sobre um eixo vertical e colocado frente a um anteparo plano. Observa-se que a amplitude do eco atinge valor máximo quando o transdutor se encontra voltado perpendicularmente ao anteparo (Kuc, 1990). Nesta situação, tem-se a menor distância entre o transdutor e o ponto visado no plano, e tem-se também o máximo de energia emitida retornando para o transdutor, conforme ilustra a Fig. 2.

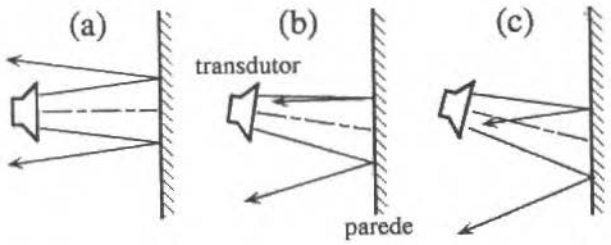



**Fig. 2 Eco gerado por um anteparo plano: a incidência perpendicular; b oblíqua; c eco não recebido**

Note que, devido à abertura do cone principal de radiação do transdutor, ecos são recebidos ao longo de uma estreita faixa angular em torno da direção perpendicular à parede; e dentro desta faixa, a mesma distância perpendicular é medida. Isto faz com que paredes (e também cantos e cilindros, como se observa na Fig. 3) apareçam como arcos de raio constante em imagens de sonar, denominadas regiões de profundidade constante (ou RCD, "Regions of Constant Depth") em Leonard (1991).

Se tomarmos agora um anteparo formado por dois planos concorrentes (como um canto fechado, formado por duas paredes) vamos notar que a amplitude do eco também passa por um máximo quando o transdutor está voltado diretamente para o canto (Kuc, 1990). Analogamente, o mesmo fato se verifica para anteparos cilíndricos, tais como pilares ou colunas, conforme mostra a Fig. 3.

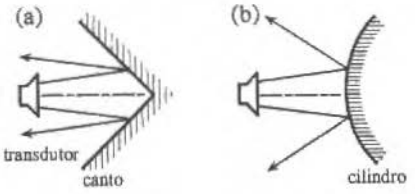



**Fig. 3 Ecos gerados por: a cantos; b cilindros**

Portanto, tem-se um procedimento para localizar cantos, paredes ou pilares cilíndricos do ambiente: faz-se uma varredura angular com um sensor de ultra-som, e determinam-se o tempo de vôo e a amplitude de cada eco. As direções em que resultarem máximos locais de amplitude corresponderão a possíveis referências geométricas.

Entretanto, não se pode distinguir uma referência de outra a partir de apenas uma varredura. Mais ainda, varrendo-se toda a volta do transdutor, obtém-se um mapa polar de amplitudes de onde vários máximos locais podem ser isolados. É o que ilustra o exemplo da Fig. 4: a posição de cantos e paredes

é bem destacada, porém são observados alguns outros pontos de máximo local que não correspondem a qualquer referência do ambiente, e que surgem devido a ruído ou aos lóbulos laterais de radiação do transdutor.

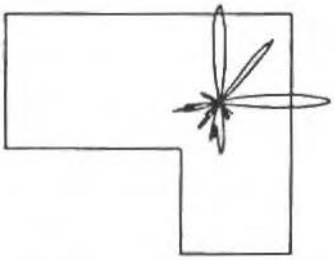


**Fig. 4 Mapa polar de amplitudes de ecos recebidos**

Desta forma, seria computacionalmente dispendioso isolar os pontos corretos, classificar e correlacioná-los com as referências do ambiente. Para contornar este problema, toma-se como ponto de partida a posição e orientação do veículo estimados odometricamente, e restringe-se a varredura a uma estreita faixa angular na qual uma dada referência pode ser encontrada com grande probabilidade.

Note ainda que todas as distâncias determinadas dentro da região de profundidade constante (RCD) de uma referência correspondem à distância desejada. Isto significa que estas medidas podem ser processadas pelo sistema de navegação, mesmo que sejam tomadas em direções diferentes mas próximas à correta. Porém, a direção correta somente pode ser conhecida ao término de uma varredura, o que implica processar informações com atraso. Este problema é analisado na seção "Atraso da Direção $\alpha$".

## Navegação e Estimação de Estados

A navegação do veículo pode ser vista como um problema de estimação de estados: dado um sistema dinâmico movendo-se em um espaço bi-dimencional, deseja-se determinar seu sub-vetor de estados $[x\ y\ \theta]^T$, ou seja, as coordenadas cartesianas e o ângulo de orientação $\theta$. Para tanto, necessitamos estabelecer um modelo matemático para o sistema.

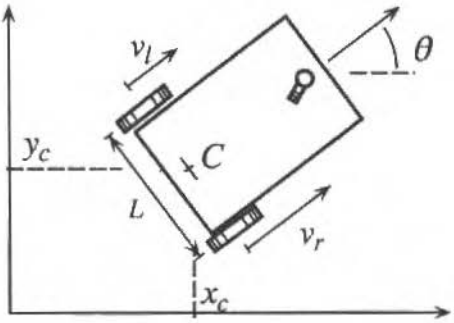



**Fig. 5 Estrutura do veículo Ariel e suas variáveis de estado**

O veículo utilizado neste trabalho (denominado Ariel e descrito em Adamowski (1990)) está esquematizado na Fig. 5. Trata-se de um veículo de três rodas: as duas traseiras são tracionadas por 2 motores elétricos independentes; a roda dianteira é livre e apenas sustenta a frente do veículo. Acoplados aos motores, taco-geradores permitem a leitura das velocidades angulares das rodas traseiras.

Vamos definir o ponto C como sendo o ponto médio entre as rodas traseiras, e utilizemos as coordenadas $(x_c, y_c)$ deste ponto para localizar o veículo no plano. O ângulo $\theta$ fornece a orientação da frente do veículo com relação ao eixo x. Sejam $v_r$, $v_l$ as velocidades de deslocamento dos eixos das rodas direita e esquerda, respectivamente. Indicando a variável tempo por t, e denotando derivadas com relação a t por um ponto, tem-se a cinemática do veículo descrita por

$$\dot{x}_c(t) = \frac{v_r(t) + v_l(t)}{2} \cos\theta(t)$$

$$\dot{y}_c(t) = \frac{v_r(t) + v_l(t)}{2} \sin\theta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_r(t) - v_l(t)}{2} \qquad (1)$$

onde L é a distância entre as rodas traseiras.

Infelizmente, as funções de transição das velocidades $v_r$ e $v_l$ são não lineares e acopladas, devido aos torques de rotação que são impostos às rodas quando o veículo percorre trajetórias curvas. Entretanto, Cozman (1991) verificou experimentalmente que estes torques podem ser desprezados desde que o veículo rode dentro de suas condições nominais de carga, velocidade e raio de curvatura (para o veículo Ariel, estes valores são, respectivamente, de 50 kg, 0,3 m/s e 1 m). Desta forma, as Eqs. dinâmicas se simplificam a

$$\dot{v}_r(t) = -\frac{v_r(t)}{T_m} + \frac{u_r(t)}{T_m}$$

$$\dot{u}_l(t) = -\frac{v_l(t)}{T_m} + \frac{u_l(t)}{T_m} \qquad (2)$$

onde $T_m$ é a constante de tempo dos motores (assumidos iguais), e $u_r$ e $u_l$ são as velocidades de referência impostas aos motores como entradas. O valor de $T_m$ depende da massa total do sistema, mas pode ser corrigido medindo-se o peso da carga durante a operação.

Podemos agora definir o vetor de estados x e o vetor de entradas u do sistema, por

$$x(t) = \left[x_c(t)\ \ y_c(t)\ \ \theta(t)\ \ v_r(t)\ \ v_l(t)\right]^T$$

$$u(t) = \left[u_r(t)\ \ u_l(t)\right]^T$$

As velocidades das rodas podem ser lidas através dos taco-geradores, portanto são saídas do sistema. Define-se então o vetor v por

$$v(t) = \left[v_r(t)\ v_l(t)\right]^T$$

Definindo-se f como a função de transição do sistema, e sendo ainda z um vetor de saída lido através de uma função de saída h, pode-se descrever o sistema na forma genérica

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + \omega(t)$$

$$z(k) = h(x(k)) + \psi(k) \qquad (3)$$

onde as saídas z são amostradas em intervalos discretos k.

Atente para os vetores $\omega$ e $\psi$ adicionados às Eqs. 3: são compostos por variáveis aleatórias e modelam processos estocásticos de erros e ruídos intrínsecos ao sistema real. Estes vetores não são correlacionados entre si e nem com a estimativa do estado inicial do sistema. Suas matrizes de covariância são dadas por Q(t) e R(k).

Assumindo que dispomos de uma estimativa para o vetor de estados x num certo instante k, vamos denotá-la por $x^-(k)$. Seja ainda $P^-$ matriz de covariância do erro $e_x^-$ entre o valor real do estado e sua estimativa. Sendo $\varepsilon$ o funcional expectância, temos

$$e_x^-(k) = x^-(k) - x(k)$$

$$P^-(k) = \varepsilon\{e_x^-(k)\, e_x^{-T}(k)\} \qquad (4)$$

Aplica-se o Filtro de Kalman (veja, por exemplo, Gelb (1986) ou Brown (1993)) para atualizar a estimativa primária $x^-$ pelas saídas z. A estimativa gerada $\hat{x}$ é tal que os elementos da diagonal principal de sua matriz de covariância $\hat{P}$ são os menores possíveis. Ou seja, a estimativa atualizada é ótima no sentido de mínima incerteza. O Filtro permite que diferentes saídas sejam processadas de forma consistente e computacionalmente eficiente.

Como o veículo constitui um sistema não linear, utiliza-se o Filtro de Kalman Estendido. Omitindo-se os índices k (escreveremos $h(x^-)$ no lugar de $h(x^-(k))$, p.ex.), o filtro pode ser expresso pelas seguintes expressões:

$$K = P^- H^T [H P^- H^T + R]^{-1}$$

$$\hat{x} = x^- + K[z - h(x^-)]$$

$$\hat{P} = [I - KH]\, P^- [I - KH]^T + KRK^T \qquad (5)$$

O fator de correção K é conhecido como ganho de Kalman. A matriz H é o jacobiano da função de saída h(x), calculada em $x = x^-(k)$.

Por fim, projeta-se a estimativa $\hat{x}(k)$ e de sua incerteza $\hat{P}(k)$ para o instante seguinte $k+1$: estes serão os valores de $x^-$ e $P^-$ processados pelo filtro no próximo instante de amostragem das saídas. Para isto, integra-se as Eqs. 6 com condições iniciais dadas por $\hat{x}(k)$ e $\hat{P}(k)$.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P^T(t)F^T(t) + Q(t) \quad (6)$$

onde a matriz F é o jacobiano da função de transição f(x, u) do sistema.

## Leitura do Transdutor de Ultra-Som

Para que o filtro de Kalman possa utilizar as informações geradas pelo ultra-som, devemos relacioná-las de alguma forma com o vetor de estado do veículo, através de uma função de saída do tipo $z(k) = h(x(k))$.

A Fig. 6 mostra como descrever referências (paredes, cantos e cilíndros) como entidades geométricas. Na Fig. 6a, uma parede é descrita pela Eq. $ax + by = c$ (a, b, c são constantes reais) de uma reta no plano. Neste caso, o ângulo de direção $\alpha$ e a distância d são dadas pela direção perpendicular à parede, isto é:

$$\alpha(k) = \arctan(-a/b) - \theta(k) + n\pi/2$$

$$n = \begin{cases} 1 & \text{se } ax_c + by_c - c < 0 \\ -1 & \text{se } ax_c + by_c - c > 0 \end{cases}$$

$$d(k) = \left| \frac{ax_c(k) - by_c(k) - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad (7)$$

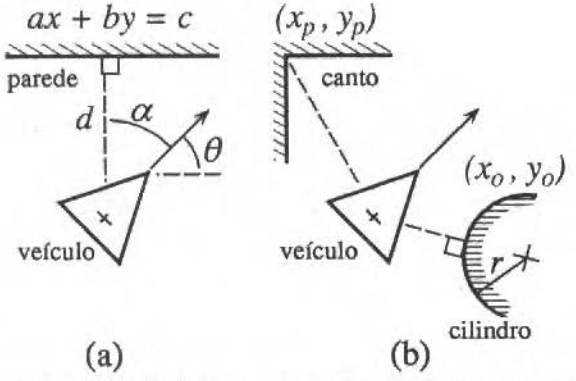



**Fig. 6 Parametrização de referências geométricas: a) parede; b) canto e cilindro**

Expressões para as demais referências geométricas são derivadas analogamente. Na Fig. 6b, um canto é determinado pelas suas coordenadas $(x_p, y_p)$. Deste modo, tem-se que:

$$\alpha(k) = \text{atan2}(y_p - y_c(k), x_p - x_c(k)) - \theta(k)$$

$$d(k) = \sqrt{(x_p - x_c(k))^2 + (y_p - y_c(k))^2} \quad (8)$$

onde $\text{atan2}(a, b)$ é a extensão da função atan(a/b) para o conjunto imagem angular completo $[-\pi, +\pi]$.

Por sua vez, um cilindro é descrito pelo raio r da base e pelas coordenadas $(x_o, y_o)$. As expressões neste caso resultam:

$$\alpha(k) = \operatorname{atan2}(y_o - y_c(k), x_o - x_c(k)) - \theta(k)$$

$$d(k) = \sqrt{(x_o - x_c(k))^2 + (y_o - y_c(k))^2} - r \qquad (9)$$

## Região de Varredura

Precisamos determinar uma faixa angular em torno do veículo dentro da qual uma dada referência pode ser encontrada com boa probabilidade, de forma a restringir a varredura aos seus limites.

Dada uma estimativa do estado do veículo, a direção mais provável para se encontrar um referência é fornecida pelas Eqs. 7, 8 e 9, substituindo-se os estados $(x_c, y_c, \theta)$ pelos seus valores estimados $(x_c^-, y_c^-, \theta)$. Chamaremos esta estimativa $\alpha^-$. Analogamente, podemos definir $d^-$ como sendo a provável distância à referência.

Vamos denotar estas saídas genericamente por um vetor $z^-$, definido por

$$z^-(k) = h(x^-(k)) \qquad (10)$$

Suponha que se deseja medir o valor dessas saídas com um instrumento sujeito a um vetor de erros estocásticos $\psi'$. Vamos definir o erro $e_z^-$ como sendo diferença entre o valor que seria medido e a estimativa $z^-$. Isto é,

$$e_z^- = h(x(k)) + \psi'(k) - h(x^-(k)) \qquad (11)$$

Seja $S_z^-$ a matriz de covariância deste erro. Assumindo que o ruído $\psi'$ é gaussiano, branco e independente da estimativa do estado $x^-$, podemos aproximar $S_z^-$ por

$$S_z^-(k) \approx H(k) P^-(k) H^T(k) + R'(k) \qquad (12)$$

Novamente, a matriz H é o jacobiano da função de saída h, e R' é a matriz de covariância do ruído $\psi'$.

Para as medidas feitas pelo ultra-som, o vetor z é composto pela distância d e pela direção $\alpha$. Neste caso, a matriz de covariância do erro da estimativa será de ordem 2, a qual denotaremos $S_{\alpha d}^-$. Esta matriz de covariância já embute as incertezas do processo de medida (devidas ao ruído $\psi'$) de $\alpha$ e d; portanto, podemos utilizá-la para estabelecer margens de erro para a varredura.

Sejam $e_\alpha^-$ e $e_d^-$ os erros entre os valores estimados e efetivamente medidos de $\alpha$ e d, respectivamente. A equação seguinte delimita uma elipse no plano $e_\alpha^-$ x $e_d^-$ que corresponde a uma região em torno da posição estimada $(\alpha^-, d^-)$ dentro da qual a referência desejada pode ser encontrada com pelo menos 98,9 % de certeza. Uma dedução desta expressão pode ser encontrada, por exemplo, em Bryson Jr (1975)

$$\begin{bmatrix} e_\alpha^- & e_d^- \end{bmatrix} S_{\alpha d}^- \begin{bmatrix} e_\alpha^- \\ e_d^- \end{bmatrix} \le 3^2 \qquad (13)$$

Note que a região dada por Eq. 13 define também uma região de aceitação. Ou seja, valores medidos de $\alpha$ e d que não definam um ponto dentro desta área podem ser descartados, uma vez que se pode afirmar com grande segurança que não correspondem à referência procurada.

Por simplificação, adotaremos a região apresentada na Fig. 7. Os termos $\sigma_\alpha^-$ e $\sigma_d^-$ representam os desvios-padrão dos erros das estimativas $\alpha^-$ e $d^-$, respectivamente. Seus valores são fornecidos pela raiz quadrada dos elementos da diagonal principal de $S_{\alpha d}^-$.

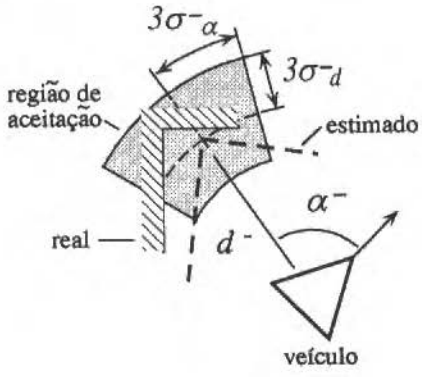



**Fig. 7 Região de aceitação de uma varredura**

## Incertezas nas Medidas de Direção e Distância

Na seção anterior, definiu-se o vetor $\psi'$ como sendo o vetor de ruídos que afetam a medida da direção $\alpha$ e da distância d. Pode-se supor que suas componentes sejam independentes entre si, o que conduz a uma matriz de covariância diagonal, dada por

$$R' = \text{diag}[r'_\alpha \; r'_d] \tag{14}$$

Neste trabalho, o tempo de vôo (TOF) do eco é determinado quando a amplitude do sinal recebido ultrapassa um determinado limiar. Seguindo outros autores, como Sasaki (1984), vamos adotar o desvio padrão da medida de d como sendo metade do comprimento de onda utilizado. Portanto, teremos

$$r'_d = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \tag{15}$$

Já o erro do ângulo $\alpha$ não pode ser mensurado com a mesma simplicidade, uma vez que $\alpha$ é determinado de forma indireta a partir das amplitudes dos ecos. Neste trabalho, a incerteza de $\alpha$ é determinada graficamente, adaptando-se a abordagem descrita em Barshan (1990).

As amplitudes de eco são determinadas pelo sistema de ultra-som por um circuito detetor de pico, colocado à saída do circuito de amplificação e filtragem do sinal de eco. Inicialmente, determina-se estatisticamente a dispersão das medidas de amplitude. Determina-se então o desvio-padrão $\sigma_p$ dos valores de pico determinados pelo sistema sensor.

A Fig. 8 mostra uma varredura típica de uma parede. No gráfico, temos a amplitude do eco recebido em função do ângulo de inclinação do transdutor de ultra-som. Em $\alpha = 0$, tem-se o transdutor orientado perpendicularmente ao anteparo, e é onde se observa o ponto de máxima amplitude. As linhas pontilhadas foram traçadas somando-se e subtraindo-se $3\sigma_p$ dos pontos que definem a curva de amplitude.

Estas linhas demarcam uma margem de erro para os picos de amplitude. Ou seja, os erros das medidas estão restritos a esta margem com uma probabilidade de pelo menos 99,7%. Isto significa que, com a mesma certeza, o valor de pico máximo deverá se situar dentro da faixa 2δ indicada na Fig. 8. Esta faixa é dada por uma reta que passa pelo ponto de máximo da curva pontilhada inferior, e é delimitada pela curva superior.

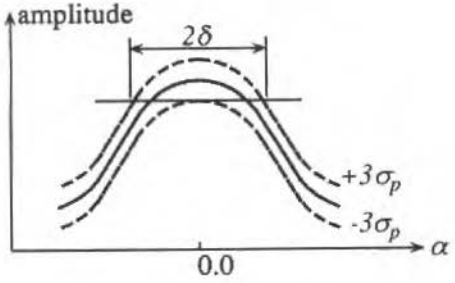



**Fig. 8 Margens de erro da direção α**

Portanto, o desvio de α em torno do valor de pico pode ser aproximado por δ/3. Da mesma forma, podemos aproximar a sua variância por

$$r'_{\alpha} = \left(\frac{\delta}{3}\right)^2 \tag{16}$$

## Atraso da Direção α

O valor de α somente é determinado ao final de uma varredura, o que implica que α não é função do estado atual x(k), mas sim de um estado atrasado no tempo.

Suponha o sistema linear discreto abaixo, cujo vetor de saídas z é função de um estado atrasado a instantes no tempo.

$$x(k+1) = \Phi(k)\,x(k) + \omega(k)$$

$$z(k) = J(k)\,x(k-a) + \psi(k) \tag{17}$$

Buscamos uma forma de corrigir nossa estimativa do estado atual com a saída atrasada z, na forma

$$\hat{x}(k) = x^{-}(k) + K(k)\,[z(k) - J(k)\,\hat{x}(k-a)] \tag{18}$$

O erro da estimativa corrigida será dada por

$$\hat{e}_x(k) = e_x^{-}(k) - K\left[J(k)\,\hat{e}_x(k-a) + \psi(k)\right] \tag{19}$$

Vamos omitir os índices k nas expressões seguintes para tornar a notação mais limpa. Assim, por exemplo, $e_x = e_x(k)$ e $x(-1) = x(k-1)$. Lembrando que o vetor de erros $\psi$ tem média nula, não é correlacionado com os erros $e_x$, e R é sua matriz de covariância, tem-se que a covariância do erro atualizado $\hat{e}_x$ é dado por:

$$\hat{P} = P^- + K\left[J\hat{P}(-a)J^T + R\right]K^T - \varepsilon\{e_x^-\hat{e}_x^T(-a)K^TJ^T + KJ\hat{e}_x(-a)e_x^{-T}\} \qquad (20)$$

Para determinar a correlação entre $e_x^-$ e $\hat{e}_x(-a)$, observe que as seguintes expressões são válidas (assume-se que em instantes anteriores apenas saídas sem atrasos foram processadas):

$$e_x^- = \Phi(-1)\hat{e}_x(-1) + \omega(-1)$$

$$\hat{e}_x(-1) = [I - K(-1)H(-1)]e_x^-(-1) - K(-1)\psi(-1)$$

$$e_x^-(-1) = \Phi(-2)\hat{e}_x(-2) + \omega(-2)$$

$$\hat{e}_x(-2) = [I - K(-2)H(-2)]e_x^-(-2) - K(-2)\psi(-2) \quad ...$$

Portanto, o erro $e_x^-$ pode ser relacionado com $\hat{e}_x(-a)$ por

$$e_x^- = \Gamma_{a-1}\Phi(-a)\hat{e}_x(-a) + \varepsilon_a \qquad (21)$$

onde definimos o termo $\varepsilon_a$ e a matriz $\Gamma_n$ (n, inteiro não negativo) por

$$\varepsilon_a = \sum_{i=1}^{a}\Gamma_{i-1}\omega(-i) - \sum_{i=1}^{a-1}\Gamma_{i-1}\Phi(-i)K(-i)\psi(-i)$$

$$\Gamma_n = \begin{cases} I & \text{se } n = 0 \\ \Gamma_{n-1}\Phi(-n)[I - K(-n)H(-n)] & \text{se } n > 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Substituindo $e_x^-$ por 21 na expressão 20, e lembrando que o termo $\varepsilon_a$ é também um vetor de erros gaussianos de média nula e não correlacionados com o erro $\hat{e}_x(-a)$, obtêm-se

$$\hat{P} = P^- + K\left[J\hat{P}(-a)J^T + R\right]K^T - \Gamma_{a-1}\Phi(-a)\hat{P}(-a)K^TJ^T +$$

$$+ KJ\hat{P}(-a)\Phi^T(-a)\Gamma_{a-1}^T \qquad (23)$$

Deve-se agora determinar o ganho de Kalman K que minimize os elementos da diagonal principal de $\hat{P}$. Seguindo o processo de minimização exposto em Brown (1993), cap. 9, e retornando os índices k, têm-se

$$L(k) = J(k)\hat{P}(k-a)J^T(k) + R(k)$$

$$K(k) = \Gamma_{a-1}\Phi(k-a)\hat{P}(k-a)J^T(k)L^{-1}(k)$$

$$\hat{x}(k) = x^-(k) + K(k)[z(k) - J(k)\hat{x}(k-a)]$$

$$\hat{P}(k) = P^-(k) - K(k)L(k)K^T(k) \qquad (24)$$

As expressões 24 foram deduzidas para o caso de um sistema linear. Para sistemas não lineares (como o estudado neste trabalho), uma etapa preliminar de linearização deve ser efetuada.

## Simulações

Alguns parâmetros utilizados nestas simulações foram tomados do veículo Ariel:

- Distância entre as rodas traseiras: $L = 0{,}73\,m$;
- Constante de tempo do sistema: $T_m = 0{,}35\,s$;
- Período de amostragem e controle: $t_s = 10ms$.

Todas as fontes de erro foram modeladas por processos gaussianos brancos e não correlacionados entre si, adicionados às entradas dos motores ($u_r$ e $u_l$ das Eqs. 2). Os desvios-padrão adotados foram $\sigma_{ur} = \sigma_{ul} = 0{,}025\,m/s$. Em outras palavras, na Eq. 3 temos: $\omega = \left[0\ 0\ 0\ \omega_{ur}\ \omega_{ul}\right]^T$ e $Q\,diag\left[0\ 0\ 0\ \sigma_{ur}^2\ \sigma_{ul}^2\right]$.

Os ruídos presentes às saídas dos tacogeradores também foram assumidos gaussianos brancos e não correlacionados entre si. Os desvios-padrão adotados foram $\sigma_{vr} = \sigma_{vl} = 0{,}05\,m/s$.

O transdutor de ultra-som utilizado possui 50 mm de diâmetro e opera em 42 kHz, o que lhe confere uma diretividade de 12° (abertura do lóbulo principal de radiação). Sendo a velocidade do som no ar de aproximadamente 340 m/s, tem-se um semi-comprimento de onda de 4 mm, e portanto $r'_d = 16mm^2$ (de acordo com a expressão 15). Várias varreduras foram executadas em diferentes anteparos fixos, de onde se determinou $2\delta \leq 9$ ou $r'_\alpha = 0{,}676\times10^{-3}rad^2$ (vide Fig. 8 e expressão 16).

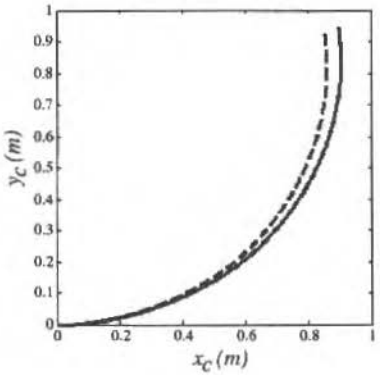



**Fig. 9 Trajetória simulada (linha contínua) e respectiva estimativa odométrica**

A Fig. 9 mostra um trajetória simulada. A linha contínua representa a trajetória "real" do veículo; a linha tracejada mostra a trajetória que foi estimada pelo Filtro de Kalman, processando-se apenas as saídas dos tacogeradores através das Eqs. 1 e 2. O movimento foi obtido através de degraus de

velocidade aplicados nas entradas dos motores, de amplitudes $u_r = 0{,}42$ e $u_l = 0{,}18$ m/s, a partir do repouso. Em regime, estas entradas produziriam uma trajetória circular de 0,9 m de raio e velocidade tangential de 0,3 m/s.

A Tabela 1 mostra os erros e respectivos desvios da posição e orientação do veículo (dados pela raiz dos correspondentes elementos da diagonal da matriz P) em alguns instantes de tempo.

**Tabela 1 Erros e desvios da estimação odométrica,**

| Tempo s | $\lvert e^-_{xc}\rvert$ mm | $\lvert e^-_{yc}\rvert$ mm | $\lvert e^-_{\theta}\rvert$ deg | $\sigma^-_{xc}$ mm | $\sigma^-_{yc}$ mm | $\sigma^-_{\theta}$ deg |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,67 | 0,47 | 0,44 | 3,45 | 3,71 | 1,10 |
| 2,0 | 5,32 | 2,35 | 0,85 | 5,29 | 9,06 | 1,23 |
| 3,0 | 10,03 | 3,01 | 0,48 | 8,61 | 13,97 | 1,34 |
| 4,0 | 10,71 | 7,04 | 0,38 | 13,76 | 17,26 | 1,45 |
| 5,0 | 12,97 | 4,94 | 0,49 | 20,37 | 18,54 | 1,55 |

$|e^-|$ : erros absolutos; $\sigma^-$ : desvios

A partir destes dados, verificaram-se as margens de erro resultantes para a procura de uma referência geométrica. Seja esta referência uma parede posta sobre o eixo y ($x = 0$) . A Tabela 2 mostra os erros entre os valores estimados $\alpha^-$ e $d^-$ e os valores "reais" . As margens de erro também são dadas.

Note que a margem $3\sigma^-_{\alpha}$ é sempre maior que o erro $e^-_{\alpha}$, ou seja, a direção correta se encontra dentro da faixa varrida, e portanto a referência pode ser localizada. Da mesma forma, a distância correta d está dentro da margem de erro $3\sigma^-_{d}$ em todos os casos. As faixas a serem varridas também resultam pequenas; como ilustração, suponha que a varredura seja feita em passos de 1 grau, tomando 4 ms para mover de um passo a outro, seja d igual a 1 m e a velocidade do som igual a 340 m/s. Nestas condições, cada medida levaria aproximadamente 10 ms para ser completada. Pela Tabela 2, o pior caso ($t = 4$s) requeriria 14 medidas, ou 0,14 s para completar a varredura.

**Tabela 2 Região de aceitação da varredura de uma parede**

| Tempo s | $\lvert e^-_{\alpha}\rvert$ deg | $3\sigma^-_{\alpha}$ deg | $\lvert e^-_{d}\rvert$ mm | $3\sigma^-_{d}$ mm |
|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 0,44 | 5,60 | 1,67 | 15,85 |
| 2,0 | 0,85 | 5,79 | 5,32 | 19,91 |
| 3,0 | 0,48 | 6,02 | 10,04 | 28,48 |
| 4,0 | 0,37 | 6,23 | 10,71 | 42,99 |
| 5,0 | 0,49 | 6,44 | 12,97 | 62,27 |

Parametrização da parede: $x = 0$

Na Tabela 3, apresentam-se as alterações nos erros ($\Delta e$) e incertezas resultantes ($\hat{\sigma}$) obtidos após o processamento da distância entre o veículo e uma parede em $x = 0$. A coluna $\Delta e_{xc}$ é definida por

$$\Delta e_{xc} = \left|e^-_{xc}\right| - \left|\hat{e}_{xc}\right|$$

analogamente, têm-se $\Delta e_{yc}$ e $\Delta e_{\theta}$.

Atualizações foram restritas a instantes singulares e não foram propagados para os instantes seguintes. Ou seja, uma linha t da tabela mostra o resultado obtido ao se processar uma distância d após t segundos de estimação odométrica.

Note que valores negativos da tabela se referem a casos nos quais "correções" conduziram a erros maiores. Este fato ilustra a natureza estocástica do Filtro de Kalman Estendido: em média, atualizações levam à redução dos erros, mas não se pode garantir que isto sempre aconteça. Entretanto, observe que os desvios $\sigma$ são sensivelmente reduzidos em todos os casos.

**Tabela 3 Alterações proporcionadas pela medida de distância a uma parede**

| Tempo s | $\Delta e_{xc}$ mm | $\Delta e_{yc}$ mm | $\Delta e_{\theta}$ deg | $\hat{\sigma}_{xc}$ mm | $\hat{\sigma}_{yc}$ mm | $\hat{\sigma}_{\theta}$ deg |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 1.47 | 0.04 | 0.06 | 2.61 | 3.71 | 1.10 |
| 2.0 | 5.22 | 1.64 | 0.53 | 3.19 | 8.70 | 1.15 |
| 3.0 | 8.25 | -2.96 | 0.00 | 3.62 | 11.11 | 0.98 |
| 4.0 | 10.12 | 3.88 | -0.16 | 3.84 | 10.97 | 0.81 |
| 5.0 | 11.84 | 0.93 | 0.01 | 3.93 | 10.44 | 0.72 |

Parametrização da parede: x = 0
Alterações não foram propagadas no tempo

A Tabela 4 mostra os resultados da simulação de uma atualização por $\alpha$ com relação à mesma parede em x = 0. Novamente, alterações não foram propagadas e são relativas aos valores expostos na Tabela 1. Em todos os casos, um atraso de 0.10 s foi adotado como o tempo requerido para completar uma varredura.

**Tabela 4 Alterações proporcionadas pela direção $\alpha$ a uma parede**

| Tempo s | $\Delta e_{xc}$ mm | $\Delta e_{yc}$ mm | $\Delta e_{\theta}$ deg | $\hat{\sigma}_{xc}$ mm | $\hat{\sigma}_{yc}$ mm | $\hat{\sigma}_{\theta}$ deg |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | -0.29 | -0.29 | -0.60 | 3.44 | 3.11 | 0.89 |
| 2.0 | 1.60 | -1.10 | -0.06 | 5.08 | 7.32 | 0.95 |
| 3.0 | 3.38 | -0.64 | 0.06 | 7.46 | 11.13 | 1.00 |
| 4.0 | 2.14 | 2.70 | 0.27 | 11.00 | 13.74 | 1.04 |
| 5.0 | 8.21 | 3.10 | 0.29 | 15.51 | 14.99 | 1.07 |

Parametrização da parede: x = 0
Alterações não foram propagadas no tempo

Apesar de ainda significativa, a redução de desvios é mais modesta no caso das atualizações por $\alpha$. O atraso de $\alpha$ contribui para tanto: é razoável supor que uma informação atrasada está relacionada de forma limitada com o estado atual do sistema. De fato, não é difícil encontrar casos em que a atualização por $\alpha$ não conduz a resultados satisfatórios. Por exemplo, a Tabela 5 mostra alguns resultados obtidos com um canto situado em (x = 0, y = 0,4m) e a mesma trajetória curva.

**Tabela 5 Pequenas reduções nos desvios proporcionadas pela direção $\alpha$ a um canto**

| Tempo s | $\Delta e_{xc}$ mm | $\Delta e_{yc}$ mm | $\Delta e_{\theta}$ deg | $\hat{\sigma}_{xc}$ mm | $\hat{\sigma}_{yc}$ mm | $\hat{\sigma}_{\theta}$ deg |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.0 | 2.29 | -0.07 | 0.32 | 13.67 | 17.26 | 1.42 |
| 5.0 | 0.75 | -1.29 | -0.76 | 20.35 | 18.48 | 1.52 |

Coordenadas do canto: x = 0, y = 0,4 m
Alterações não foram propagadas no tempo

Este problema é mais pronunciado para cantos e cilindros dada a natureza não linear da expressão de $\alpha$ nestes casos (Eqs. 8 e 9). Entretanto, atrasos menores permitem reduções significativas nos desvios, mesmo para estas referências.

## Discussão e Conclusões

Os resultados das simulações mostram que referências geométricas podem ser localizadas por transdutores de ultra-som. Desde que a incerteza de posição do veículo se mantenha baixa, varreduras com ultra-som podem ser restritas a faixas angulares estreitas, e portanto concluídas rapidamente. Deste modo, a navegação pode ser executada sem a necessidade de se parar o veículo.

Uma varredura proporciona duas informações: a distância e a direção entre o veículo e a referência. A distância é processada prontamente, conduzindo a significativas reduções nos erros e incertezas das estimativas das variáveis de estado. Por sua vez, devido ao atraso imposto pela varredura, o processamento da informação de direção requer considerável esforço numérico, mas também proporciona reduções significativas. Entretanto, atrasos excessivos tendem a comprometer as informações oferecidas pela direção $\alpha$, notadamente nos casos de cantos e cilindros, por serem não lineares.

O atraso de $\alpha$ pode ser reduzido utilizando-se mais de um transdutor, de forma a buscar mais de uma referência paralelamente em faixas angulares menores do que $3\sigma_\alpha$. Neste caso, as chances individuais de cada transdutor localizar sua referência tornam-se menores, mas a probabilidade de se encontrar pelo menos uma referência permanece a mesma. Nota-se que o algoritmo proposto pode operar mais de um transdutor sem dificuldades.

Assumiu-se que as referências a serem procuradas são fornecidas ao sistema, porém alguns problemas devem ser resolvidos para se escolhê-las adequadamente. Diferentes partes de uma trajetória podem requerer diferentes referências, devido a questões de visibilidade e proximidade. No caso de vários sensores de ultra-som serem utilizados, um conjunto de referências deve ser escolhido para cada um. Determinar *on-line* quais referências buscar não é uma tarefa trivial, porém, dadas as simplificações impostas ao ambiente de operação, é possível dividi-lo em regiões e levantar experimentalmente as referências mais adequadas para cada região. Outra possibilidade é adotar algumas heurísticas para que o próprio sistema possa eleger uma referência quando se encontrar em uma região e determinar as melhores ao longo da execução de algumas trajetórias.

Estes aspectos, juntamente com a implementação do algoritmo na plataforma de controle do veículo e testes reais de movimentação, constituem as atividades futuras deste trabalho.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Finep (Financiadora de Estudos e Projetos) pelo apoio financeiro fornecido para a implementação do sistema de medição por ultra-som, através do programa PADCT.

## Referências

Adamowski, J. C., Simões, M. G.; Cozman, F. G., 1990, "Desenvolvimento de um Robô Móvel", VIII CBA - Cong. Bras. de Automática, Belém, Brasil.

Barshan, B., Kuc, R., 1990, "Differentiating Sonar Reflections from Corners and Planes by Employing an Intelligent Sensor", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, EUA, Vol. 12, no. 6, pp. 560-569.

Bryson Jr., A. E., Ho, Y., 1975, "Applied Optimal Control - Optimization, Estimation and Control", Hemisphere Pub. Corp., EUA.

Brown, R. G., 1983, "Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering", John Wiley & Sons (EUA).

Cozman, F. G., Miyagi, P. E., 1991, "Controlador de Trajetória para o Robô Móvel Ariel - Solução por Controle Ótimo", dissertação de mestrado, Escola Politécnica da USP.

Elfes, A., 1989, "Using Occupancy Grids for Mobile Robot Perception and Navigation", IEEE Computer, EUA, pp. 46-57.

Gelb, A. (editor) et al., 1986, "Applied Optimal Estimation", MIT Press (EUA).

Gross, T. A., 1978, "Controlling with Ultrasonics", Machine Design, EUA, Mar. 9th, pp. 90-96.

Furukawa, C. M., Moscato, L. A., 1992, "navegação de um Veículo Autônomo por Ultra-Som em Ambiente Estruturado", dissertação de mestrado, Escola Politécnica da USP.

Kriegman, David J. et al., 1989, "Stereo Vision and navigation in Buildings for Mobile Robots", IEEE Trans. on Robotics and Automation, EUA, Vol. 5, no. 6, pp. 792-803.

Kuc, R., 1990, "A Spatial Sampling Criterion for Sonar Obstacle Detection", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, EUA, Vol. 12, no. 7, pp. 686-690.

Leonard, J. J., Durrant-Whyte, H. F., 1991, "Mobile Robot Localization by Tracking Geometric Beacons", IEEE Trans. ono. Robotics and Automation, EUA, Vol. 7, no. 3, pp. 376-382.

Sasaki, K., Takano, M., Ono, K., 1984, "Development of Ultrasonic Robot Sensor", Intern. Symp. on Design and Synthesis, Tokyo (Japão), pp. 672-677.

Thorpe, C. et al., 1988, "Vision and Navigation for the Carnegie-Mellon Navlab", IEEE Trans. on Patterns Analysis and Machine Intelligence, EUA, Vol. 10, no. 3, pp. 362-373.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993 - pp. 302-315

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Simulação Gráfica de Programas para um Robô Industrial

## *Graphical Simulation of Industrial Robot Programming*

**Orlando Mauricio Durán Acevedo**
**Geraldo Nonato Telles**
Depto. Engenharia dos Materiais
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP
Caixa Postal 6122 - CEP 13083-970
Fax (0192) 39-3722

### Abstract

This article describes the specification and implementation of a SCARA type industrial robot simulation system. This is a software package, which is composed by four main modules: an AML preprocessor, a lay-out management system, a graphical simulator and a configuration map-based automatic collision detection module. The system was written in TURBO PASCAL and currently runs under the MS-DOS Operating System.
**Keywords**: Robotics, Off-line Programming, Graphical Simulation

### Resumo

Este artigo relata a especificação e implantação de um protótipo de sistema de simulação "Off-line" para um robô industrial do tipo SCARA (IBM 7535). Trata-se de um pacote de software composto de quatro módulos principais: um interpretador da linguagem AML, um gerenciador de objetos e "Lay-outs", um simulador gráfico com seis possibilidades de visualização e um detetor automático de colisões baseado na construção de mapas de configuração. O simulador foi escrito em TURBO PASCAL e implantado num microcomputador sob o Sistema Operacional MS-DOS.
**Palavras-chave**: Robótica, Simulação Gráfica, Programação "Off-line"

## Introdução

No começo os robôs industriais foram dedicados a tarefas simples e repetitivas. Estas tarefas não requeriam alta precisão nem flexibilidade. Porém, atualmente, como pode ser observado na Fig. 1, a partir de estudos feitos nos Estados Unidos, a tendência indica que os robôs industriais incrementarão a sua participação em atividades onde é requerida maior capacidade e sofisticação. Uma atividade que verá incrementada substancialmente a sua incorporação ao campo da robótica industrial é a montagem, especificamente a montagem de componentes e conjuntos eletrônicos.

Por outro lado, existem outros dois fatos significativos. Primeiro, o mercado ao expandir-se, provoca uma alta competição entre fabricantes e vendedores deste tipo de sistemas. Esta alta competição obriga aos fabricantes cada vez a oferecer mais e mais ferramentas e accessórios relacionados a esta tecnologia, por exemplo sistemas CAD para programação, novos protocolos de comunicação, etc.

Analizando-se o gráfico da Fig. 2 vê-se que, apesar dos robôs industriais de sequencia fixa e variável e os programados por "play-back" ocuparem os primeiros lugares no parque instalado, estes estão destinados a ser substituidos pelos robôs comandados numericamente e pelos robôs "inteligentes". Blumenthal (1990) destacou que a proporção de robôs de seqüência fixa e variável, no parque instalado no Japão, diminuiu de 77% , em 1980, para 24% em 1987. Entretanto, os robôs controlados numericamente, aumentaram de 6% para 30% no mesmo periodo de tempo.

Isto implica em um incremento das necessidades de sistemas de programação "off line" e sistemas de suporte ao programador, de maneira a simplificar estas tarefas e viabilizá-las para o ambiente industrial.

Tem-se observado que a etapa de depuração e teste de um programa de aplicação para robôs chega até mais do dobro do tempo requerido no desenvolvimento deste programa (Buckley, 1985).

Manuscript received: June 1993. Technical Editor: Walter L. Weingaertner

Portanto, considerando a tendência da realidade industrial de diminuir os tempos de preparação das diferentes tarefas nas linhas de produção, torna-se importantíssimo otimizar os tempos de programação e teste dos equipamentos robotizados; essa realidade é um desafio e uma grande chance de sucesso para o uso de sistemas de programação "off line".

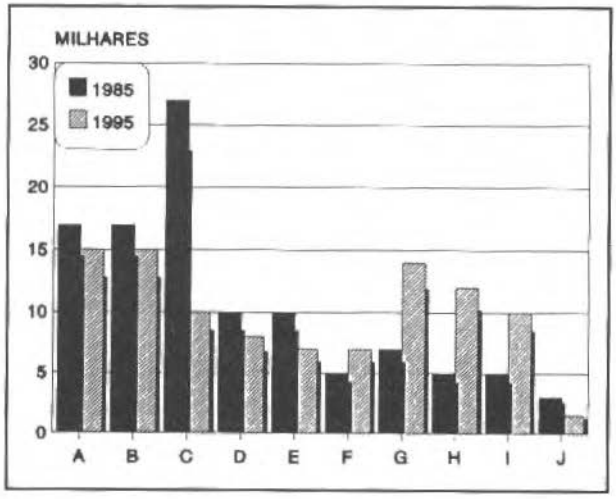



**Fig. 1 Distribuição de robôs por aplicação nos E.U.A.**
**A - alimentação de máq. ferr.; B - transferência de material; C - soldagem a ponto; D - soldagem a arco; E - pintura/revestimento; F - processamento (incl. aplic. de manipulação de ferramental); G - mont. eletrônica; H - outras montagens; I - inspeção; J - outros**

Usualmente a programação "off-line" combina o uso da simulação gráfica para produzir e analisar um plano desejado de trajetórias e/ou o programa de aplicação (Stobart, 1985). Assim, o movimento do manipulador, e ocasionalmente, a interação com outros equipamentos são mostrados na tela de um computador, permitindo suscessivas depurações do programa, diminuindo sensivelmente o tempo requerido pelas etapas de depuração e "try-out" (Feldman, 1991).

Este tipo de ferramenta faz com que os engenheiros reduzam em cerca de 30% os tempos de planejamento e programação de sistemas robotizados (Chan, 1988).

Diversos sistemas têm sido criados, com diferentes graus de sofisticação, existindo desde sistemas que representam esquematicamente o manipulador e os seus movimentos (Weck, 1987; Langrudi, 1987), até versões mais complexas que usam recursos CAD em 3 dimensões e técnicas de modelamento de sólidos permitindo inclusive a detecção automática de colisões (Bonney, 1987; Stobart,1987; Lee, 1990). Esta última geração de sistemas, infelizmente deriva em altos custos de investimento em equipamento computacional.

Dentro deste contexto, e com o objetivo específico de facilitar a programação "off-line" e os testes posteriores dos programas criados para um robô industrial, desenvolveu-se um sistema que auxilia ao programador na definição e visualização das trajetórias definidas por um programa na linguagem AML. Como plataforma básica de teste do sistema utilizou-se um robô tipo SCARA da IBM modelo 7535.

Um dos objetivos propostos é desenvolver-se um software de apoio de baixo custo e simplicidade operacional e, considerando o fato que os sistemas de simulação gráfica baseados em PCs normalmente constituem menos da metade do preço dos sistemas baseados em arquiteturas mais complexas ("workstations" e "mainframes") (Karami, 1991), optou-se por microcomputadores da geração XT/AT (compatíveis com IBM), devido principalmente a seu baixo custo e à sua alta difusão e presença nas indústrias brasileiras e no mundo todo.

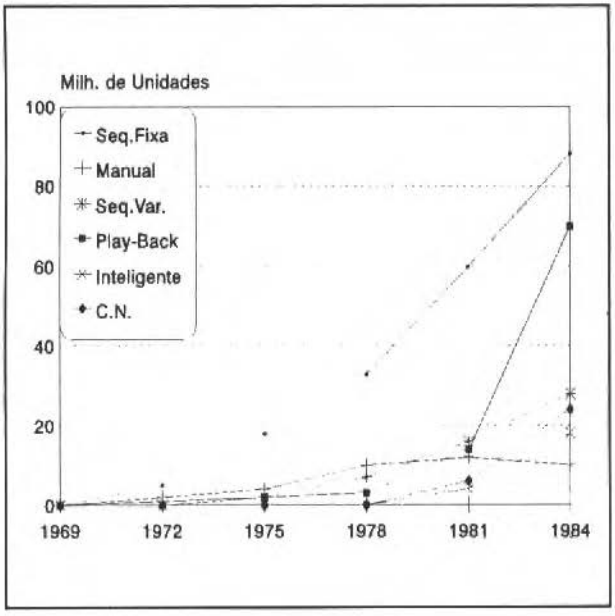



**Fig. 2 População de robôs industriais segundo método de programação**

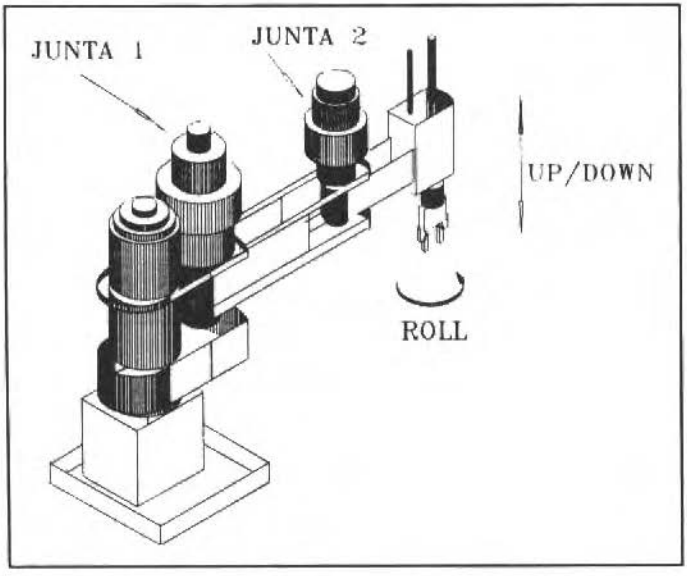



**Fig.3 Esquema geral do robô SCARA (IBM 7535)**

## O Manipulador

O IBM 7535 é um robô industrial do tipo SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm ou Braço de Robô de Montagem por Complacência Seletiva ) de 3 1/2 eixos controlados, muito usado em uma variedade de operações de montagem leve. Os tipos de operações mais comuns são as do tipo "pega e põe" ("pick and place") e operações de paletização (Craig, 1985) (Fig. 3). O intervalo angular das duas primeiras juntas é o seguinte: junta 1 - $0 < \theta_1 < 200^\circ$ , junta 2 - $0 < \theta_2 < 160^\circ$ .

Segundo estes intervalos permitidos para cada uma das juntas determina-se o "envelope de trabalho" para o manipulador. Uma projeção no plano horizontal XY é mostrada na Fig. 4.

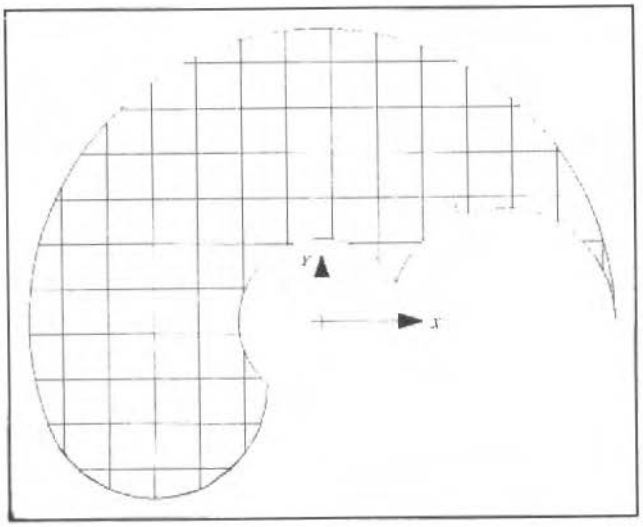



**Fig. 4 Espaço de trabalho do SCARA**

A denominação de 3 1/2 eixos controlados prende-se ao fato de que o terceiro elo tem apenas duas posições permitidas (UP e DOWN) acessadas por software, não sendo possível o posicionamento contínuo do atuador no eixo vertical, este posicionamento será então apenas discreto.

O último grau de liberdade está dado pelo movimento rotacional da garra, este movimento rotacional é chamado de ângulo "roll" e é feito em função do eixo Z.

Para representar a cadeia cinemática do robô, são fixados sistemas de coordenadas em cada um dos elos e no atuador. Estes sistemas são definidos e fixados de maneira que coincidam com os referenciais locais usados na definição dos vértices de cada um dos elos. Eles são numerados começando pela base imóvel do braço, ao qual é fixado o referencial 0. O primeiro elo móvel recebe o referencial 1, e assim em diante até o segmento livre - o atuador - que tem fixado a ele o sistema referencial 4. A localização destes referenciais é mostrada na Fig. 5.

Considerando a posição dos referenciais especifcada na Fig. 5 são obtidos os parâmetros de Denavit-Hartemberg para o manipulador SCARA (Denavit e Hartemberg, 1955). Estes parâmetros são detalhados na Tabela 1.

Para realizar a representação gráfica do manipulador deve-se converter cada uma das coordenadas dos elos definidas em função do referencial local a uma representação relativa ao referencial absoluto (referencial 0). Usando os parâmetros de Denavit-Hartemberg pode-se determinar as transformações que definirão, de uma maneira geral, as posições relativas ao sistema de referência {i}, com respeito de um outro referencial {i-1}.

**Tabela 1 Parâmetros de Denavit-Hartemberg para um robô SCARA**

| Junta | θ | α | a | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1$ | 0° | 0 | 0 |
| 2 | $\theta_2$ | 0° | $L_1$ | 0 |
| 3 | 0 | 180° | $L_2$ | $-d_3$ |
| 4 | $\theta_4$ | 0° | 0 | $L_3$ |

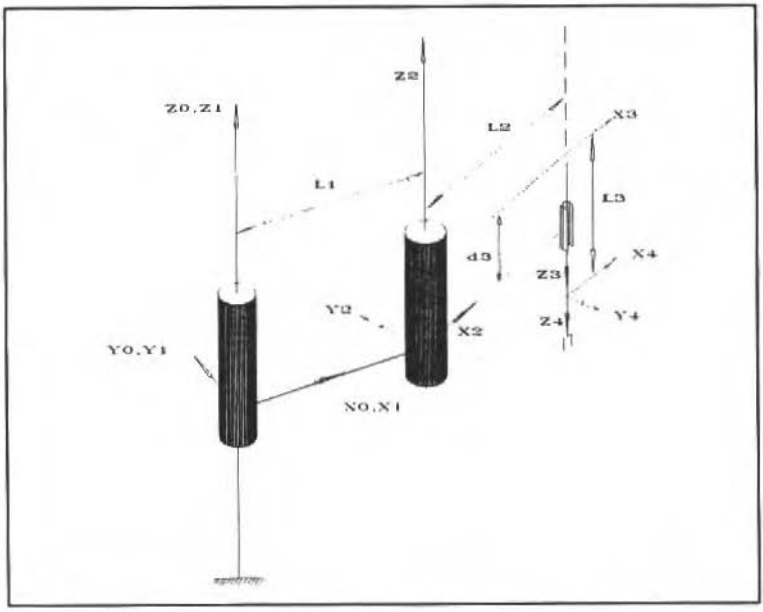



**Fig.5 Esquema de localização dos referenciais no manipulador**

Cada uma destas transformações representa de maneira geral duas traslações e duas rotações, como expresso na seguinte equação:

$$ {}^{i-1}_{i}T = R_x(\alpha_{i-1})\, D_x(a_{i-1})\, R_z(\theta_i)\, D_z(d_i) \qquad (1) $$

ou

$$ {}^{i-1}_{i}T = \mathrm{Screw}_x(a_{i-1}, \alpha_{i-1})\, \mathrm{Screw}_x(d_i, \theta_i) \qquad (2) $$

Onde a notação ScrewQ(r,γ) define uma traslação ao longo do eixo Q de distância r, e uma rotação em torno do mesmo eixo de um ângulo γ.

Fazendo as multiplicações em 1 ou em 2 obtém-se a forma geral da transformação ${}^{i-1}_{i}T$:

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{matrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \text{sen}\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\text{sen}\alpha_{i-1} & -\text{sen}\alpha_{i-1}d_i \\ \text{sen}\theta_i\text{sen}\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\text{sen}\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (3) $$

Assim, usando os parâmetros da Tabela 1 e a Eq. 3 pode-se determinar as quatro transformações necessárias para definir a representação dos pontos pertencentes a um elo em relação ao elo anterior na cadeia cinemática.

Obtendo cada uma das quatro matrizes de transformação homogêneas (uma para cada junta) a partir da informação existente na tabela gerada pelo pré-processador, pode-se calcular a posição de cada vértice respeito do referencial absoluto (fixo na base do manipulador).

A seguinte equação permite realizar estas transformações para todos os pontos que definem a totalidade do manipulador:

$$ P_{i,0} = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot \ldots \cdot {}^{j-1}_{j}T \cdot P_{i,j} \quad (4) $$

Onde i representa cada um dos vértices de cada elo (i = 1, ... , 8) e j representa cada elo (j = 1. ... , 4). Note-se que estas multiplicações são de uma ou várias matrizes por um vetor, portanto deve-se considerar a ordem da multiplicação, já que o produto de matrizes ou de uma matriz por um vetor não é comutativo.

O processo de representação gráfica lê cada um dos ângulos existentes na tabela e avalia a equação gerando a nova posição de todos os vértices (dos elos e da garra) com as suas coordenadas definidas com respeito da base do robô. Uma vez que esse processo é terminado, as coordenadas são unidas através de linhas formando cada uma das arestas.

Finalmente estas linhas são exibidas na tela, completando a representação do manipulador na configuração dada.

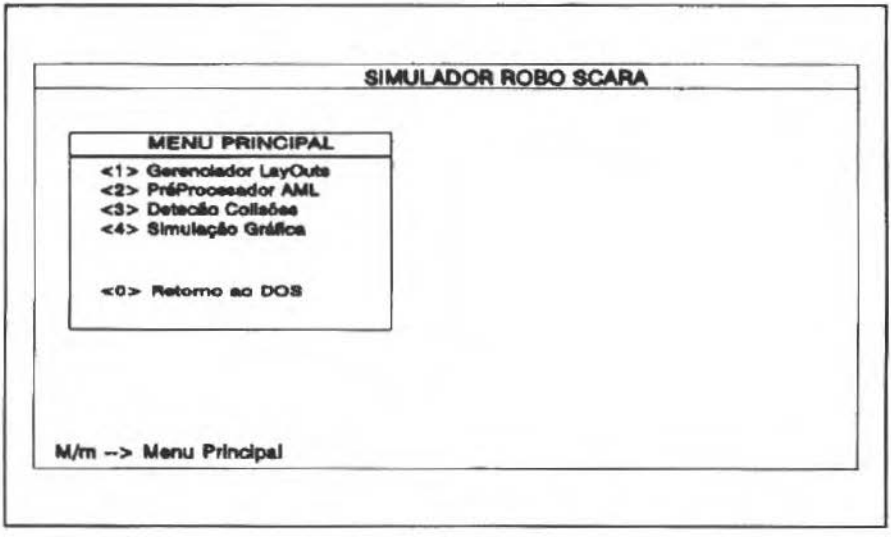



Fig. 6 Menu principal do sistema

## Estrutura do Sistema

A Fig. 6 mostra o Menu Principal do sistema.

Uma vez editado o programa em AML o usuário estará capacitado para realizar os testes e o processo de depuração interativa ("try-out"). Como primeiro passo a ser realizado o programa deve ser pré-processado. Este procedimento é realizado no módulo Pré-processador e é feito em duas etapas. Na primeira o programa é interpretado para construir o plano de trajetórias, para posteriormente realizar os processos de interpolação para cada uma das trajetórias. Uma vez que o pré-processador já calculou cada uma das coordenadas (no espaço de juntas) para o programa em questão, este pode ser validado visualmente através da tela usando o módulo Simulador Gráfico.

Estas simulações podem incorporar a representação dos elementos adicionais que formarão parte da aplicação. Para este objetivo existe o módulo Gerenciador de "Lay-outs". Nele o usuário pode criar, modificar e alocar objetos e/ou conjuntos de objetos, chamados de "Lay-outs", com o objetivo posterior de alcançar uma representação mais real da aplicação, do manipulador e da disposição do envelope de trabalho.

## Pré-processador

Como já foi dito, um dos objetivos principais na elaboração deste sistema é provar a factibilidade e eficiência dos programas robóticos escritos numa linguagem textual. Através da representação gráfica, o programador poderá testar a lógica usada nos algoritmos, além de comparar diversas configurações do espaço de trabalho e principalmente otimizar as trajetórias do manipulador em função dos requerimentos e restrições da aplicação específica.

A principal atribuição dessa representação é a alta confiabilidade e grau de realismo na visualização da execução do programa. Em outras palavras, o simulador deve mostrar inequivocamente, o que o programador expressou através do algoritmo e pelo uso de uma linguagem de programação off-line.

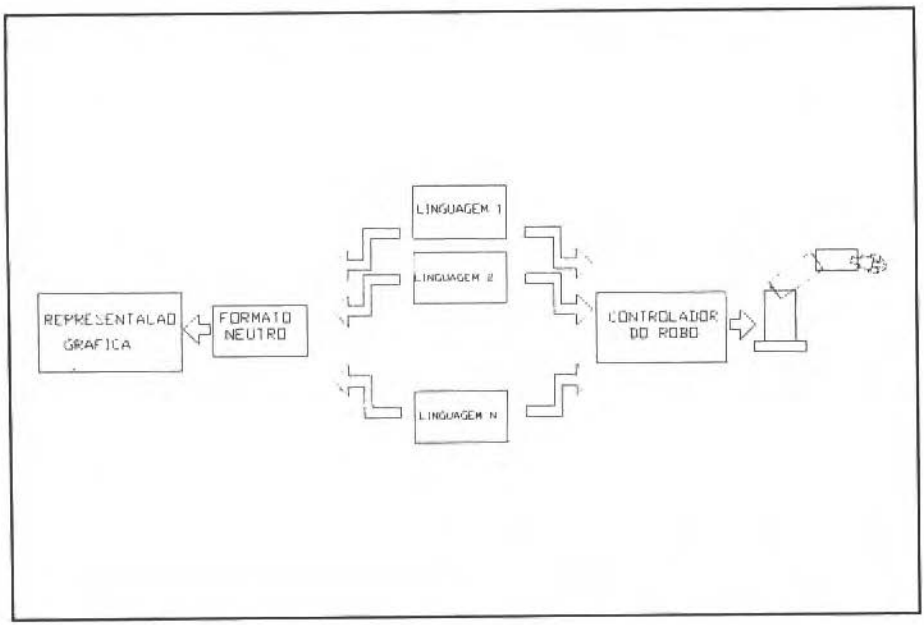



**Fig. 7 Conceito de interface neutra na simulação**

Para possibilitar a adequação do simulador gráfico a diferentes linguagens de programação textuais, existe a necessidade de definir um formato neutro de comunicação entre estas diferentes linguagens e o módulo de representação gráfica (Courtney, 1981).

A Fig. 7 esquematiza o conceito de Interfaces Neutras. A transferência é realizada a partir de um arquivo nativo, neste caso um programa escrito numa linguagem de programação textual, para um arquivo neutro, cujo formato é entendido pelo sistema de representação gráfica. Esta operação é feita através de um software chamado pré-processador.

Os pré-processadores constituem a única parte dependente da linguagem de programação que está sendo usado para definir as tarefas do manipulador, e deve ser construído um para cada linguagem que se deseje simular. Porém, ao se analisar as linguagens de programação textual existentes hoje em dia, conclui-se que suas estruturas e comandos possuem grande semelhança. Isto implicará na possibilidade de diversos pré-processadores compartilharem uma mesma estrutura principal e possivelmente alguns deles terão relativamente pequenas modificações.

A seguir são apresentados os principais conceitos da estrutura do pré-processador construído para programas escritos na linguagem AML.

Este sistema está composto por dois programas principais, o interpretador que realiza, a partir do programa em AML, a construção da tabela de trajetórias, e um interpolador que, usando como entrada a tabela de trajetórias definidas pelo programa anterior, calcula todos os pontos intermediários para cada uma dessas trajetórias. O seguinte esquema representa o processo completo (Fig. 8).

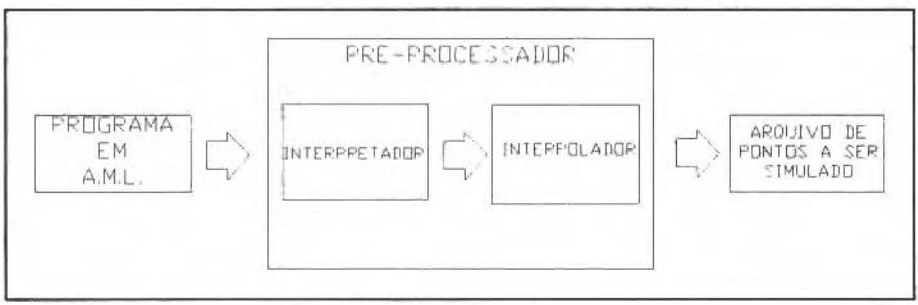



**Fig.8 Esquema do mecanismo de pré-processamento**

Analisaremos com mais detalhes ambos os programas que fazem parte do módulo Pré-processador.

## Interpretador

O objetivo deste sub-sistema é, a partir de um programa de aplicação escrito na linguagem textual AML, gerar uma lista com as trajetórias definidas, junto com um conjunto de parâmetros que influenciam o tipo de movimento (Goldman, 1984). Esta tabela tem a seguinte forma:

**Tabela 2 Lista de trajetórias de um programa**

| Ponto origem | | | | Ponto destino | | | | Tipo movimento | | | Garra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | Y | Roll | Z | X | Y | Roll | Z | Linear | Payload | Zone | G/R |
| | | | | | | | | | | | |

Onde X e Y são as coordenadas cartesianas no plano horizontal dos pontos Origem e Destino. R representa o ângulo Roll da garra, tanto para a configuração de partida como para a meta. Z especifica a posição vertical do terceiro elo. Esta posição somente pode assumir dois valores: 'U' se o elo está na posição superior e 'D' se está na posição inferior.

Os campos Linear, Payload e Zone armazenam os valores dos parâmetros de velocidade, tipo de movimento e precisão de posicionamento ativos para a trajetória correspondente.

Finalmente a coluna Garra especifica o estado (aberto/fechado) do atuador.

O processo de construção dessa tabela divide-se em duas partes. A primeira consiste na definição de várias listas que conterão todas as variáveis definidas pelo programador ao interior do programa. Estas listas estão agrupadas dependendo do tipo da variável defnida e além de armazenar o nome de cada uma delas, mantêm tanto o valor inicial como o valor instantâneo de cada uma delas ao longo da execução do programa.

A segunda parte do processo de construção da tabela de trajetórias, geralmente este processo é chamado de "Parsing" (Kernigam, 1976). Nele posiciona-se um ponteiro na primeira linha de instruções do programa principal. Depois inicia-se um processo de varredura (rastreio) ao longo da seqüência de comandos. As instruções são lidas uma a uma e, depois de serem identificadas, transfere-se o controle para um procedimento específico para cada instrução.

Este procedimento específico gerará as ações adequadas ao comando AML sob análise. Uma vez que todas as ações associadas ao comando tenham sido realizadas, o ponteiro de leitura é incrementado repetindo o processo de interpretação para a instrução seguinte.

Uma vez tendo sido completado o processo de interpretação do programa, ativa-se o segundo processo, a interpolação. Este processo será analisado com maior detalhe no seguinte ponto.

## Interpolador

O segundo programa do módulo de pré-processamento está dedicado à interpolação das trajetórias existentes na tabela gerada pelo interpretador. Como já foi dito, além das coordenadas dos pontos de origem e meta, esta também contém informação referente ao tipo de movimento que há de ser realizado. Esta informação governará os processos de interpolação necessários para cada movimento.

Utilizando-se a linguagem AML é possível programar-se movimentos segundo dois tipos de trajetórias (Groover, 1989). O primeiro é o chamado de trajetórias no espaço das juntas, ou método de interpolação de juntas, onde o controlador calcula a quantidade de tempo que levará para alcançar seu destino à velocidade comandada para cada junta. Ele então escolhe o tempo máximo entre estes, e usa esse valor como tempo de referência para todos os eixos. Isto significa que uma nova velocidade é calculada para cada eixo. Este tipo de trajetórias é inicializado na linguagem AML através do comando Linear (0) (valor default).

Por outro lado, às vezes é requerido um tipo de trajetória linear para realizar tarefas específicas. Nesse caso utiliza-se o segundo método de interpolação, chamado interpolação linear, onde o orgão terminal se desloca descrevendo uma trajetória reta definida em coordenadas cartesianas (Wang, 1989).

A saída deste programa consiste em uma tabela contendo os ângulos de cada uma das duas primeiras juntas ($\theta_1$, $\theta_2$), além do ângulo Roll da garra. Cada trajetória tem associada a ela dez pontos, correspondendo o primeiro e o último aos pontos origem e destino respectivamente. Os oito pontos restantes são os pontos intermediários ou "via-points".

**Tabela 3 Estrutura da saída final do pré-processador**

| $\theta_1$ | $\theta_2$ | Roll | Up/down |
|---|---|---|---|
| | | | |

Esta tabela é armazenada em um arquivo do tipo ASCII, para sua posterior representação gráfica. O fato desta tabela estar no formato ASCII, permite ao usuário criar ou modificar interativamente esse arquivo através de qualquer editor de texto que trabalhe nesse padrão. A Tabela 3 mostra a estrutura desta lista.

## Gerenciador de "Lay-outs"

Para cada programa ou aplicação que o usuário deseje simular, ele tem a possibilidade de definir objetos e configurações para o espaço ou célula de trabalho. Assim, existe um módulo onde podem ser criados, modificados e alocados objetos e/ou conjuntos de objetos, chamados de "lay-outs", com o objetivo posterior de serem incorporados à simulação gráfica de um programa.

Este módulo está formado por dois sub-módulos, o primeiro realiza a tarefa de definição e gerenciamento de objetos, enquanto o segundo realiza as tarefas de integração entre os objetos definidos, para formar uma configuração do espaço de trabalho ou "lay-out".

Uma vez que o usuário tenha entrado nesse módulo, o menu principal apresenta todas possibilidades que ele terá para a definição e edição dos objetos (Fig. 9).

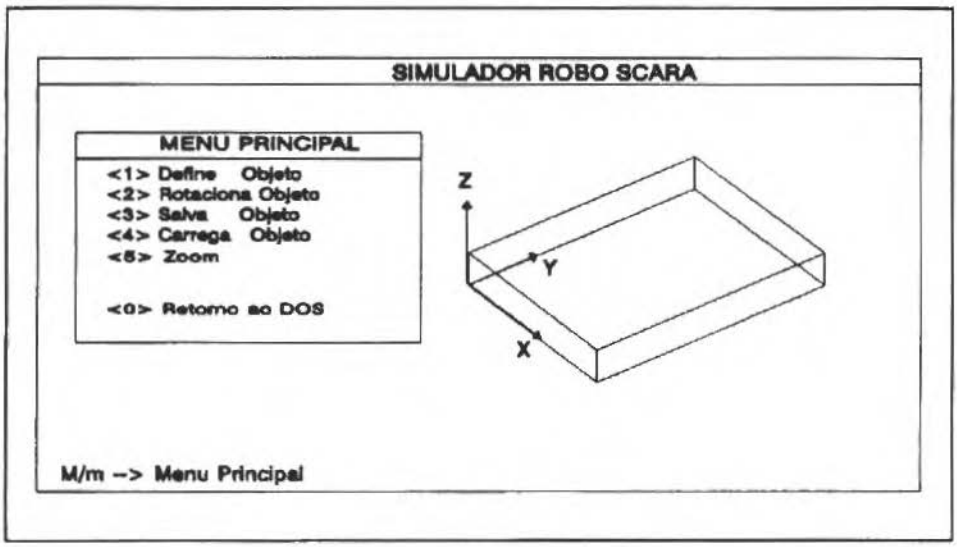



**Fig. 9 Menu principal do gerenciador de objetos**

Posteriormente o usuário pode integrar diferentes objetos em uma determinada configuração do "lay-out" do espaço de trabalho permitindo representar (esquematicamente) diferentes dispositivos e/ou elementos que estarão presentes na aplicação real. Esta integração é feita no sub-módulo "Gerenciador de Ambientes".

Para começar a definição de um novo "Lay-out" o usuário deve identificar e extrair da base de dados cada um dos objetos que estarão presentes na configuração do espaço de trabalho.

Atualmente o sistema pode armazenar e representar graficamente até oito objetos simultaneamente num mesmo 'lay-out', podendo armazenar um ilimitado número de configurações, apenas restrito ao espaço disponível em disco. A Fig. 10 mostra um exemplo de "lay-out".

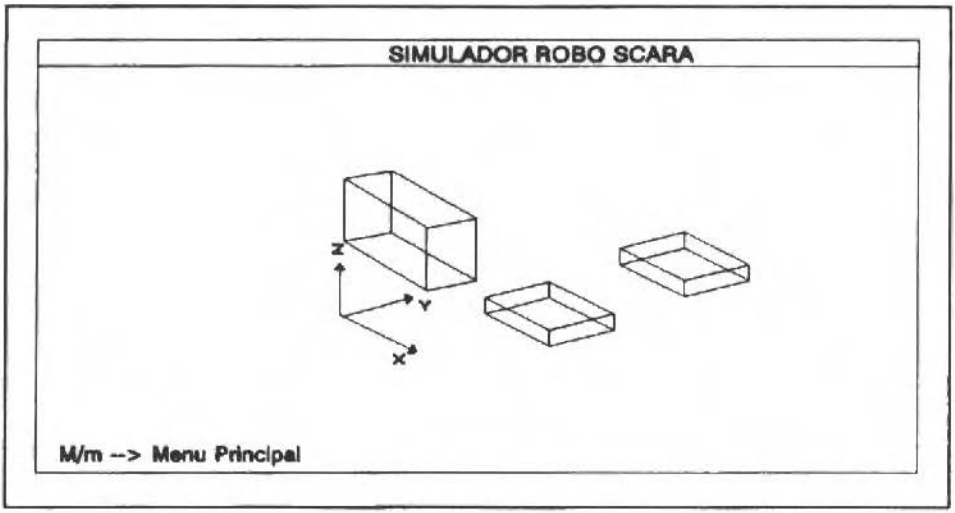



Fig. 10 Representação na tela de um "lay-out"

## Simulador Gráfico

Finalmente, uma vez que o usuário já definiu a configuração do espaço de trabalho requerida para uma certa aplicação, ele pode realizar a simulação do programa em AML já pré-processado pelo módulo interpretador e incorporar na representação os objetos que estarão presentes na aplicação real. Assim, obter-se-á uma visão mais real do processo e o usuário poderá se antecipar com maior precisão aos problemas que podem acontecer na execução do programa uma vez que este tenha sido implantado.

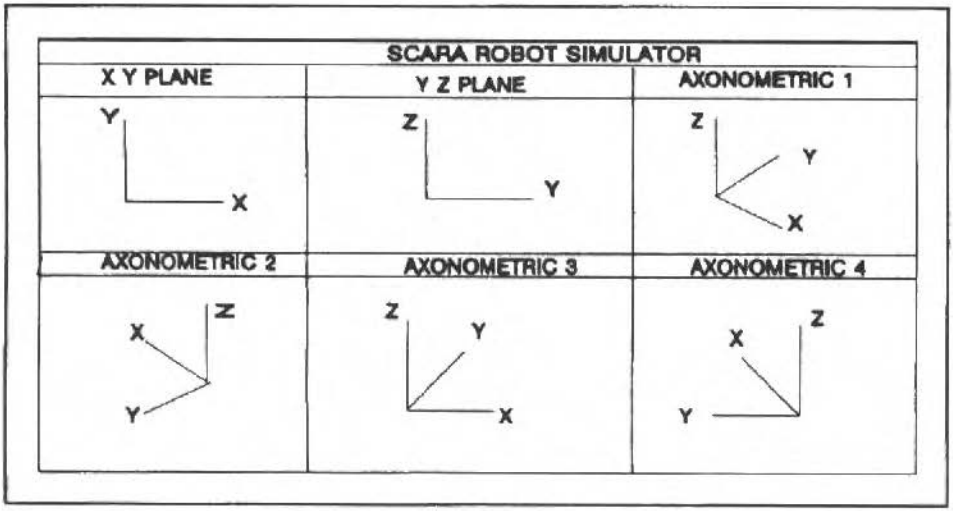



Fig. 11 Menu com as possibilidades de visualização

O usuário conta com seis possibilidades de visualização para os movimentos programados do robô. Para esse objeto, existe um menu gráfico interativo, por meio do qual o usuário pode escolher o tipo de representação mais adequado às suas necessidades (Fig. 11).

A primeira possibilidade é uma representação da planta do envelope de trabalho, onde podem ser observados os ângulos descritos pelas duas primeiras juntas e pela garra do manipulador (Fig. 12).

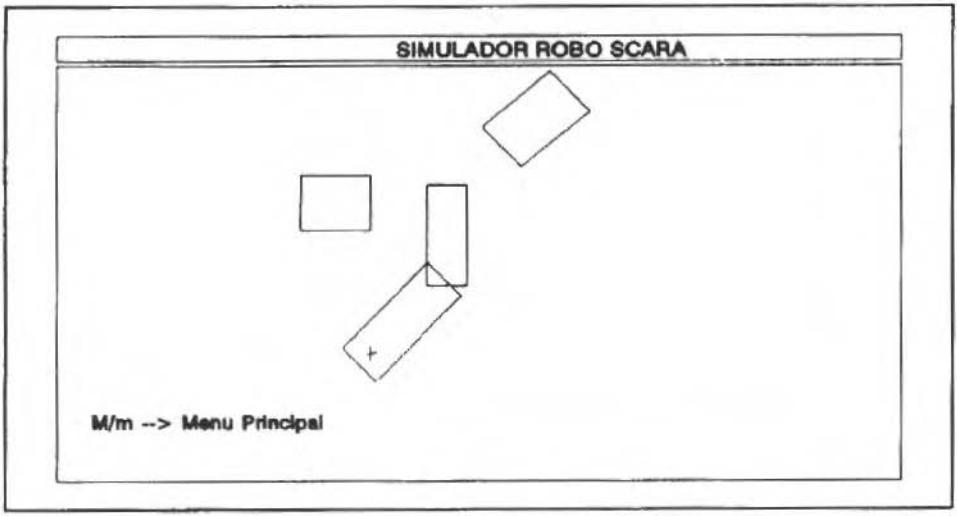



**Fig. 12 Representação da planta do manipulador**

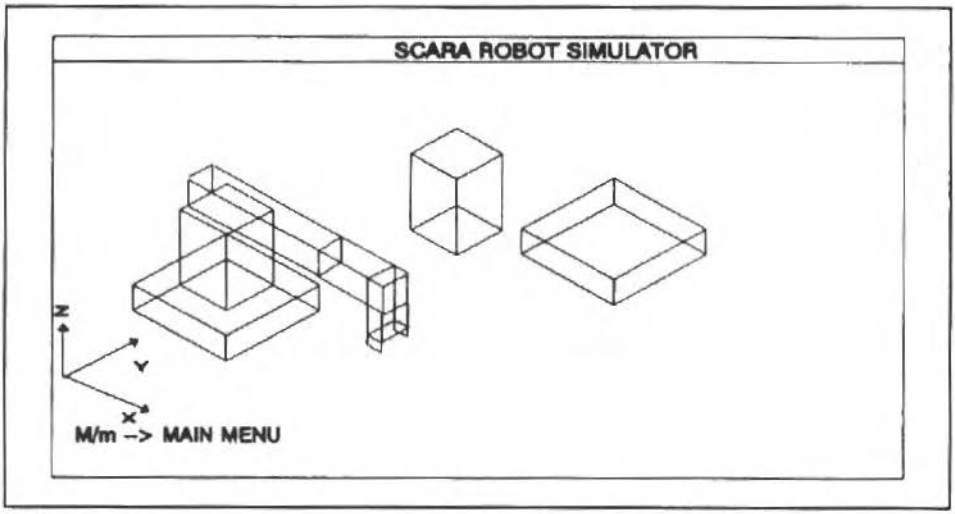



**Fig. 13 Representação do manipulador e o ambiente**

A segunda possibilidade de representação também é de duas dimensões, e mostra um plano vertical do manipulador e o seu espaço de trabalho. Nela podem ser observadas principalmente as relações de altura entre os objetos existentes na configuração e os elos e garra do manipulador. As quatro modalidades de visualização restantes são em três dimensões e representam em forma esquematizada (prismas regulares) o manipulador e os objetos existentes no espaço de trabalho. A diferença entre estas quatro possibilidades é função da posição do observador. Uma vez que o usuário tenha definido qual o tipo de representação que deseja para desenvolver a simulação, ele será inquerido sobre se deseja ou não, incorporar a representação de um "lay-out" pré-definido à simulação gráfica. Na Fig. 13 mostra-se o manipulador, na posição Home, junto com um "lay-out".

O processo de simulação gráfica está dividido em duas partes principais, na primeira parte são construídas, quadro a quadro, cada uma das visualizações que o manipulador descreve ao longo das trajetórias programadas. Cada um destes quadros será armazenado como um arquivo gráfico, do tipo "slide" . Na segunda parte do processo de simulação o usuário pode recorrer à animação gráfica, obtendo um efeito muito mais realístico dos movimentos do manipulador e a interação com o seu ambiente.

## Conclusões

O sistema apresentado cumpre com os objetivos propostos no sentido de oferecer uma ferramenta para a depuração de programas de aplicação de robôs industriais a um baixo custo, tanto à nível de hardware requerido como nas mudanças necessárias para a adaptação dele para uma outra linguagem.

Desde o ponto de vista acadêmico, tem-se uma ferramenta de apoio ao ensino da robótica. Assim, os estudantes terão contato direto com ferramentas de manufatura assistida por computador, as quais poderão em alguns casos, suprir a existência física do próprio manipulador. Isto permitirá o acesso dessas técnicas a laboratórios que atualmente não possuem recursos adequados para este propósito.

Futuras melhorias estão previstas para permitir a incorporação de outras formas geométricas na representação dos objetos presentes no envelope de trabalho. Pretende-se assim, incorporar pirâmides e cones, obtendo uma melhor visualização na simulação das aplicações e uma detecção mais exata das possíveis colisões durante a execução das mesmas.

No futuro serão escritos pré-processadores para outras linguagens compatíveis com o robô em uso. Isto permitirá uma validação mais geral do conceito de interface neutra para a comunicação entre o módulo pré-processador e os módulos de representação gráfica.

## Referências


Blumenthal,T., 1990, "Economic Effects of Robotization in Japan", Robotics and Autonomous Systems, Vol. 6, pp. 323-326.

Bonney, M. C., Marshall, R. J. e Green J. L., 1987, "Off-line Programming Using the GRASP Robot Simulation System" em "Off-line programming of Industrial Robots", A. Storr and J.F. McWaters (Editores). pp.171-179.

Buckley, S. J. e Collins G. F., 1985, "A Structured Programming Robot Language" em "Handbook of Industrial Robotics", S. Y. Nof (Editor), USA, pp. 381-403.

Chan, S. F., Weston, R. H. e Case, K., 1988, "Robot Simulation and Off-line Programming", Computer-Aided Engineering Journal , Vol . 5, pp. 157-162.

Courtney, J. e Herlin, G., 1981, "A Portable Robot Software System", Proceedings of the 11th International Symposium on Industrial Robots, pp. 577-584, Japan.

Craig, J. J., 1989, "Introduction to Robotics: Mechanics and Control". Addison-Wesley Publishing Co. Inc, New York, USA.

Denavit, J. e Hartemberg, R. S., 1955, "A Kinematic Notation for Lower-pair Mechanisms Based on Matrices", Journal of Applied Mechanics, June, pp. 215-221.

Feldmann, K., 1991, "Computer-Aided Planning and Control of Automated Assembly Systems", Siemens Review, no. 3, pp. 16-20.

Goldesão, A. e Candiani, C. L., 1984, "Un Compilador para Control Numérico". Annais do I Congresso Latino-Americano de Automática, pp. 1214-1219.

Grouver, M. P., Weiss, M., Nagel, R. N. e Odrey, N.G., 1988, "Robótica - Tecnologia e Programação", McGraw-Hill, São Paulo, Brasil.

Karami, M., 1991, "3D Simulation : A New Industry Standard", Industrial Engineering, July, pp. 36-38.

Kernigam, P., 1976, "Software Tools".

Langrudi, S. A., 1987, "VALSIM.LU: A Graphic Simulator of the Offlline Programming Language VAL-II" em "Off-line Programming of Industrial Robots", A. Storr and J. F. McWaters (Editors). pp.119-134.

Lee, D. M. A. e ElMaraghy, W. H., 1990, "ROBOSIM: A CAD-based Off-line Programming and Analysis System for Robotic Manipulators", Computer-Aided Engineering Journal, Vol. 7, pp.141-147.

Stobart, R. K. e Dailly, C., 1985, "The Use of Simulation in the Off-line Programming of Robots" em "Robots and Automated Manufacture", J. Billingsley (Editor), pp. 29-39.

Stobart, R. K., 1987, "Collision Detection for Off-line programming Methods for Industrial Robots" em "Off-line Programming of Industrial Robots", A. Storr and J. F. McWaters (Editores). pp.107-117.

Wang, K. e Lien, T. K., 1989, "The Planning of a Straight line Trajectory via Interactive Computer Graphics" Robotics and Computer-Integrated Manufacturing Vol. 5, pp. 215-221.

Weck, M., Niehaus, T. e Osterwinter, 1987, "An Interactive Model Based Robot Programming and Simulation Workstation" em "Offline Programming of Industrial Robots", A. Storr and J. F. McWaters (Editores). pp. 41-51.

RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences
Vol. XV - nº 3 - 1993

ISSN 0100-7386
Printed in Brazil

# Abstracts

## Braga, D. U., Diniz, A. E. and Cupini, H. L., 1993, "Indirect Monitoring of Turning Tool Life Using Electrical Parameters of the Machine Tool", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 210-220.

The automatic determination of tool life in machining processes is a task that must be carried out in order to achieve the complete automated process in a flexible manufacturing system. Many different kinds of tool life automatic monitoring have been tried lately in order to reach this goal, like acoustic emission, vibration signals, cutting force, cutting temperature and so on. Each of them has its advantages and disadvantages. The monitoring of the electrical parameters of the machine motors is also one of the systems that have been experimented. Its main advantages compared with other sensing systems are: a) it is non intrusive - all measurements are done far from the cutting zone; b) it is very simple and cheap.

This work has the purpose to verify the feasibility of using the electrical parameters of the machine tool motors to indirectly establish the moment to change the tool in rough turning operations. The armature current of the main and feed motors and the armature voltage of the main motor were digitized and stored in the computer memory for further analysis. Two electrical circuits were built in order to make the signal suitable to be read by the A/D board. The purpose of the first one was to reduce the voltage of the main motor (with values up to 400 V) to values that could be input in the A/D board (up to 10 V). The second one had the purpose of changing the values of current in proportional values of voltage. Several experiments were carried out with different feeds and cutting speeds (all cutting conditions typical of rough turning), turning the AISI 1045 steel with carbide inserts (ISO P10).

The conclusions of this work are: a) the armature current of the main motor showed to be a reliable parameter to establish the end of tool life in rough tuming, where the goal is just to remove a great amount of material without closed tolerances and good surface finish. In these cases, just the tool breakage is undesirable, what can be easily avoided through this kind of monitoring; b) the indirect monitoring of the electrical parameters of the machine tool can be done in real time, and it is very simple and cheap, what makes its utilization in industries very feasible; c) the armature current of the main motor can not be used as a parameter to establish the end of tool life, if the criterion is a value of $V_B$ smaller than 0.8 mm; d) the growth of the current values with flank wear (or cutting length) is more sensitive to high values of feed and cutting speed; e) the crater wear formation is not responsible for the stabilization of the current values in the intermediary stage of cutting.

**Keywords**: Monitoring of Machining, Turning, Tool Life, Tool Wear

## Trevisan, R. E., 1993, "Homopolar Welding: Mechanical and Metallurgical Evaluation", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 221-230.

This paper reports on recent research into the mechanical and metallurgical evaluation of the homopolar pulsed weld (HPW) process for welding 90 mm diameter, ASTM-1035 and API-X52 steel pipe. Several experiments were performed that varied process control parameters, one at a time and identified the effects on the weld properties. Conventional metallographic, microhardness, toughness and fracture toughness techniques were used for this evaluation. However, the process control parameters investigated did not improve the weld toughness. The reduced toughness at the weld line of the HPW process is attributed to the large grain size present on this region.

**Keywords**: Homopolar Welding, High Strength Steel, Toughness, Microhardness, Macro- and Microstructure

## Marchi, C. H., 1993, "High Order Schemes for the Solution of Fluid Flows without Numerical Dispersion", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 231-249.

This paper advances the new numerical scheme CEL which permits high order schemes to be used without the undesired numerical dispersion. Three new interpolation functions are proposed: CDS-L, QUICK-L and ADS. The performance of these functions are compared with available schemes in the literature, as the UDS, CDS, WUDS, FIC, QUICK and TVD. Diffusive/advective and advective/transient one-dimensional problems are solved. The best agreement with analytical and numerical solutions was obtained with the ADS, followed by the TVD, QUICK-L and CDS-L.

**Keywords**: Numerical Methods, Finite Volume, Numerical Diffusion, Numerical Dispersion, Numerical Schemes, Fluid Flows

**Quaresma, J. N. N., Cotta, R. M. and Hackenberg, C. M., 1993, "Laminar and Turbulent Forced Convection Heat Transfer in a Tube with an Axially Varying Wall Heat Transfer", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 250-262.**

The Integral Transform Method is applied to the solution of forced convection inside tubes, for both laminar and turbulent flow regimes. Prescrived heat flux in exponential form as a function of the axial coordinate is adopted for the tube wall boundary condition. Thermal entry region solutions are obtained for bulk temperature and Nusselt numbers distributions, which are then critically compared with those obtained through correlations of experimental results.
**Keywords**: Duct Flow Forced Convection, Axially Varying Wall Heat Transfer, Integral Transform Method

**Cavalca, K. L. and Bachschmid, N., 1993, "Dynamical Behaviour Analysis of Multistage Centrifugal Pumps with Interstage Seals by a Modal Truncation Method", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 263-280.**

This paper leads on the analysis of the dynamic behaviour of rotor-structure systems, by means of numerical simulations. The frequency response of this system in presence of interstage seals can be realistically predicted only if the supporting structure is accurately modelled. This paper shows an approach to evaluate the influence of the foundation on the dynamic response of the global system, which allows to consider any number of normal modes, even if this number is lower than the number of degrees of freedom associated to the connecting nodes of the mathematical model. This technique permits to study the well-known problem of the influence of the seals on the rotor response when the interaction between the rotor and the stationary parts is very strong.
**Keywords**: Rotor, Foundation, Seals, Connecting Points, Frequency Response

**Tenenbaum, R. A., 1993, "About the Angular Velocity of a Rigid Body in a Reference Frame", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 281-285.**

A short overview of the classical theoretical formulations for the concept of angular velocity of a rigid body that moves in a reference frame is presented. A new and rigorous proof of existence of an angular velocity tensor which differentiates with respect to time any vector fixed on the body is derived. It is also shown that the knowledge of the time derivatives of only two vectors fixed on the body is enough for the determination of the tensor.
**Keywords**: Analytical Dynamics, Angular Velocity, Rigid Body

**Furukawa, C. M., Adamowski, J. C. and Moscato, L. A., 1993, "Navigation of an Autonomous Vehicle by Ultrasound in Structured Environments", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 286-301.**

An algorithm is described for estimating the position and orientation of an autonomous vehicle in structured, indoor, previously known, environments. Primary estimiates of the vehicle's vector state are obtained odometrically. Ultrasound sensors measure the distance and orientation to geometric references of the environment. References are given by walls, corners and cylindric pillars. An Extended Kalman Filter performs the odometric estimation and processes the ultrasound measurements. Simulation results are presented. Uncertainties of estimates are sensibly reduced when distance and direction to references are processed. However, processing the direction to corners and cylinders provides results which are sensible to the delay inherent to the used method of direction determination.
**Keywords**: Mobile Robots, Navigation, Ultrasonics, Kalman Filter

**Acevedo, O. M. D. and Telles, G. N., 1993, "Graphical Simulation of Industrial Robot Programming", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 3, pp. 302-315.**

This article describes the specification and implementation of a SCARA type industrial robot simulation system. This is a software package, which is composed by four main modules: an AML preprocessor, a lay-out management system, a graphical simulator and a configuration map-based automatic collision detection module. The system was written in TURBO PASCAL and currently runs under the MS-DOS Operating System.
**Keywords**: Robotics, Off-line Programming, Graphical Simulation

Impressão e Acabamento:
R. VIEIRA GRÁFICA E EDITORA LTDA.
Rua do Açúcar, 244 - Campinas - SP
13066-240 - Fone: (0192) 41-7755

Journal of the
Brazilian Society of
Mechanical Sciences

# Information for Authors

**SCOPE AND POLICY**

- The purpose of the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is to publish papers of permanent interest dealing with research, development and design related to science and technology in Mechanical Engineering, encompassing interfaces with Civil, Electrical, Chemical, Naval, Nuclear, Agricultural, Materials, Petroleum, Aerospace, Food, System Engineering, etc., as well as with Physics and Applied Mathematics.
- The Journal publishes Full-Length Papers, Review Papers and Letters to the Editor. Authors must agree not publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made for papers previously published in proceedings of conferences. In this case it should be cited as a footnote on the title page. Copies of the conference referees reviews should be also included. Review articles should constitute a critical appraisal of published information.
- The decision of acceptance for publication lies with the Editors and is based on the recommendations of at least two ad hoc reviewers, and of the Editorial Board, if necessary.

**SUBMISSION**

- Manuscripts and all the correspondence should be sent to the Editor or, alternatively, to the appropriate Associate Editor.
- Four (4) copies of the manuscript are required. The author should submit the original figures, which will be returned if the paper is not accepted after the review process.
- Manuscripts should be submitted in English or Portuguese. Spanish will also be considered.
- A manuscript submitted for publication should be accompanied by a cover letter containing the full name(s) of author(s), mailing adresses, the author for contact, including phone and fax number, and, if the authors so wish, the names of up to five persons who could act as referees.

**FORMAT**

- Manuscripts should begin with the title, including the english title, the abstract and up to five key words. If the paper's language is not English, an extended summary of about 500 words should be included. The manuscript should not contain the author(s) name(s).
- In research papers, sufficient information should be provided in the text or by refering to papers in generally available Journals to permit the work to be repeated.
- Manuscripts should be typed double-spaced, on one side of the page, using A-4 sized paper, with 2 cm margins. The pages should be numbered and not to excess 24 pages, including tables and figures. The lead author of a RBCM paper which exceeds the standard length of pages will be assessed a excess page charge.
- All symbols should be defined in the text. A separate nomenclature section should list, in alphabetical order, the symbols used in the text and their definitions. The greek symbols follow the English symbols, and are followed by the subscripts and superscripts. Each dimensional symbol must have SI (Metric) units mentioned at the end. In addition, English units may be included parenthetically. Dimensionless groups and coefficients must be so indicated as dimensionless after their definition.
- Uncertainties should be specified for experimental and numerical results.

**ILLUSTRATIONS AND TABLES**

- Figures and Tables should be referred in consecutive arabic numerals. They should have a caption and be placed as close as possible to the text first reference.
- Line drawings should be prepared on tracing paper or vellum, using India ink; line work must be even and black. Laser print output is acceptable. The drawings with technical data/results should have a boundary on all four sides with scale indicators (tick marks) on all four sides. The legend for the data symbols should be put in the figure as well as labels for each curve wherever possible.
- Illustrations should not be larger than 12 x 17 cm. Lettering should be large enough to be clearly legible (1.5-2.0 mm).
- Photographs must be glossy prints.

**REFERENCES**

- References should be cited in the text by giving the last name of the author(s) and the year of publication of the reference: either "Recent work (Smith and Jones, 1985) ... or "Recently Smith and Jones (1985) With four or more names, use the form "Smith et al.(1985)" in the text. When two or more references would have the same text identification, distinguish them by appending "a", "b", etc., to the year of publication.
- Acceptable references include: journal articles,dissertations, published conference proceedings, numbered paper preprints from conferences, books, submitted articles if the journal is identified, and private communications.
- References should be listed in alphabetical order, according to the last name of the first author, at the end of paper. Some sample references follow:

Bordalo, S.N., Ferziger, J.H. and Kline, S.J., 1989, "The Development of Zonal Models for Turbulence", Proceedings, 10th ABCM - Mechanical Engineering Conference, Vol. I, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 41-44.

Clark, J.A., 1986, Private Communication, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Coimbra, A.L., 1978, "Lessons of Continuum Mechanics", Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brazil.

Kandlikar. S.G. and Shah, R.K., 1989, "Asymptotic Effectiveness - NTU Formulas for Multiphase Plate Heat Exchangers", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 111, pp. 314-321.

McCormak, R.W., 1988, "On the Development of Efficient Algorithms for Three Dimensional Fluid Flow", Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 10, pp. 323-346.

Silva, L.H.M., 1988. "New Integral Formulation for Problems in Mechanics", (in portuguese), Ph.D. Thesis, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil.

Sparrow, E.M., 1980a, "Forced-Convection Heat Transfer in a Duct Having Spanwise-Periodic Rectangular Protuberances", Numerical Heat Transfer, Vol. 3, pp. 149-167.

Sparrow, E.M., 1980b, "Fluid-to-Fluid Conjugate Heat Transfer for a Vertical Pipe-Internal Forced Convection and External Natural Convection", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 102, pp. 402-407.

ISSN 0100 - 7386
**REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**
**JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

VOL. XV - Nº 3 - 1993

***Machining***

- Indirect Monitoring of Turning Tool Life Using Electrical Parameters of the Machine Tool (In Portuguese) — Durval U. Braga, Anselmo E. Diniz, and Nivaldo L. Cupini — 210

***Welding***

- Homopolar Welding: Mechanical and Metallurgical Evaluation — Roseana da Exaltação Trevisan — 221

***Finite Volumes***

- High Order Schemes for the Solution of Fluid Flows Without Numerical Dispersion Forced Convection — Carlos Henrique Marchi — 231

***Forced Convection***

- Laminar and Turbulent Forced Convection Heat Transfer in a Tube with an Axially Varying Wall Heat Flux — J. N. N. Quaresma, Renato M. Cotta, and Cirus M. Hackenberg — 250

***Dynamical Behaviour Analysis***

- Dynamical Behaviour Analysis of Multistage Centrifugal Pumps with Interstage Seals by a Modal Truncation Method — Katia Lucchesi Cavalca and Nicoló Bachschmid — 263

***Analytical Dynamics***

- About the Angular Velocity of a Rigid Body in a Reference Frame — Roberto A. Tenebaum — 281

***Mobile Rotors***

- Navigation of an Autonomous Vehicle by Ultrasound in Structured Environments (In Portuguese) — Celso M. Furukawa, Julio C. Adamowski and Lucas A. Moscato — 286

***Industrial Robots***

- Graphical Simulation of Industrial Robots Programs (In Portuguese) — Orlando Maurício Durán Acevedo and Geraldo Nonato Telles — 302

***Abstracts - Vol. 15 - nº 3 - 1993*** — 316