

# Revista Brasileira de Ciências Mecânicas

Journal of  
the Brazilian  
Society of  
Mechanical Sciences

2

PUBLICAÇÃO DA ABCM - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

VOL. XVI - Nº 2 - 1994

ISSN 0100-7386

# REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

## JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF  
MECHANICAL SCIENCES

Vol. 1, N.º 1 (1979) -

Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências  
Mecânicas

Trimestral

Inclui referências bibliográficas.

I. Mecânica

ISSN-0100-7386

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
publica trabalhos que cobrem os vários aspectos da  
ciência e da tecnologia em Engenharia Mecânica,  
incluindo interfaces com as Engenharias Civil, Elétrica,  
Química, Naval, Nuclear, Aeroespacial, Alimentos,  
Agrícola, Petróleo, Materiais, etc., bem como aplicações  
da Física e da Matemática à Mecânica.

### EDITOR:

Leonardo Goldstein Jr.  
UNICAMP - FEM - DETF - C.P. 6122  
13083-970 Campinas - SP  
Tel: (0192) 39-3006 Fax: (0192) 39-3722

### EDITORES ASSOCIADOS:

**Agenor de Toledo Fleury**  
IPT - Instituto de Pesquisas Tecnológicas  
Divisão de Mecânica e Eletricidade - Agrupamento de Sistemas de Controle  
Cidade Universitária - C.P. 7141  
01064-970 São Paulo - SP  
Tel: (011) 268-2211 R-504 Fax: (011) 869-3353

**Carlos Alberto Carrasco Allemam**  
UNICAMP - FEM - DE - C.P. 6122  
13083-970 Campinas - SP  
Tel: (0192) 39-8435 Fax: (0192) 39-3722

**José Augusto Ramos do Amaral**  
NUCLEN - NUCLEBRÁS ENGENHARIA S.A.  
Superintendência de Estruturas e Componentes Mecânicos.  
R. Visconde de Ouro Preto, 5  
22250-180 - Rio de Janeiro - RJ  
Tel: (021) 552-2772 R-269 ou 552-1095 Fax: (021) 552-2993

### Walter L. Weingaertner

Universidade Federal de Santa Catarina  
Dept. de Eng.ª Mecânica - Lab. Mecânica de Precisão  
Campus - Trindade - C.P. 476  
88049 Florianópolis - SC  
Tel: (0482) 31-9395/34-5277 Fax: (0482) 34-1519

### CORPO EDITORIAL:

Aclair de Faro Orlando (PUC - RJ)  
Antonio Francisco Fortes (UnB)  
Armando Albertazzi Jr (UFSC)  
Atair Rios Neto (INPE)  
Benedito Moraes Puravero (EESC - USP)  
Caio Mario Costa (EMBRACO)  
Carlos Alberto de Almeida (PUC - RJ)  
Carlos Alberto Martin (UFSC)  
Clovis Raimundo Maliska (UFSC)  
Emanuel Rocha Woiski (UNESP - FEIS)  
Francisco Emilio Baccaro Nigro (IPT - SP)  
Francisco José Simões (UFPb)  
Genesio José Menon (EFEI)  
Hans Ingo Weber (UNICAMP)  
Henrique Rozenfeld (EESC USP)  
Jair Carlos Dutra (UFSC)  
João Alziro Herz de Jornada (UFRGS)  
José João de Espindola (UFSC)  
Jurandir Itzo Yanagihara (EP USP)  
Lirio Schaefer (UFRGS)  
Lourival Boehs (UFSC)  
Luís Carlos Sandoval Goes (ITA)  
Marcio Ziviani (UFMG)  
Moyses Zindeluk (COPPE - UFRJ)  
Nisio de Carvalho Lobo Brum (COPPE - UFRJ)  
Nivaldo Lemos Cupini (UNICAMP)  
Paulo Afonso de Oliveira Soviero (ITA)  
Paulo Eigi Miyagi (EP USP)  
Rogerio Martins Saidanha da Gama (LNCC)  
Valder Steffen Jr. (UFU)

Publicação da / Published by

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES

Secretaria da ABCM: Ana Lucia Frões de Souza  
Av. Rio Branco, 124-18º andar - Rio de Janeiro - Brasil  
Tel. / Fax (021) 222-7128

Presidente: Arthur Palmeira Ripper

Vice-Presidente: Sidney Stuckenbruk

Secret. Geral: Agamenon R. E. Oliveira

Secretário: Carlos Alberto de Almeida

Diretor de Patrimônio: Luiz Fernando Salgado Candia

REVISTA FINANCIADA COM RECURSOS DO

*Programa de Apoio a Publicações Científicas*

MCT



CNPq



FINEP

FAPESP - Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo

# (G) Ratio Optimization of CBN Resin Bond Wheels by the Grinding Conditions

## *Otimização da Razão (G) de Rebolos de CBN com Ligante Resinóide pelas Condições de Retificação*

**Eduardo Carlos Bianchi**

Paulista State University - UNESP  
Bauru - Brazil

**João Fernando Gomes de Oliveira**

University of São Paulo - USP  
São Carlos - Brazil

**Galdino Ferreira de Souza**

K.G. Sorensen - Brazil

### **Abstract**

This work shows experimental results of the wheel behavior during grinding of a tool steel and a hardened steel. The wheel wear phenomena are studied with emphasis on bond wear and grain wear mechanisms. The equilibrium between bond retention force and cutting force per grain is studied experimentally through grinding tests. The results analysis show that CBN 360 wheel wear can be reduced, improving the (G) ratio by the reduction of the bond wear. This bond wear can be optimized by changing the underformed chip geometry.

**Keywords:** Grinding Wheel Wear, Reduction of the Bond Wear

### **Resumo**

Este trabalho apresenta resultados experimentais do comportamento de rebolos durante a retificação de aços fáceis e difíceis de serem retificados. O desgaste do rebolo é estudado com ênfase no desgaste do ligante e mecanismos de desgaste. O equilíbrio entre a força de retenção do ligante e força de corte por grão é estudado experimentalmente através de ensaios de retificação. Os resultados analisados mostram que o desgaste de rebolos de CBN pode ser reduzido e melhorado pela redução do desgaste do ligante através da geometria do cavaco gerado.

**Palavras-chave:** Desgaste de Rebolos, Redução do Desgaste de Rebolos

### **Introduction**

The precision grinding process is aimed towards achieving high dimensional, form and finishing quality with the best performance, i.e., with highest production and lowest cost. This performance, however, has a complex behavior. Quality and cost parameters suffer significant variation with the changes in working conditions (Oliveira, 1992).

The grinding of steel with CBN 360 (cubic boron nitride) is capable of providing greater advantages due to the CBN 360 grains characteristics. These advantages are leading to a growing utilization of this type of material, so that the world consumption of CBN 360 has been doubled between 1989 and 1992 (Nailor et al., 1989).

Several users have failed in the implementation of superabrasive wheels, by obtaining high production cost through its incorrect use (English et al., 1991). This happens because the wheel cost evaluation before its use, is difficult to be achieved and the final production cost depends on the wheel cutting surface wear, which is very sensible to the working conditions, mostly on resin bond wheels.

### **Wear Mechanisms**

The wear of the resin bond CBN 360 wheel occurs by two mechanisms called macro and micro wear, due to the interaction between the abrasive grains and the workpiece. The macro wear occurs through the wear of the bond which holds the grains on the wheel. The wear of the bond can occur thermally, due to the chip generation or due to the combination of both, decreasing the retention

capacity of the abrasive grains. The micro wear corresponds to the wear of the active cutting edges on top of the abrasives grains during the grinding process, due to the friction between the cutting edges and workpiece. During the grinding operation, the abrasive grains gradually wear and increase their top area. As consequence, the grinding forces and heat generation increase. Figure 1 shows three ways in which the macro wear can occur.

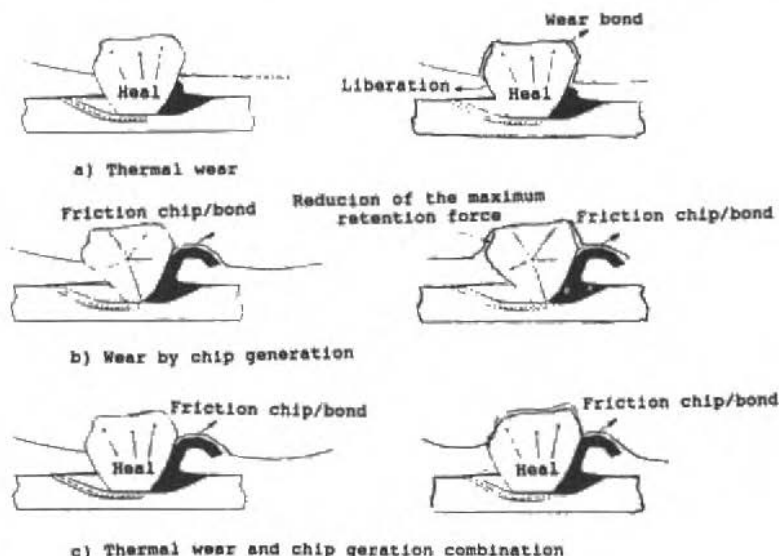


Fig. 1 Action of the macro wear of the abrasive grains on the wheel working surface (Bianchi, 1992)

The thermic wear (Fig. 1a) is a consequence of the action of the micro wear. As the area on the top of the grains increases, the grinding forces and consequently the temperature in the contact region between abrasive grain and workpiece also increase. Part of this thermic energy migrates towards the center of the wheel, passing through the grains and bond, which looses part of its grain retention capability.

The chips generated by the abrasive grain/workpiece interaction (Fig. 1b), collides the bond which is in the front of the abrasive grain, in the wheel movement direction. The friction between the generated chips and the bond causes, continually, the wear of the bond, decreasing the grain retention capacity. The wear of the bond is closely related to the generated chip geometry. As a result, by changing grinding parameters, it is possible to alter the mean chip geometry, enabling the abrasive grain to stay longer on the wheel surface or abbreviating its liberation. This wear mechanisms promotes the control of the topographic characteristics of the grinding wheel by the action of the chip geometry on the bond.

The combined macro wear (Fig. 1c) is, actually, a composition of the two types already described. Initially, the cutting edges on top of the abrasive grains have their area increased by the activity of the micro wear, at the same time that the chip generation wears the bond. The abrasive grains are more exposed, with inferior retention capacity and having larger top areas. During the grinding operation, depending on the grinding conditions used, the further wear of the bond and the temperature and force increase due to the flattening of the top of the grains (micro wear) results on the breakage of the bond, releasing the grain (Bianchi, 1992).



## Chip Geometry

The study of the chip formation in grinding process is very difficult to be conducted due to its small thickness and short time in which the phenomenon happens. Meanwhile, the knowledge of this phenomenon is of great interest once changes in the chip formation and, as consequence, the wear of the bond caused by the friction with the chip, change the behavior of the grinding operation.

The theoretical length of the chip ( $l_k$ ) is given by the equation (Bianchi, 1992):

$$l_k = (ad_s)^{0.5} \quad (1)$$

Where "a" (mm) is the value of wheel penetration in the workpiece and "d<sub>s</sub>" (mm) is the external diameter of the wheel.

The maximum theoretical thickness of the chip is given by the equation (Bianchi, 1992):

$$h_{max} = 2Lh_{eq}/l_k \quad (2)$$

Where "L" (mm) is the mean spacing between abrasive grains on the external diameter of the grinding wheel, and "h<sub>eq</sub>" (mm) is the cutting equivalent parameters which is given by, for surface tangential grinding, (Peters and Decneut, 1975):

$$h_{eq} = aV_w/V_s \quad (3)$$

Where "V<sub>s</sub>" is the travel velocity of the machine table (m/s) and "V<sub>w</sub>" is the peripheric wheel velocity (m/s).

The tangential force on a given abrasive grain is given by equation (Shimamune and Ono, 1983):

$$F_{t_g} = bh_{max}K_s + \mu b^2\pi K_n/4 \quad (4)$$

Where "b" (mm) is the grain mean width, "K<sub>s</sub>" (N/mm<sup>2</sup>) is the cutting specific pressure, "μ" is the friction coefficient between the grain and the workpiece, and "K<sub>n</sub>" (N/mm<sup>2</sup>) is the yield compression strength of workpiece. Isolating (b) and dividing equation (4) by h<sub>max</sub>, results:

$$F_{t_g}/h_{max} = b(K_s + \mu b\pi K_n/2) \quad (5)$$

Making  $F_{t_g}/h_{max} = f^*$  and  $(K_s + \mu b\pi K_n/2) = K^*$  results:

$$f^* = bK^* \quad (6)$$

This means that if force (f\*) increases, the product (b.K\*) also increases. Therefore there is an increase in the mean width of the abrasive grains (b). In this case, the grains show a greater flattened area, which means that the grains are held by the bond for a longer time.

## Experimental Analysis

Figures 2 and 3 present the obtained results of the cutting force behavior on test with tool steel (VC 131) and hardened steel (SAE 8620) respectively.

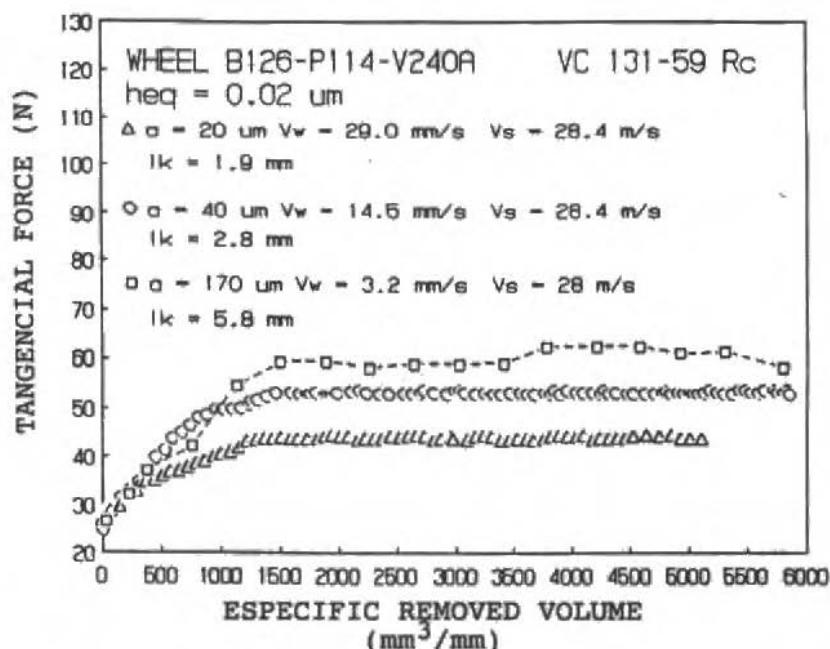


Fig. 2 Behavior of the force on tool steel.

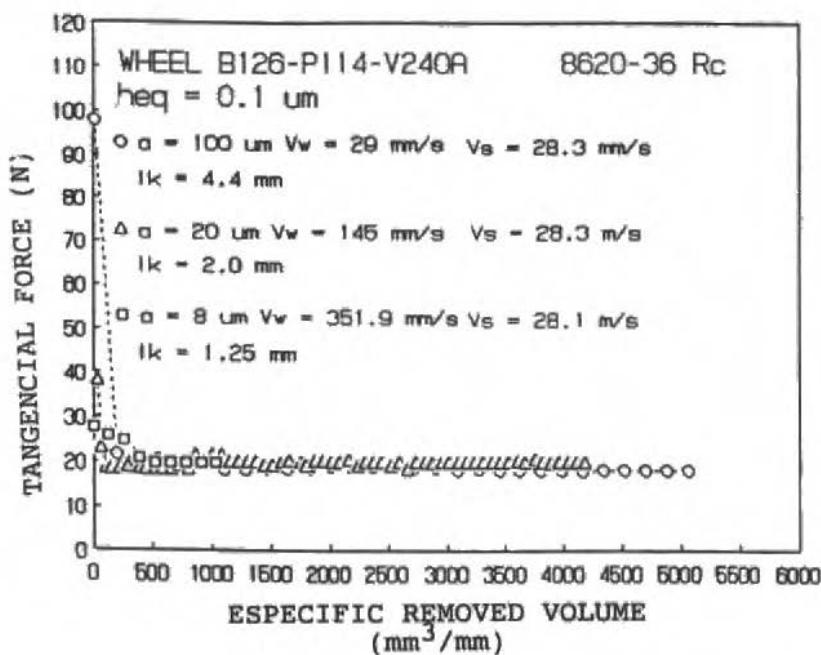


Fig. 3 Behavior of the force on hardened steel.

For the tool steel (Fig. 2) the grinding forces grow, and for the hardened steel (Fig. 3) the grinding forces decrease with the specific removed volume.

With the tool steel, due to the thickness and the interrupted nature of the generated chip, the little initial porosity of the wheel is enough to lodge the chip. The macro wear is reduced because the chip does not wear the bond significantly. The abrasive grains, therefore, remain tied to the bond for a longer time suffering micro wear and, as consequence, increasing the contact area between the abrasive grain and workpiece. As result, the grinding forces tend to increase until they reach an equilibrium.

In the hardened steel, the greater thickness and longer generated chip penetrates deeper in the bond, causing higher macro wear. The equilibrium force, in this case, is reached in a low level soon after the beginning of the test, when the wheel doesn't yet have enough porosity to lodge the chip.

Figure 4 presents four photos. Photo 4a presents the mean spacing between abrasive grain, photo 4b presents the action of the micro wear in the abrasive grain and photos 4c and 4d presents the chips generated by abrasive grain/workpiece interaction with tool steel (VC 131) and hardened steel (SAE 8620) respectively.

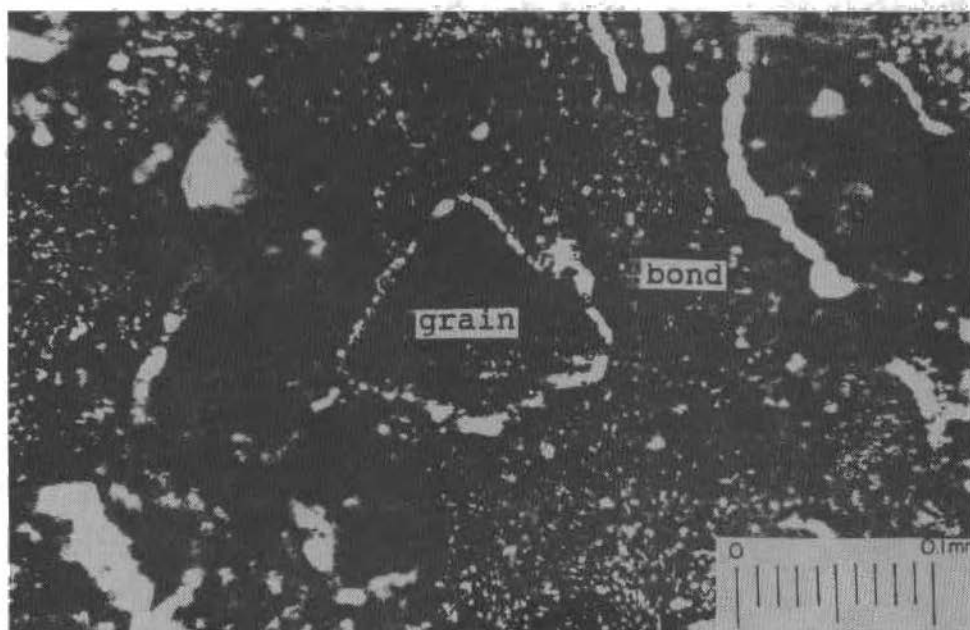


Fig. 4a Mean spacing between abrasive grain

Figure 5 shows the relation between the maximum chip thickness ( $h_{max}$ ) and the chip length ( $l_k$ ) for all conditions tested.

According to this figure, as the chip length increase, decreases the maximum chip thickness. This occurs due to the greater quantity of abrasive grains acting on the contact length. Therefore, with more active abrasive grains grinding, smaller will be the volume of metal removed by grinding, resulting in a smaller maximum chip thickness.

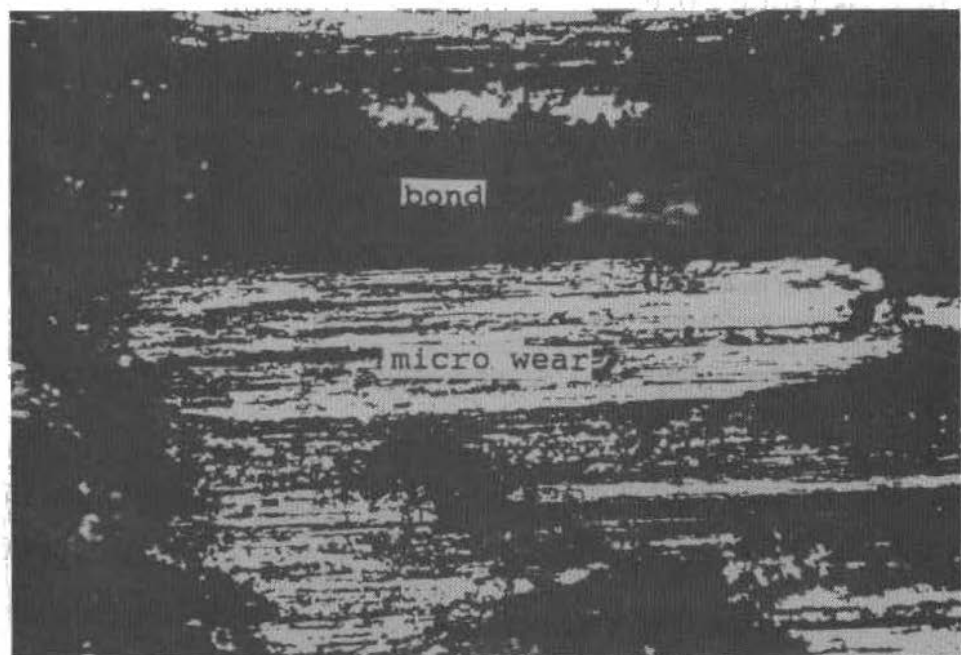


Fig. 4b The action of the micro wear in the abrasive grain

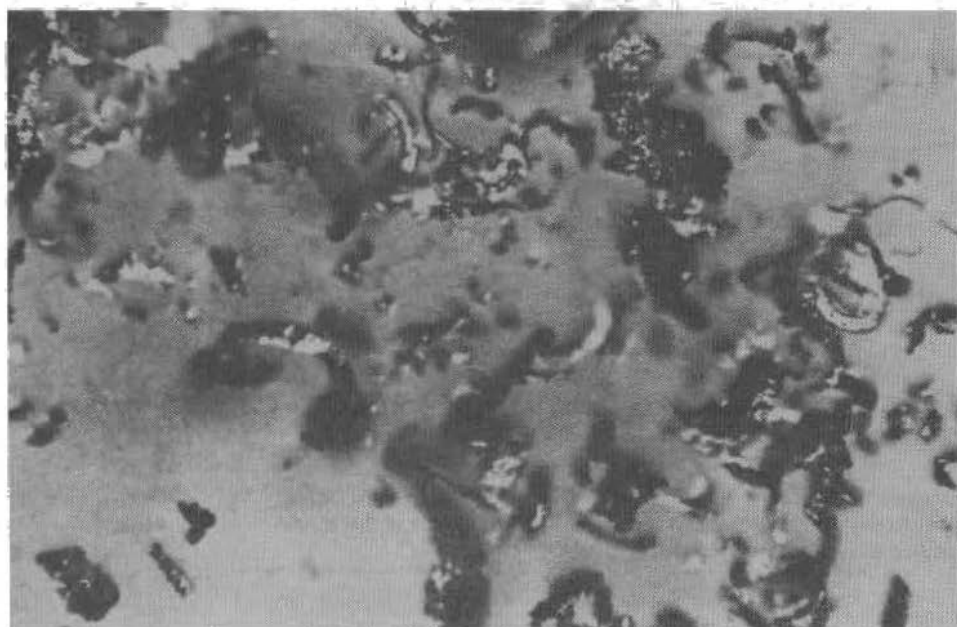


Fig. 4c Chips generated by abrasive grain/workpiece interaction with tool steel (VC131)

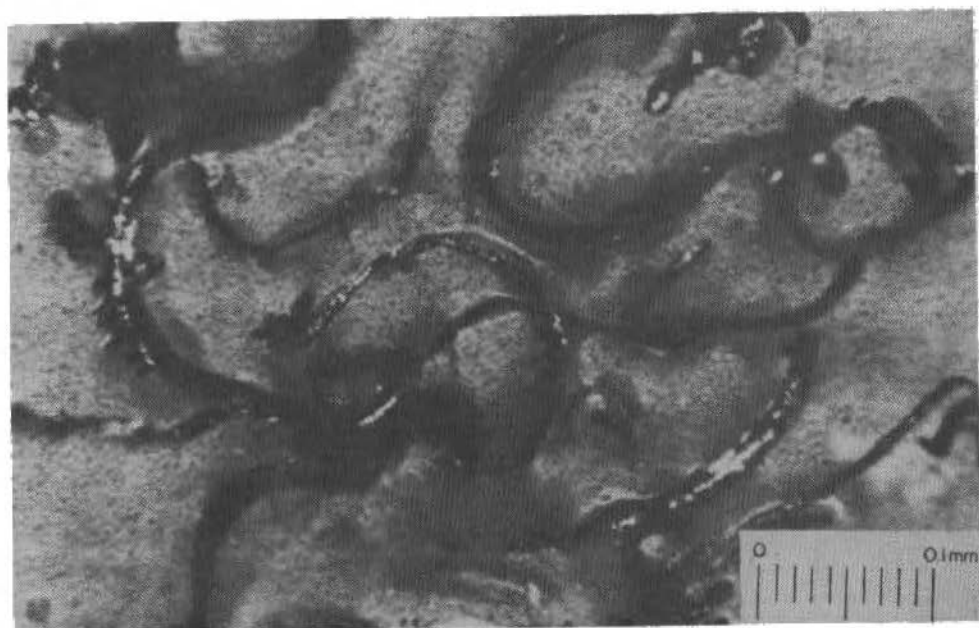


Fig. 4d Chips generated by abrasive grain/workpiece interaction with tool steel hardened steel (SAE 8620)

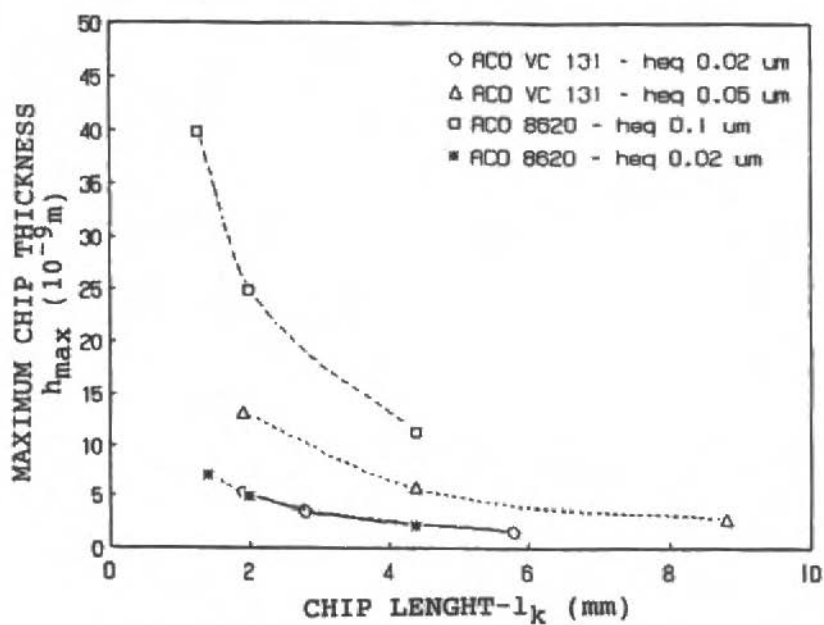


Fig. 5 Relation between maximum chip thickness and chip length



During the tests, the grinding forces have always reached a stability level (Figs. 2 and 3), which corresponds to the equilibrium between the grinding forces and the bond grain retention forces. The grinding forces on this stability level are named in this work as "Stabilization Forces". These forces represent, for a given machining condition, the equilibrium between the macro and micro wear of the wheel cutting surface. Figure 6 presents the behavior of the stabilization force on an abrasive grain in relation to the contact length.

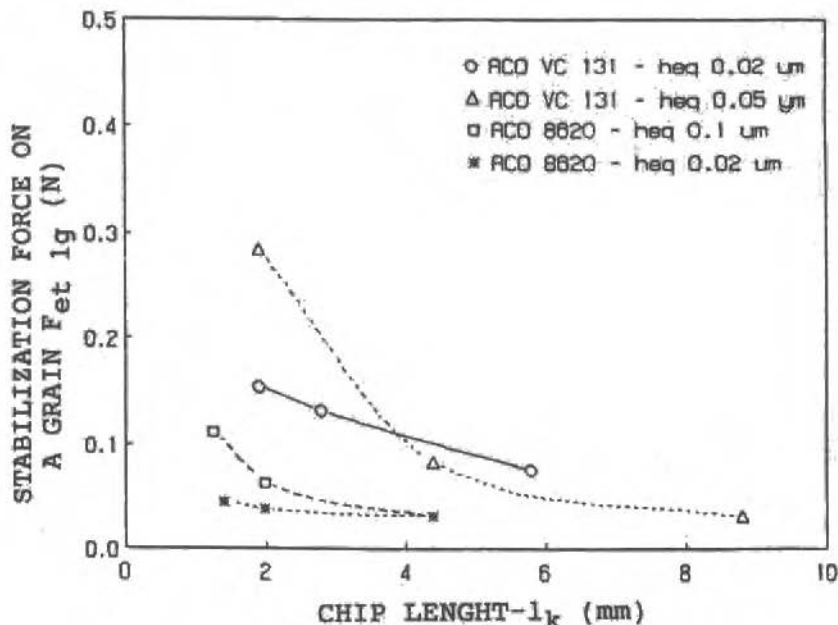


Fig. 6 Stabilization force on an abrasive grain in relation to the contact length

The increase of the contact length implies in the decrease of the stabilization force on an abrasive grain. Meanwhile, the product of the contact length and the maximum chips thickness is proportional to the  $h_{eq}$  parameter. Therefore, by keeping the  $h_{eq}$  parameter constant and decreasing the chip length, its maximum thickness increases and, as consequence, the stabilization force on an abrasive grain also increases, according to Fig. 7.

These results can mask the analysis by the superposition of effects, since the increase of the maximum chip thickness increases the stabilization forces on the abrasive grain, which is also caused by the grain that remains tied to the bond for a longer period. Therefore, the flattened area on top of the abrasive grains increases due to the micro wear. The solution of this problem, can be seen in Fig. 8 where is shown the relation between the stabilization force on a grain, divided by the maximum chip thickness ( $f^*$ ) and the chip length.

The resulted of force ( $f^*$ ) for hardened steel are smaller when compared with tool steel. This occurs due to the smaller cutting specific pressure of the hardened steel.

On greater  $h_{eq}$  values (0.1  $\mu m$  and 0.05  $\mu m$ ) the force ( $f^*$ ) is smaller for the greater contact. This means the bond wear increases with the contact length.

For lower  $h_{eq}$  (0.02  $\mu m$ ) the stabilization force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ ) is greater because being the chip thickness typically smaller, the friction between abrasive and workpiece is greater. In these conditions the increase of the chip length corresponds to an increase of the stabilization force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ )

because the chip is not able to wear the bond. This occurs because the generated chip with smaller  $h_{eq}$  is thin and long, with small cross section and breaks easily. When they hit the bond, they bend and break with least bond wear.

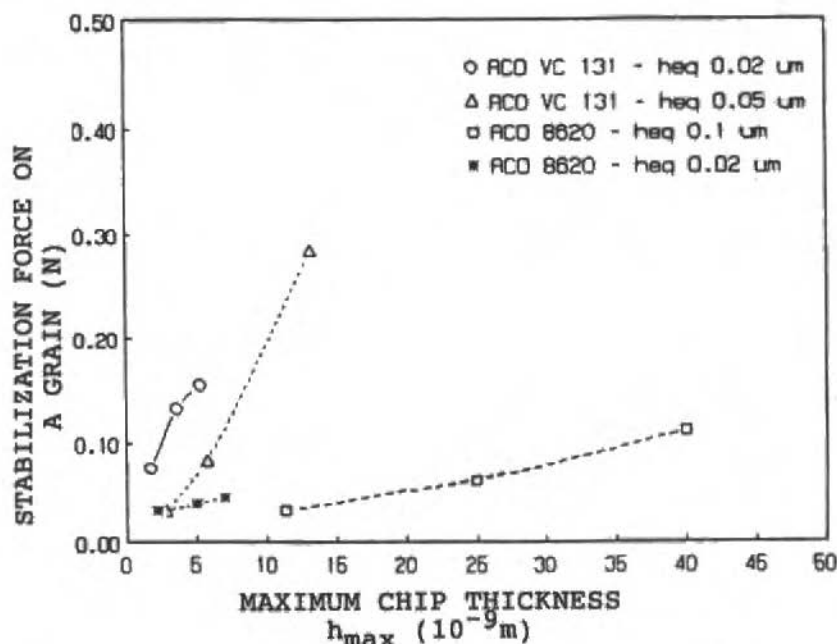


Fig. 7 Stabilization force on an abrasive grain in relation to the maximum chip thickness

With the hardened steel ( $h_{eq} = 0.1 \mu\text{m}$ ) the (G) ratios are smaller because the generated chip induces a greater bond wear, releasing more abrasive grains. It is important to note that, on hardened steel, the grinding wheel wear can be greater due to the influence of the kind of generated chip and its geometry.

The stabilization force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ ) is equal to the product of a constant and the mean grain width. This width increases due to micro wear. This occurs because the grain remains longer tied to the bond, leading to a better utilization of the abrasive grains and also to an increase in the (G) ratio.

This can be verified in Fig. 9 which presents the behavior of the (G) ratio and the ( $f^*$ ) force.

## Conclusions

The results presented in this work show the behavior of the cutting surface wear of resin bond grinding wheels K. G. Sorensen related to the chip geometry of easy and difficult to grind steel.

For each type of steel to be ground, there is a working condition which corresponds to the least bond wear. As a general rule, for low  $h_{eq}$  values, the bond wear is smaller.

The force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ ) is directly proportional to the top area of the abrasive grains. If the ( $f^*$ ) force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ ) is high, it means that the flattened area on the top of the abrasive grains is large, i.e., the abrasive grains are being held longer on the bond, and (G) relation is high.

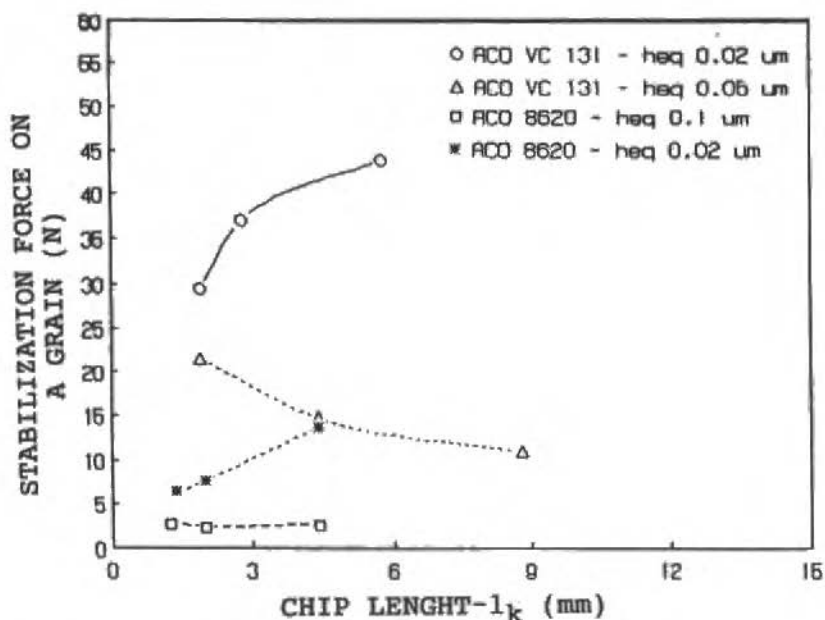


Fig. 8 Stabilization force on a grain related to the maximum chip thickness and chip length

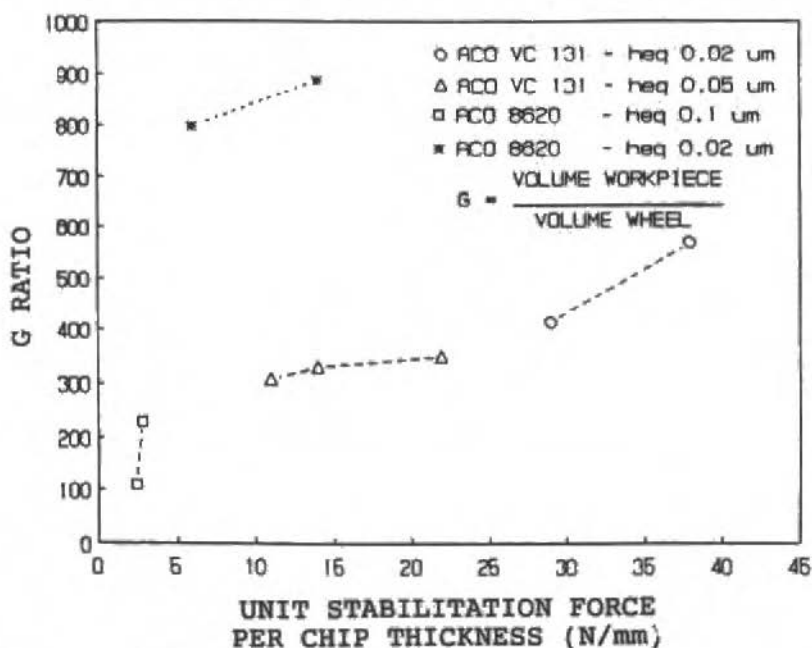


Fig. 9 Behavior of the (G) relation and force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $\mu\text{m}$ )

If the force on an abrasive grain per unit of maximum chip thickness ( $f^*$ ) is low, the wheel is loosing abrasive grains therefore, the (G) ratio is low. A direct relation is established between the behavior of ( $f^*$ ) and (G). It was observed that (G) relation is inversely proportional to  $h_{eq}$ , consequently, for the grinding wheel to last longer, the  $h_{eq}$  used should be small. This means that the production must be reduced, since either the product of the depth of cut (a) and table velocity (Vw) must be decreased or the wheel cutting speed increased, keeping the product (a) and (Vw) constant. The last possibility leads to a smaller  $h_{eq}$  but keeps the same production rate.

For smaller  $h_{eq}$  values the (G) ratio is higher with longer contact lengths. The creep-feed grinding operations with CBN 360 resin bond wheels will only have adequate (G) ratio with small  $h_{eq}$  values. Therefore, to obtain better productivity on this type of operation, high peripheric wheel velocity should be used.

For greater  $h_{eq}$  values, the (G) relation increases when the contact length is short. This means that the reciprocating operation is a good choice to keep the tool cost low when it is not possible to decrease the production or increase the peripheric wheel velocity.

## Acknowledgments

The authors would like to express their acknowledgments to the industries that sponsored this project. These industries are: K. G. Sorensen, DE BEERS and Winter do Brasil.

## References

- Bianchi, E. C., 1992, "Ação da Geometria Teórica do Cavaco no Desgaste de Rebolos de CBN com Ligante Resinóide", São Carlos, São Paulo, 157p. Ph D Thesis, University of São Paulo, Brazil.
- English, W. R., Nolan, T. C., Ratterman, E. 1991 "Hidden Aspects of Superabrasives Economics", Superabrasives, 91. Illinois, 20p.
- Nailor, B. 1989, "Truling Parameters for Conditioning Vitrified Bond Wheels", International Conference, 27, Illinois, GE Superabrasives, 20p.
- Oliveira, J. F. G., 1992, "Controle do Estado de Afição de Rebolos na Retificação de Precisão", São Carlos, São Paulo, Brasil, (Livro Docência), 165p.
- Peters, J, Decneut, A., 1975, "L'Espaisseur de Coupe Equivalente Parametre Determinant in Retification", *Mechaniques Materiaux Electricité*, Vol. 58, no. 315, p22-30.
- Shimamune, T., Ono, K., 1983, "Wheel Life in Grinding", *Bull. Japan Soc. of Prec. Eng.*, Vol.17, no. 1, March, p. 35-42.

# Otimização da Velocidade de Trefilação do Aço Inoxidável Austenítico ABNT 304

## *Study on the Wire Drawing Speed Improvement of Austenitic Stainless Steel ABNT 304*

Gustavo Aristides Santana Martinez  
Sérgio Tonini Button

Departamento de Engenharia de Materiais  
FEM - UNICAMP  
Caixa Postal 6122  
13081-970 - Campinas - SP - Brasil

### Abstract

This work presents a study on the wire drawing speed improvement with different die geometries and two types of lubricants. The influence of different die geometries on austenitic stainless steel ABNT 304 wire drawing force was also analyzed. Dies with bell angles of 10, 14 and 18° and bearing lengths of 20, 35 and 50% of the final diameter were used. The influence of high drawing speeds was studied also. The friction coefficient in wire drawing was also evaluated.

**Keywords:** Wire Drawing, Stainless Steel, Lubrication, Wires

### Resumo

Este trabalho apresenta o estudo da otimização da velocidade de trefilação com diferentes geometrias de feiras e dois tipos de lubrificantes. Também é analisada a influência da geometria da feira sobre a força de trefilação do aço inoxidável austenítico ABNT 304. Foram usadas feiras com ângulo de trabalho de 10, 14 e 18° e região cilíndrica de calibração com 20, 35 e 50% do diâmetro final. Foi também estudada a influência da velocidade, assim como o coeficiente de atrito no processo de trefilação de fios.

**Palavras-chave:** Trefilação, Aços Inoxidáveis, Lubrificação, Fios

### Introdução

Este trabalho tem por objetivo principal, a otimização da velocidade de trefilação do aço inoxidável austenítico ABNT 304, através do estudo do regime de lubrificação e de diversas geometrias de feiras.

Assim, serão estudados alguns parâmetros do processo de trefilação a fim de se obter a máxima velocidade possível, sempre com a perspectiva de: redução no consumo de energia; aumento do grau de utilização das máquinas por unidade de tempo; manutenção da qualidade do produto acabado.

A transformação a frio por trefilação tem acentuada contribuição pois é por seu intermédio que se pode fabricar produtos acabados com alta precisão dimensional e boa qualidade superficial.

A exigência do aumento da produtividade vem acompanhada do aumento da velocidade de trefilação sem a perda da qualidade e com manutenção dos baixos custos do processo.

Verifica-se essencialmente alguns problemas decorrentes do aumento da velocidade: o aumento da taxa de produção de calor, que afeta o desempenho do lubrificante, pela redução de sua viscosidade; afetada a viscosidade ocorre uma diminuição na eficiência da separação fio-matriz, que pode ser verificada na prática pela ocorrência de um acabamento brilhante típico da lubrificação limite. Isto acarreta, entre outros, maior força de trefilação e o aumento na energia necessária; tem-se também problemas no acabamento da superfície do produto acabado; a vida da matriz é diminuída, acarretando uma diminuição do comprimento de produto trefilado; também o tempo perdido na troca das matrizes (feiras) é aumentado, com a elevação do tempo de máquina parada.



## Aços Inoxidáveis Austeníticos

Os aços austeníticos reúnem uma alta resistência à tração com uma utilidade excepcionalmente elevada e possuem a maior resistência à corrosão de todos os aços inoxidáveis.

Os aços austeníticos podem ser encruados pelo trabalho a frio, característica muito útil em aplicações onde a redução de peso é fator importante, tais como a construção de aviões e trens ferroviários. A alta plasticidade e a capacidade de encruamento dos aços austeníticos, permite que estes sejam trabalhados a frio até atingir-se valores excepcionais de limite de escoamento e resistência (Zabala, 1982).

Com a transformação a frio consegue-se melhorar o limite de resistência e o limite elástico, mas os aços tornam-se ligeiramente magnéticos por causa da transformação de parte da austenita em martensita (Zabala, 1982), denominando-se aços inoxidáveis austeníticos metaestáveis (Mei, 1988).

Os aços inoxidáveis austeníticos podem ser classificados em dois grupos dependendo da estabilidade da austenita em condições de deformação: os que não formam martensita mesmo após considerável deformação plástica e, por isso chamados de estáveis. Como exemplo tem-se o ABNT 310; os que apresentam formação de martensita após alguma deformação, e por isso, chamados metaestáveis. Como exemplo tem-se o ABNT 302.

A resistência mecânica dos aços austeníticos melhorada pela deformação plástica a frio, em alguns casos pode ser inaceitável. Nesses casos, os aços austeníticos são tratados termicamente antes do fornecimento, a fim de conduzir sua resistência mecânica a um nível aceitável. Esse tratamento ocorre normalmente a temperaturas entre 1000 e 1100°C, seguidos de um rápido resfriamento para se evitar a precipitação de carbonetos nos contornos dos grãos.

O grau de endurecimento por trabalho a frio depende em parte do grau de deformação e em parte da composição do aço. Se o aço foi fabricado de tal modo que os elementos estabilizadores da austenita se equilibram exatamente com elementos estabilizadores da ferrita, durante o resfriamento rápido após o recozimento, diz-se que o aço tem baixa estabilidade da austenita, porque durante o trabalho a frio a austenita será convertida parcialmente ou totalmente em uma fase muito dura, conhecida como martensita de deformação. Por esta razão, aços com baixa estabilidade da austenita são utilizados, entre outras aplicações, para molas.

Após uma operação de trabalho a frio que corresponda a 80% de redução de área, estes aços podem alcançar uma resistência à tração superior a 1960 MPa.

O tipo ABNT 304, austenítico estável, mostra uma relação parabólica entre deformação e tensão, com o encruamento decrescente com o aumento de deformação. No caso do tipo ABNT 301, metaestável, após 10 a 15% de deformação ocorre um encruamento acelerado, associado à formação de martensita induzida por deformação.

### Características e Utilização do Aço Inoxidável Austenítico ABNT 304

O aço ABNT 304 é um aço inoxidável austenítico básico 18-8 com teor de carbono máximo de 0,08%, com aproximadamente 18% de cromo e 8% de níquel. Sua alta plasticidade permite a transformação a frio e sua capacidade de encruamento eleva a resistência mecânica.

Estas características permitem uma larga utilização dentro dos mais variados tipos de indústria. Normalmente o aço ABNT 304 é utilizado na fabricação de: diversos tipos de mola, parafusos, rebites, pregos, pinos, porcas e produtos semelhantes, telas comumente utilizados como elemento filtrante, cabos para navegação, aeronáutica e outros, peças ou revestimentos decorativos de arquitetura (Allegheny, 1959).

### Trefilação do Aço Inoxidável

A trefilação é um processo de conformação a frio no qual o fio metálico é tracionado através de uma ferramenta oca denominada fieira, onde sofre deformação plástica. Em consequência dessa deformação, o diâmetro do fio é reduzido e seu comprimento é aumentado.

A finalidade do processo de trefilação é a obtenção de fios de dimensões, acabamento superficial e propriedades mecânicas controladas (Bresciani, 1991).

### Lubrificação na Trefilação

Os lubrificantes utilizados na trefilação de fios dividem-se em três grupos: líquidos, pastosos e sólidos. Qualquer que seja o grupo a que pertença, o lubrificante deve satisfazer às seguintes propriedades:

- a) ser capaz de manter separadas a superfície da fiação e a superfície do material trefilado durante todo o processo de trefilação;
- b) manter-se estável perante a mudança de temperatura;
- c) não reagir quimicamente com as superfícies metálicas, e
- d) manter limpas as superfícies lubrificadas.

Tem-se particular interesse nos lubrificantes sólidos e líquidos, devido a sua utilização mais comum na trefilação do aço inoxidável.

Tanto na utilização do lubrificante sólido como no lubrificante líquido, duas características do processo de trefilação têm grande influência: a) a temperatura de trabalho que atua de forma direta na viscosidade do lubrificante; b) a pressão de trabalho que é constante e diretamente proporcional à redução de secção transversal do material.

A escolha correta de um lubrificante baseia-se em parâmetros como os materiais usados na ferramenta e na peça, a temperatura e a velocidade de processo. A eficiência do lubrificante está relacionada à sua capacidade de formar uma película estável sob as condições de processo, que previna o contacto entre as superfícies (Button, 1990).

Quanto à espessura do filme de lubrificação existente entre as superfícies, Wilson (1979) define os regimes de lubrificação descritos a seguir:

- Regime de filme espesso (Fig. 1a), onde as superfícies são totalmente separadas por um filme muitas vezes superior à rugosidade média das superfícies envolvidas e ao tamanho molecular do lubrificante empregado. Este regime ocorre sempre que a espessura do filme é maior do que dez vezes a rugosidade quadrática média das superfícies envolvidas. Assim, o lubrificante pode ser estudado como meio contínuo entre superfícies lisas. Nesse regime, a resistência ao movimento relativo é definida pelas propriedades físicas do lubrificante. O coeficiente de atrito é pouco útil nesse caso, porém de modo grosseiro são medidos coeficientes menores que 0,05. Como as superfícies são completamente separadas pelo filme, o desgaste das superfícies inexistente. Entretanto, pode ocorrer corrosão ou erosão devido à cavitação ou à presença de partículas estranhas no lubrificante.
- Regime de filme fino (Fig. 1b), onde a espessura do filme apresenta-se entre três a dez vezes o valor da rugosidade superficial média das superfícies. A espessura do filme é sempre maior que o tamanho molecular do lubrificante e desta forma, a interação entre as saliências é responsável por uma pequena parcela da carga atuante na interface. O comportamento da resistência ao movimento relativo é similar ao do regime de filme espesso, exceto que no regime de filme fino, a não uniformidade da rugosidade superficial pode apresentar uma influência preponderante sobre o atrito.
- No regime de camada limite (Fig. 1c), o filme que separa as superfícies apresenta espessuras da ordem de algumas vezes o tamanho molecular do lubrificante. A mecânica de deformação das asperezas em contacto e o comportamento físico-químico da superfície da película formada entre o lubrificante e os materiais são fatores de extrema importância.
- Regime de lubrificação mista (Fig. 1d), onde a espessura do filme é menor que três vezes o valor da rugosidade média das superfícies. Nesse caso, uma parcela significativa da carga aplicada atua no contacto entre as saliências, sendo o restante relacionado à pressão verificada no filme de lubrificante existente próximo a essas saliências. Se o lubrificante é escolhido corretamente, ele formará nas superfícies, finíssimas películas aderentes (camada limite), que apesar da reduzida espessura, podem prevenir o contacto metálico direto. Nos vales, os filmes

são relativamente espessos e essa situação pode ser analisada como um regime modificado de filme fino. Entretanto, nos picos, torna-se necessário analisar os efeitos físico-químicos que conduzem ao surgimento da película, fazendo com que a análise se realize como um regime de camada limite. Os coeficientes de atrito podem variar de valores abaixo de 0,05 (regime de filme espesso) a valores acima de 0,4 (regime de camada limite).

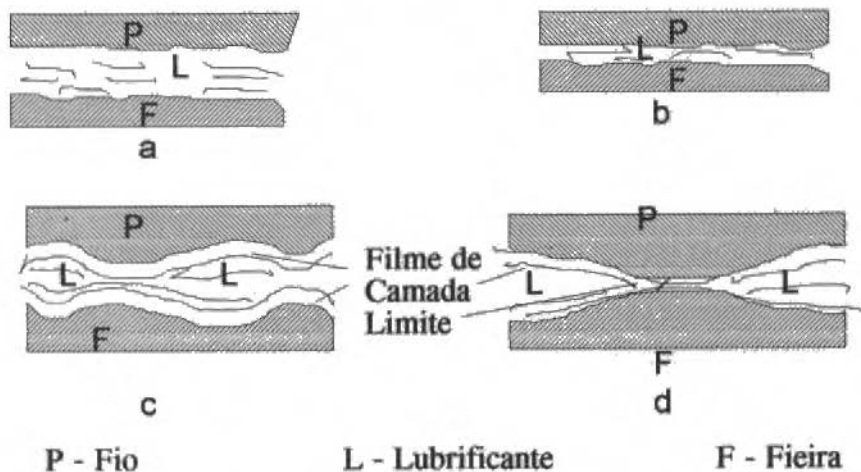


Fig. 1 Representação dos regimes de lubrificação em processos de conformação (Wilson, 1979)

O estabelecimento de um ou mais regimes de lubrificação durante o processo de trefilação, está relacionado a fatores como a velocidade do processo, a viscosidade do lubrificante e a força aplicada nas superfícies. A Fig. 2 obtida de Hersey e Button (1990) apresenta a variação da resistência ao cisalhamento da interface de contacto, representada por um coeficiente de atrito, devido ao aumento do parâmetro  $S$  (velocidade  $\times$  viscosidade/força). Representa a passagem dos diversos regimes: camada limite, para pequenos valores de  $S$ ; misto, para valores de  $S$  um pouco maiores; hidrodinâmico, para valores de  $S$  acima de um ponto crítico.

A baixas velocidades, a quantidade de lubrificante carregada para a região de contacto é mínima, somente algumas poucas camadas atômicas de lubrificante aderem às superfícies, caracterizando o regime de camada limite; a possibilidade de contacto metálico é grande, bem como o coeficiente de atrito.

Com o aumento da velocidade, assumindo que a viscosidade e força permaneçam constantes, uma maior quantidade de lubrificante é trazida à região de contacto, preenchendo os vales, separados por passagens estreitas entre picos. Com o decorrer do processo, mais e mais lubrificante é trazido para os vales até que se estabelece um regime misto. As camadas de filme lubrificante são continuamente supridas pelo lubrificante existente nos vales.

O valor crítico de  $S$ , onde ocorre a passagem para um regime hidrodinâmico, representa a presença de um filme contínuo entre as superfícies. A existência desse filme é possível graças à deformação provocada nos picos, que ao torná-los mais planos faz com que o lubrificante existente nos vales seja distribuído ao longo das superfícies, separando-as totalmente.

A queda do coeficiente de atrito é facilmente explicada pela crescente separação das superfícies.

Já o aumento do coeficiente após atingir-se o regime hidrodinâmico, pode ser explicado observando-se a quantidade de lubrificante presente entre as superfícies, bem como a pressão a que estará submetido o filme. O aumento de velocidade acarreta uma maior quantidade de lubrificante carregada para a região de contacto, a espessura do filme tende a crescer porém, também a pressão atuante sobre o filme se eleva, o que exige uma maior tensão para promover o cisalhamento do filme e, conseqüentemente, ocorre um aumento do coeficiente de atrito (Button, 1990).

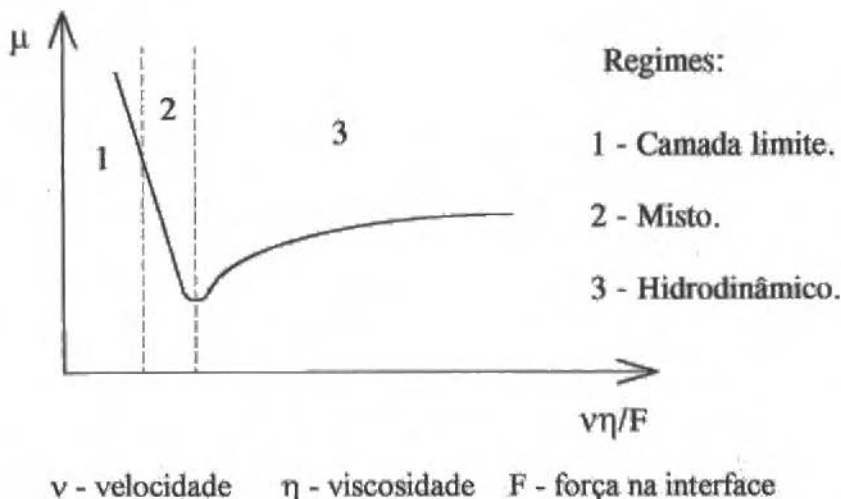


Fig. 2 Curva de Stribeck (Button, 1990)

### Fieiras

A ferramenta de trefilar é constituída de regiões distintas ao longo do furo interno, como pode ser visto na Fig. 3.

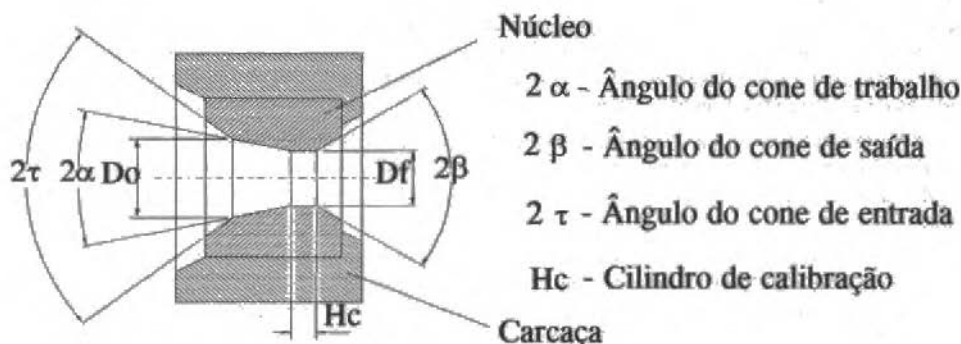


Fig. 3 Representação dos ângulos dos cones (Bresciani, 1991) e da altura e diâmetro do cilindro de calibração

O cone de entrada tem a finalidade de guiar o fio em direção ao cone de trabalho e permitir que o lubrificante acompanhe o fio e contribua para a redução do atrito entre as superfícies do fio e do cone de trabalho.

No cone de trabalho ocorre a redução, sendo, portanto, a região onde é aplicada ao fio o esforço de compressão e onde o atrito deve ser minimizado para reduzir, também ao mínimo, o desgaste da fieira.

No cilindro de calibração, ocorre o ajuste do diâmetro do fio. É objeto de controle o comprimento, ou melhor, a altura desse cilindro, pois, quando essa altura é pequena, facilita as operações de retificação das fieiras gastas para obtenção de uma fieira de diâmetro final maior. O cone de saída deve proporcionar uma saída livre do fio sem causar danos nas superfícies da fieira e do fio.

A fiação é fabricada com materiais de extrema resistência ao desgaste, empregando-se comumente metal duro (carboneto de tungstênio), diamante (natural ou policristalino) e também alguns materiais cerâmicos (óxido de zircônio, carboneto-nitreto de titânio, etc).

Qualquer que seja o material usado na fabricação das ferramentas para trefilação, são exigidas as seguintes características (Bresciani, 1991): permitir a trefilação de grande quantidade de fios sem que ocorra um desgaste acentuado da fiação; permitir a trefilação a altas velocidades para produzir elevadas quantidades por unidade de tempo; permitir a adoção de elevadas reduções de seção; conferir calibração constante do diâmetro do fio; conferir longa vida à ferramenta, sem necessidade de paradas da máquina de trefilar para controle de dimensões e substituição da ferramenta; permitir a obtenção da superfície do fio liso e brilhante, durante longo período de uso.

### Ângulo de Trabalho ( $2\alpha$ )

Bonzel (1935) afirma que uma lubrificação ideal ou uma mudança adequada no ângulo da fiação pode diminuir o efeito de redução da tensão de compressão no fio à medida que se aproxima da saída da ferramenta.

Também mostra que a associação de um ângulo ótimo, que é o ângulo ideal para a mínima força de trefilação, com um regime ótimo de lubrificação permite a obtenção de alta qualidade superficial do fio trefilado e menor desgaste da fiação.

Rowe (1965) afirma que um regime ótimo de lubrificação é mais facilmente obtido através do uso de pequeno ângulo de trabalho e uma grande velocidade.

O ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) depende de dois fatores principais (Koner, 1992): do tipo de material a ser trefilado; da porcentagem de redução da seção transversal.

Frascio (1970) afirma que o melhor sistema para se determinar experimentalmente o ângulo ótimo de trabalho é através do controle da variação da tensão de tração, em função da variação do cone de trabalho, fixando outros parâmetros como: qualidade e rugosidade da fiação utilizada, diâmetro e qualidade do fio, tipo de lubrificante e velocidade de trefilação.

O método do limite superior de Avitzur (1983) é o que melhores resultados tem apresentado no cálculo do ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ). Esse método considera o trabalho redundante, o trabalho de atrito e o trabalho de deformação homogênea.

O método baseia-se no teorema do limite superior, o qual afirma que, quando um corpo escoar, o trabalho das forças externas é menor ou igual ao trabalho das forças associadas a qualquer campo de velocidades cinematicamente admissível no corpo sob deformação.

A expressão (1) apresenta a equação do método do limite superior desenvolvido por Avitzur.

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_o} = \frac{\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_o} + 2 \ln \frac{R_o}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \cot \alpha \right) + 2\mu \left[ (\cot \alpha) \left[ 1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_o} - \ln \frac{R_o}{R_f} \right] \ln \frac{R_o}{R_f} + \frac{Hc}{R_f} \right]}{1 + 2\mu \frac{Hc}{R_f}} \quad (1)$$

onde:  $\sigma_{xf}$  - tensão de trefilação;  $R_o$  - raio inicial;  $\sigma_o$  - tensão de escoamento efetiva;  $R_f$  - raio final;  $\sigma_{xb}$  - tensão frontal;  $\mu$  - coeficiente de atrito;  $\alpha$  - semi-ângulo de trabalho;  $Hc$  - comprimento da região cilíndrica de calibração.

### Cilindro de Calibração ( $Hc$ )

Esta região tem como finalidade obter o diâmetro exato do material trefilado que define sua altura ou comprimento.



A região cilíndrica de calibração geralmente é dividida em três classes (Eder, 1981): pequeno - quando tem de 0 a 20% do diâmetro; médio - de 20 a 30% do diâmetro; longo - quando tem de 30 a 50% do diâmetro.

Frascio (1970) afirma que o cilindro de calibração, não basta ser exato e liso como o cone de trabalho, mas que seu comprimento deve ser proporcional ao diâmetro e à redução de secção a ser efetuada. Se for longo pode ocasionar uma resistência ao movimento do material trabalhado e se for curto pode determinar um alargamento prematuro do cilindro.

Eder (1981) afirma que materiais de baixa resistência mecânica necessitam de  $2\alpha$  maiores que materiais de alta resistência, embora reconheça a existência de exceções a esta regra.

Segundo Keebler (1990), para prevenir o rápido desgaste da ferramenta acima das medidas toleráveis, o comprimento do cilindro de calibração deve ser de 35 a 50% do diâmetro final.

Em relação à região cilíndrica de calibração, Maxwell (1991) faz as seguintes afirmações: o comprimento deve ser entre 35 a 50% do diâmetro final; o acabamento superficial deve ser elevado; a região de calibração deve ser paralela em todo o seu comprimento.

## Trefilação do Aço Inoxidável Austenítico ABNT 304

O aço inoxidável austenítico ABNT 304 apresenta uma elevada plasticidade, o que permite sua deformação a frio até valores de 92% de redução da secção transversal entre recozimentos.

O material de partida é o fio-máquina recozido e decapado com diâmetro na faixa de 5,50 a 7,94 mm e resistência a tração na faixa de 620 a 725 MPa.

A trefilação do aço ABNT 304 normalmente ocorre nas velocidades (Sandvik, 1983): trefilação a seco - 3 a 5 m/s; trefilação úmida - 1 a 2 m/s.

Num pequeno número de empresas a trefilação por via úmida chega a ocorrer a uma velocidade de até 6 m/s para fios com diâmetro na faixa de 0,40 mm.

É comum o uso de feiras de carboneto de tungstênio na trefilação a seco e de feiras de diamante na trefilação úmida.

As indústrias brasileiras de trefilação de aço inoxidável tem como padrão feiras com ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) de 16 a 18° e cilindro de calibração variando entre pequeno e médio, diferente do recomendado pela "Steel Wire Handbook" (W.A., 1975) que indica  $2\alpha$  igual a 18° e Hc com 30 a 50% do diâmetro do produto.

O arame de aço inoxidável ABNT 304 está disponível no mercado com os seguintes acabamentos: decapado; revestido com capa metálica; trefilado; polido.

O aço ABNT 304 não possui nenhuma característica especial no seu processo de trefilação, podendo ser trefilado como os outros arames da família 300.

## Procedimento Experimental

O procedimento experimental constou de três etapas:

- ensaios com a matéria-prima: os fios a serem trefilados foram submetidos a ensaios de tração;
- ensaios de trefilação: nesta etapa foi avaliada a influência de cada feira com geometria específica e viscosidade dos lubrificantes utilizados, e
- ensaios com os produtos: os fios trefilados foram avaliados quanto ao aspecto visual e resistência à tração.

A seguir faz-se a descrição dos ensaios de trefilação.

### Ensaio de Trefilação

Os ensaios de trefilação foram realizados em uma trefiladora montada e instalada no Laboratório de Conformação do Departamento de Engenharia de Materiais da FEM - Unicamp.

A trefiladora utilizada é uma máquina de cabrestante único, velocidade variável e caixa de fieira adaptada para permitir a medição do esforço de trefilação, como pode ser visto na Fig. 4.

A seqüência de trefilação tem início na fixação de um carretel plástico ABNT 160 contendo aproximadamente 5 kg de aço inoxidável em um desenrolador horizontal que trabalha sobre dois rolamentos. O fio passa na seqüência por dois tensionadores alinhados. Estes tensionadores têm como função evitar que esforços contrários ao esforço de trefilação, ocasionados pelo desenrolamento, influenciem no sistema de medição do esforço de trefilação.

Na seqüência, o fio entra na caixa de fieira onde encontra o óleo lubrificante e a fieira de trefilação. A fieira totalmente imersa em óleo é apoiada sobre um suporte deslizante, que por sua vez tem como guia a tampa da caixa de fieira. O suporte de fieira deslizante tem como obstáculo a lâmina onde se encontram os extensômetros elétricos.

Finalmente, na saída da caixa de fieira tem-se o cabrestante, que traciona o fio forçando a sua passagem pela fieira. O cabrestante é movido por um motor de corrente contínua de 18,4 kW e 3000 rpm de velocidade angular máxima.

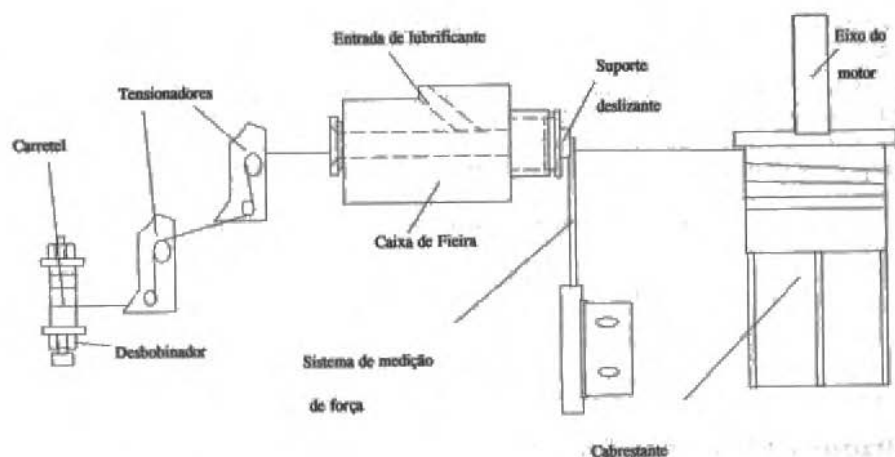


Fig. 4 Trefiladora monobloco.

A velocidade de trefilação variou de 0 a 14,6 m/s, sendo controlada por um tacômetro digital.

Para a medição da força de trefilação utilizou-se um dispositivo composto de uma lâmina, que é flexionada durante o processo. Nesta lâmina estão colados dois extensômetros elétricos em meia ponte de Wheatstone.

Este dispositivo encontra-se conectado a um amplificador de sinais Philips, um milivoltímetro digital e um registrador gráfico.

A calibração do dispositivo de medição foi realizada utilizando-se pesos com valores conhecidos e a leitura dos resultados feita através do milivoltímetro.

Através de regressão linear pelo método dos mínimos quadrados obteve-se a seguinte relação de força (N) versus voltagem (mV):

$$F = 0,688 \times V \quad \text{com o coeficiente de correlação} \quad R^2 = 0,998$$

O conjunto de fieiras a ser utilizado nos ensaios foi definido através do método do limite superior desenvolvido por Avitzur (1983), optando-se por um medidor na faixa de força de 0 - 147 N e por fieiras com ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) de 10, 14 e 18°.

Esses ângulos de fieira representam os ângulos ótimos obtidos definindo-se valores para  $\mu$  e  $H_c$ , mantendo-se constantes  $D_o$ ,  $D_f$  e  $\sigma_o$ .

Foram preparadas nove fieiras (Fig. 3) de metal duro do tipo BF41. As nove fieiras tinham em comum as dimensões:  $D_o = 0,5$  mm;  $D_f = 0,45$  mm;  $2\beta = 60^\circ$ . No entanto, cada fieira apresentava uma geometria particular com ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) e cilindro de calibração (Hc) conforme a Tabela 1.

Tabela 1 Composição da geometria das fieiras

Fieira	$2\alpha(^{\circ})$	Hc/Df(%)	Fieira	$2\alpha(^{\circ})$	Hc/Df(%)	Fieira	$2\alpha(^{\circ})$	Hc/Df(%)
1(1020)	10	20	4(1420)	14	20	7(1820)	18	20
2(1035)	10	35	5(1435)	14	35	8(1835)	18	35
3(1050)	10	50	6(1450)	14	50	9(1850)	18	50

O controle da geometria de todas as fieiras foi feito através de um aparelho perfilográfico Taylor-Hobson.

Como não existe no mercado um lubrificante com características específicas para trefilação do aço inoxidável, optou-se por um óleo capaz de manter um nível de viscosidade suficiente para formar uma película estável nas condições previstas para o processo de trefilação, conforme indicação do fabricante.

Como lubrificante, foram utilizados dois óleos da classe MJF (Inbra, 1993). Os lubrificantes da classe MJF são lubrificantes à base de óleos vegetais e minerais combinados com cloridrinas de alto peso molecular, contendo aditivos para pressões elevadas. As viscosidades desses óleos foram avaliadas pelo fabricante através de um viscosímetro BrookField e os resultados estão na Tabela 2.

Tabela 2 Características dos lubrificantes (Inbra, 1993)

Óleo	Viscosidade a $25^{\circ}\text{C}$ (Ns/m <sup>2</sup> )	Densidade a $25^{\circ}\text{C}$ (g/ml)
MJF2	1,3	1,093
MJF5	3,1	1,084

## Resultados Obtidos nos Ensaios de Trefilação e Discussões

Os ensaios de trefilação foram divididos em três conjuntos.

No primeiro conjunto de ensaios foi utilizado o lubrificante de baixa viscosidade MJF 2, com fieiras de ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) de  $18^\circ$ .

Esses ensaios tinham como objetivo verificar a influência do comprimento da região cilíndrica de calibração sobre o esforço de trefilação a várias velocidades.

A fieira número 7 (1820) apresenta uma força de 48,16 N a 3,1 m/s e uma queda gradual da força até a velocidade de 14,1 m/s, onde atinge a melhor condição de trabalho com uma queda de 5,7% da força de trefilação em relação à velocidade mais baixa. A fieira número 9 (1850) apresenta uma força inicial maior mas, tem sua condição ideal de trabalho a 10,6 m/s onde tem-se uma queda de 7,6% da força de trefilação em relação à velocidade mais baixa. Através da curva ajustada polinomialmente verifica-se que a fieira número 8 é a que apresenta melhores resultados com menores forças de trefilação. Ela é constituída por um ângulo de trabalho de  $18^\circ$  e uma região cilíndrica de calibração (Hc) igual a 35% de Df. A fieira número 8 apresenta um declínio de força a partir da velocidade de 5,4 m/s, chegando a atingir condições ideais a uma velocidade de 11,3 m/s. A partir dessa velocidade, tem-se um aumento da força de trefilação. A 11,3 m/s tem-se uma queda de 6,8% da força, quando comparado à velocidade de 5,4 m/s.

Neste primeiro conjunto de ensaios foi possível verificar a importância da utilização do comprimento correto da região cilíndrica de calibração. Isto fica nítido se comparadas as três fieiras a uma velocidade de 14,2 m/s, onde se verifica uma queda de 16,5% na força de trefilação, quando utilizada uma região cilíndrica de calibração de 35%.

Procurou-se na revisão bibliográfica explicações para o comportamento, em termos de força, apresentado pelas feiras número 7 e 9 em relação à feira número 8. Pela equação de Avitur as forças devem aumentar à medida que  $H_c$  aumenta, mantendo-se os demais parâmetros como  $2\alpha$ , lubrificação e outros constantes. No entanto nos ensaios com  $H_c$  igual a 35% de  $D_f$  (feira número 8), verifica-se valores de força menores que as encontradas nas outras duas feiras. Nos ensaios com  $H_c$  igual a 20% observou-se um comportamento instável da força de trefilação, com expressiva influência de elementos externos como os tensionadores. As forças para  $H_c$  igual a 50% apresentaram-se elevadas devido ao comprimento excessivo da região cilíndrica de calibração e conseqüente aumento da resistência pelo atrito.

Isto demonstra que a equação de Avitur não é adequada em condições de trefilação a altas velocidades, como as utilizadas neste trabalho.

No segundo conjunto de ensaios foi utilizado o lubrificante de baixa viscosidade MJF 2 com feiras de ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) de  $10^\circ$ ,  $14^\circ$  e  $18^\circ$  e  $H_c$  igual a 35% de  $D_f$ . Esses ensaios tinham como objetivo verificar a influência do ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) sobre o esforço de trefilação a várias velocidades.

A feira número 2 (1035) apresenta uma queda da força de trefilação igual a 4,8% na faixa de velocidade de 5,8 a 14,3 m/s, devido ao carreamento de maior quantidade de lubrificante para a região de contato, aumentando a camada de filme lubrificante. Acima de 14 m/s a feira número 5 (1435) é a que melhor resultado apresenta, com uma queda da força de 2,7% em relação à feira número 8 e 9,3% em relação à feira de número 2.

Neste segundo conjunto de ensaios fica claro que para pequenos ângulos de trabalho predomina o efeito do atrito acarretando um elevado valor para o esforço de trefilação. À medida que o ângulo de trabalho aumenta, o efeito do atrito diminui, de tal forma que apesar do aumento do trabalho redundante, existe uma redução significativa do esforço de trefilação. Além disso, tem-se a existência de um ângulo pequeno entre a ferramenta e o fio associado à grande velocidade relativa, que favorece a formação de um filme espesso contínuo de óleo lubrificante, como apresentado por Rowe (1965). Isto fica claro quando se observa o comportamento das feiras de números 5 e 8, principalmente a velocidades acima de 14 m/s.

O terceiro conjunto de ensaios teve por objetivo analisar a influência da viscosidade do óleo lubrificante em altas velocidades e diferentes ângulos de trabalho. O lubrificante utilizado foi o óleo MJF 5, que possui viscosidade maior que o óleo MJF 2 utilizado nos dois primeiros conjuntos de ensaios.

Nesta etapa utilizou-se  $2\alpha$  igual a  $10^\circ$ ,  $14^\circ$  e  $18^\circ$  e fixou-se  $H_c$  em 35% de  $D_f$ , para melhor analisar a influência do óleo lubrificante sobre o esforço de trefilação. O comportamento das três feiras teve uma melhora significativa com a utilização do óleo MJF 5. A feira número 2 (1035) novamente apresenta maiores forças de trefilação, mas apresentou uma queda de 10,9% em comparação aos resultados obtidos com o óleo MJF 2 a velocidades acima de 14 m/s. No comportamento da feira número 2 predomina o efeito do atrito a baixas velocidades. A altas velocidades o atrito diminui devido ao carreamento de maior volume de óleo lubrificante e conseqüente formação de um filme espesso. A feira número 8 também tem um melhor comportamento na trefilação com o óleo MJF 5 do que com o óleo MJF 2. Ela apresenta uma queda do esforço de trefilação uniforme e gradual em todas as faixas de velocidade, atingindo 13,5% a velocidades acima de 14 m/s em relação aos ensaios com velocidades mais baixas.

Embora nos ensaios com o óleo lubrificante MJF 2 a feira número 5 tenha apresentado menores esforços de trefilação apenas em velocidades acima de 14 m/s, nesta terceira etapa ela tem uma queda uniforme e gradual da força em todas as faixas de velocidades.

Com o objetivo de melhor visualizar os resultados obtidos, agrupou-se na Fig. 5 os melhores resultados. Nesta figura verifica-se que:

- o melhor óleo lubrificante é o MJF 5, pois é o que melhor comportamento apresentou em todos ensaios de trefilação, mantendo viscosidade adequada nos diversos níveis de pressão e temperatura atingidos nesses ensaios, e

a melhor geometria é a da feira número 5. E a que melhor associa pequeno ângulo de trabalho com altas velocidades a um comprimento de região cilíndrica de calibração mais estável. E também apresenta vida mais longa na operação de recuperação para diâmetros maiores.

### Força x Velocidade de Trefilação

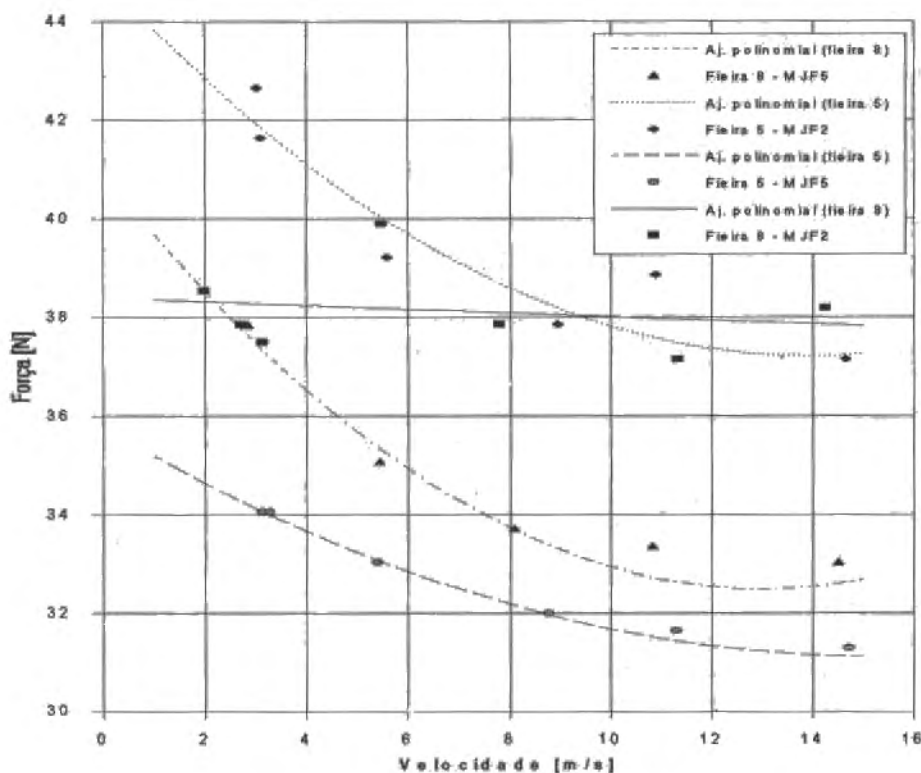


Fig. 5 Melhores resultados obtidos para força versus velocidade de trefilação

Com os resultados experimentais de força de trefilação e a expressão (2) para cálculo do coeficiente de atrito ( $\mu$ ) extraída do método do limite superior de Avitzur, foram calculados coeficientes de atrito para os diversos ensaios efetuados.

$$\mu = \frac{\sigma_0 \left( \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} + 2 \ln \frac{R_0}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha \right) \right) - \sigma_{xf}}{2 \left( \left( \frac{H_c}{R_f} \sigma_{xf} \right) - \left( \sigma_0 \left[ (\cot \alpha) \left[ 1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_0} - \ln \frac{R_0}{R_f} \right] \ln \frac{R_0}{R_f} \right] + \frac{H_c}{R_f} \right) \right)} \quad (2)$$

Para que se possa melhor analisar os resultados dessas simulações, foram feitos ajustes polinomiais de segundo grau que são apresentados junto aos valores dos coeficientes de atrito obtidos.

Da análise das Figs. 6 a 9 verifica-se a queda do coeficiente de atrito com o aumento da velocidade de trefilação, com exceção das feiras de número 8 e 9. Ambas com  $2\alpha$  igual a  $18^\circ$  (Fig. 7).



Sobre os valores de coeficientes de atrito obtidos por simulação e observando-se a curva de Stribeck (Fig. 2) e a análise dos regimes de lubrificação segundo Wilson (1979), pode-se estimar que:

- as feiras número 2, 7, 8 e 9 na trefilação com MJF 2 apresentaram coeficientes de atrito característicos do regime de camada limite em baixas velocidades passando para regime misto em altas velocidades;
- a feira número 5 na trefilação com MJF 2 apresentou coeficientes de atrito de regime misto em todas as velocidades ensaiadas;
- as feiras números 2 e 8 na trefilação com MJF 5 apresentaram coeficientes de atrito de regime misto em baixas velocidades passando para regime hidrodinâmico em altas velocidades, e
- a feira número 5 na trefilação com MJF 5 apresentou coeficientes de regime hidrodinâmico em todas as velocidades ensaiadas.

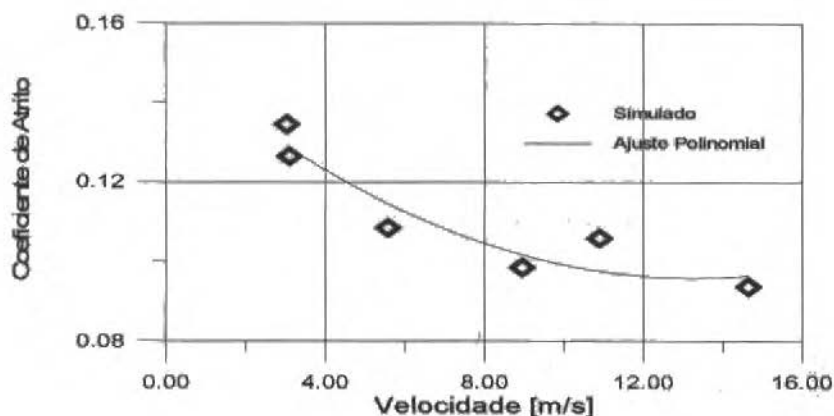


Fig. 6 Coeficiente de atrito x velocidade com óleo MJF 2 e feira nº 5

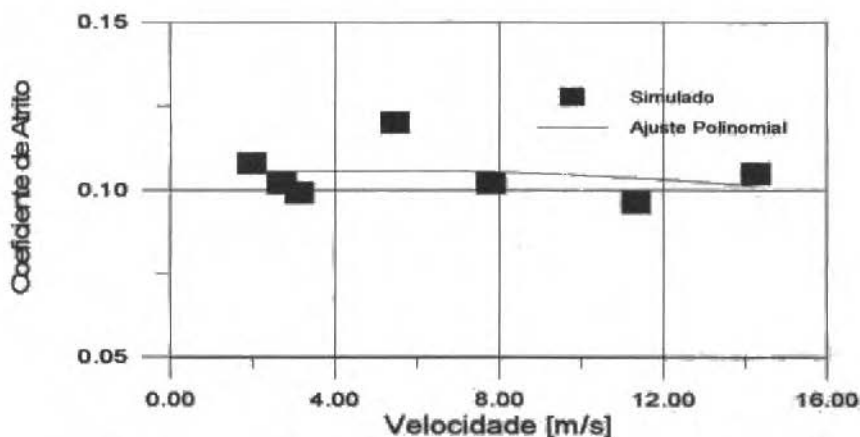


Fig. 7 Coeficiente de atrito x velocidade com óleo MJF 2 e feira nº 8

Os ensaios com o lubrificante MJF 2 apresentam valores de coeficiente de atrito na faixa de 0,2 a 0,07 que, segundo Wilson (1979), é uma condição de regime de lubrificação mista.

Os ensaios com o lubrificante MJF 5 apresentaram valores de coeficiente de atrito na faixa de 0,17 a 0,05, que é uma condição de regime de lubrificação variando de lubrificação mista a lubrificação hidrodinâmica, segundo Wilson (1979).

Tanto com o lubrificante MJF 2 como com o MJF 5, a feira número 5 apresentou o melhor desempenho, atingindo valores de coeficiente de atrito típicos de regime de filme espesso, segundo Wilson.

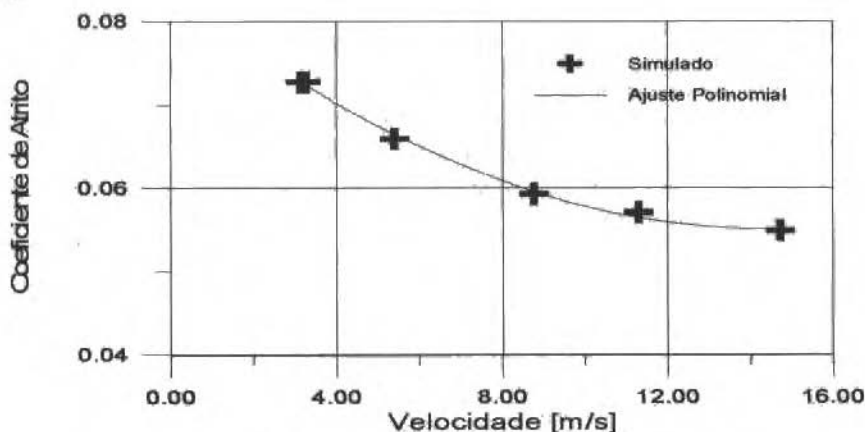


Fig. 8 Coeficiente de atrito x velocidade com óleo MJF 5 e feira nº 5

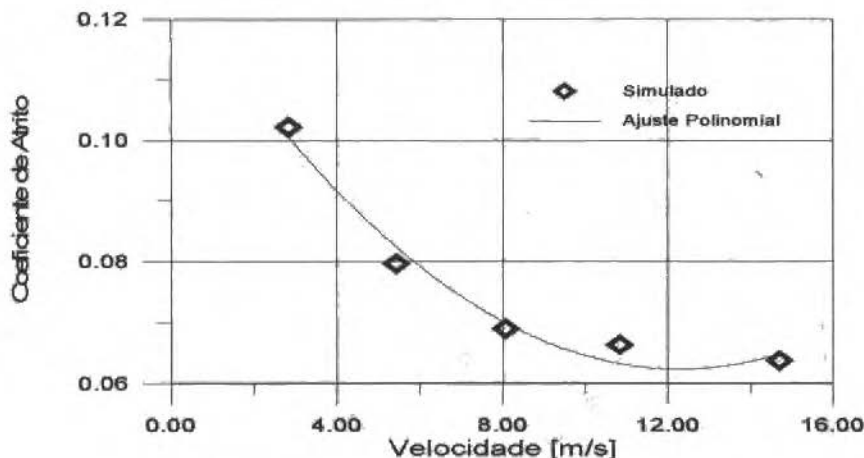


Fig. 9 Coeficiente de atrito x velocidade com óleo MJF 5 e feira nº 8

### Nomenclatura

$F$ = Força (N)	$v$ = Velocidade (m/s)	$\mu$ = Coeficiente de atrito (adim.)
$H_c$ = Altura do cilindro de calibração (m)	$V$ = Diferença de potencial (V)	$\tau$ = Semi-ângulo do cone de entrada (rd)
$R_o$ = Raio inicial (m)	$\alpha$ = Semi-ângulo do cone de trabalho (rd)	$\sigma_o$ = Tensão de escoamento efetiva (MPa)
$D_o$ = Diâmetro inicial (m)	$\beta$ = Semi-ângulo do cone de saída (rd)	$\sigma_{xb}$ = Tensão frontal (MPa)
$R_f$ = Raio final (m)	$\eta$ = Viscosidade dinâmica (Nsm <sup>-2</sup> )	$\sigma_{xf}$ = Tensão de trefilação (MPa)
$D_f$ = Diâmetro final (m)		
$S$ = Parâmetro de Stribeck (m <sup>-1</sup> )		

Através dos resultados da simulação verifica-se que, para as condições em que foram efetuados este trabalho, o melhor lubrificante é o que possui a maior viscosidade. Isto é, o óleo lubrificante MJF 5.

Os menores coeficientes de atrito foram alcançados pela fierra com o ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) igual a  $14^\circ$  e comprimento do cilindro de calibração igual a 35% do diâmetro final (Df) como pode-se observar na Fig. 8, onde o ajuste polinomial apresenta um comportamento descendente e o coeficiente de atrito tem valores reduzidos (0,05 a 0,07) em todas as velocidades. A queda do coeficiente de atrito até valores da ordem de 0,05 é explicada pelo aumento da velocidade e conseqüente aumento do carregamento de óleo lubrificante, para a região de deformação até atingir-se o regime de lubrificação hidrodinâmica.

Conforme se observa na curva de Stribeck (Fig. 2) existe uma velocidade limite a partir da qual o coeficiente de atrito começa novamente a aumentar. Esse limite não pode ser observado na faixa de velocidade em que foram efetuados os ensaios. Para isso seria preciso aumentar a velocidade, o que não foi possível devido a restrições operacionais do equipamento. No entanto, atingiu-se o objetivo do trabalho que era otimizar a velocidade sem perda da qualidade do produto. Alcançou-se velocidades da ordem de 14 m/s, ou seja, 2 vezes maiores que as empregadas industrialmente.

A otimização não foi somente na qualidade do produto e na queda da força, mas na produtividade e economia do processo. Os resultados obtidos contribuem para o aprimoramento do processo de trefilação na indústria brasileira, tendo em vista a falta de dados técnicos para:

- a definição do ângulo de trabalho ( $2\alpha$ ) correto das fierras utilizadas na trefilação do aço inoxidável, e sua importância no processo de trefilação;
- a definição do comprimento da região cilíndrica de calibração (Hc) correto e, sua importância no processo de trefilação e na vida da fierra, e
- a utilização do lubrificante próprio para altas velocidades e temperaturas.

## Conclusões

Dos resultados obtidos nos ensaios realizados e nas simulações efetuadas pode-se concluir que:

- A trefilação do aço inoxidável austenítico ABNT 304 a altas velocidades é viável.
- A tensão de trefilação depende da geometria da fierra, mesmo em condições ideais de lubrificação.
- A velocidade de trefilação tem grande influência sobre a força de trefilação.
- O coeficiente de atrito depende do regime de lubrificação estabelecido que é função da rugosidade das superfícies em contato, bem como da velocidade e da geometria da ferramenta.
- Existe uma geometria ótima para cada velocidade de trefilação e óleo lubrificante.
- Existe uma região cilíndrica de calibração correta para cada material a ser trefilado.
- Óleos lubrificantes de elevada viscosidade apresentam um melhor comportamento a altas velocidades de trefilação.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a colaboração do Prof. Dr. Loir A. Moreira do DPM-FEM-UNICAMP e o financiamento do CNPq.

## Referências

- Avitzur, B., 1983, "Handbook of Metal Forming", 1ª ed., John Wiley & Sons, Nova Iorque.
- Allegheny Ludlum Steel Corporation, 1959, "Stainless Steel Fabrication", Pa., USA.
- Bresciani Filho, E, et al., 1991, "Conformação Plástica dos Metais", Ed. da Unicamp.
- Button, Sérgio T., 1990, "Estudo da Lubrificação Hidrodinâmica na Extrusão Hidrostática", S.P., Tese de Doutorado, FEM-DEM UNICAMP.

- Bonzel, M., 1935, "Steel Wire - Manufacture and Properties", Eng. Book Shop, N.Y., pp. 94-114.
- Frascio, A., 1970, "Il-Filo Metalico", Ed. Hoepli - Italia
- Inbra Lubrificantes Ltda., 1993, "Informe de Datos Sobre Productos", MSG 26026, p. 5.
- Koner SpA, 1992, "Tungsten Carbide", Italy, Wire Ind., April, pp. 350-356.
- Eder, K., 1981, Siegfried Eder GmH, Vienna, Austria, Wire Industry, pp. 797-803.
- Keebler, J., 1990, Technical Dir., Wire Technology International Magazine, pp. 29-38.
- Mei, P. R., Silva, A. L. C., 1988, "Aços e Ligas Especiais", Eletrometal, S.P.
- Maxwell, T. H., 1991, "Carbide Die Design - Impact Upon Wire Quality", Wire Journal International, December, pp. 45-50.
- Rowe, G. W., 1965, "Conformado de los Metales", Ed. Urmo, Espanha.
- Sandvik, 1983, "Fabricacion de Alambre", Steel Sales Training.
- Zabala, A. I., 1982, "Aceros Inoxidables y Aceros Resistentes al Calor", Ed. Limusa, México.
- Wilson, W. R. D., 1979, "Friction and Lubrication in Bulk Metal - Forming Processes", J. of App. Metalworking, Vol. 1, no. 1, pp. 7-9.
- The Wire Association, 1975, "Steel Wire Handbook"- Ed. Allan B. Dove - Vol. I - USA.

# Aplicação de Controladores LQG, $H_\infty$ e LQG/ $H_\infty$ a um Sistema Mecânico Flexível Levitado Magneticamente

## *Application of LQG, $H_\infty$ and LQG/ $H_\infty$ Controllers to a Magnetically Suspended Flexible Mechanical System*

Anselmo Bittar

Laércio Lucchesi

Roberto Moura Sales

Depto. de Engenharia Eletrônica  
Escola Politécnica da USP  
Caixa Postal 8174 S.P. - CEP 05508-900

Antônio Carlos de Lima

Depto. de Engenharia Mecânica  
Escola Politécnica da USP  
Caixa Postal 61548 S.P. - CEP 05508-900

### Abstract

The subject of this work is the analysis and the design of controllers applied to a flexible mechanical system. The mechanical system considered is a flexible beam which is magnetically suspended by an electromagnet. Three controllers are considered for an experimentally identified model: LQG,  $H_\infty$  and LQG/ $H_\infty$ , which control the levitation gap of the electromagnet. Design procedures and performance results are presented in each case.

**Keywords:** Flexible System, Robust Control, LQG,  $H_\infty$ , LQG/ $H_\infty$

### Resumo

O objetivo deste trabalho é a análise e o projeto de controladores aplicados a um sistema mecânico flexível. O sistema mecânico considerado é uma barra flexível, que é levitada magneticamente por um eletroímã. São considerados 3 tipos de controladores para um modelo identificado experimentalmente: LQG,  $H_\infty$  e LQG/ $H_\infty$ , os quais controlam o entreferro de levitação do eletroímã. Procedimentos de projeto e resultados de desempenho são apresentados em cada caso.

**Palavras-chave:** Sistema Flexível, Controle Robusto, LQG,  $H_\infty$ , LQG/ $H_\infty$

### Introdução

É crescente a utilização de sistemas com mancais magnéticos em diversos setores, como: robótica, aeronáutica, em equipamentos espaciais, em atuadores sem contato e sem vibração, em sistemas de precisão, na fabricação de centrífugas, turbinas e rotores de alta velocidade. O objetivo deste trabalho é estudar um sistema com tais aplicações, que consiste de uma barra flexível com uma das extremidades levitada magneticamente e a outra articulada. Nesse sentido, são estudados 3 tipos de controladores: LQG,  $H_\infty$  e LQG/ $H_\infty$ . Para cada método é feita uma análise de como estabilizar e obter o desempenho desejado levando em conta as características da barra e das possibilidades de cada método.

O projeto do controle LQG utilizado é baseado num método de imposição de pólos de malha fechada. O controle  $H_\infty$  é um método de projeto que consegue tratar problemas com requisitos conflitantes de robustez e desempenho. Para o LQG/ $H_\infty$ , uma significante conexão é mostrada em (Bernstein e Haddad, 1989), assim como é desenvolvido um algoritmo que considera simultaneamente os critérios de desempenho  $L_2$  e  $H_\infty$ . Utilizando este algoritmo, através do parâmetro  $\gamma$  será imposta a restrição  $H_\infty$ . Com a imposição desta restrição, a atenuação dos distúrbios aumenta o desempenho do critério  $L_2$ .

Nas próximas duas seções são apresentados, respectivamente, uma breve descrição do sistema de levitação e um método de identificação do seu modelo. Após isto, são apresentadas as metodologias de projeto dos controladores LQG,  $H_\infty$  e LQG/ $H_\infty$ . Neste trabalho são discutidos, também, alguns aspectos da implementação digital e apresentados os resultados de desempenho do sistema com cada um dos controladores projetados. Por fim, são resumidas as principais conclusões.

## Descrição do Sistema

O sistema consiste, basicamente, de uma barra de material flexível (alumínio), articulada em uma das extremidades e levitada na outra, através da força desenvolvida por um eletroímã (Fig. 1). A massa  $m_1$  é uma carga de material do tipo aço silício acoplada próximo à extremidade da barra; necessária ao fechamento do circuito magnético no eletroímã. A massa  $m_2$  representa uma carga qualquer acoplada no centro da barra;  $i$  representa a corrente no eletroímã e  $X_1$  e  $X_2$  representam, respectivamente, o entreferro no eletroímã e a deflexão na barra. A barra move-se apenas na posição vertical.

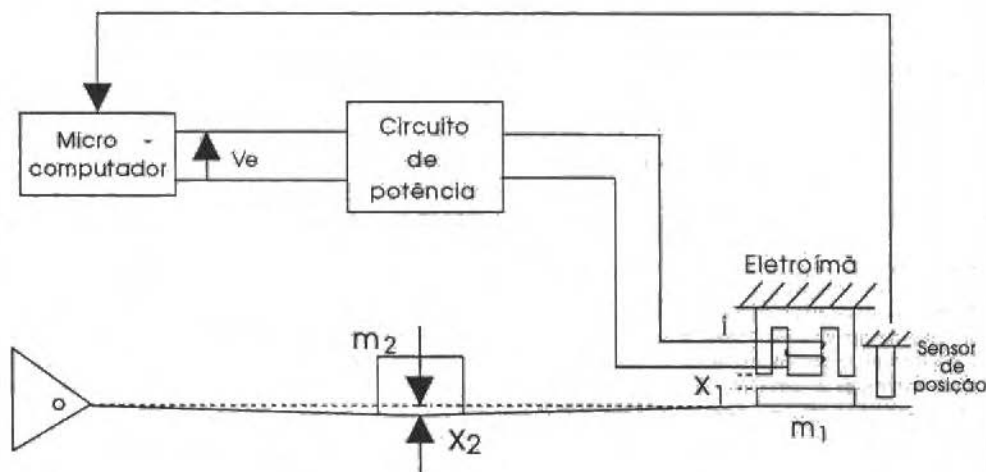


Fig. 1 Esquema do sistema de levitação magnética

No extremo da barra, na parte superior, foi acoplado um sensor analógico de posição do tipo indutivo, que fornece na sua saída uma tensão contínua, proporcional ao entreferro  $X_1$ .

O microcomputador faz a aquisição de dados e calcula uma tensão ( $V_e$ ) na entrada de um circuito de potência, correspondente a uma força magnética equivalente no eletroímã. A barra é levitada através do controle do entreferro  $X_1$ , entre o eletroímã e a massa  $m_1$  (Bittar, 1993).

Na Fig. 2 é apresentada uma fotografia do sistema completo em estado de levitação magnética e na Fig. 3 é apresentada outra fotografia onde pode-se visualizar o detalhe do entreferro  $X_1$ .

## Identificação do Sistema

O sistema a ser identificado compreende, além da própria barra flexível, o eletroímã, o circuito de potência e o sensor de posição.

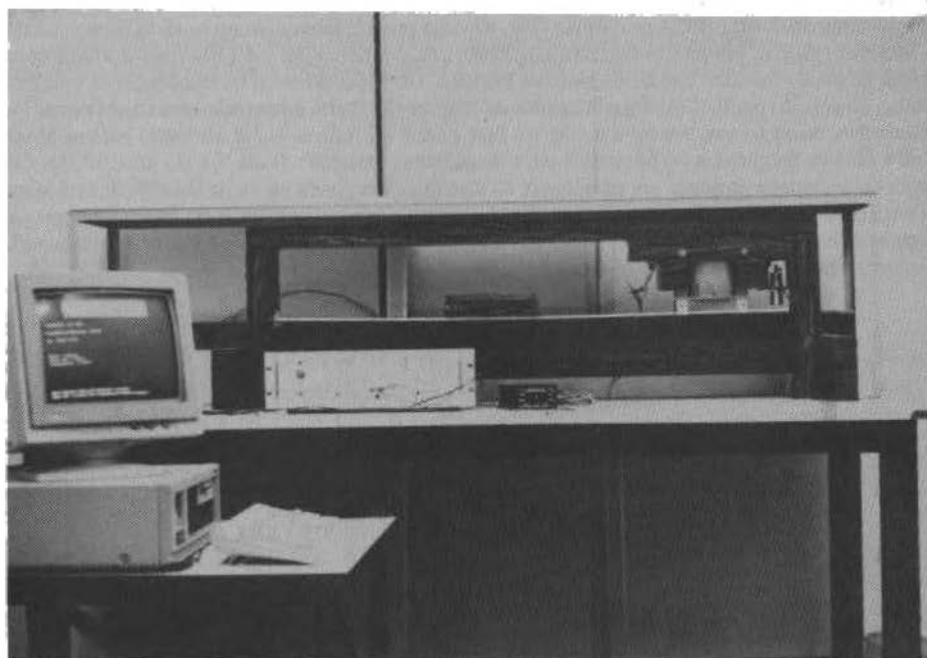


Fig. 2 Fotografia do sistema de levitação magnética

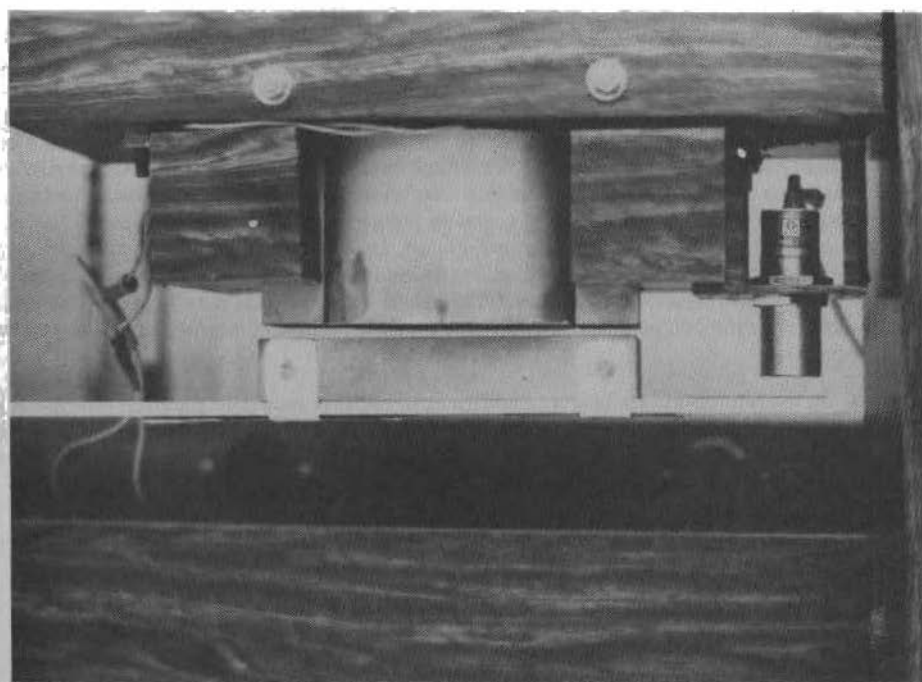


Fig. 3 Fotografia mostrando o detalhe do entreferro X1



O sistema foi identificado em malha fechada por ser instável. Para tanto, a barra foi levitada usando um controlador  $K_p$  (PID) provisório (Fig. 4), cujo projeto baseou-se no modelo matemático da barra flexível (Fujita, Matsumura e Shimizu, 1990). A identificação foi feita com a ajuda de um analisador de sinal dinâmico 3562A da Hewlett Packard. Um sinal senoidal de frequência  $\omega_1$  é injetado no sistema através do ponto 3. As transformadas de Fourier (FFT) dos sinais referentes aos pontos 1 e 2 são calculadas; dessa forma, tem-se o ganho e a fase para a frequência  $\omega_1$ . A operação para se obter o ganho e a fase da frequência  $\omega_1$  é repetida para frequências variando desde 0,1 Hz até 100 Hz. Com isto, pode-se levantar a resposta em frequência do sistema. A segunda etapa da identificação é ajustar uma função de transferência, cuja ordem é pré-determinada ao conjunto de pontos levantados experimentalmente. Inicialmente, foi suposto grau 16 para o numerador e grau 17 para o denominador. Na etapa seguinte o modelo foi reduzido a um número de estados mais apropriado.

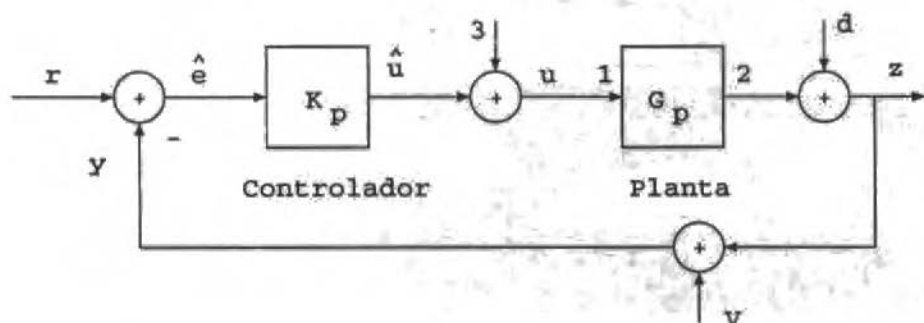


Fig. 4 Diagrama de blocos do sistema

A descrição do ajuste para redução da ordem do modelo é original de Balas e Doyle, (1990). Os dados da função de transferência são um conjunto de números complexos  $g(j\omega) = \text{num}(j\omega)/\text{den}(j\omega)$  para várias frequências  $\omega$ . Separando esta equação em suas partes real e imaginária, duas equações reais são produzidas para cada valor de  $\omega$ . Escritas na forma matricial ( $\hat{A}$ ), elas originam um problema de mínimos quadrados linear. O problema com esta abordagem é que a matriz resultante é mal condicionada. Isto advém do fato da divisão do numerador pelo denominador ser muito sensível a pequenas variações em seus coeficientes. Para amenizar este problema, o numerador e o denominador são escritos como somas de polinômios de Chebyshev. A cada frequência  $\omega$ , a equação  $g(j\omega)\text{den}(j\omega) - \text{num}(j\omega)$  contribui com duas colunas para a matriz  $\hat{A}$ . Um peso pode ser associado a cada frequência individual, permitindo que a precisão do ajuste seja tratada diferentemente para cada faixa de frequências. Cada coluna é normalizada por  $\|g(j\omega)\text{den}(j\omega)\|$ , usando um  $\text{den}(j\omega)$  estimado para se conseguir uma precisão relativa constante (no módulo e fase) para cada frequência.

De posse do modelo obtido na fase de identificação pode-se reduzi-lo para um modelo cujo número de estados é menor que o do modelo original. A idéia básica deste método é separar os modos lentos dos modos rápidos (Safonov et al., 1987). A função de transferência da planta, de ordem reduzida, é dada por

$$G_p(s) = \frac{-7,19 (s + 408,56) (s - 425,47)}{(s + 107,77) (s + 89,47) (s - 53,22)} \quad (1)$$

Através de medidas experimentais, verificou-se que a frequência de ressonância fundamental do sistema está próxima dos 36 rad/s.

## Controle LQG

O projeto do controle LQG consiste, basicamente, em obter duas matrizes:  $G$  e  $K$ . A matriz  $G$  resulta do projeto do regulador linear quadrático e a matriz  $K$  é obtida do projeto do filtro de Kalman.

Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

$$y = Cx \quad (3)$$

onde  $x$  é o estado ( $n \times 1$ ),  $u$  é a entrada ( $m \times 1$ ) e  $y$  é a saída ( $1 \times 1$ ) do sistema.

A lei de controle ótimo é da forma  $u = Gx$  e minimiza um índice de desempenho  $J$ , do tipo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) R x(t) + u^T(t) U u(t)] dt \quad (4)$$

As matrizes de ponderação  $R$  e  $U$  são determinadas de forma que o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A + BG)x \quad (5)$$

tenha os pólos fixados em posições desejadas.

## Regulador Linear Quadrático

O método utilizado é baseado na diagonalização do sistema, pelo qual, fixada a matriz  $U$ , é determinada uma matriz de pesos  $R$ , que fornece um sistema de malha fechada com autovalores pré-fixados (Solheim, 1972). A seguir, é apresentado esse método para o caso em que a matriz  $A$  possui autovalores reais e distintos.<sup>1</sup>

Usando a transformação  $x = Mq$ , onde  $M$  é a matriz dos autovetores da matriz  $A$ , o sistema formado pelas Eqs. (2) e (3) pode ser colocado na forma diagonal

$$\dot{q} = \Lambda q + M^{-1}Bu \quad (6)$$

onde  $\Lambda = M^{-1}AM$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de  $A$ .

O co-estado  $p$  do sistema (6) é definido por

$$\dot{p} = -\tilde{R}q - \Lambda p \quad (7)$$

A lei de controle ótimo é dada por

<sup>1</sup> O caso em que a matriz  $A$  possui autovalores complexos conjugados possui um procedimento similar e pode ser encontrado em [Solheim, 1972].

$$u = -U^{-1}B^T M^{-T} \bar{p} \quad (8)$$

Combinando as Eqs. (6), (7) e (8), tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & -H \\ -\bar{R} & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \bar{F} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde  $H = M^{-1}BU^{-1}B^T M^{-T}$  e  $\bar{R} = M^T R M$ .

Este sistema possui  $n$  autovalores com parte real negativa que são os mesmos do sistema (5), e  $n$  autovalores com parte real positiva, localizados simetricamente em relação ao eixo imaginário.

Os autovalores de  $\bar{F}$  são obtidos da equação característica  $|sI - \bar{F}| = 0$  e são dados (Solheim, 1972) por

$$s_i = \mp \lambda_i \quad i \neq j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$s_j = \mp \sqrt{\lambda_j^2 + \bar{r}_{jj} h_{jj}} \quad (11)$$

Sendo  $s_j$  dado, pode-se encontrar  $\bar{r}_{jj}$  por

$$\bar{r}_{jj} = \frac{s_j^2 - \lambda_j^2}{h_{jj}} \quad (12)$$

Com  $\bar{R}$  conhecido, resolve-se a equação de Riccati dada por

$$-\bar{P}\Lambda - \Lambda\bar{P} + \bar{P}M^{-1}BU^{-1}B^T M^{-T}\bar{P} - \bar{R} = 0 \quad (13)$$

Da Eq. (8), tem-se

$$u = -U^{-1}B^T M^{-T} \bar{P} q = \bar{G} q = \bar{G} M^{-1} x = G x \quad (14)$$

onde  $G = \bar{G} M^{-1}$ .

Deste modo, consegue-se deslocar um autovalor de malha aberta para uma posição especificada de malha fechada. Pode-se partir agora da matriz  $A_1 = (A + BG)$  e deslocar o próximo autovalor, obtendo com isso um procedimento recursivo. Os passos que implementam este procedimento são apresentados a seguir:

1. Inicializar  $R = R_0$ ,  $G = G_0$ ,  $i = 0$ ;
2.  $A_i = A + BG$ ;

3. Calcular  $M_i$ ,  $\Lambda_i = M_i^{-1}A_iM_i$ ,  $H_i = M_i^{-1}BU^{-1}B^T M_i^{-T}$ ;
4. Autovalor  $\lambda_j$  é deslocado para  $s_j$ . Calcular:

$$(\bar{r}_{jj})_i = \frac{s_j^2 - \lambda_j^2}{(h_{jj})_i};$$

5. Com

$$\bar{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & (\bar{r}_{jj})_i & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Resolva a equação de Riccati:

$$-P\Lambda_i - \Lambda_i\bar{P} + \bar{P}H_i\bar{P} - \bar{R}_i;$$

6. Calcular o ganho de realimentação ótima  $\bar{G}_i$ :

$$\bar{G}_i = -U^{-1}B^T M_i^{-T}\bar{P};$$

7. Calcular:

$$G_i = \bar{G}_i M_i^{-1}; G = G + G_i$$

8. Calcular:

$$R_i = M_i^{-T}\bar{R}_i M_i^{-1}; R = R + R_i$$

9.  $i = i + 1$ ;

10. Se o número de autovalores deslocados é menor que  $n$ , então volte para 2.

A matriz de ponderação da entrada foi fixada como  $U = 1$ .

A fim de se obter erro de regime nulo, o sistema original foi "aumentado", incluindo-se um integrador. Os autovalores da matriz  $A$  (matriz de estados da planta "aumentada") foram deslocados para posições especificadas do semi-plano esquerdo aberto, de acordo com a Tabela 1, e na seqüência indicada nesta tabela. Nota-se, através desta tabela, que os pólos de malha fechada, além de estarem todos no semi-plano esquerdo aberto, são "mais rápidos" que os pólos de malha aberta.

Tabela 1 Deslocamento fixado para os pólos de malha fechada com o RLQ

Troca	Pólos malha aberta	Pólos malha fechada
1	$s = 0$	$s = -10$
2	$s = 53,22$	$s = -70$
3	$s = -89,47$	$s = -100$
4	$s = -107,77$	$s = -130$

## Filtro de Kalman

Os procedimentos descritos na seção anterior também podem ser utilizados para serem alocados os auto-valores do filtro de Kalman. Considere o sistema dado por

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Xw \quad (15)$$

$$y = Cx + v \quad (16)$$

onde  $w$  é o vetor do ruído do processo e  $v$  é o vetor do ruído de medida. As matrizes de covariância são respectivamente  $W_x$  e  $V$ . A matriz de covariância do ruído de medida foi fixada como  $V = 1$ .

Os procedimentos para cálculo da matriz  $K$  do filtro de Kalman são análogos aos procedimentos para cálculo da matriz  $G$  do Regulador Linear Quadrático descrito na seção anterior, bastando para isto, tomar o dual do sistema dado (Tabela 2).

Tabela 2 Dualidade de matrizes entre o Regulador Linear Quadrático e o filtro de Kalman

RLQ	Filtro de Kalman
A	$A^T$
B	$C^T$
R	$W = XW_x X^T$
U	V
P	P
G	$-K^T$
M	$M^{-T}$

Os pólos de malha aberta da planta "aumentada" foram deslocados para posições especificadas do semi-plano esquerdo aberto, de modo que os pólos de malha fechada do estimador (autovalores de  $A - KC$ ) fossem "mais rápidos" que os pólos de malha fechada do regulador linear quadrático (autovalores de  $A + BG$ ). Sabe-se de Doyle e Stein (1979) que a condição de pólos do estimador "mais rápidos" que os pólos do regulador nem sempre produzem os resultados esperados. Nesta aplicação, porém, os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Os pólos de malha fechada fixados para o deslocamento dos pólos de malha aberta estão indicados na Tabela 3.

Tabela 3 Deslocamento fixado para os pólos de malha fechada com o filtro de Kalman

Troca	Pólos malha aberta	Pólos malha fechada
1	$s = 0$	$s = -150$
2	$s = 53,22$	$s = -170$
3	$s = -89,47$	$s = -200$
4	$s = -107,77$	$s = -900$

A posição final para os pólos de malha fechada (Tabelas 1 e 3) foi fixada de forma que o controlador produzisse avanço de fase na região da frequência de ressonância do sistema.

A função de transferência  $K_o(s)$  do controlador (RLQ + filtro de Kalman) é dada por

$$K_o(s) = G(sI - A - BG + KC)^{-1}(-K) \quad (17)$$

Incorporando o integrador da planta "aumentada" ao compensador da Eq. (17), tem-se que a função de transferência final do controlador ( $K_p(s) = K_o(s)/s$ ) é dada por

$$K_p(s) = \frac{1520959,95 (s + 2,2821) (s + 89,3692) (s + 107,7340)}{s (s + 339,7705) (s + 922,2363) (s + 161,9866 \pm 231,9426j)} \quad (18)$$

É apresentada na Fig. 5, a seguir, a resposta do sistema em malha fechada para uma perturbação em degrau na entrada da planta, utilizando o controle LQG (Eq. 18). A perturbação foi dada em  $t = 0,5$ s e a saída da planta em regime (entreferro  $X_1$ ) é de 5,8mm. Através desta figura, pode-se verificar que o sistema apresentou algumas oscilações em sua saída, antes de rejeitar a perturbação.

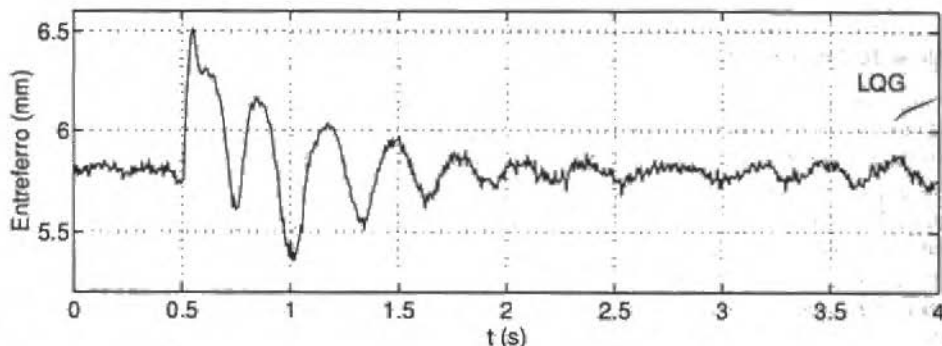


Fig. 5 Resposta do sistema para uma perturbação na entrada da planta com o controle LQG.

## Controle $H_\infty$

O controle  $H_\infty$  é um método de projeto baseado em otimização, que impõe um limite superior para o maior valor singular de uma matriz de transferência. Além disso, este método garante robustez, pode manipular sistemas multivariáveis e consegue tratar o problema de requisitos conflitantes de robustez e desempenho.

## Conceitos Iniciais

O conceito de  $H_\infty$  será desenvolvido através da análise de um sistema de realimentação unitária dado na Fig. 4.

O sinal que se quer controlar ( $z$ ) está relacionado ao sinal de controle ( $u$ ) através de um sistema linear descrito pela função de transferência ( $G_p$ ). Há também uma perturbação ( $d$ ), sobre a qual não se tem controle, que perturba o sinal ( $z$ ). Para se controlar ( $z$ ) é necessário realizar a medida do sinal ( $y$ ) relacionado a ( $z$ ) através de uma soma com o sinal de ruído ( $v$ ). O objetivo do controle é fazer com que ( $z$ ) seja igual ao sinal de referência ( $r$ ). Assim define-se o sinal de erro ( $e = r - z$ ). Deseja-se fazer ( $e$ ) pequeno; no entanto, não se conhece ( $e$ ), somente sua versão ruidosa ( $\hat{e} = r - y$ ). O erro aproximado ( $\hat{e}$ ) serve como entrada do controlador ( $K_p$ ) cuja saída fornece o sinal de controle ( $\hat{u}$ ).

## Funções de Transferência de Malha Fechada

Tem-se

$$e = Sr - Sd + C_{omp}v \quad (19)$$

$$u = R_p(r - v - d) \quad (20)$$

onde:

$$S = (1 + G_p K_p)^{-1} \quad (\text{função sensibilidade});$$

$$C_{omp} = G_p K_p (1 + G_p K_p)^{-1} = 1 - S \quad (\text{função sensibilidade complementar});$$

$$R_p = K_p (1 + G_p K_p)^{-1}.$$

## Análise do Sinal de Erro

Uma característica que o controlador ( $K_p$ ) precisa possuir para que o sistema de controle seja satisfatório é que a malha fechada seja estável. Além disso, deseja-se que o sinal a ser controlado ( $z$ ) siga o sinal de referência ( $r$ ). Em outras palavras, o sinal de erro ( $e$ ) deve ser "pequeno".

Da Eq. (19) pode-se constatar que para ocorrer rejeição do distúrbio ( $d$ ) é necessário que ( $S$ ) seja pequeno. Para que ( $z$ ) siga o sinal de referência ( $r$ ) também é necessário ter ( $S$ ) pequeno. Para suprimir o ruído do sensor, ( $C_{omp}$ ) deve ser pequeno. Este é o conflito dos projetos de controle.

Para expressar este conflito em termos de ganho, note que ( $C_{omp} = 1 - S$ ) será pequeno se ( $S = 1$ ), que acontecerá quando ( $G_p K_p$ ) for pequeno ( $\ll 1$ ). Portanto, a redução de ruído requer ganho baixo de malha aberta e rejeição de distúrbios e minimização de erro requerem ganho alto.

Para se atingir bons resultados no projeto de sistemas de controle, faz-se necessário olhar mais detalhadamente os objetivos a serem alcançados. O tipo de sinal de referência ou de distúrbio é tipicamente de baixa frequência. Logo, ( $S$ ) deve ser pequeno em baixas frequências. Sensores, por outro lado, operam bem em baixas frequências e mal em altas; o ruído do sensor é então mais significativo em altas frequências. Logo, ( $C_{omp}$ ) deve ser pequeno em altas frequências.

## Espaço $H_\infty$

Este espaço consiste de todas as funções complexas  $G(s)$  de um valor complexo  $s$ , a qual é analítica e limitada no semi-plano direito,  $\Re(s) > 0$ ; limitada quer dizer que existe um número real  $b$  tal que  $|G(s)| \leq b$ ,  $\Re(s) > 0$ .

O menor real  $b$  é a norma- $H_\infty$  de  $G$ ,  $\|G\|_\infty$ . Equivalentemente,

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup \{|G(s)| : \Re(s) > 0\} \quad (21)$$

Para as funções racionais reais, isto é, funções racionais com coeficientes reais, o subconjunto do  $H_\infty$  consistindo de funções reais racionais será definido por  $RH_\infty$ . Se  $G(s)$  é real e racional, então  $G \in RH_\infty$  se e somente se é própria ( $\|G\|_\infty$  é finita) e estável ( $G$  não tem pólos no semi-plano fechado direito,  $\Re(s) \geq 0$ ). Pelo Teorema do Módulo Máximo (Francis, 1989) pode-se trocar o semi-plano aberto esquerdo pelo eixo imaginário:



$$\|G\|_\infty \triangleq \sup \{|G(j\omega)| : \omega \in \mathfrak{R}\} \quad (22)$$

Ou seja, a norma infinito é o maior valor de ganho do diagrama de Bode. Com esta característica a norma infinito pode então ser usada para "moldar" ou "restringir" funções de transferência. Sabemos que a função sensibilidade ( $S$ ) deve ser pequena em baixas frequências. Seja ainda um filtro passa-alta ( $W_1^{-1}$ ) que possui as características de ganho que a função ( $S$ ) deve possuir em baixas frequências. Tem-se então

$$|S(j\omega)| \leq W_1^{-1}(j\omega) \quad (\forall \omega \in \mathfrak{R}) \quad (23)$$

Reescrevendo a equação usando a definição de norma  $\infty$ , vem

$$\|W_1 S\|_\infty \leq 1 \quad (24)$$

Analogamente, escolhendo uma função peso adequada ( $W_3$ ) pode-se também "moldar" a função sensibilidade complementar ( $C_{omp}$ ). Assim

$$\|W_3 C_{omp}\|_\infty \leq 1 \quad (25)$$

## Representações de Incertezas Não-Estruturadas

O projeto de sistemas de controle clássico trata o problema de incerteza da planta estabelecendo margens de estabilidade através da especificação de margens de fase e margens de ganho. Está implícito no uso de tais margens um modelo de incerteza ao qual está sujeito a planta. Se a única preocupação real é manter a estabilidade e, por exemplo, a margem de fase é de  $40^\circ$ , então há uma implicação de que o modelo da planta pode ser subestimado no atraso de fase até  $40^\circ$  na frequência de *cross-over*. Tal descrição de incerteza é não-estruturada no sentido de que isto limita a magnitude das possíveis perturbações, mas não relaciona as origens das perturbações a elementos específicos da planta.

Pode-se representar incertezas não-estruturadas usando o modelo aditivo ou o modelo multiplicativo (Fig. 6). Seja ( $G_o$ ) a função de transferência nominal, que é o modelo escolhido para representar o comportamento da planta, e seja ( $G_r$ ) a função de transferência real da planta. Então

$$G_r = G_o + \Delta_A \quad (\text{incerteza aditiva}) \quad (26)$$

$$G_r = (1 + \Delta_M) G_o \quad (\text{incerteza multiplicativa}) \quad (27)$$

As incertezas de modelagem podem ser determinadas de duas maneiras distintas:

### 1. Modificação de parâmetros em um modelo

No caso do modelo matemático da planta ser disponível, pode-se variar um ou mais parâmetros desse modelo e com isso obter funções de transferência  $G_r$  para cada um dos conjuntos de parâmetros modificados. A escolha de quais parâmetros devem ser modificados no modelo

deve refletir possíveis alterações da planta. Para a barra flexível da Fig. 1, a massa  $m_2$ , a posição desta massa, a massa  $m_1$ , a resistência intrínseca do eletroímã ou qualquer outro parâmetro que possa apresentar variação podem ser escolhidos.

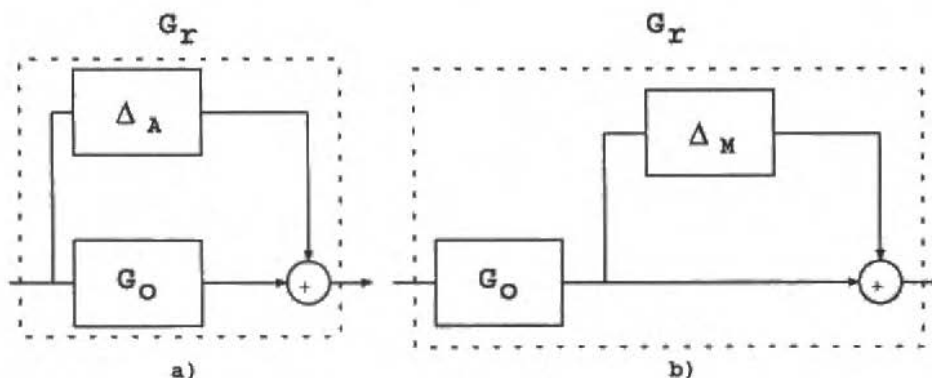


Fig. 6 Incertezas de modelagem: a) Aditiva; b) Multiplicativa

## 2. Identificação da planta modificada

No caso da identificação da planta ser possível, basta variar parâmetros reais tais como: a massa  $m_2$ , a posição desta massa, ou a massa  $m_1$ , para então identificar o sistema. Obtem-se, deste modo, uma função de transferência  $G_r$  para cada uma das modificações introduzidas na planta.

De posse de várias funções de transferência, basta escolher a representação do erro de modelagem (incerteza aditiva ou multiplicativa) e calcular através das Eqs. (26) ou (27),  $\Delta_A$  ou  $\Delta_M$ , respectivamente. Fazendo isso, o projetista possui uma boa noção de qual é a incerteza relacionada à função de transferência nominal  $G_o$ .

A importância da determinação das incertezas de modelagem relaciona-se à robustez do sistema, conforme é apresentado a seguir.

## Especificação de Robustez

Uma vez especificado um modelo para o projeto ( $G_o$ ) e aceita a existência de incertezas não estruturadas na forma aditiva (26) ou multiplicativa (27), o problema de projetar um controle estável é encontrar um compensador ( $K_p$ ) tal que

- O sistema nominal,  $G_o K_p (1 + G_o K_p)^{-1}$ , seja estável, e
- O sistema perturbado,  $G_r K_p (1 + G_r K_p)^{-1}$ , também seja estável.

As funções de transferência ( $R_p$ ) e ( $C_{omp}$ ) são usadas como medida para a margem de estabilidade dos projetos de controle relativos a perturbações aditivas da planta ( $\Delta_A$ ) e perturbações multiplicativas ( $\Delta_M$ ), respectivamente.

Os dois teoremas apresentados, a seguir, estão relacionados à robustez.

**Teorema 1** Supõe-se que o sistema da Fig. 6 a é estável com  $\Delta_A = 0$ . Então, o tamanho do menor  $\Delta_A$  estável para o qual o sistema se torna instável é

$$|\Delta_A| = \frac{1}{|R_p|}$$

Quanto menor for  $|R_p|$ , maior será o tamanho da menor perturbação aditiva desestabilizadora ( $|\Delta_A|$ ) e daí maior será a margem de estabilidade.

Um resultado similar existe para a margem de estabilidade relacionada às perturbações multiplicativas.

**Teorema 2** Supõe-se que o sistema da Fig. 6 b é estável com  $\Delta_M = 0$ . Então, o tamanho do menor  $\Delta_M$  estável para o qual o sistema se torna instável é

$$|\Delta_M| = \frac{1}{|C_{omp}|}$$

Quanto menor for  $|C_{omp}|$ , maior será o tamanho da menor perturbação multiplicativa desestabilizadora ( $|\Delta_M|$ ) e daí maior será a margem de estabilidade.

Como consequência destes teoremas, é comum especificar as margens de estabilidade de controle via desigualdades:

$$\|W_2 R_p\|_\infty \leq 1 \quad (28)$$

$$\|W_3 C_{omp}\|_\infty \leq 1 \quad (29)$$

onde ( $W_3$ ) representa a maior perturbação multiplicativa da planta e ( $W_2$ ) a maior perturbação aditiva da planta.

A interpretação dessas duas últimas inequações é a seguinte. Suponha que seja utilizado o modelo para descrever as incertezas multiplicativas e, seja  $W_3$  a maior perturbação multiplicativa da planta. Se a perturbação multiplicativa desestabilizadora  $\Delta_M$  estiver adequadamente descrita por  $W_3$ , então basta projetar um controlador  $K_p$  que satisfaça a inequação (29) e que estabilize a planta  $G_p$ . Isto já é suficiente para que o sistema seja robusto às incertezas da planta. De maneira análoga, esta interpretação pode ser feita para a inequação (28).

### Interpretações Alternativas das Funções Peso

Para a rejeição de ruído e de distúrbios, basta considerar as funções ( $W_1$ ) e ( $W_3$ ) respectivamente relacionadas a ( $S$ ) e ( $C_{omp}$ ). Este é o chamado "problema da sensibilidade mista" que resolve tanto o problema de robustez como o problema de desempenho. No entanto, também é necessário preocupar-se com o sinal de controle. Por exemplo, se a sua banda é muito grande, pode acontecer de não ser possível implementar o controle, porque isto pode requerer uma grande quantidade de energia, levando a um alto custo. Outro fator também muito importante é o fato do sinal de controle normalmente ser limitado (saturação). A função de transferência da referência ( $r$ ), ou do distúrbio ( $d$ ) ou do ruído do sensor ( $v$ ) para o sinal de controle ( $u$ ) é ( $R_p$ ) como se pode concluir da Eq. (20). Para controlar a banda e a energia do sinal de controle, é necessário então que a função peso ( $W_2^{-1}$ ) seja uma função passa-baixa que limite convenientemente a função ( $R_p$ ).

Outra interpretação para as funções ( $W_1$ ) e ( $W_3$ ) é o fato dessas funções determinarem a forma da função de malha aberta ( $G_p K_p$ ). Suponha, sem perda de generalidade, que o sistema é escalar. Acima de 0 dB,  $|G_p K_p| \gg 1$  e portanto  $S = (1 + G_p K_p)^{-1} \approx (G_p K_p)^{-1}$ . Abaixo de 0 dB,  $|G_p K_p| \ll 1$  e portanto  $C_{omp} = G_p K_p (1 + G_p K_p)^{-1} \approx (G_p K_p)$ . Donde se conclui que acima de 0 dB a função de malha aberta é "moldada" por ( $W_1$ ) e abaixo de 0 dB por ( $W_3^{-1}$ ). A Fig. 7 ilustra esse fato.

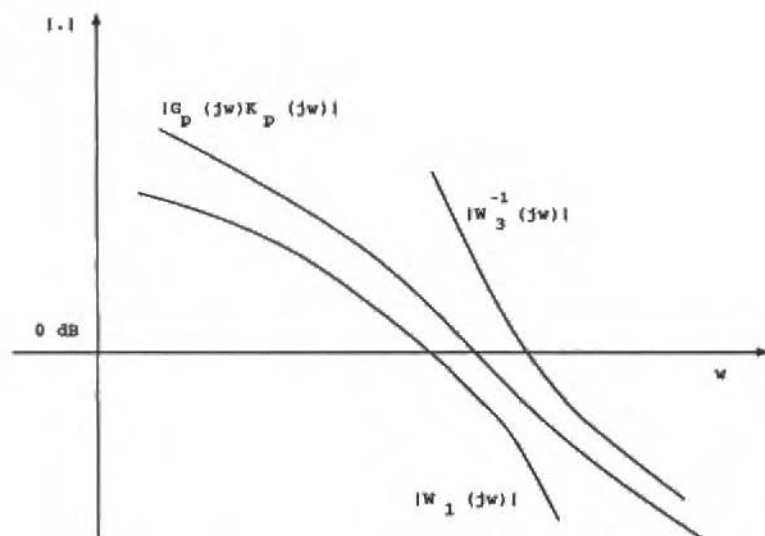


Fig. 7 Limites da função de malha aberta

### O Controlador $H_\infty$

Deve-se calcular o controlador ( $K_p$ ) que satisfaça as inequações (24), (25) e (28). Isso garante que o controlador ( $K_p$ ) atenda aos requisitos especificados pelas funções peso ( $W_1$ ), ( $W_2$ ) e ( $W_3$ ). Além disso, é necessário que o controlador ( $K_p$ ) faça com que a malha fechada seja internamente estável. A solução para o cálculo do controlador ( $H_\infty$ ) que atenda tais condições foi desenvolvida em (Doyle et al., 1989). Esta solução de controle é implementada através da ferramenta descrita em (Chiang e Safonov, 1992).

O controlador ( $K_p(s)$ ) calculado para a barra flexível usou as seguintes funções peso

$$W_1(s) = \frac{7,85}{s + 1,40 \times 10^{-8}} \quad W_2(s) = 10^{-5}$$

$$W_3(s) = \frac{58,82 (s + 40\pi) (s + 100\pi) (s + 200\pi)}{(s + 20000\pi)^2}$$

com  $\pi = 3,1416$ .

As funções peso ( $W_1$ ), ( $W_2$ ) e ( $W_3$ ) foram escolhidas com base em experimentação. Alguns critérios foram seguidos:

- ( $W_1$ ) determina o desempenho;
- ( $W_2$ ) e ( $W_3$ ) estão associadas à robustez, e
- as incertezas não-estruturadas estão representadas na forma multiplicativa (27) (por isso  $W_2 \ll 1$ ).

É importante ressaltar que outros conjuntos de funções peso poderiam ter sido escolhidos. A escolha das funções peso sempre dependerá dos requisitos de desempenho e robustez que se quer atingir.

A função de transferência do controlador é dada por

$$K_p(s) = \frac{6,41 (s + 6,28 \times 10^4) (s + 6,29 \times 10^4) (s + 107,77) (s + 89,47) (s + 4,59)}{s (s + 408,56) (s + 1,03 \times 10^3) (s + 2,70 \times 10^3) (s + 276,34 \pm 457,72j)} \quad (30)$$

É apresentada na Fig. 8, a seguir, a resposta do sistema em malha fechada para uma perturbação em grau na entrada da planta, utilizando o controle  $H_\infty$  (Eq. 30). A perturbação foi dada em  $t = 0,5$  s e a saída da planta em regime (entreferro  $X_1$ ) é de 5,8 mm. Através desta figura, pode-se verificar que o sistema com o controle  $H_\infty$  rejeitou mais rapidamente a perturbação que o sistema com o controle LQG (Fig. 5).

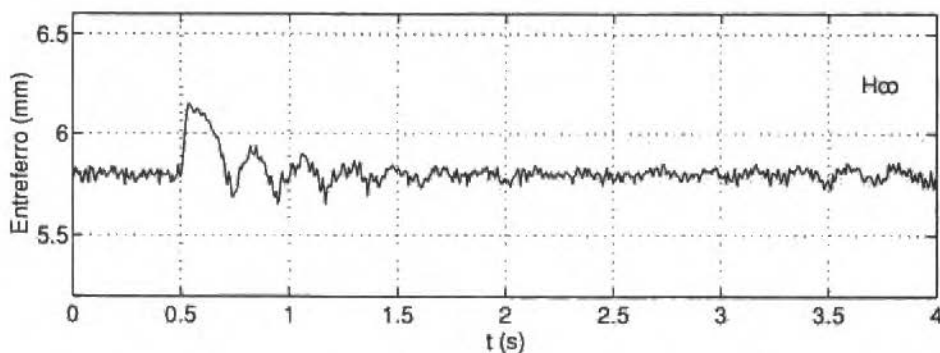


Fig. 8 Resposta do sistema para uma perturbação na entrada da planta com o controle  $H_\infty$ .

## Controle LQG com restrição $H_\infty$

A diferença fundamental entre as abordagens LQG e  $H_\infty$  está na modelagem e tratamento dos distúrbios externos. Para sistemas com distúrbios pobremente modelados os quais podem ter uma potência significativa em uma banda arbitrária,  $H_\infty$  é mais apropriado, enquanto que para sistemas com espectro de potência do distúrbio bem conhecido, a abordagem LQG é menos conservativa.

Além da abordagem  $H_\infty$  incorporar técnicas de controle clássico, esta apresenta uma ferramenta para modelagem dos distúrbios de uma planta em termos da norma  $H_\infty$ . Em contraste, a topologia LQG vem se mostrando "fraca" para uma prática robusta, enquanto que a norma  $H_\infty$  é apropriada para uma estabilização robusta.

Embora existam diferenças entre as abordagens LQG e  $H_\infty$ , uma significativa conexão é mostrada em (Bernstein e Haddad, 1989), onde é desenvolvido um algoritmo que considera simultaneamente os critérios de desempenho  $L_2$  e  $H_\infty$ . Para reforçar a restrição  $H_\infty$  foi obtido em (Bernstein e Haddad, 1989) um limite superior para o critério  $L_2$ . A minimização deste limite superior mostra que cumprindo a restrição  $H_\infty$  a atenuação dos distúrbios leva-nos a aumentar o desempenho do critério  $L_2$ .

## Exposição do Problema

Introduz-se o controle em malha fechada LQG com restrição  $H_\infty$  para atenuação dos distúrbios entre a planta, o sensor, os estados e a variável de controle. Para simplificar restringe-se a atenção aos controladores de ordem  $n_c = n$ , isto é, controladores com ordem igual à dimensão do sistema.

### Controle LQG/H<sub>∞</sub>

Dada a planta de ordem  $n$  estabilizável e detetável,

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) + D_1w(t) \quad (31)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_2w(t) \quad (32)$$

determinar a dinâmica do compensador de dimensão  $n$

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \quad (33)$$

$$u(t) = C_c x_c(t) \quad (34)$$

que satisfaça os seguintes critérios de projeto:

i) O sistema em malha fechada (31)-(34) é assintoticamente estável, isto é

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix}}_{\bar{D}} w(t) \quad (35)$$

$\bar{A}$  assintoticamente estável.

ii) A função de transferência em malha fechada

$$H(s) = [E_{1\infty} E_{2\infty} C_c] (sI_n - \bar{A})^{-1} \bar{D} \quad (36)$$

de  $w(t)$  para  $(E_{1\infty} x(t) + E_{2\infty} u(t))$  satisfaz a restrição

$$\|Hs\|_{\infty} \leq \gamma, \quad \gamma > 0 \quad (37)$$

iii) O funcional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ x(t)^T R_1 x(t) + u(t)^T R_2 u(t) \} \quad (38)$$

é minimizado, sendo  $R_1 = E_1 E_1^T$  e  $R_2 = E_2 E_2^T$ .

Obs. 1: Desde que  $(A, B, C)$  é assumida ser estabilizável e detetável, o conjunto de compensadores de ordem  $n$  é não-vazio.

Obs. 2: Sendo  $\tilde{A}$  assintoticamente estável, ou seja, os pólos estão à esquerda do eixo  $j\omega$  no plano complexo, a Eq. (37) para  $s = j\omega$  é limitada.

Obs. 3: Por conveniência  $D_1 D_2^T = 0$ .

Note que a formulação envolve os desempenhos  $L_2$  e  $H_\infty$ . Para a restrição  $H_\infty$ , a função de transferência envolve os pesos  $E_{1\infty}$  e  $E_{2\infty}$  para o estado e as variáveis de controle. As matrizes  $R_{1\infty} = E_{1\infty}^T E_{1\infty}$  e  $R_{2\infty} = E_{2\infty}^T E_{2\infty}$  são a contra partida dos pesos  $R_1$  e  $R_2$ . Não é necessário que  $R_{1\infty}$  e  $R_{2\infty}$  sejam iguais a  $R_1$  e  $R_2$ , mas é preciso que  $R_{2\infty} = \beta^2 R_2$ , onde  $\beta$  é um parâmetro de projeto. Por conveniência faremos  $E_{1\infty}^T E_{2\infty} = 0$ .

É bom notar que se  $\tilde{A}$  é assintoticamente estável para um compensador  $(A_c, B_c, C_c)$ , então a função desempenho (38) é dada por

$$J(A_c, B_c, C_c) = \text{tr}(\tilde{Q} \text{diag}[E_1 \ E_2 C_c]) \quad (39)$$

onde em regime a covariância dos estados é definida como

$$\tilde{Q} = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{\tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t)\} \quad (40)$$

e satisfaz a equação algébrica de Lyapunov

$$\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A}^T + \tilde{V} = 0 \quad (41)$$

onde  $\tilde{V} = \text{diag}[V_1 B_c \ V_2 B_c^T]$ .

O passo chave para se fazer respeitar a atenuação ao distúrbio (37) é trocar a equação algébrica de Lyapunov (41) pela equação de Riccati, a qual limita a covariância da malha fechada em regime. A justificativa é a dada pelo seguinte lema:

**Lema 1** Seja  $(A_c, B_c, C_c)$  dada e assuma que existe  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfazendo  $Q \in N^n$  e

$$\tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T + \gamma^{-2} Q \tilde{R}_\infty Q + \tilde{V} = 0 \quad (42)$$

Então  $(\tilde{A}, \tilde{D})$  é estabilizável se somente se  $\tilde{A}$  é assintoticamente estável. Neste caso,  $\|H_s\|_\infty \leq \gamma$  e  $\tilde{Q} < Q$ . Consequentemente  $J(A_c, B_c, C_c) \leq J(A_c, B_c, C_c, Q)$ , onde  $J(A_c, B_c, C_c, Q) = \text{tr}(QT)$ .

A demonstração deste lema encontra-se na seção II de Bernstein e Haddad (1989).

O lema (1) mostra que a restrição  $H_\infty$  à atenuação do distúrbio é automaticamente respeitada quando uma solução não negativa-definida para (42) é conhecida e  $\tilde{A}$  é assintoticamente estável. Além disso, todas as soluções fornecem um limite superior para a covariância  $Q$  dos estados em malha fechada de acordo com o critério  $L_2$ .



Obs. 4: Para melhor esclarecer a relação entre  $L_2$  e  $H_\infty$ , deve-se notar que o sistema em malha fechada pode ser representado por duas formas diferentes. Especificamente com respeito ao critério  $L_2$ , a função de transferência entre distúrbios e variáveis controladas é dada por  $(\bar{A}, \bar{D}, \bar{E})$  enquanto que para a restrição  $H_\infty$  a função de transferência (36) corresponde a  $(A, D, E_\infty)$ .

### O Problema de Minimização Auxiliar e Condições Necessárias para a Otimização

Como foi discutido anteriormente, a troca da Eq. (41) pela Eq. (42) obedece a restrição  $H_\infty$  e resulta em um limite superior para o critério de desempenho  $L_2$ . Então, dado um compensador  $(A_c, B_c, C_c)$  para o qual existe uma solução definida não-negativa para (42), o critério de desempenho  $L_2$ ,  $J(A_c, B_c, C_c)$  do compensador é garantido não ser pior que o limite dado por  $J(A_c, B_c, C_c, Q)$ . Assim,  $J(A_c, B_c, C_c, Q)$  pode ser interpretado como um custo auxiliar que define o seguinte problema de programação matemática.

*Problema de minimização auxiliar:* Determinar  $(A_c, B_c, C_c)$  que minimize  $J(A_c, B_c, C_c, Q)$  sujeito a (42) e com solução definida não-negativa.

Segue do lema (1) que se as condições citadas acima são satisfeitas, tem-se:

1. estabilidade em malha fechada;
2. a restrição  $H_\infty$  satisfeita,
3. e obtém-se também um limite superior para o critério  $L_2$ .

Assim, é necessário determinar  $(A_c, B_c, C_c)$  que minimize  $J(A_c, B_c, C_c, Q)$ , e então fornecer um limite otimizado para o funcional  $J(A_c, B_c, C_c)$ . Para se ter uma condição necessária para este problema de minimização é necessário adicionar algumas suposições. Especificamente, restringir  $(A_c, B_c, C_c, Q)$  ao seguinte conjunto:

$X = \{ (A_c, B_c, C_c, Q) : Q \in P^n, \bar{A} + \gamma^{-2} Q \bar{R}_\infty \text{ é assintoticamente estável e } (A_c, B_c, C_c) \text{ é controlável e observável} \}$ .

**Teorema 3** Se  $(A_c, B_c, C_c, Q) \in X$  resolve o problema de minimização auxiliar, então existe  $Q, P, \hat{Q} \in N^n$  tal que

$$A_c = A - Q\Gamma - (BR_2^{-1}B^T)PS + \gamma^{-2}QR_{1\infty}$$

$$B_c = QC^T V_2^{-1}$$

$$C_c = -R_2^{-1}B^T P S$$

com

$$S = (I_n + \beta^2 \gamma^{-2} Q P)^{-1}, \quad \Gamma = C^T V_2^{-1} C,$$

$$\Sigma = BR_2^{-1}B^T, \quad V_1 = D_1 D_1^T,$$

$$V_2 = D_2^T D_2$$

e  $Q, P, \hat{Q}$  satisfaz em

$$AQ + QA^T + V_1 + \gamma^{-2}QR_{1\infty}Q - Q\Gamma Q = 0 \quad (43)$$

$$(A + \gamma^{-2}[Q + \hat{Q}]R_{1\infty})^T P + P(A + \gamma^{-2}[Q + \hat{Q}]R_{1\infty}) + R_1 - S^T P \Sigma P S = 0 \quad (44)$$

$$(A - \Sigma P S + \gamma^{-2}QR_{1\infty})\hat{Q} + \hat{Q}(A - \Sigma P S + \gamma^{-2}QR_{1\infty})^T + \gamma^{-2}\hat{Q}(R_{1\infty} + \beta^2 S^T P \Sigma P S)\hat{Q} + Q\Gamma Q = 0 \quad (45)$$

A demonstração deste teorema encontra-se no apêndice de Bernstein e Haddad (1989).

Deve-se notar que as equações  $P$  e  $Q$  são similares as equações do estimador e do regulador do LQG. A equação  $Q$  é desacoplada (independente) das equações  $P$  e  $\hat{Q}$ , e pode então ser resolvida de forma independente. Porém, sendo  $P$  dependente de  $\hat{Q}$ , o princípio da separação não é mais válido para problemas do tipo  $L_2/H_\infty$ .

Finalmente nota-se que se a restrição  $H_\infty$  for suficientemente relaxada,  $\gamma \rightarrow \infty$ , então  $P$  fica desacoplada de  $\hat{Q}$ , e a equação  $\hat{Q}$  fica supérflua.

## Algoritmo

Antes de apresentar o algoritmo, é interessante fazer uma análise das equações para determinar existência e multiplicidade das soluções semi-definidas positiva.

Como a Eq. (43) é desacoplada de (44) e (45), é mais fácil fazer uma análise separadamente. Assim, pode-se perceber que esta equação possui uma única solução semi-definida positiva se  $(\gamma^2\Gamma - R_1) > 0$ .

Para as equações de  $\hat{Q}$  e  $P$  esta análise é mais complicada porque as equações estão acopladas.

Por ser difícil determinar em que condições teremos soluções para as equações acopladas, ao aplicar o algoritmo abaixo descrito não temos como saber qual será o resultado final. Esta é uma questão importante porque assim não temos como garantir o desempenho do algoritmo e o seu comportamento numérico.

Para encontrar a solução das Eqs. (43)-(45) acopladas adota-se o seguinte procedimento:

Seja  $\epsilon$  o critério de convergência.

**Algoritmo 1** Projeto de controlador LQG/ $H_\infty$

Passos:

1. inicializar  $\gamma > 0$
2. resolver  $Q$  (43)
3.  $k = 0, \hat{Q}_0 = 0$
4. resolver  $P$  para  $P_{k+1} = P$  com  $\hat{Q} = \hat{Q}_k$  (44)
5. resolver  $\hat{Q}$  para  $\hat{Q}_{k+1} = \hat{Q}$  com  $P = P_{k+1}$  (45)
6. se  $k \geq 1$  e  $\|P_{k+1} - P_k\| < \epsilon$  e  $\|\hat{Q}_{k+1} - \hat{Q}_k\| < \epsilon$
7. se não houve convergência  $k = k + 1$  e volte ao passo 4.

## Procedimento

Deve-se perceber que para  $\gamma \rightarrow \infty$  o controle obtido terá uma característica LQG, ou seja, não há imposição da restrição  $H_\infty$  no desempenho  $L_2$ . Mas para  $\gamma \rightarrow 0$ , o controlador passa a ter uma característica  $H_\infty$ . Assim, variando o parâmetro  $\gamma$  podemos projetar controladores LQG/ $H_\infty$ .

Para o projeto apresentado no algoritmo 1, foram utilizadas, para o critério LQG (Eq. 4) e para o critério  $H_\infty$  (Eqs. 43-45), as mesmas matrizes de ponderação obtidas no primeiro projeto deste artigo (matrizes R e U do controle LQG). Procedendo deste modo, para se encontrar uma solução LQG/ $H_\infty$ , basta variar apenas o parâmetro  $\gamma$ , e através desta variação, pode-se alterar o desempenho do sistema. Portanto, é importante dispor de um projeto LQG como ponto de partida para o algoritmo 1 e um resultado satisfatório será obtido por tentativa e erro, uma vez que o resultado final não é conhecido (Lima e Sales, 1992).

O parâmetro  $\beta$ , que aparece no teorema 1, foi adotado neste projeto como sendo  $\beta = 0$ , ou seja, não foi considerada a ponderação do sinal de controle no critério  $H_\infty$  ( $R_{2\infty} = 0$ ).

A função de transferência calculada para o controlador  $K_p(s)$  é dada por

$$K_p(s) = \frac{1,27 \times 10^9 (s + 0,72) (s + 89,61) (s + 107,88)}{s (s + 291,73 \pm 152,69j) (s + 1,07 \times 10^4 \pm 6,33 \times 10^3j)} \quad (46)$$

O controlador da expressão (46) possui um pólo na origem que provém da planta "aumentada" com um integrador.

É apresentada na Fig. 9, a seguir, a resposta do sistema em malha fechada para uma perturbação em degrau na entrada da planta, utilizando o controle LQG/ $H_\infty$  (Eq. 46). A perturbação foi dada em  $t = 0,5$  s e a saída da planta em regime (entreferro  $X_1$ ) é de 5,8 mm. Através desta figura, pode-se verificar que o sistema com o controle LQG/ $H_\infty$  apresentou uma resposta mais amortecida que o sistema com o controle LQG (Fig. 5), porém a rejeição à perturbação foi mais lenta que o sistema com o controle  $H_\infty$  (Fig. 8).

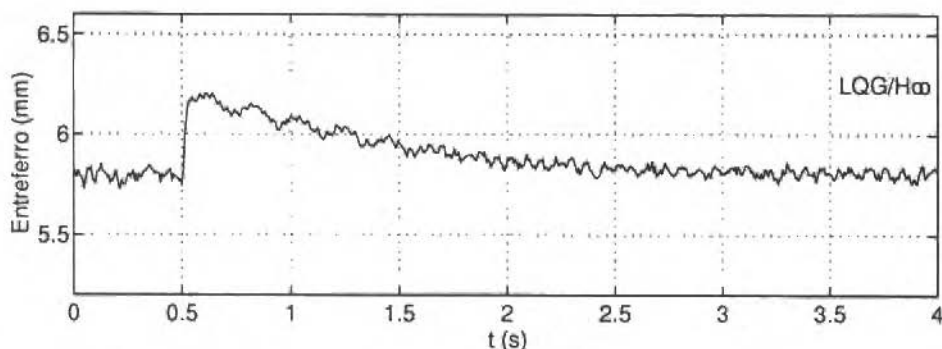


Fig. 9 Resposta do sistema para uma perturbação na entrada da planta com o controle LQG/ $H_\infty$ .

## Comportamento do Algoritmo

Com relação ao projeto LQG/ $H_\infty$ , tem-se os seguintes problemas numéricos que surgiram durante a sua aplicação, usando o algoritmo proposto:

- o menor valor de  $\gamma$ , tal que as Eqs. (44) e (45) tenham solução, não é conhecido a priori. O valor de  $\gamma$  deve ser fixado por tentativa e erro;

- durante o processo iterativo para o cálculo das soluções das Eqs. (44) e (45), o algoritmo pode convergir ou não (*loop* infinito). A Eq. (44) pode também não ter solução devido a problemas de mal-condicionamento, e
- para resolver as Eqs. (44) e (45) foi usado o método de Schur quando as equações não são mal-condicionadas e o método da Homotopia quando ocorre mal-condicionamento. Maiores detalhes a respeito desses métodos e de como minimizar os problemas numéricos envolvidos nas soluções de (44) e (45) podem ser encontrados em (Lima e Sales, 1992) e (Lima e Sales, 1994).

## Implementação Digital

Quanto à implementação dos controles discretizados é importante ressaltar que estes apresentaram melhores resultados quando implementados na forma de blocos em cascata, sendo cada bloco de primeira ou segunda ordem conforme os pólos sejam reais ou complexos. Foi verificado, através de testes experimentais, que tal implementação resulta em maior robustez do sistema em malha fechada. Este fato deve-se a questões de arredondamentos e truncamentos nos cálculos computacionais.

Os controladores foram implementados digitalmente em um microcomputador do tipo PC 386 (clock 20 MHz), usando aproximação de Tustin com frequência de amostragem de 3000 Hz. Simulações realizadas indicaram que este alto valor para a frequência de amostragem foi necessário devido a não linearidades do sistema.

## Resultados

Através das Figs. 5, 8 e 9, em que são apresentadas as respostas do sistema para uma perturbação em degrau na entrada da planta, com os controles LQG,  $H_\infty$  e LQG/ $H_\infty$  respectivamente, montou-se a Fig. 10.

Analisando a Fig. 10, pode-se verificar que a saída do sistema com o controle  $H_\infty$  é a que rejeita mais rapidamente a perturbação no sistema. Isto porque, a função sensibilidade ( $S$ ) do sistema com esse controle (Fig. 11a) é a que apresenta o menor ganho em baixas frequências. Da Fig. 10, nota-se também que o sistema com o controle LQG/ $H_\infty$  é o que tende a rejeitar mais lentamente a perturbação, pois o sistema com esse controle apresenta uma função sensibilidade ( $S$ ) com o maior ganho em baixas frequências. O sistema com o controle LQG tende a rejeitar a perturbação mais rapidamente que o sistema com o controle LQG/ $H_\infty$ , porém a resposta do sistema obtida com o controle LQG foi a mais oscilatória. A razão dessa oscilação advém do fato de que o sistema com o controle LQG é o que apresenta o maior ganho na frequência de ressonância fundamental (36 rad/s). Isto é o que pode ser verificado pela análise da função sensibilidade complementar ( $C_{omp}$ ) na Fig 11b. Dessa figura, verifica-se que na frequência de ressonância, o sistema possui ganho mais baixo com os controles LQG/ $H_\infty$  e  $H_\infty$ , e portanto, apresenta respostas mais amortecidas.

## Conclusões

Foram apresentadas três metodologias de projeto de controladores para uma barra flexível levitada magneticamente em uma de suas extremidades.

No projeto do controle LQG, os pólos do sistema em malha fechada foram impostos como sendo mais rápidos que os pólos do sistema em malha aberta. Nesse trabalho, os resultados obtidos foram satisfatórios, embora nem sempre se obtenha os resultados esperados (Doyle e Stein, 1979). Variando-se a escolha da posição dos pólos de malha fechada, podem-se obter diferentes respostas do sistema.

O projeto do controle  $H_\infty$  é realizado a partir das funções peso  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  que traduzem os requisitos desejados. Através da escolha de outras funções peso podem-se obter diferentes características de desempenho e robustez.

Através do controle LQG/ $H_\infty$  é possível obter um controle com mais características de LQG ou de  $H_\infty$ , variando-se o parâmetro  $\gamma$ .

Em particular, nos projetos desenvolvidos, a escolha adotada para os parâmetros de projeto, a saber, pólos de malha fechada, funções peso  $W_1, W_2, W_3$  e o parâmetro  $\gamma$ , produziram os resultados da seção anterior, que não visam a comparação dos métodos, mas sim ilustrá-los e mostrar como poderiam ser utilizados para se atenderem diferentes requisitos de projeto.

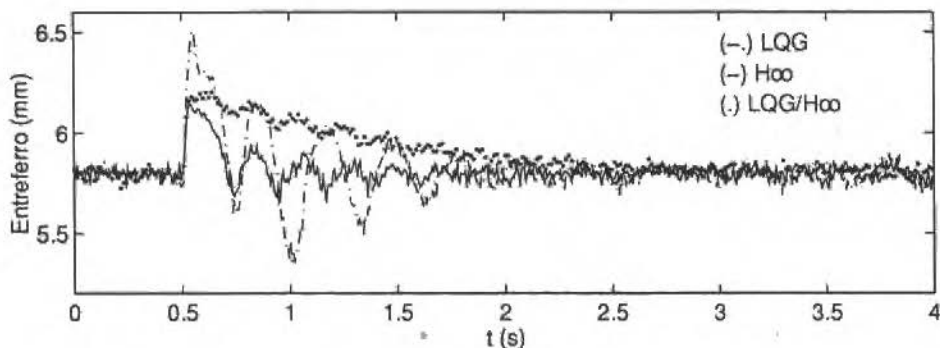


Fig. 10 Resposta do sistema para uma perturbação na entrada da planta

### Nomenclatura

$A, A_c$  = Matrizes  $n \times n, n_c \times n_c$

$B, B_c$  = Matrizes  $n \times m, n_c \times m$

$C, C_c$  = Matrizes  $l \times n, l \times n_c$

$C_{omp}$  = Função sensibilidade complementar

$d$  = Perturbação

$D_1, D_2$  = Matrizes  $n \times p, l \times p$ ;  
 $D_1 D_2^T = 0$

$E$  = Valor esperado

$E_1, E_2$  = Matrizes  $q \times n, q \times m$ ;  
 $E_1^T E_2 = 0$

$E_{1\infty}, E_{2\infty}$  = Matrizes  $q_\infty \times n, q_\infty \times m$ ;  
 $E_{1\infty}^T E_{2\infty} = 0$

$\bar{E} = [E_1 \ E_2 C_c]$

$\bar{E}_\infty = [E_{1\infty} \ E_{2\infty} C_c]$

$G$  = Matriz de ganhos do regulador linear quadrático

$G_o$  = Função de transferência nominal da planta

$G_p$  = Função de transferência da planta

$I_r, O_{r \times s}, O_r$  = Matriz identidade  $r \times r$ , matriz nula  $r \times s$ , matriz nula  $r \times r$

$J$  = Índice de desempenho

$K$  = Matriz de ganhos do filtro de Kalman

$K_p$  = Função de transferência do controlador

$N^{r \times r}$  = Matriz  $r \times r$  definida não negativa

$P^{r \times r}$  = Matriz  $r \times r$  definida positiva

$\Re, \Re^{r \times s}, \Re^r$  = Números reais, matriz real  $r \times s$ ,  $\Re^{r \times 1}$

$R$  = Matriz semi-definida positiva

$S$  = Função sensibilidade

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} R_1 & 0_{n \times n_c} \\ 0_{n_c \times n} & C_c^T R_2 C_c \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_\infty = \begin{bmatrix} R_{1\infty} & 0_{n \times n_c} \\ 0_{n_c \times n} & C_c^T R_{2\infty} C_c \end{bmatrix}$$

$\text{tr}(\cdot)$  = Traço

$u$  = Vetor

$U$  = Matriz definida positiva

$v$  = Ruído branco

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0_{n \times n_c} \\ 0_{n_c \times n} & B_c V_2 B_c^T \end{bmatrix}$$

$V_1, V_2 = D_1 D_1^T, D_2 D_2^T$

$w$  = Ruído branco

$W_1, W_2, W_3$  = Funções peso para o controle  $H_\infty$

$x, x_c, \bar{x}$  = Vetores

$X$  = Espaço real ou complexo

$y$  = Vetor

$\beta$  = Constante não negativa

$\gamma$  = Constante positiva

$\Delta_A, \Delta_M$  = Incerteza aditiva, incerteza multiplicativa

*Super-escrito*

$(\cdot)^T$  = Transposta

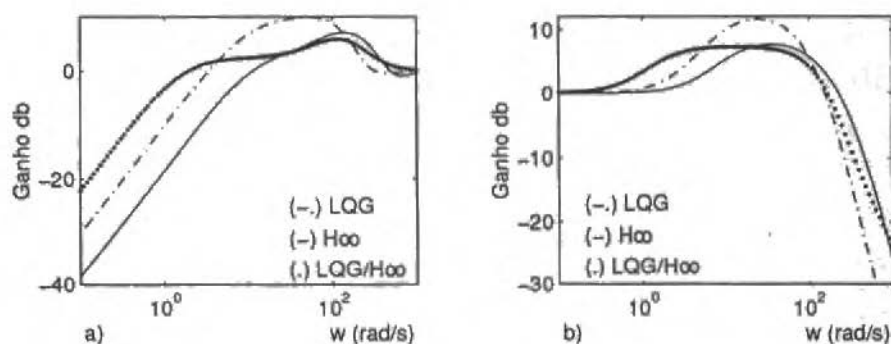


Fig. 11 a) Função sensibilidade ( $S$ ) b) Função sensibilidade complementar ( $C_{omp}$ )

## Agradecimentos

Este trabalho contou com o suporte financeiro da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), através dos processos: Nº 91/0508-3 e Nº 91/2344-8.

## Referências

- Balas, G. J. and Doyle, J. C., 1990, "Identification of Flexible Structures for Robust Control", IEEE Control Systems Magazine, pp. 51-58.
- Bernstein, D. S. and Haddad, W. M., 1989, "LQG Control with  $H_{\infty}$  Performance Bound: A Riccati Equation Approach", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-34, pp 293-305.
- Bittar, A., 1993, "Levitação Magnética de uma Barra Flexível", Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Politécnica da USP.
- Chiang, R. Y., Safonov, M. G., 1992, "Robust Control Toolbox", The Math Works Incorporation.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A., 1989, "State Space Solutions to Standard and Control Problems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-34, p. 831-847.
- Doyle, J. C., Stein, G., 1979, "Robustness with Observers", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, no. 4.
- Francis, B. A., 1987, "A Course in  $H_{\infty}$  Control Theory", Springer-Verlag, New York.
- Fujita, M., Matsumura, F., Shimizu, M., 1990, " $H_{\infty}$  Robust Control Design for a Magnetic Suspension System", 2nd International Symposium on Magnetic Bearing, Tokyo, Japan, July 12-14.
- Lima, A. C., Sales, R. M., 1992, "Investigação Numérica de Controladores  $H_2/H_{\infty}$ ", 9ª CBA, Vitória-ES.
- Lima, A. C., Sales, R. M., 1994, "Numerical Investigation of Algorithms for  $H_2/H_{\infty}$  Controllers Synthesis", Proceedings of ACC 1994, Baltimore Maryland, USA.
- Lucchesi, L., 1994, "Projeto de Controle Robusto  $H_{\infty}$  para um Sistema de Levitação Magnética", Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Politécnica da USP.
- Safonov, M. G. et al., 1987, "Synthesis of Positive Real Multivariable Feedback Systems", Int. J. Control, vol. 45, nº 3, pp. 817-842.
- Solheim, O. A., 1972, "Design of Optimal Control Systems with Prescribed Eigenvalues", Int. J. Control, vol. 15, nº 1, pp. 143-160.



# Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part I: Formulation

**Euclides de Mesquita Neto**

**Bento Rodrigues de Pontes Junior**

Departamento de Mecânica Computacional  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP  
C.P. 6122 CEP 13083-970 Campinas, SP

**Edson Antonio Capello Sousa**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia e Tecnologia - UNESP  
Campus de Bauru  
C.P. 473 CEP 17033-360 Bauru, SP

## Abstract

The present article reviews briefly the advantages and drawbacks of the Finite Element Method (FEM) compared to the Boundary Element Method (BEM) in the field of solid mechanics, in particular for elastodynamics. A coupling procedure, which encompasses the advantages of both methods in the frequency domain is presented. The formulation for the interaction of the FE and BE meshes with a rigid body is also detailed. In an accompanying paper the described methodology is implemented, validated and applied to dynamic soil-structure interaction problems.

**Keywords:** Finite Element Method, Boundary Element Method, Elastodynamics

## Introduction

There is no point, nowadays, in trying to explain the advantages the Finite Element Method (FEM) has brought to problem solving in applied mechanics. The FEM represents "the" break-through in solving boundary value problems of mathematical physics. The method is conceptually well established (Strang, 1973, Zienkiewicz, 1989, 1991, Bathe, 1982, Hughes, 1987) and has been successfully implemented in a great number of commercial programs (Brebbia, 1985).

In the field of solid mechanics there have been considerable advances in linear and non-linear numerical analysis (Zienkiewicz, 1989, 1991). But Finite Element Analysis still faces some limitations or barriers. The FE is a 'domain' method and its implementation demands the discretization of the entire domain under consideration. Thus, fully three-dimensional analysis requires a lot of time for data preparation and huge computing facilities, including large cores and strong processing capabilities. Wave propagation phenomena in unbounded domains does pose some difficulties to the FE analysis. In these unbounded domains there are waves which propagate unreflected to the 'infinity' and carry with them a certain amount of energy, which is withdrawn from the analysed system. This withdrawn energy is usually referred to as "geometric damping" (Richart, 1970). Any finite sized FE mesh will cause wave reflection and consequently trap the energy inside the mesh (Hadjian, 1974). Finite domains will also possess eigenfrequencies, which are accompanied by bounded or unbounded vibration amplitudes of the corresponding eigenmodes, depending on whether the system presents or not internal (material) damping (Nashif, 1985). Unbounded domain dynamics does not present the possibility of modal decomposition and does not show the corresponding resonances. A lot of effort has been done to develop "infinite elements" to reproduce the static and dynamic behaviour of unlimited domains within the FE analysis. An account of the state-of-the-art in the use and development of "infinite" elements in FE analysis may be found in Bettess (1992).

An alternative to the FEM is given by the Boundary Element Method (BEM), which in the last 15 years the has evolved from a numerical tool to handle potential and elastostatic problems (Rizzo, 1967, Cruse, 1975, Jaswon, 1977, Brebbia, 1984) to a powerful and efficient technique applied to the analysis of almost any field in engineering including elastodynamics (Mansur, 1983, Manolis, 1988, Banerjee, 1992), fluid mechanics (Skerget, 1992), dynamic fluid-structure interaction (Brebbia,

1984a), fluid-soil-structure interaction (Antes, 1988, Manolis, 1993), fracture mechanics (Cruse, 1979, Aliabadi, 1991), electrical engineering (Brebbia, 1990), acoustics (Ciskowski, 1992) and heat transfer (Wrobel, 1992).

Depending on the problem being considered the BEM shows some great advantages over the FEM. The BEM is a "boundary type" method which in most circumstances only requires the discretization of the surface (boundary) of the region being analysed. Consequently the dimensionality of the problem is reduced by one. Thus in three dimensional problems only surfaces need to be discretized. In two dimensional cases only lines, and in one dimensional problems only two scalar points need to be treated. This is the most striking feature of the BEM and has an enormous effect in the effort necessary to prepare input data, specially for problems in the initial stages when remeshing may be very frequent. In BE analysis the resulting systems of algebraic equations are much smaller than its FE counterpart. Opposite to the symmetric, sparse and banded character of the FE matrices the BE matrices are non-symmetric and fully populated. So, many of the algorithms developed for the FE analysis cannot be utilized in the BE codes.

The Boundary Element Method can quite naturally describe the geometric damping related to wave propagation in unbounded continua (Manolis, 1988, Pontes, 1992). It is consequently well suited for exterior domain problems of acoustics, geomechanics, fluid-mechanics, etc. Due to its "boundary-only" character (no discretization or approximation is performed within the domain) the results produced by the BEM in the interior of the domains tend to be more precise than its FE counterpart for the same boundary mesh density (Becker, 1992). For problems of fracture mechanics and for the determination of high stress gradients at crack tips the BEM produces better results than the FEM (Cruse, 1979, 1988, Beskos, 1987, Becker, 1992). The FEM requires a special formulation to treat incompressible media (Poisson ratio  $\nu = 0.5$ ), but the BEM handles these materials with no further difficulty (Becker, 1992).

But the BEM is not the panacea, the solution of all evils. The BEM also has some drawbacks, when compared to the FEM. The Finite Element Method is usually formulated directly from the differential equations governing the continuum. In the BE analysis the differential equations are first transformed into integral equations and then discretized. Engineers are unfamiliar with the mathematics of integral equations. Thus many engineers fear to change from the well known FE formulations to the rather unusual BE mathematics. The BEM applies, in principle, only to homogenous domains and requires for its formulation a so called "fundamental solution" or a Green's function (GF). The BE formulation for non-homogeneous regions would require substructuring techniques, which in the limit, would lead to Boundary Element regions with the size of a Finite Element. The 'boundary-only' appeal of the BEM would then disappear.

The BE is a superposition method and thus, in principle, only applicable to linear analysis. There have been many efforts to extend BE techniques to some fields of non-linear mechanics. Today the BEM can be applied to non-linear problems which can be solved in an incremental manner like viscoelasticity and elastoplasticity (Mukherjee, 1982, Telles, 1983). Contact problems represent another field in which non-linear analysis has been performed by the BEM. Quasi-static contact problems require advanced iterative techniques (Man, 1992) and dynamic contact problems ask for a time-domain BE implementation which is mathematically and computationally cumbersome (Antes, 1985, 1992). But in spite of these advances non-linear numerical analysis is still the realm of the FEM 'par excellence' (Zienkiewicz, 1991).

From the above analysis it must be evident that both methods, FE and BE, possess qualities and drawbacks and that the most suitable technique to be applied is problem-dependent. Today there is a growing consensus among the researchers of numerical methods that the coupling of FE and BE procedures represents the most efficient numerical tool available to approximate the solution of differential equations governing problems of solid mechanics (Sousa, 1992). For instance, in the field of dynamic interaction of foundation structures with the soil the FEM can be used to model the structures, foundations, soil backfill and other inhomogeneities of the near-field while the BEM is used to model the far-field with the radiation condition. In plasticity, frequently only a small portion of the domain undergoes non-linear plastic deformations. This small non-linear region can be modelled by the FEM and the rest of the (linear) domain can still use the advantages of the reduced BE discretization.

It seems that Zienkiewicz and his co-workers (1977, 1979) were the first to describe the coupling of FE with boundary integral equations, BIE. Their formulation was for potential problems applied to wave diffraction, heat transfer and electromagnetic fields. They transformed the BIE domain into an equivalent FE domain. The coupling was then performed considering kinematic compatibility and equilibrium conditions at the BE-FE interface nodes. By reasoning through energy principles the originally non-symmetric BIE matrices were given a symmetric form. A formulation for coupled elastostatics was given by Brebbia and Georgiou (1979). Implementations of the coupled FE-BE analysis for plane strain elastostatics into existing FE programs were reported by Beer (1983, 1986). Applications of coupled FE-BE analysis to problems of geomechanics (Beer, 1986) showed the efficiency of this procedure. In the former works the BE domain was also transformed into a FE equivalent system and the resulting matrices made symmetric. Brebbia, Telles and Wrobel (1984) criticized this symmetrization stating that the underlying energy considerations do not strictly apply to integral operators. This critical point of view has been supported theoretically and numerically by other authors (Li, 1986, Kohno, 1991). A further contribution to the discussion underlying the non-symmetric character of the conventional boundary element formulation may be found in the article of Dumont (1987). The first BE formulation for elastodynamics was given by Cruse (1968a, 1968b). A coupled FE-BE formulation for plane strain elastodynamics in the frequency domain was given by Kobayashi et al. (1985). In that article the non-homogeneous part of the ground was modelled by FEs and the remaining homogeneous far-field, which accounted for the radiation condition, by Boundary Elements. A three dimensional formulation was also reported by Kobayashi (1986) for dynamic soil-structure interaction problems.

Time domain dynamic response of bi- and tri-dimensional flexible foundations (modelled by FEs) interacting with the soil (modelled by BEs) have first been given by Karabalis and Beskos (1985) as well as by Syrakos and Beskos (1986). Both articles deal with massless foundations and relaxed contact conditions at the soil-foundation interface. More recently Estorff et alii. (1989, 1990, 1991) have reported coupled BE-FE in time domain based on the formulation proposed by Antes (1985), which includes bonded contact conditions at the soil-foundation interfaces and inertial properties for the foundations and/or structures. These articles show clearly the potentialities of the coupled BE-FE procedures to analyse complex dynamic structure-soil-structure interaction phenomena. The time domain formulation allows a natural extension to treat non-linear problems. The recent work of Wang and Schmid (1992) indicates that there still is a lot of engineering analysis which can be performed by a coupled BE-FE methodology.

The present article describes a coupled FE-BE formulation to analyse steady state (visco)elastodynamics under plane strain conditions. Viscoelastic effects are introduced in the FE equations through the concept of relaxation functions. The Boundary Element formulation is based on the full space Green's function or Stokes' tensors. Viscoelastic effects are incorporated in the BE equations through complex material constants. Eventual non-causal effects due to this assumption are addressed. The interaction of the FE mesh with a rigid body is also included. The described formulation reduces the size of the FE system but keeps its symmetry. In an accompanying article (Mesquita et alii, 1994) this formulation is implemented, validated and applied to dynamic soil-structure interaction problems which include embedded foundations and soil vibration isolation by means of trenches.

## Finite Element Formulation for Elastodynamics

The starting point to formulate the Finite Element Method for elastodynamics is the well known Navier equation, which in terms of the displacement field components  $U_i(x, t)$  can be written

$$\mu U_{i,jj} + (\mu + \lambda) U_{i,ji} + F_i = \rho U_{i,tt} \quad (2.1)$$

In Eq. (2.1),  $\mu$  and  $\lambda$  are Lamé's constants,  $F_i$  body forces per unit volume and  $\rho$  is the continuum density. By using a weighted residual statement and approximating the field variables through interpolating functions (Zienkiewicz, 1989, Hughes, 1987) the differential equation (2.1) can be transformed into an algebraic system of equations relating the vectors of nodal displacements  $\underline{U}$  and forces  $\underline{F}$ :

$$[\underline{M}] \{\dot{\underline{U}}(t)\} + [\underline{K}] \{\underline{U}(t)\} = \{\underline{F}(t)\} \quad (2.2)$$

The matrices  $\underline{M}$  and  $\underline{K}$  represent respectively the inertia and stiffness properties of the medium. In Eq. (2.2) variables are functions of time  $t$ . It is possible to eliminate the time dependency by means of a Fourier Integral Transform. The resulting variables are now frequency dependent ones. Defining the Fourier transform of the field variables as:

$$\mathcal{F}[\underline{U}(\underline{x}, t)] = \bar{\underline{U}}(\underline{X}, \omega) \quad (2.3)$$

equation (2.1) may be transformed to give (Pontes, 1992)

$$\mu \bar{U}_{i,jj} + (\mu + \lambda) \bar{U}_{j,ji} + \bar{F}_i = -\rho \omega^2 \bar{U}_i \quad (2.4)$$

The dash (-) over the variables indicates that they are assumed to be complex. The algebraic system (2.2) may be also transformed to the frequency domain ( $\omega$ )

$$[\underline{S}(\omega)] \bar{\underline{U}}(\omega) = \bar{\underline{F}}(\omega) \quad (2.5)$$

The dynamic stiffness matrix  $\underline{S}$  is defined as

$$\underline{S}(\omega) = [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \quad (2.6)$$

This procedure is standard for the analysis of an elastic continuum in the frequency domain (Hughes, 1987). To formulate the FE equations for a linear viscoelastic continuum instead of the generalized Hooke's law the viscoelastic constitutive equations relating the deformation tensor  $\epsilon_{ij}(t)$  and the stress tensor  $\sigma_{ij}(t)$  (Christensen, 1972) must be introduced:

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.7)$$

In Eq. (2.7)  $\lambda(\tau)$  and  $\mu(\tau)$  are relaxation functions (Christensen, 1972). Considering the constitutive relation (2.7), the equilibrium equation

$$\sigma_{ij,i} + F_i = \rho U_{i,tt} \quad (2.8)$$

and the definition of the Cauchy deformation tensor

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (2.9)$$

the equation of motion governing the viscoelastic continuum may be finally written in terms of convolution integrals (Christensen, 1972):

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial U_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\mu(t-\tau) + \lambda(t-\tau)] \frac{\partial U_{j,ji}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + F_i = \rho U_{i,tt} \quad (2.10)$$

Applying the Fourier Integral Transform, Eq. (2.10) may be written in the frequency domain

$$\mu^*(i\omega) \bar{U}_{i,jj} + [\mu^*(i\omega) + \lambda^*(i\omega)] \bar{U}_{j,ji} + \bar{F}_i = -\omega^2 \bar{U}_i \quad (2.11)$$

The complex Lamé's constants  $\mu^*$ ,  $\lambda^*$  contain information pertaining the material damping coefficients of the medium  $\eta_\mu$ ,  $\eta_\lambda$  and are defined by:

$$\mu^*(i\omega) = \mu [1 + i\eta_\mu(\omega)]; \quad \lambda^*(i\omega) = \lambda [1 + i\eta_\lambda(\omega)] \quad (2.12)$$

The frequency dependent damping coefficients may be taken from a viscoelastic model like Kelvin-Voigt or constant hysteresis. They may also be obtained experimentally and then incorporated into this formulation. Usually both damping coefficients are considered equal  $\eta_\mu = \eta_\lambda = \eta$ , which will lead to a real valued Poisson ratio  $\nu$  (Christensen, 1972). Using the definition (2.12) in Eq. (2.11) it may be recasted:

$$[1 + i\eta(\omega)] \{ \mu \bar{U}_{i,jj} + [\mu + \lambda] \bar{U}_{j,ji} \} + \bar{F}_i = -\omega^2 \bar{U}_i \quad (2.13)$$

This equation may also be discretized and reduced to an algebraic system. Comparing (2.4) with (2.13) it can be seen that a complex damping term  $\underline{C}$  will appear in the dynamic stiffness matrix:

$$\underline{\bar{S}}(\omega) = [\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i \underline{C}(\omega)] \quad (2.14)$$

The damping matrix  $\underline{C}(\omega)$  is defined by (Sousa, 1992):

$$\underline{C}(\omega) = \eta(\omega) \underline{K} \quad (2.15)$$

Equations (2.5) and (2.14) represent the FE formulation for the viscoelastic continuum in the frequency domain. Computationally the only difference between the elastic and the viscoelastic implementation is the existence of the matrix  $\underline{C}$  containing the information about the dissipative properties of the medium. It has been said that the introduction of such a complex matrix may lead to non-causal behaviour of the continuum (Crandall, 1970). This phenomena has also been investigated by Gaul et alii. (1985). But as Scanlan (1970) has stated, nature has a causal behaviour and also dissipative properties, so the problem is not the existence of the complex matrix  $\underline{C}$  but its frequency content. The simple damping models, like the Kelvin-Voigt, may not describe nature's behaviour appropriately, but accurately measured damping coefficients will not lead to non-causal behaviour. An improved generalized damping model may be found in the articles of Gaul et alii. (1986, 1992).

### Incorporation of Rigid Body Conditions in the FE Mesh

To describe the interaction of the FE mesh with rigid bodies ( $\Omega^R$ ) it is necessary to introduce rigid body kinematic compatibility relations and force equilibrium conditions into Eqs. (2.5). For this purpose the displacement  $\underline{U}$  and force vectors  $\underline{F}$  in (2.5) will be divided into the subvectors (see Fig. 1):

$$\{\bar{\underline{U}}\} = \{\bar{\underline{U}}_F^F, \bar{\underline{U}}_R^F\}^T; \quad \{\bar{\underline{F}}\} = \{\bar{\underline{F}}_F^F, \bar{\underline{F}}_R^F\}^T \quad (2.16)$$

The following definitions apply to (2.16):

$$\bar{\underline{U}}_F^F = \{\bar{\underline{U}}\}_{x \in \Gamma_U^F \cup \Gamma_I^F \cup \Omega^F}; \quad \bar{\underline{F}}_F^F = \{\bar{\underline{F}}\}_{x \in \Gamma_U^F \cup \Gamma_I^F \cup \Omega^F} \quad (2.17)$$

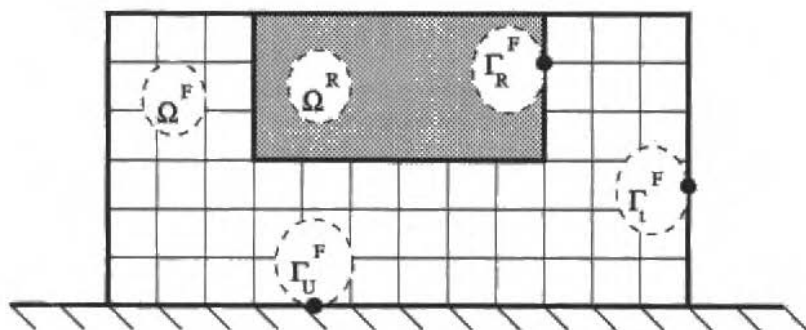


Fig. 1 Rigid body and finite element mesh: definitions

Considering Eq. (2.16) and the definition (2.17), Eq. (2.14) may be rewritten:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{FF}^F & \bar{S}_{FR}^F \\ \bar{S}_{FR}^F & \bar{S}_{RR}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_F^F \\ \bar{U}_R^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_F^F \\ \bar{F}_R^F \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Kinematic compatibility equations  $\bar{C}_C$  must be imposed between the vector describing the rigid body displacements  $\bar{U}_R^R$  and the nodal displacements  $\bar{U}_R^F$  at the FE-rigid body interface  $\Gamma_R^F$ . In matrix form this may be written as (Sousa, 1992):

$$\{\bar{U}_R^F\} = [\bar{C}_C] \{\bar{U}_R^R\} \quad (2.19)$$

Equilibrium conditions  $\bar{E}_Q$  must also be prescribed between the vector of the external forces acting on the (massless) rigid body  $\bar{F}_R^R$  and the forces at the FE-rigid body interface  $\bar{F}_R^F$  (Sousa, 1992):

$$\{\bar{F}_R^R\} = [\bar{E}_Q] \{\bar{F}_R^F\} \quad (2.20)$$

It can be shown that (Pontes, 1992, Sousa, 1992):

$$[\bar{C}_C]^T = [\bar{E}_Q] \quad (2.21)$$

The vectors describing the rigid body displacements and applied external forces are defined respectively as:

$$\{\bar{U}_R^R\} = \{\bar{U}_X, \bar{U}_Z, \bar{\phi}_Y\}^T; \quad \{\bar{F}_R^R\} = \{\bar{F}_X, \bar{F}_Z, \bar{M}_Y\}^T \quad (2.22)$$

The matrices  $\bar{C}_C$  and  $\bar{E}_Q$  can be used to incorporate the the rigid body displacement and external forces into Eqs. (2.18) without changing the symmetric character of  $\bar{S}$ . The resulting system has the following structure (Sousa, 1992):

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{FF}^F & \bar{S}_{FR}^F \\ \bar{S}_{RF}^F & \bar{S}_{RR}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_F^F \\ \bar{U}_R^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_F^F \\ \bar{F}_R^R \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

with



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{S}_{FR}^* \\ \bar{S}_{RR}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{S}_{FR}^F \\ \bar{S}_{RR}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_C \\ \bar{C}_C \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \bar{S}_{RF}^* \\ \bar{S}_{RR}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_C \\ \bar{C}_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{S}_{RF}^F \\ \bar{S}_{RR}^F \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \bar{S}_{RR}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_C \\ \bar{C}_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{S}_{RR}^F \\ \bar{S}_{RR}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_C \\ \bar{C}_C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

It should be noticed that this formulation, besides keeping the symmetric structure of the matrices in system (2.23), also reduces all the FE degrees of freedom  $\underline{U}_R^F$  at the interface  $\Gamma_R^F$  to the three rigid body degrees of freedom  $\underline{U}_R^R$  resulting thus in a smaller algebraic system (Sousa, 1992).

## Boundary Element Formulation for Viscoelastodynamics

The BE formulation requires the transformation of Navier's differential equations (2.1) into a set of integral equations. This transformation is accomplished by considering two distinct elastodynamic states ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^*$ ) containing displacements  $U_i$ , boundary tractions  $t_i$  and body forces  $F_i$ ,  $\mathcal{E}[U_i(\underline{x}, t), t_i(\underline{x}, t), F_i(\underline{x}, t)]$  and  $\mathcal{E}^*[U_i^*(\underline{x}, t), t_i^*(\underline{x}, t), F_i^*(\underline{x}, t)]$  and Graffi's reciprocity theorem (Cruse, 1968a, 1968b, Mansur, 1983, Pontes, 1992) which relates these elastodynamic states through the following relation:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_i(\underline{x}, t) * U_i^*(\underline{x}, t) d\Gamma(\underline{x}) + \int_{\Omega} F_i(\underline{x}, t) * U_i^*(\underline{x}, t) d\Omega(\underline{x}) = \\ = \int_{\Gamma} t_i^*(\underline{x}, t) * U_i(\underline{x}, t) d\Gamma(\underline{x}) + \int_{\Omega} F_i^*(\underline{x}, t) * U_i(\underline{x}, t) d\Omega(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

The symbol (\*) in Eq. (3.1) represents a convolution integral with respect to time.  $\Omega$  and  $\Gamma$  represent, respectively, the domain and boundary of the continuum considered. The Fourier Integral Transform of Eq. (3.1) assumes the form (Pontes, 1992):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_i(\underline{x}, \omega) \bar{U}_i^*(\underline{x}, \omega) d\Gamma(\underline{x}) + \int_{\Omega} F_i(\underline{x}, \omega) \bar{U}_i^*(\underline{x}, \omega) d\Omega(\underline{x}) = \\ = \int_{\Gamma} t_i^*(\underline{x}, \omega) \bar{U}_i(\underline{x}, \omega) d\Gamma(\underline{x}) + \int_{\Omega} F_i^*(\underline{x}, \omega) \bar{U}_i(\underline{x}, \omega) d\Omega(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

The kernel  $\bar{U}_i^*$  in Eq. (3.2) is the solution of the Navier equation in the frequency domain (2.4) for the case that body forces  $F_i^*$  are represented by a Dirac's Delta distribution  $\delta(\underline{x})$  applied at a collocation point  $\underline{\xi}$  multiplied by a known forcing function  $f(\omega)$ :

$$\mu \bar{U}_{i,jj}^*(\underline{x}, \omega) + (\mu + \lambda) \bar{U}_{j,j}^*(\underline{x}, \omega) + \omega^2 \rho \bar{U}_i^* = -f(\omega) \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) e_i \quad (3.3)$$

The displacement vector  $\bar{U}_i^*$  may be obtained from the so called "Fundamental Solution" (FS) of the elastodynamics or the Stokes' displacement tensor  $u_{ij}^*$  (Eringen, 1975). The vector of the surface tractions  $t_i^*$  is obtained from the stress tensor  $t_{ij}^*$ , which in turn is determined applying  $u_{ij}^*$  in the constitutive equations for a linear, isotropic and homogeneous media. Following relations hold:

$$\bar{U}_i^* = \bar{u}_{ij}^* e_j; \quad \bar{t}_i^* = \bar{t}_{ij}^* e_j \quad (3.4)$$

The pair of Stokes fundamental solutions  $u_{ij}^*$ ,  $t_{ij}^*$  have an additional property ensures the satisfaction of the radiation condition:

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} u_{ij}^*(\underline{x}, \omega) = \bar{0}; \quad \lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \dot{t}_{ij}^*(\underline{x}, \omega) = \bar{0} \quad (3.5)$$

If the pair  $(u_{ij}^*, t_{ij}^*)$  is chosen to be one of the elastodynamic states  $\mathcal{E}^*$  then integral equation (3.2) may be recasted into (Manolis, 1988, Pontes, 1992):

$$C_i \bar{U}_i(\underline{\xi}, \omega) = \int_{\Gamma} [\bar{u}_{ij}^*(\underline{\xi} - \underline{x}, \omega) \dot{t}_j(\underline{x}, \omega) - \dot{t}_{ij}^*(\underline{\xi} - \underline{x}, \omega) \bar{U}_j(\underline{x}, \omega)] d\Gamma(\underline{x}) + \int_{\Omega} \bar{u}_{ij}^*(\underline{\xi} - \underline{x}, \omega) \bar{F}_j(\underline{x}, \omega) d\Omega(\underline{x}) \quad (3.6)$$

For smooth boundaries the value of the so called free term coefficient  $C_i$  is 0.5. In the absence of body forces  $F_j = 0$ , the integral equation (3.8) furnishes the displacement field  $U_i(\underline{\xi})$  at any point  $\underline{\xi}$  as a function of integrals of displacements  $U_j$  and tractions  $t_j$  over the boundary  $\Gamma$ . But in a well posed boundary value problem only one of the variables  $U_j(x \in \Gamma_U)$ ,  $t_j(x \in \Gamma_t)$  is prescribed at portions of the boundary  $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_t$ . In (3.6)  $U_j(x \in \Gamma_t)$ , and  $t_j(x \in \Gamma_U)$  are the unknowns of the problem. The solution of (3.6) may be obtained by discretizing the boundary into a series of elements and then interpolating the geometry and field variables by appropriate polynomial functions. By applying the collocation point  $\underline{\xi}$  over the nodal points at  $\Gamma$  a system of algebraic equations relating boundary displacements and tractions may be written (Manolis, 1988, Pontes, 1992):

$$[\bar{H}(\omega)] \{ \bar{U}(\omega) \} = [\bar{G}(\omega)] \{ \bar{t}(\omega) \} \quad (3.7)$$

Introducing the given boundary conditions  $U_i(x \in \Gamma_U)$ ,  $t_i(x \in \Gamma_t)$  into (3.7) this system may be rearranged into the form (Pontes, 1992):

$$[\bar{A}(\omega)] \{ \bar{X}(\omega) \} = \{ \bar{b}(\omega) \} \quad (3.8)$$

The vector  $X$  contains the unknown nodal boundary values  $U_j(x \in \Gamma_t)$  and  $t_j(x \in \Gamma_U)$  and  $b$  contains the prescribed boundary values  $U_j(x \in \Gamma_U)$  and  $t_j(x \in \Gamma_t)$  multiplied by parts of  $\bar{H}$  and  $\bar{G}$ , respectively. Once the unknown boundary values are determined from (3.8) the field variables at any point of the domain  $\Omega$  may be determined with the aid of the integral equation (3.6). Stoke's displacement tensor  $u_{ij}^*$  stress tensor  $t_{ij}^*$  used in the present formulation (and implementation) may be found in Eringen et al. (1975) and also in Pontes (1992). It should be noted that complex Lamé's constants (2.12) were implemented to model internal dissipative (viscoelastic) effects of the continuum.

## Coupling of Finite and Boundary Element Methods

There are two possible ways to couple FE and BE discretized domains. The first alternative transforms the FE equations into an equivalent BE system, with displacements and tractions as nodal variables. This is a convenient procedure when the FE formulation is a mixed type one (Zienkiewicz, 1989, Becker, 1992). For the displacement type FE formulation it is more convenient to transform the BE equations into an equivalent FE system. This offers the advantage that the BE equations may be incorporated into the existing FE codes.

Referring to Fig. 2 the FE (F) and BE (B) variables may undergo another division, considering the FE-BE interface nodes (I) and the non-interface nodes (N)

$$\begin{aligned} \underline{\bar{U}}^F &= \{\underline{\bar{U}}_N^F, \underline{\bar{U}}_I^F\}^T; & \underline{\bar{F}}^F &= \{\underline{\bar{F}}_N^F, \underline{\bar{F}}_I^F\}^T; \\ \underline{\bar{U}}^B &= \{\underline{\bar{U}}_N^B, \underline{\bar{U}}_I^B\}^T; & \underline{\bar{F}}^B &= \{\underline{\bar{F}}_N^B, \underline{\bar{F}}_I^B\}^T \end{aligned} \quad (4.1)$$

The following definitions apply to (4.1):

$$\begin{aligned} \underline{\bar{U}}_I^F &= \{\underline{\bar{U}} \mid \underline{x} \in \Gamma_I^F\}; & \underline{\bar{F}}_I^F &= \{\underline{\bar{F}} \mid \underline{x} \in \Gamma_I^F\} \\ \underline{\bar{U}}_N^F &= \{\underline{\bar{U}} \mid \underline{x} \in \Gamma_R^F \cup \Gamma_t^F \cup \Omega^F\}; & \underline{\bar{F}}_N^F &= \{\underline{\bar{F}} \mid \underline{x} \in \Gamma_R^F \cup \Gamma_t^F \cup \Omega^F\} \\ \underline{\bar{U}}_I^B &= \{\underline{\bar{U}} \mid \underline{x} \in \Gamma_I^B\}; & \underline{\bar{F}}_I^B &= \{\underline{\bar{F}} \mid \underline{x} \in \Gamma_I^B\} \\ \underline{\bar{U}}_N^B &= \{\underline{\bar{U}} \mid \underline{x} \in \Gamma_U^B \cup \Gamma_t^B\}; & \underline{\bar{F}}_N^B &= \{\underline{\bar{F}} \mid \underline{x} \in \Gamma_U^B \cup \Gamma_t^B\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

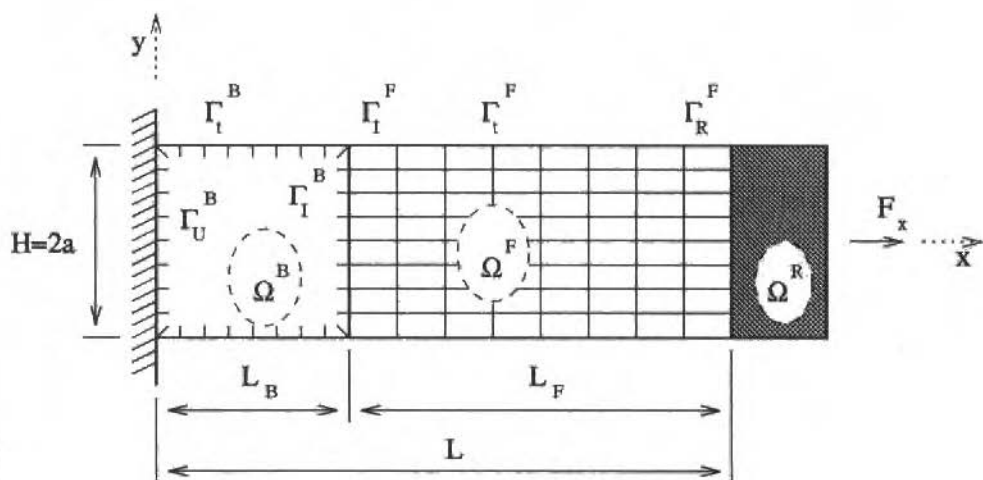


Fig. 2 Finite and boundary element meshes and rigid body: definitions

This division is necessary because for the coupling procedure kinematic and equilibrium conditions will be imposed at the interface nodal variables (I). Considering the definitions above the FE equations (2.5) may be written

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{NN}^F & \bar{S}_{NI}^F \\ \bar{S}_{IN}^F & \bar{S}_{II}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_N^F \\ \bar{U}_I^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_N^F \\ \bar{F}_I^F \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Analogously for the BE Eqs. (3.7)

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{NN}^B & \bar{H}_{NI}^B \\ \bar{H}_{IN}^B & \bar{H}_{II}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_N^B \\ \bar{U}_I^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{NN}^B & \bar{G}_{NI}^B \\ \bar{G}_{IN}^B & \bar{G}_{II}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{t}_N^B \\ \bar{t}_I^B \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

It should be noted that in the FE formulation the vector  $\bar{F}^F$  represents nodal forces while the BE vectors  $\bar{t}^B$  represents distributed surface forces or tractions. The tractions must be converted into equivalent nodal forces through a transformation matrix  $\bar{N}$ . This matrix depends on the interpolation function used in the discretization process (Pontes, 1992):

$$\{\bar{F}^B\} = [\bar{N}] \{\bar{t}^B\} \quad (4.5)$$

With the aid of (4.5) the BE system (4.4) may now be transformed into a FE system, analogous to (2.5):

$$[\bar{S}^{B-NS}] [\bar{U}^B] = [\bar{F}^B] \quad (4.6)$$

The non-symmetric (NS) dynamic stiffness matrix  $\bar{S}^{B-NS}$  is obtained from the BE formulation (B) (4.4) and is defined by:

$$[\bar{S}^{B-NS}] [\bar{N}] [\bar{G}]^{-1} [\bar{H}] \quad (4.7)$$

Equations (4.6) may still be further subdivided according to the definitions (4.2):

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{NN}^{B-NS} & \bar{S}_{NI}^{B-NS} \\ \bar{S}_{IN}^{B-NS} & \bar{S}_{II}^{B-NS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_N^{B-NS} \\ \bar{U}_I^{B-NS} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_N^{B-NS} \\ \bar{F}_I^{B-NS} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Equations (4.3) and (4.8) can now be coupled considering kinematic compatibility conditions and equilibrium equations, respectively, at the FE-BE interface nodes (Sousa, 1992)

$$\underline{\underline{U}}_1^F = \underline{\underline{U}}_1^B = \underline{\underline{U}}_1; \quad \underline{\underline{F}}_1^F + \underline{\underline{F}}_1^B = \underline{\underline{0}} \quad (4.9)$$

Equations (4.3), (4.8) and (4.9) may be rearranged to form an algebraic system relating external excitations  $\underline{\underline{F}}$  and all the nodal displacements  $\underline{\underline{U}}$  at the coupled mesh (Sousa, 1992):

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_{NN}^F & \underline{\underline{S}}_{NN}^F & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{S}}_{IN}^F & \underline{\underline{S}}_{II}^F + \underline{\underline{S}}_{II}^B & \underline{\underline{S}}_{NN}^B \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{S}}_{NI}^B & \underline{\underline{S}}_{NN}^B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_N^F \\ \underline{\underline{U}}_I \\ \underline{\underline{U}}_N^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_N^F \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}}_N^B \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

It is possible to rearrange Eqs. (4.10) so to condense the system (4.10) to the size of the FE nodal variables (Sousa, 1992):

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_{NN}^F & \underline{\underline{S}}_{NI}^F \\ \underline{\underline{S}}_{IN}^F & \underline{\underline{S}}_{II}^F + \underline{\underline{S}}_{II}^{B^*} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}_N^F \\ \underline{\underline{U}}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_N^F \\ \underline{\underline{F}}_N^{B^*} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

The following definitions apply to (4.11):

$$\underline{\underline{S}}_{II}^{B^*} = [\underline{\underline{N}}] [\underline{\underline{G}}_{II}^{B^*}]^{-1} [\underline{\underline{H}}_{II}^{B^*}]; \quad \{\underline{\underline{F}}_N^{B^*}\} = [\underline{\underline{N}}] [\underline{\underline{G}}_{II}^{B^*}]^{-1} [\underline{\underline{G}}_{IN}^{B^*}] \{\underline{\underline{F}}_N^B\} \quad (4.12a)$$

and

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}_{II}^{B^*} &= \underline{\underline{H}}_{II}^B - \underline{\underline{H}}_{IN}^B [\underline{\underline{H}}_{NN}^B]^{-1} \underline{\underline{H}}_{NI}^B; \\ \underline{\underline{G}}_{II}^{B^*} &= \underline{\underline{G}}_{II}^B - \underline{\underline{H}}_{IN}^B [\underline{\underline{H}}_{NN}^B]^{-1} \underline{\underline{G}}_{NI}^B; \\ \underline{\underline{G}}_{IN}^{B^*} &= \underline{\underline{G}}_{IN}^B - \underline{\underline{H}}_{IN}^B [\underline{\underline{H}}_{NN}^B]^{-1} \underline{\underline{G}}_{NI}^B \end{aligned} \quad (4.12b)$$

It should be noted that the system (4.11) is non-symmetric. But a closer look will reveal that its greatest part  $\underline{\underline{S}}_{NN}^F$  is symmetric. Only a relative small portion of (4.11) is non-symmetric. Today a relevant research topic is to develop solution procedures for systems like (4.11), which would make use of the largely developed solvers for symmetric matrices but including a small non-symmetric

portions, blocks. If a rigid body is included in the system then the non-interface nodal vector ( $N$ ) may be treated and reduced in size according to what has been previously discussed in section "Incorporation of Rigid Body Conditions in the FE Mesh".

## Concluding Remarks

In the present article a coupled FE-BE formulation to analyse steady-state viscoelastodynamics is presented. Viscoelastic effects are introduced by means of complex Lamé's constants. Eventual non-causal effects due to this assumption are addressed. A strategy for the interaction of the discretized continuum with rigid bodies is also presented. In accompanying article (Mesquita et alii, 1994) the potentialities of this formulation is used to solve dynamic soil-structure interaction problems, which include embedded foundations in inhomogeneous soil with back-fill and vibration isolation by open trenches.

## Acknowledgments

This research has been supported by FAPESP through grant 90/4142-2. This is greatly acknowledged. The authors are also very thankful to Prof. Fernando Iguti for his valuable suggestions concerning the FE formulation and implementation.

## References

- Aliabadi, M. H., Rooke, D. P., 1991, "Numerical Fracture Mechanics", Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Antes, H., 1985, "A boundary Element Procedure for Transient Wave Propagations in Two-dimensional Isotropic Elastic Media", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 313-323.
- Antes, H., 1988, "Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik", Teubner, Stuttgart.
- Antes, H., Panagiotopoulos, P. D., 1992, "The Boundary Integral Approach to Static and Dynamic Contact Problems", Birkhauser Verlag.
- Banerjee, P. K., Kobayashi, S. (eds.), 1992, "Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods", *Developments in Boundary Element Methods-7*, Elsevier Applied Science, London.
- Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Becker, A. A., 1992, "The Boundary Element Method in Engineering - A Complete Course", McGraw-Hill Book Co., London.
- Beer, G., 1983, "Finite Element, Boundary Element and Coupled Analysis of Unbounded Problems in Elastostatics", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 567-580.
- Beer, G., 1986, "Implementation of Combined Boundary Element-Finite Element Analysis with Applications in Geomechanics", In P.K. Banerjee, J.O. Watson (Eds.), *Developments in BEM*, Vol. 4, Elsevier.
- Beskos, D. E. (ed.), 1987, "Boundary Element Methods in Mechanics", Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- Bettess, P., 1992, "Infinite Elements", Penshaw Press, Sunderland, U.K.
- Brebbia, C. A., 1984, "The Boundary Element Method for Engineers", 2nd edition, Pentech Press, London.
- Brebbia, C. A. (Ed.), 1985, "Finite Element Systems - A Handbook", Springer Verlag, Berlin.
- Brebbia, C. A. (ed.), 1990, "Topics in Boundary Elements", Vol.7, Electrical Engineering Applications, Springer Verlag.

- Brebbia, C. A., Georgiou, P., 1979, "Combination of Boundary and Finite Elements in Elastostatics", *Appl. Math. Model.*, Vol. 3, pp. 212-220.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering", Springer-Verlag, Berlin.
- Christensen, R. M., 1972, "Theory of Viscoelasticity", Academic Press, New York.
- Ciskowski, R. D., Brebbia, C. A., 1991, "Boundary Element Methods in Acoustics", Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Crandall, S. H., 1970, "The Role of Damping in Vibration Theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11, pp. 3-18.
- Cruse, T. A., Rizzo, F. J., 1968a, "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 22, pp. 224-259.
- Cruse, T. A., 1968b, "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 22, pp. 341-355.
- Cruse, T. A., 1979, "Two- and Three-dimensional Problems of Fracture Mechanics", In: P.K. Banerjee, R. Butterfield (Eds.), *Developments in Boundary Elements - 1*, Applied Science Publ., London.
- Cruse, T. A., 1988, "Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics", Kluwer, Boston.
- Cruse, T. A., Rizzo, F. J. (eds.), 1975, "Boundary Integral Equation Methods - Computational Applications in Applied Mechanics", *Proc. ASME Conf. on Boundary Integral Equations*, ASME, New York.
- Dumont, N.A., 1986, "The Variational Formulation to the Boundary Element Method", in: C. A. Brebbia, W. S. Venturini (eds.): "Boundary Element Techniques - Applications in Fluid Flow and Computational Aspects", Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Eringen, A. C., Suhubi, E. S., 1975, "Elastodynamics. Volume II- Linear Theory", Academic Press, New York.
- Estorff, O., Kausel, E., 1989, "Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-structure Interaction Problems", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 1065-1075.
- Estorff, O., Prabucki, M. J., 1990, "Dynamic Response in Time Domain by Coupled Boundary and Finite Elements", *Computational Mechanics*, Vol. 6, pp. 35-46.
- Estorff, O., 1991, "Dynamic Response of Elastic Blocks by Time Domain BEM and FEM", *Computers and Structures*, Vol. 38., No. 3, pp. 289-300.
- Gaul, L., 1986, "Machine-foundation-soil Interaction: Combined Continuum and Boundary Element Approach", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol.8, No.3, pp. 169-198.
- Gaul, L., Bohlen, S., Kempfle, S., 1985, "Transient and Forced Oscillations of Systems with Constant Hysteretic Damping", *Mechanics Research Communications*, Vol. 12, pp. 187-201.
- Gaul, L., Schanz, M., Fiedler, C., 1992, "Viscoelastic Formulations of BEM in Time and Frequency Domain", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 10, pp. 137-141.
- Hadjian, A. H., Luco, J. E., Tsai, N. C., 1974, "Soil-structure Interaction: Continuum or Finite Elements?", *Nuclear Eng. and Design*, Vol. 31, pp. 151-167.
- Hughes, T. J. R., 1987, "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Jaswon, M. A., Symmm, G. T., 1977, "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", Academic Press, London.
- Karabalis, D. L., Beskos, D. E., 1985, "Dynamic Response of 3-D Flexible Foundations by Time Domain BEM and FEM", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 91-101.



Kobayashi, S., Kishima, T., 1985, "Dynamic Analysis of Non-homogeneous Ground Movements by the Boundary Integral Equation - Finite Element Hybrid Method", Proc. 5th. Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, 1-5 April, pp 135-142.

Kobayashi, S., Mori, K., 1986, "Three-dimensional Dynamic Analysis of Soil-structure Interactions by Boundary Integral Equation - Finite Element Combined Method", In Shaw, R. P. et al. (Eds.), "Innovative Numerical Methods in Engineering", pp. 613-618, Springer-Verlag, Berlin.

Kohno, K., Tsunada, T., Seto, H., Tanaka, M., 1991, "Hybrid Stress Analysis of Boundary and Finite Elements by a Super-element Method", Finite Element in Analysis and Design, Vol. 7, pp. 279-290.

Li, H. B., Han, G. M., Mang, H. A., Torzicky, P., 1986, "A New Method for the Coupling of Finite Element and Boundary Element Discretized Subdomains of Elastic Bodies", Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., Vol. 54, pp. 161-185.

Manolis, G. D., Beskos, D. E., 1988, "Boundary Element Methods in Elastodynamics", Unwin Hyman, London.

Man, K. W., Aliabadi, M. H., Rooke, D. P., 1992, "A Fully Load-incremental Contact Analysis for Cracked Structures", In: C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris (Eds.), Proc. Boundary Elements XIV, Vol. 2, Stress Analysis and Computational Aspects, CMP, Southampton, pp 277-298.

Manolis, G. D., Davis, T. G.(eds), 1993, "Boundary Element Techniques in Geomechanics", Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.

Mansur, W. J., 1983, "A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method", Ph.D. Thesis, University of Southampton.

Mesquita, E., Pontes Jr., B. R., Sousa, E. A. C., 1994, "Coupling of Finite and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics. Part II: Numerical Results - Validation and Applications", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, (submitted).

Mukherjee, S., 1982, "Boundary Element Methods in Creep and Fracture", Applied Science Publishers LTD, London.

Nashif, A. D., Jones, D. I. G., Henderson, J. P., 1985, "Vibration Damping", Wiley.

Pontes Jr., B. R., 1992, "Dynamic Interaction of the Bidimensional Structures Through the Soil: A Comparison Between a Method Semi-Analytical and the Boundary Element Method", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, UNICAMP, SP, Brazil.

Richart Jr., F. E., Hall, J. R., Woods, R. D., 1970, "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Rizzo, F. J., 1967, "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", Quartely of Applied Mathematics, Vol. 25, pp. 83-95.

Scanlan, R. H., 1970, "Linear Damping Models and Causality in Vibrations", Journal of Sound and Vibration, Vol. 13, pp.499-509.

Skergat, P., Alujevi, A., Zagar, I., Rek, Z., Hribersek, M., Delic, M., 1992, "Boundary Element Method for Fluid Dynamics", In: C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris (Eds.), Proc. Boundary Elements XIV, Vol. 1, Field Problems and Applications, CMP, Southampton, pp 73-104.

Sousa, E. A. C., 1992, "Coupling of the Finite Element and Boundary Element Methods to Treat Stationary Elastodynamics Problems", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, UNICAMP, SP, Brazil.

Spyrakos, C. C., Beskos, D. E., 1986, "Dynamic Response of Flexible Strip-foundations by Boundary and Finite Elements", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 5, No. 2, pp. 84-96.

Strang, G., Fix, G.J., 1973, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Telles, J. C. F., 1983, "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems", Lecture Notes in Engineering I, C.A. Brebbia, S.A. Orszag (eds), Springer Verlag, Berlin.

Wang, S., Schmid, G., 1992, "Dynamic Structure-soil-structure Interaction by FEM and BEM", Computational Mechanics, Vol. 9, pp. 347-357.

Wrobel, L. C., 1992, "Boundary Element Methods in Heat Transfer", CMP, Southampton.

Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W., Bettess, P., 1977, "The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 355-375.

Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W., Bettess, P., 1979, "Marriage à la Mode - The Best of Two Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)", In: R. Glowinski, E. Y. Rodin, O. C. Zienkiewicz (Eds.), "Energy Methods in FE Analysis", Wiley.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1979, "The Finite Element Method", 4th edition, Vol. 1, McGraw-Hill, London.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1991, "The Finite Element Method", 4th edition, Vol. 2, McGraw-Hill, London.

# Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part II: Numerical Results - Validations and Applications

**Euclides de Mesquita Neto**

**Bento Rodrigues de Pontes Junior**

Departamento de Mecânica Computacional  
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP  
C.P. 6122 CEP 13083-970 Campinas, SP

**Edson Antonio Capello Sousa**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia e Tecnologia - UNESP  
Campus de Bauru  
C.P. 473 CEP 17033-360 Bauru, SP

## Abstract

The article presents the numerical results of a coupled Finite Element (FE) and a Boundary Element (BE) scheme for plane strain viscoelastodynamics in the frequency domain. The methodology and the implementation are validated for bounded and unbounded domains. Applications described include the dynamic interaction of engineering structures with homogeneous and inhomogeneous soils.

**Keywords:** Finite Element, Boundary Element, Elastodynamics.

## Introduction

In a preceding article (Mesquita et alii., 1994) the formulation for a coupled Finite Element (FE) and Boundary Element (BE) scheme to model steady state (visco)elastodynamics was presented. This second part of the article will describe and validate the FE-BE implementation for bounded and unbounded domains. The validation for bounded domains is given by the frequency response function (FRF) of a simple bar. For unbounded domains the compliance matrix of a rigid bidimensional surface foundation interacting with the soil (modelled as a viscoelastic half-space) will be furnished and compared to validated results of a BE-only implementation. All non-zero elements of the compliance matrix are presented.

The applications chosen to illustrate the potentialities of the FE-BE scheme are related to dynamic soil-structure interaction (DSSI) problems. Rigid surface foundations interacting with non-homogeneous soils, embedded foundations resting on homogeneous and non-homogeneous soils as well as the soil vibration screening efficiency of open trenches will be addressed. Due to limitations in the available software the FE-domain will be discretized with linear elements whereas the BE-domain will be modelled by constant elements. All implementations are in the frequency domain (steady state response) and for the plane strain case.

## Validation

### Bounded Domains

The validation for bounded domains will be accomplished by the FRF of a viscoelastic bar clamped at one end and interacting with a rigid but massless structure at the other extremity, which in turn is excited by an axial force  $F_x$ . This arrangement which may reproduce the dynamic behaviour of a one dimensional rod (bar) with known analytical eigenfrequencies and eigenmodes (Richart et alii., 1970) is shown in Fig. 1. In this figure the superscripts (B), (F), and (R) refer to a BE-mesh or a FE-mesh or to the rigid body, respectively. The subscripts (t), (U), (R) and (I) are related to boundaries

where tractions ( $t$ ), displacements ( $U$ ) or rigid body ( $R$ ) compatibility conditions are prescribed or still to a FE-BE interface ( $I$ ). Figure 2 shows a detail of the (constant) BE and (linear) FE interface discretization. Further details may be found in Sousa (1992).

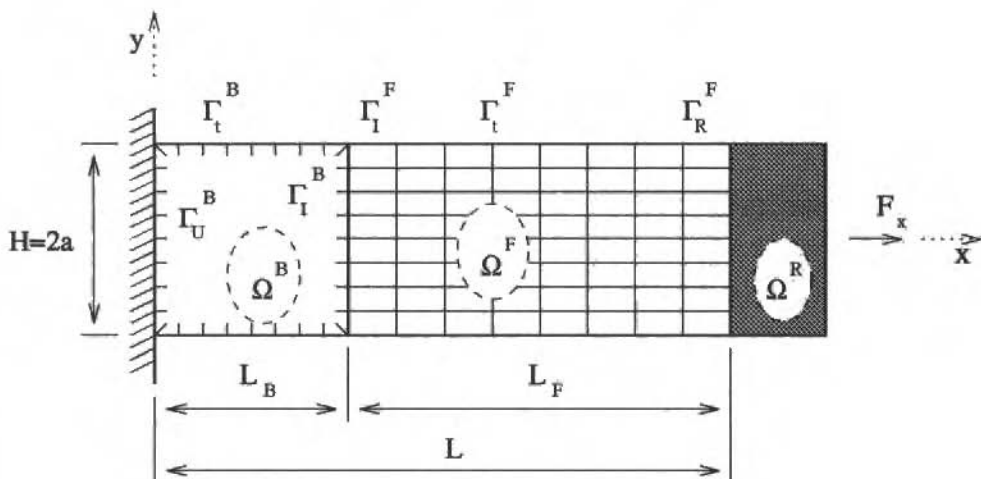


Fig. 1 Rod modelled by coupled FE and BE domains

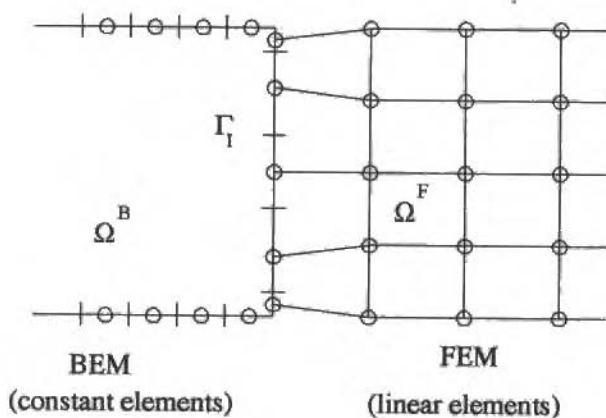


Fig. 2 Detail of the BE-FE interface discretization

Figure 3 presents the magnitude of the rod's FRF,  $U_x(A_0)$ , for a FE-only ( $L_F/L = 1.0$ ), for a BE-only ( $L_F/L = 0.0$ ) and for other three coupled discretizations ( $L_F/L = 0.77; 0.50; 0.23$ ). The dimensionless frequency  $A_0$  is defined as  $A_0 = \omega a/C_s$ , being  $\omega$  the circular frequency,  $C_s$  the shear wave velocity of the elastic continuum with the same physical properties of the bar and  $a = H/2$ . The value of the internal (material) damping coefficient is  $\eta = 0.1$ . The Poisson ratio is  $\nu = 0.25$  and shear modulus  $G = 0.1$  for all considered cases. The isolated points indicate the analytical value of the eigenfrequencies of the one dimensional elastic rod. It can be seen that there is an excellent agreement between the response of all configurations and the analytical value in the lower frequency range. For higher frequencies there is a small shift of the numerical results to the left. This is expected once material damping and numerical discretization tend to produce a stiffer continuum at higher frequencies. In this example the rod height was discretized by 5 constant BEs and 4 linear FEs. The

total number of finite (NELTF) and boundary elements (NETB) used in each configuration is given in Table 1. It is worth noticing that in Fig. 3 no wave reflection at the FE-BE interface takes place in spite of the rather coarse discretization.

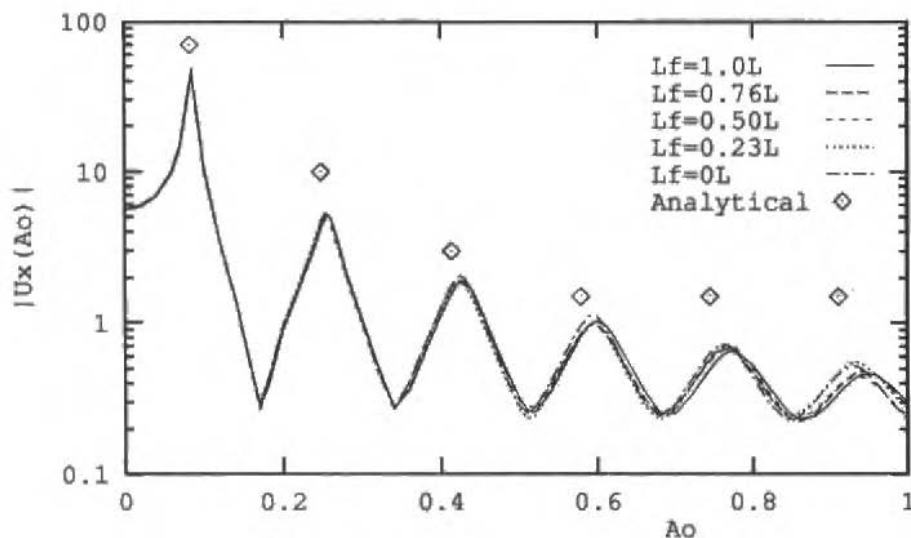


Fig. 3 Frequency response function of coupled FE-BE discretized rod. Parameters:  $L/H = 15$ ,  $G = 1.0$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.1$

Table 1 Number of elements used in each discretization

$L_p/L$	1.0	0.77	0.50	0.23	0.0
NELTF=	120	92	60	28	0
NETB=	0	24	40	56	70
NTOT=	120	116	100	84	70

Figure 4 shows a comparison of the first three eigenmodes (eigenfunctions) obtained numerically (displacements at the outer boundary) for  $L_p/L = 0.5$  with the corresponding analytical expression of the elastic rod (Richart, 1970). The analytical and the numerical functions were normalized by the maximum displacement amplitude of each mode at the corresponding eigenfrequency. It can be seen that the agreement between the coupled BE-FE scheme and the analytical results is very good. It is considered that Figs. 3 and 4 validate the present implementation for bounded domains.

### Unbounded Domains

The potentialities of a coupled FE-BE scheme can be best observed in dynamic problems containing unbounded domains like dynamic soil-structure interaction (DSSI) analysis. Figure 5 shows a rigid surface foundation interacting with the soil. The soil near-field is modelled with FEs and the far-field, including the Sommerfeld radiation condition, is described using BEs (Wolf, 1985). The coupling procedure will be validated by comparing the elements of the dynamic compliance matrix  $\underline{C}$  of a rigid and massless surface foundation bonded to the soil and obtained by a BE-only modelling of the homogeneous soil (Mesquita and Pontes, 1992), see Fig. 6. The compliance matrix  $\underline{C}$  relates the vector of external excitations acting on the foundation  $\underline{F}^R$  with its rigid body degrees of freedom (DOF)  $\underline{U}^R$ ,  $(1/\pi G) * \underline{C} \underline{F}^R = \underline{U}^R$  (Pontes, 1992).

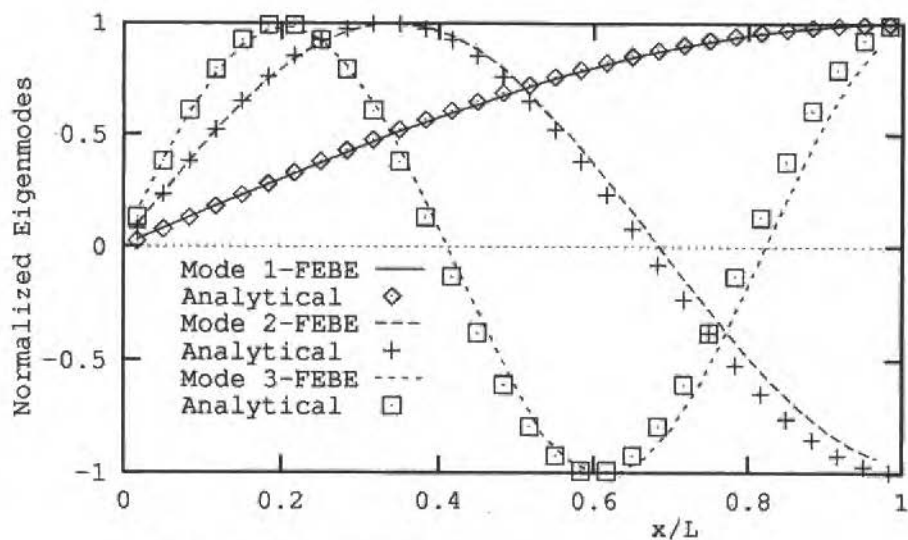


Fig. 4 First three eigenmodes (eigenfunctions) of the rod - numerical (BE - FE -  $L_F/L = 0.5$ ) and analytical results

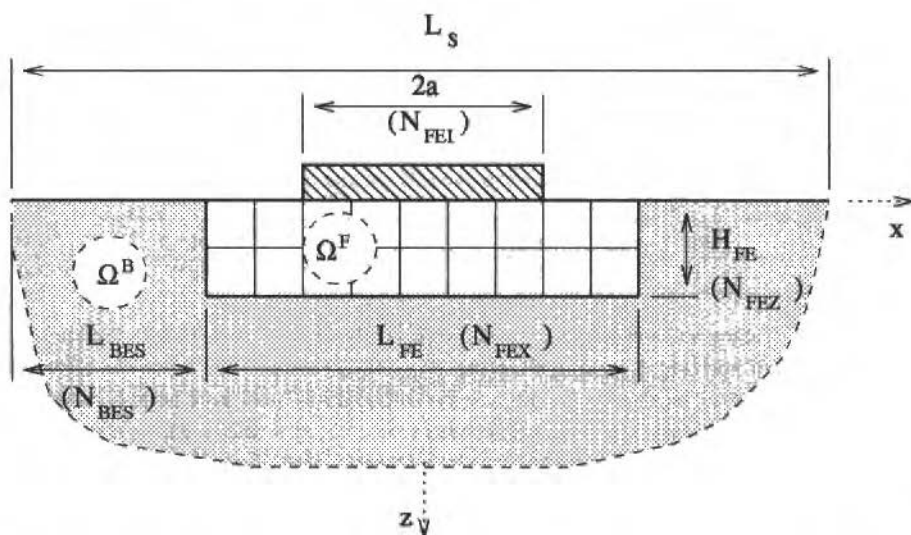


Fig. 5 Rigid foundation interacting with the soil - near field modelled by FEs and far field by BEs - definitions

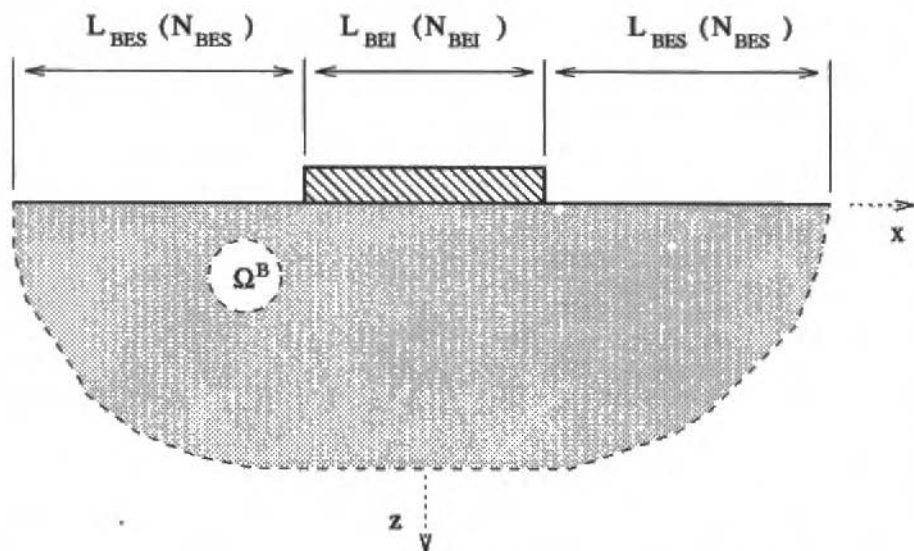


Fig. 6 Rigid foundation interacting with the soil - near and far field modelled by BEs - definitions

Table 2 Geometry and element data of Fig. 5

Case	$L_S/a$	$L_{BES}/a$	$L_{FE}/a$	$H_{FE}/a$	$N_{BES}$	$N_{FEI}$	$N_{FEX}$	$N_{FEZ}$	$N_{TOT}$
1	22	9.8	2.4	0.4	49	20	24	4	226
2	22	9.8	2.4	0.4	49	40	48	4	346

Table 3 Geometry and element data of Fig. 6

Case	$L_{BEI}/a$	$L_{BES}/a$	$N_{BEI}$	$N_{BES}$	$N_{BTOT}$
B	2	10(2x)	104	40(2x)	184

Figures 7a)-d) show real and imaginary parts, respectively, of the vertical ( $C_{WZ}$ ), horizontal ( $C_{UX}$ ), rocking ( $C_{\phi M}$ ) and horizontal-rocking-coupling ( $C_{\phi X}$ ,  $C_{UM}$ ) compliance functions of the surface foundation resting on the half-space. In this case the half-space is considered homogeneous and both FE- and BE-domains present the same properties ( $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.20$ ). Three set of results are plotted in Fig. 7. Two set of results were obtained using two different FE-meshes for the near field. The mesh geometry ( $L$ ,  $H$ ) and the number of elements ( $N$ ) for these two cases (1, 2) may be found correlating definitions of Fig. 5 with data in Table 2. The other set of results was obtained using a BE-only (B) implementation, which has already been validated by Pontes (1992). The geometry and number of elements of the BE-only mesh may be found relating Fig. 6 with Table 3. In the legend of these figures the real and imaginary parts of each case are designated respectively by R and I. So the curve  $C_{WZ}R1$  is the real part (R) of the compliance function  $C_{WZ}$  determined with the first (1) FE-BE mesh. Analogously,  $C_{\phi M}IB$  is the imaginary part (I) of the function  $C_{\phi M}$  obtained with the BE-only (B) mesh. There is a very good agreement between the results of the two methodologies. It is considered that this complete set of surface foundation compliance functions validates the present FE-BE implementation for unbounded domains.



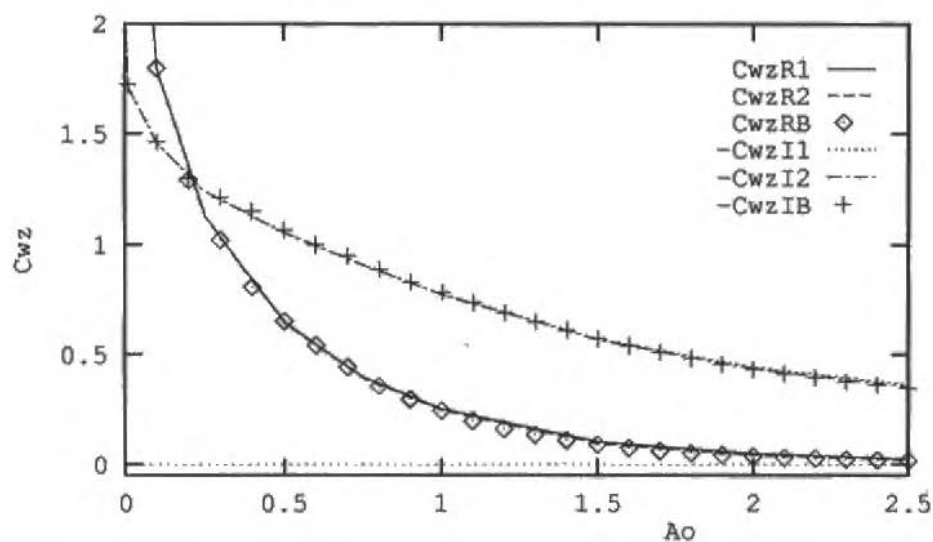


Fig. 7 Elements of the dynamic compliance matrix for a rigid and massless surface foundation bonded at the soil surface - a) Vertical compliance function  $C_{wz}$

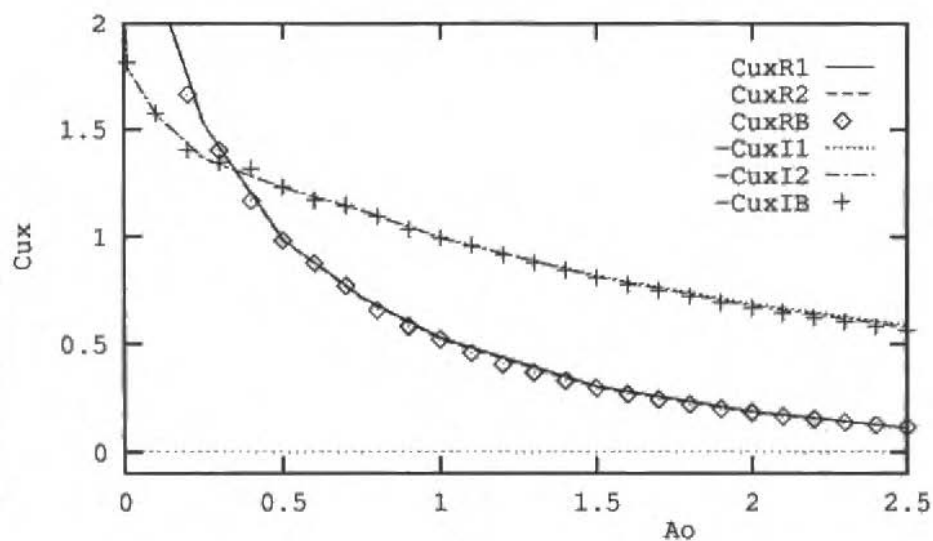
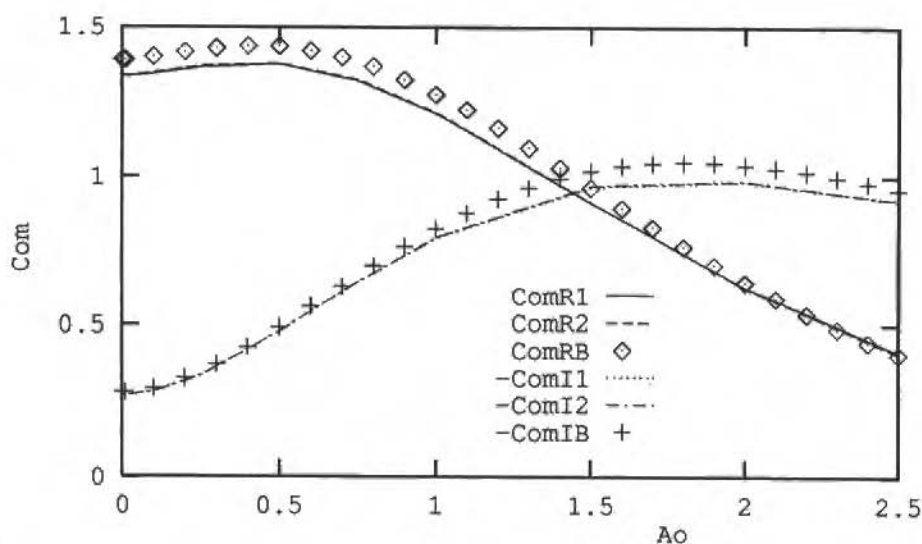
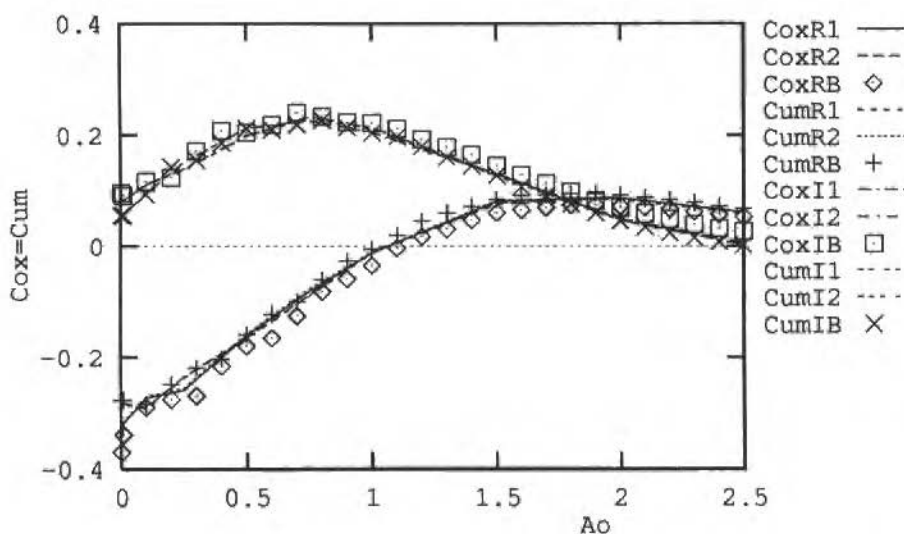


Fig. 7 b) Horizontal compliance function  $C_{ux}$

Fig. 7 c) Rocking compliance function  $C_{\phi M}$ Fig. 7 d) Horizontal-rocking compliance function  $C_{\phi X} = C_{UM}$ 

## Applications

This section explores some of the potential applications of the coupled FE-BE scheme. The enormous versatility of this methodology to treat dynamic soil-structure interaction problems will become apparent.

## Surface Foundation on Inhomogeneous Soil

Frequently the soil near the foundation, which has been excavated and filled back presents properties which are distinct from those of the original geological formation. The effect of this "backfill" can be easily investigated by changing the properties of the continuum discretized by the FE. The influence of such an inhomogeneity on the vertical compliance function of a surface foundation can be seen in Fig. 8. The same mesh arrangement of case 2, shown in Fig. 5, was used. The ratio  $\lambda = C_{SFE}/C_{SBE}$  of the shear wave velocity of the near field modelled by FEs ( $C_{SFE}$ ) and of the far field modelled by BEs ( $C_{SBE}$ ) assumes the following values:  $\lambda = 1.0; 0.75; 0.50$ . It can be seen that the backfill inhomogeneity strongly affects both, real and imaginary parts of the compliance function  $C_{WZ}$ , changing thus the foundation dynamic behaviour. Other inhomogeneities present in the soil like inclusions or other buried structures could be easily included in the analysis by assigning to the FE mesh their physical properties.

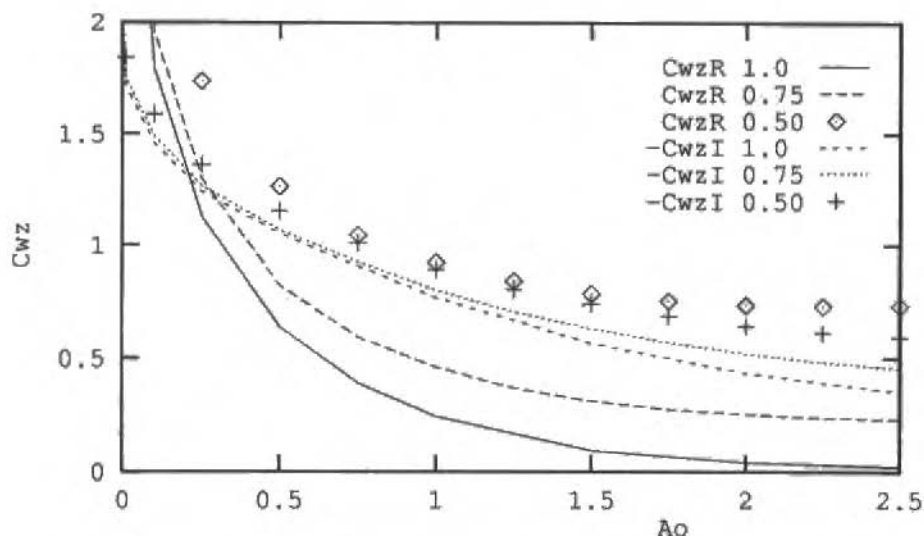


Fig. 8 Vertical compliance function  $C_{WZ}$  of a surface foundation over inhomogeneous soil back-fill

## Embedded Foundations: Homogeneous Soil

Embedment of rigid or flexible foundations like the arrangement shown in Fig. 9 can be immediately incorporated and analysed in the proposed coupled FE-BE scheme. Figure 11a)-d) shows the elements of the dynamic compliance matrix  $C$  of a rigid and massless foundation embedded in an homogeneous soil ( $C_{SFE}/C_{SBE} = 1.0$ ) modelled as a half-space. Two different FE-BE meshes were implemented and the results compared to a BE-only implementation. The geometry ( $L, H$ ) and the number of elements ( $N$ ) of the FE-BE meshes may be obtained correlating Fig. 9 and the corresponding data given in Table 4. For the case of the BE-only implementation Fig. 10 and Table 5 furnish the necessary information.

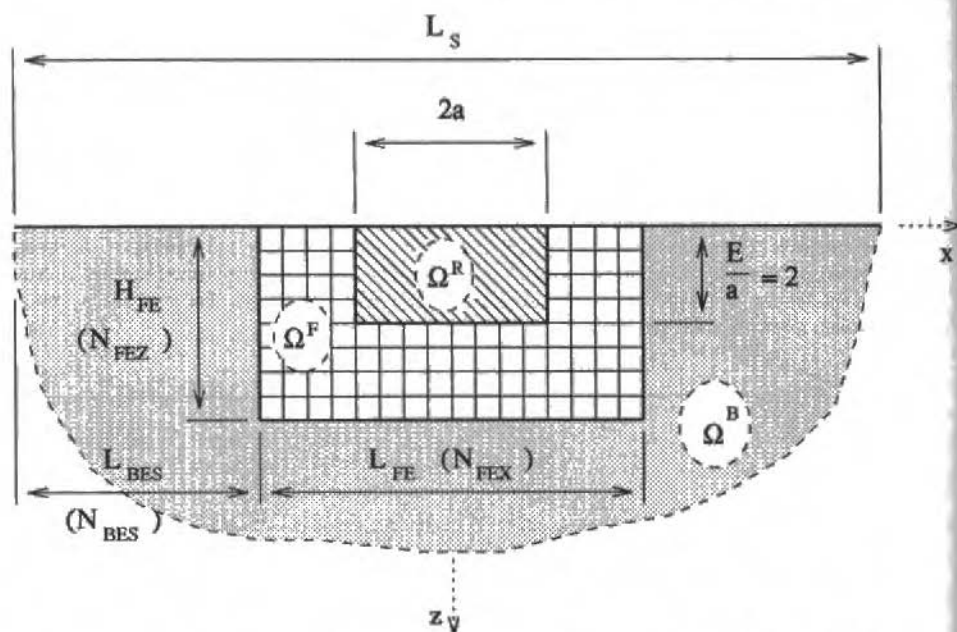


Fig. 9 Embedded rigid foundation - soil near field modelled by FEs and far field by BEs - definitions

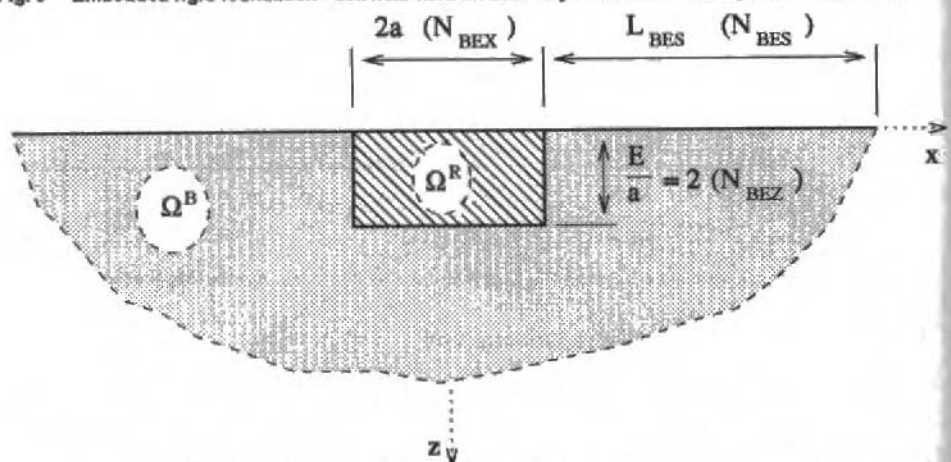


Fig. 10 Embedded rigid foundation - soil near field and far field modelled by BEs - definitions

Table 4 Data for the FE-BE mesh given in Fig. 9

Case	$L_s/a$	$L_{BES}/a$	$L_{FE}/a$	$H_{FE}/a$	$N_{BES}$	$N_{FEX}$	$N_{FEZ}$
1	22	9	4	3	36	16	12
2	22	9.5	3	2.5	38	24	20

Table 5 Data for the BE-only mesh given in Fig. 10

$L_{BES}/a$	$E/a$	$N_{BEX}$	$N_{BEZ}$	$N_{BES}$
10	2	32	32	40

Figure 11a-d) furnishes the compliance functions for a rigid embedded foundation. To assess the effect of the foundation flexibility it would only be necessary to change the properties of the FE mesh in the region where the flexible foundation is posed. Another possibility offered by the arrangement in Fig. 9 is to include soil inhomogeneity due to backfill. This will be treated next.

### Embedded Foundation: Inhomogeneous Soil

The effect of an inhomogeneity due to excavation backfill on the elements of the compliance matrix of an embedded foundation (shown in Fig. 9) can be seen in Fig. 12a-d). Like in the case of a surface foundation the soil backfill properties are related to the properties of the original geological formation by the ratio  $\lambda = C_{SFE}/C_{SFE}$ , which assumes the following values:  $\lambda = 1.0; 0.75; 0.50$ . These  $\lambda$ -values are referred in the legends of Fig. 12 as cases 1, 2 and 3, respectively. The data of the BE-only implementation ( $\lambda = 1.0$ ) already given in Fig. 11 are also plotted for comparison purposes. Table 6 furnishes the remaining data pertaining Fig. 12. It can be noticed that the soil backfill has an enormous influence on all elements of the compliance matrix. This fact is very important since excavation with later fill-in is current practice in foundation engineering. Figure 12 indicates that the dynamic behaviour of a foundation cannot be properly predicted without considering the soil inhomogeneities introduced by excavation and later refilling. To the best of the authors' knowledge such an analysis of an embedded foundation with soil inhomogeneity by a coupled FE-BE scheme has not been previously published. In principle it would be possible to model these inhomogeneous soils with BE-only formulations but this would require the introduction of subdomains and substructuring techniques (Ahmad, 1988, Israil, 1989). For the coupled FE-BE arrangement it would be easily possible to set different material properties for each finite element, describing thus a (almost) continuous variation of the soil properties.

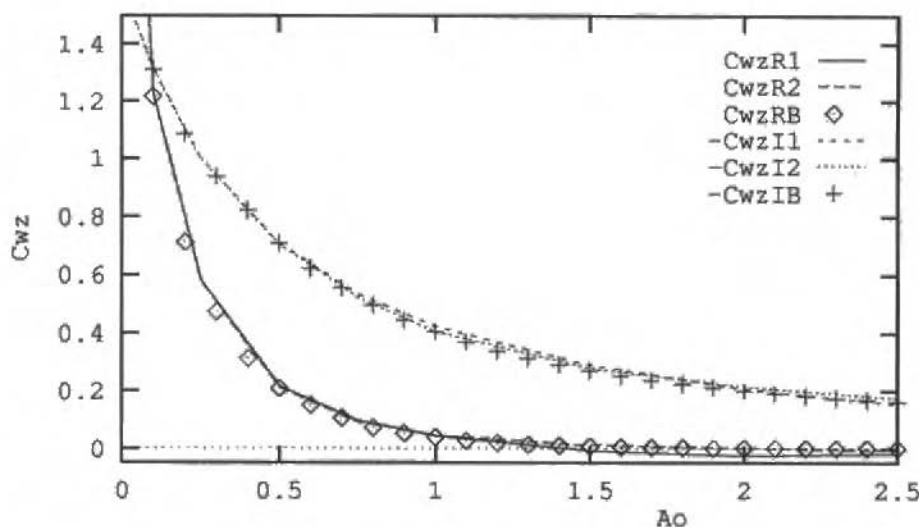
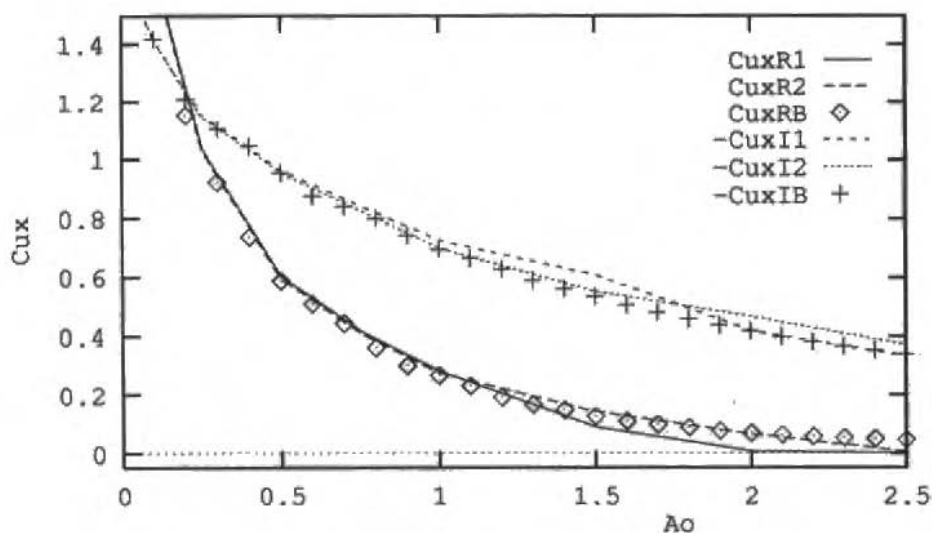
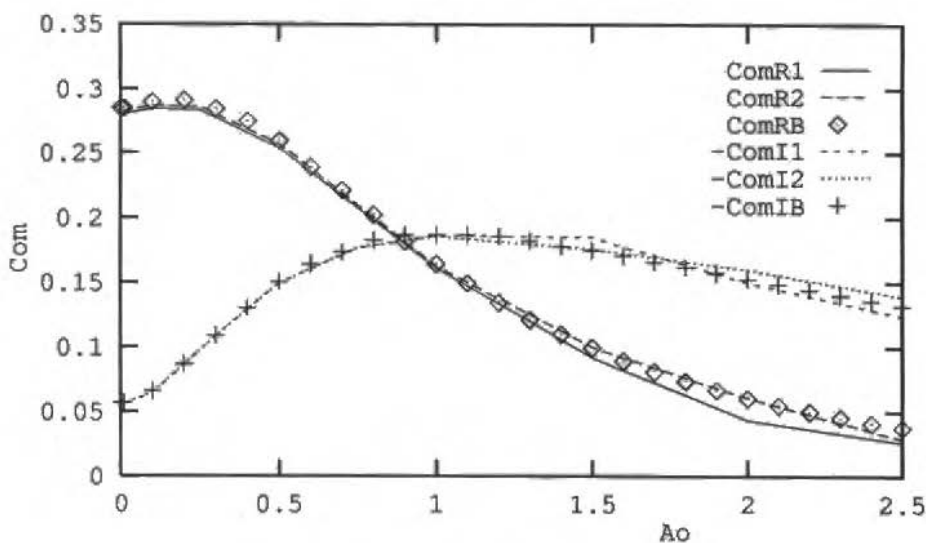


Fig. 11 Compliance functions of rigid embedded foundation on homogeneous soil - parameter:  $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.20$  - a) Vertical compliance function  $C_{wz}$

Fig. 11 b) Horizontal compliance function  $C_{UX}$ Fig. 11 c) Rocking compliance function  $C_{\phi M}$

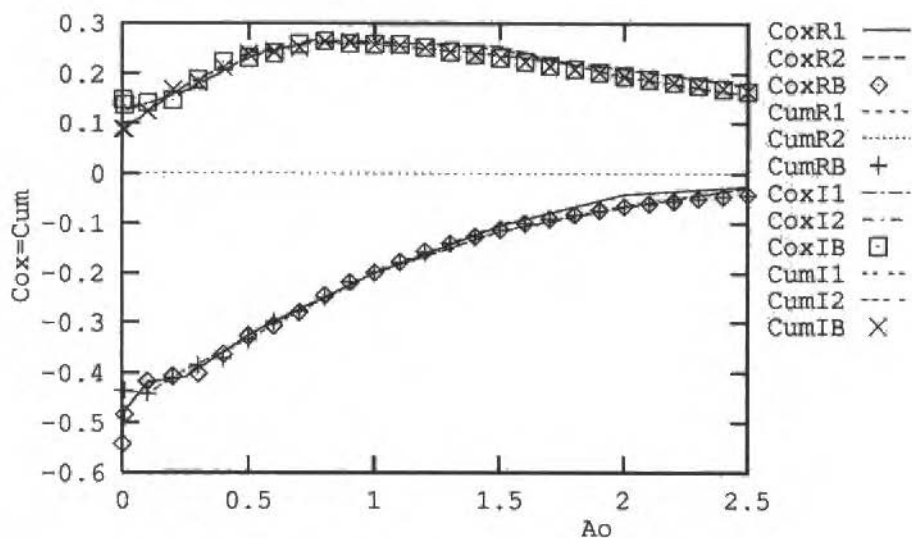


Fig. 11 d) Horizontal-rocking compliance function  $C_{\phi X} = C_{UM}$

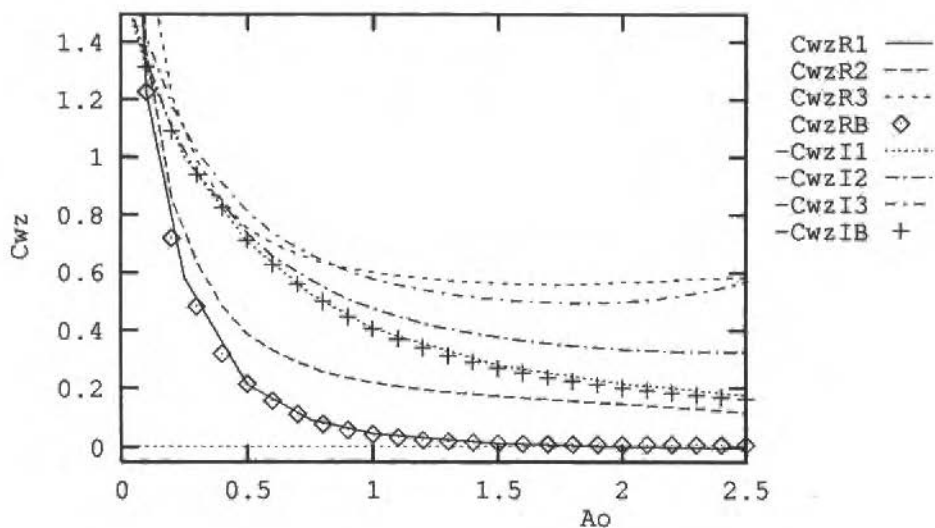
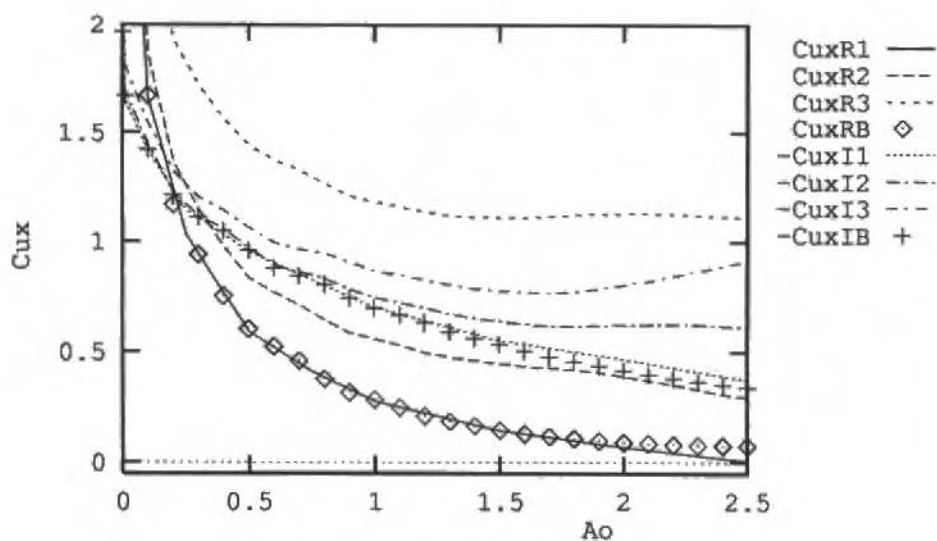
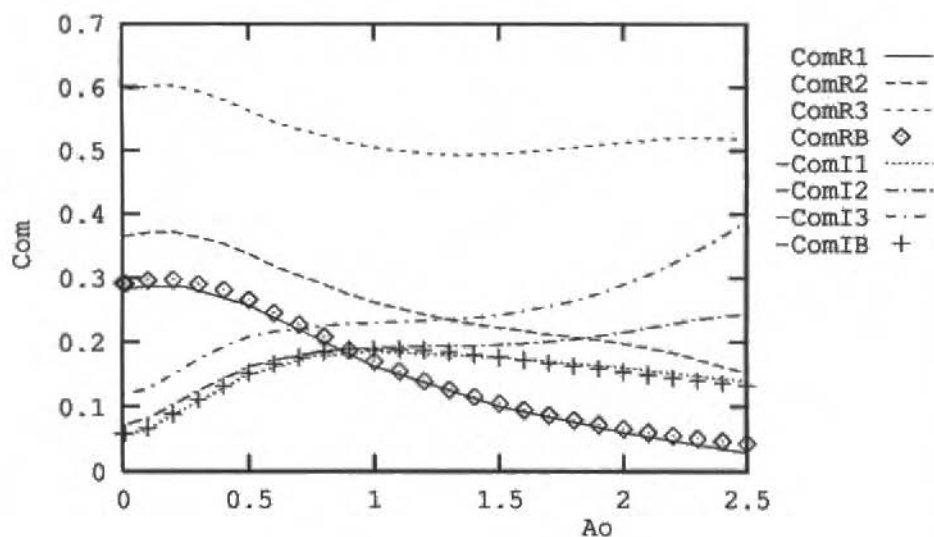


Fig. 12 Compliance functions of rigid embedded foundation on inhomogeneous soil - parameter:  $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.20$  - a) Vertical compliance function  $C_{WZ}$



Fig. 12 b) Horizontal compliance function  $C_{UX}$ Fig. 12 c) Rocking compliance function  $C_{\phi M}$

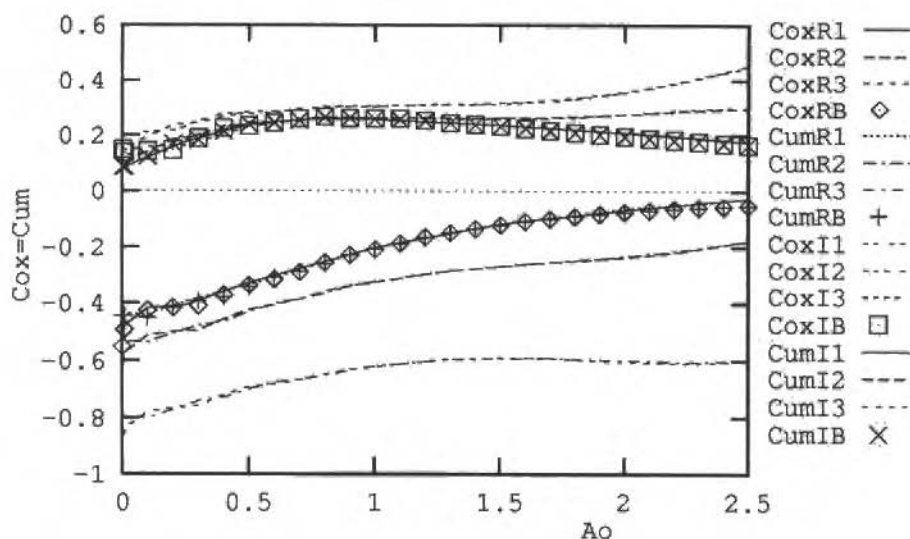
Fig. 12 d) Horizontal-rocking compliance function  $C_{\phi X} = C_{UM}$ 

Table 6 Data for the FE-BE mesh given in Figs. 9 and 12

Case	$\lambda$	$L_g/a$	$L_{BES}/a$	$L_{FE}/a$	$H_{FE}/a$	$N_{BES}$	$N_{FEX}$	$N_{FEZ}$
1	1.0	22	9.5	3	2.5	38	24	20
2	0.75	22	9.5	3	2.5	38	24	20
3	0.50	22	9.5	3	2.5	38	24	20

Table 7 Data for the BE-only mesh given in Figs. 10 and 12

$L_{BES}/a$	$E/a$	$N_{BEX}$	$N_{BEZ}$	$N_{BES}$
10	2	16	16	40

### Vibration Isolation with Trenches

As the last application example of the coupled FE-BE scheme consider the soil vibration isolation by means of trenches. An arrangement consisting of a rigid foundation, a near field modelled by FEs and a far field modelled by BEs is shown in Fig. 13. The trench itself is within the FE mesh. By changing the properties of the FEs in the trench region (modulus of elasticity  $G_t$  and density  $\rho_t$ ) it is possible to simulate an open trench ( $G_t \Rightarrow 0$ ,  $\rho_t \Rightarrow 0$ ), a rigid trench ( $G_t \Rightarrow \infty$ ,  $\rho_t \Rightarrow \infty$ ) or a flexible one ( $0 < G_t < \infty$ ,  $0 < \rho_t < \infty$ ).

To validate the present implementation the vertical ( $W_Z$ ) and horizontal ( $U_Z$ ) components of the displacement field at the soil surface for the FE-BE scheme (FEBE) of Fig. 13 and for a BE-only (BE) implementation are given in Fig. 14a)-b). In the legend, R and I mean real and imaginary parts, respectively. The results were obtained, exemplary, for the following set of parameters:  $A_0 = 1.0$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.20$ . Mesh geometry and element data may be found in Table 8. The abscissa is given by a dimensionless distance  $\xi = x/a$ .

The foundation position is rather evident while the trench position is marked by two vertical lines. The system is excited by a unit vertical force acting of the geometric center of the rigid and massless foundation. It can be seen that vertical and horizontal displacement components of both schemes are almost identical. It should also be noticed that due to symmetry in the system configuration the horizontal foundation displacement due to an vertical external force is zero.

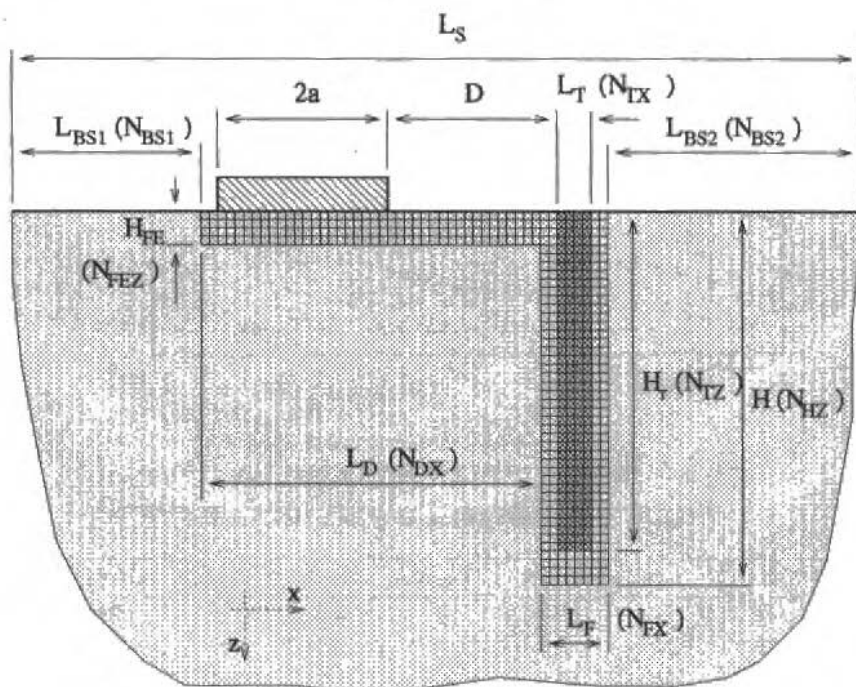


Fig. 13 Rigid foundation, (in)homogeneous soil and trench

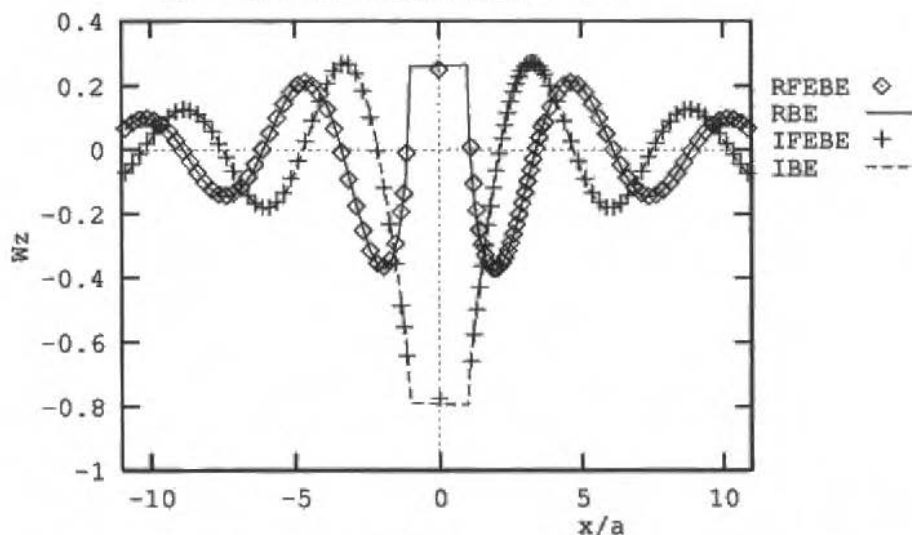


Fig. 14 Soil surface displacement field due to a vertically excited rigid foundation - FE-BE and BE-only schemes - a) Vertical component  $W_z(x/a)$

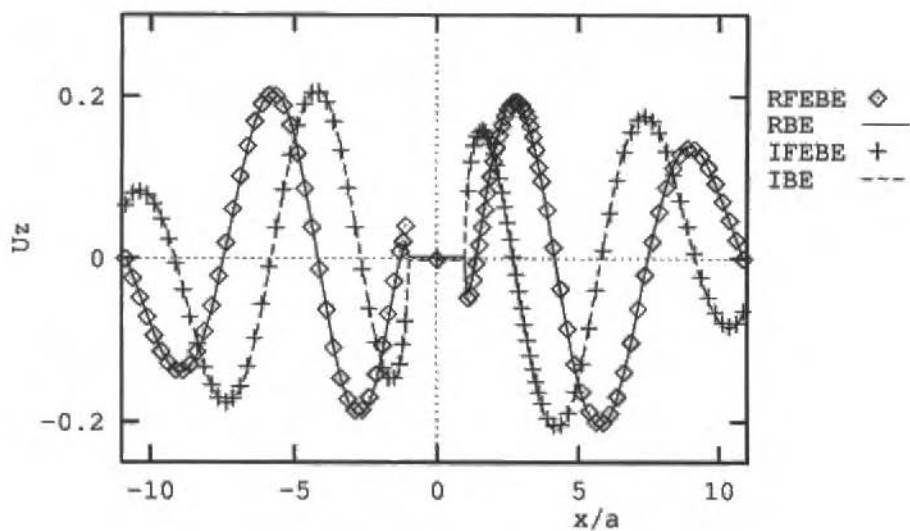
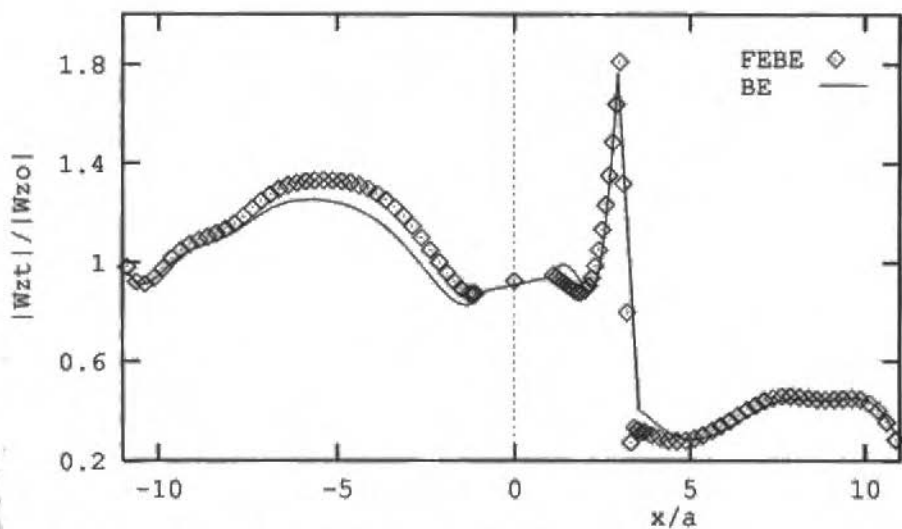
Fig. 14 b) Horizontal component  $U_z(x/a)$ 

Fig. 15 Soil vibration amplitude reduction due to an open trench - a) Vertical component

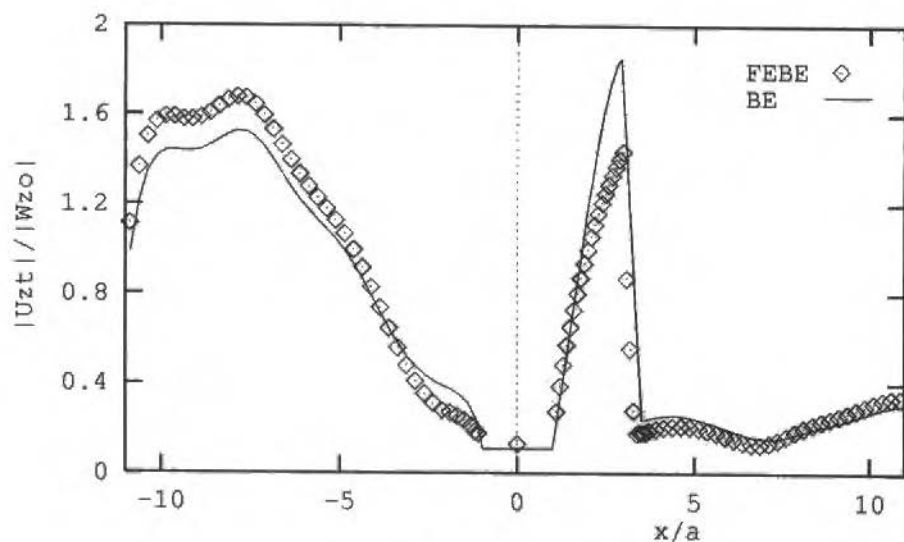


Fig. 15 b) Horizontal component

Table 8 Data for the FE-BE mesh given in Fig. 13

$L_s/a$	$L_{SB1}/a$	$L_{SB2}/a$	$L_d/a$	$L_f/a$	$H/a$	$H_{FE}$	$d/a$	$L_T/a$	$H_T/a$
22	9.8	7.4	4	0.8	4.4	0.4	2	0.4	4
$N_{SB1}$	$N_{SB2}$	$N_{DX}$	$N_{FX}$	$N_{HZ}$	$N_{FEZ}$	$N_{TX}$	$N_{TZ}$		
40	30	40	8	44	4	4	40		

A measure of the trench vibration isolation, screening efficiency, is given by the reduction of the soil vibration amplitude due to the presence of the trench. Figures 15a and 15b show the vertical ( $W_{ZT}$ ) and horizontal ( $U_{ZT}$ ) components of the displacement field in the presence of an open trench ( $G_t \Rightarrow 0$ ,  $\rho_t \Rightarrow 0$ ). The results are normalized by the vertical component of the field without the trench ( $W_{ZO}$ ). A comparable set of results were obtained by Beskos (1986), Ahmad (1991) and Pontes (1993). The screening effect is very noticeable at the soil surface right to the trench. It can be seen that the price to be paid for this isolation effect is an increase in the soil vibration amplitude at the left side of the trench.

In the present article the screening effect is restricted to the efficiency of an open trench. But with the proposed scheme it is possible to investigate the influence of a series of parameters. For instance the influence of the trench's elastic, inertia and dissipative properties on the screening efficiency may be parametrically studied in a rather direct manner. Also soil non-homogeneities due to excavation and backfill may be easily addressed. Further studies of this matter are presently being conducted and will be published in a near future.

## Concluding Remarks

A coupled FE-BE methodology to describe the dynamic behaviour of bidimensional (plane strain) viscoelastic continuum in the frequency domain was implemented and validated. Both, bounded and unbounded domains were considered. The article showed that a FE-BE scheme is a very efficient tool to model the dynamic interaction of surface and embedded engineering structures with homogeneous and inhomogeneous soils.

## Acknowledgments

This research has been supported by FAPESP through grant 90/4142-2. This is gratefully acknowledged. The authors are also very thankful to Prof. Fernando Iguti for his valuable suggestions concerning the FE formulation and implementation.

## References

- Ahmad, S. and Banerjee, P. K., 1988, "Multi-Domain BEM for Two-Dimensional Problems of Elastodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 891-911.
- Ahmad, S. and Hussaini, T. M., 1991, "Simplified Design for Vibration Screening by Open and In-Filled Trenches", *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 117, no. 1, pp. 67-88.
- Beskos, D. E. and Dasgupta, 1986, "Vibration Isolation using Open or Filled Trenches - Part I: 2D Homogeneous Soil", *Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 43-63.
- Israil, A. S. M. and Ahmad, S., 1989, "Dynamic Vertical Compliance of Strip Foundations in Layered Soils", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 933-950.
- Mesquita, E. and Pontes Jr., B. R., 1992, "Complete Compliance Matrices for the Dynamic Foundation-Soil-Foundation Interaction: a Critical Review of the BEM Potentialities". *Proc. 14 BEM (International Conference on Boundary Element Methods)*, Vol. 2, pp. 193-205, Seville, Spain.
- Mesquita, E., Pontes Jr. and B. R., Sousa, E. A. C., 1994, "Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics. Part I: Formulation", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas* (submitted).
- Pontes Jr., B. R., 1992, "Dynamic Interaction of the Bidimensional Structures Through the Soil: A Comparison Between a Method Semi-Analytical and the Boundary Element Method", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, UNICAMP, SP, Brazil.
- Pontes Jr., B. R. and Mesquita, E., 1993, "Boundary Element Analysis of Ground Transmitted Vibrations between Structures and Their Isolation by Means of Trenches", *Memorias XXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, Vol. 1, pp. 181-192, Montevideo, Uruguay.
- Richart, F. E., Hall, J. R. and Woods, R. D., 1970, "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Sousa, E. A. C., 1992, "Coupling of the Finite Element and Boundary Element Methods to Treat Stationary Elastodynamics Problems", (in Portuguese), M.Sc. Thesis, UNICAMP, SP, Brazil.
- Wolf, J. P., 1985, "Dynamic Soil-Structure Interaction" Prentice-Hall, New Jersey.

# Escoamento Anular de Dois Fluidos Imiscíveis em Tubos Retos

## *Annular Flow of Two Immiscible Liquids in Straight Ducts*

**Márcio Ziviani**

Departamento de Engenharia Mecânica - UFMG  
Av. Antônio Carlos, 6627  
31270-901 - Belo Horizonte, MG

**Angela Ourívio Nieckele**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-RIO  
Rua Marques de São Vicente, 225  
21459-000 - Rio de Janeiro, RJ

**Antônio MacDowell de Figueiredo**

Programa de Engenharia Mecânica - COPPE - UFRJ  
Cidade Universitária - Ilha do Fundão  
Caixa Postal 68503 - 21945-000 - Rio de Janeiro, RJ

### **Abstract**

This paper shows a study on the hydrodynamic development of a laminar flow of two immiscible fluids in circular cylindrical tubes, assuming that thermodynamic and transport properties of fluids are constant. The model considers that the interfaces stream happens without penalty of its form, that is, it is supposed that the intersections of the interface with transverse planes always yield concentric circles along the axis of symmetry of the tube. This model is applied to the analysis of two fluid mixtures, oil (nucleus)/water (film) and water (nucleus)/kerosene (film). The main purpose of this work is to analyse the region of the hydrodynamic development of the flow, and evaluate the profile of the axial velocity, the pressure lost and the position of the interface along the tube.

**Keywords:** Annular Flow, Immiscible Liquids Flow, Straight Ducts, Hydrodynamic Development Region

### **Resumo**

Neste trabalho, estuda-se o desenvolvimento do escoamento laminar anular de dois líquidos imiscíveis, no interior de segmentos retos de tubos, supondo constantes as propriedades termodinâmicas e de transporte de ambos os líquidos. No delineamento do modelo, considera-se que o movimento da interface ocorre sem prejuízo de sua forma, ou seja, é suposto que a interseção da superfície interfacial com o plano transversal da seção origina sempre círculos centrados no eixo de simetria da tubulação. Para efeito de análise do modelo estabelecido, dá-se ênfase a duas misturas óleo (núcleo)/água (filme) e água (núcleo)/querosene (filme). O objetivo principal deste trabalho é analisar a região de desenvolvimento hidrodinâmico do escoamento, e determinar os perfis de velocidade axial, a perda de carga e a posição da interface ao longo da tubulação.

**Palavras-chave:** Escoamento Anular, Escoamento de Líquidos Imiscíveis, Tubos Retos, Região de Desenvolvimento

### **Introdução**

O escoamento simultâneo de fluidos imiscíveis é encontrado em diversos sistemas e equipamentos industriais. Em caldeiras, evaporadores e condensadores, os fluidos são fases distintas de uma mesma substância. Em trocadores de calor por contato direto e em tubulações, tais como oleodutos, os fluidos são fases distintas (líquido e gás) ou iguais (líquido e líquido) de substâncias diferentes.

O conhecimento das condições dinâmicas desse tipo de escoamento, tais como velocidades dos fluidos e espessura do filme, é de fundamental importância para uma série de aplicações. Por exemplo: Gould, Tek e Katz (1974) salientam a sua relevância para o projeto e operação de instalações produtoras e armazenadoras de óleo. Nos processos em que ocorre transferência de calor, o colapso da película ou a redução acentuada de sua espessura podem ocasionar superaquecimento da parede ou outros efeitos indesejáveis. Oams et al. (1984) enfatizam a importância do escoamento pelicular de um fluido pouco viscoso no bombeamento de óleos muito viscosos, evitando-se o aquecimento deste.

Nogueira (1988) e Leib, Fink e Hasson (1977) referem-se à utilização de um filme de querosene no bombeamento de água, com a finalidade de se evitar problemas de incrustações e de corrosão na parede do tubo.

Escoamentos de fluidos imiscíveis em canais ou tubos tendem a se estratificar devido à diferença de densidades. Porém, Everage (1973) analisou o escoamento estratificado em tubos e concluiu que do ponto de vista energético, a configuração de escoamento anular é preferencial quando o fluido de menor viscosidade ocupa as regiões próximas às paredes.

Neste trabalho, considera-se como primeira aproximação ao escoamento real, correntes concêntricas. De acordo com Oams et al. (1984), que analisou o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de óleo/água, sendo o óleo o fluido interno, este tipo de escoamento pode ser obtido, pois variações de pressão na camada de água exerce uma força no fluido externo na direção vertical, a qual contrabalança o empuxo no fluido interno, possibilitando uma configuração anular estacionária.

Para o escoamento anular de dois fluidos imiscíveis, a literatura pesquisada trata somente da região onde o escoamento é plenamente desenvolvido. Os resultados obtidos não são válidos para aplicações onde os comprimentos dos segmentos retos não são suficientemente longos para o pleno desenvolvimento do escoamento.

Uma outra característica dos trabalhos encontrados na literatura é uma maior concentração de trabalhos sobre escoamento gás-líquido do que o escoamento líquido-líquido. Esta última situação, segundo Hasson, Orel e Fink (1974), não pode ser tratada como um caso particular da primeira, pois a interface apresenta comportamento bem distinto quando a massa específica do núcleo é desprezível comparada àquela do fluido do filme.

O desenvolvimento do campo de velocidades a partir de uma forma circular da interface e a perda de carga ao longo da tubulação são obtidos numericamente, neste trabalho, pelo "Método de Volumes Finitos", conforme descrito por Patankar (1980).

## Modelo Descritivo

A configuração geométrica do sistema está representada na Fig. 1, onde o tubo tem seção circular de diâmetro  $d$ . No sistema de coordenadas adotado,  $r$ ,  $\theta$  e  $z$  representam, respectivamente, as direções radial, angular e axial.

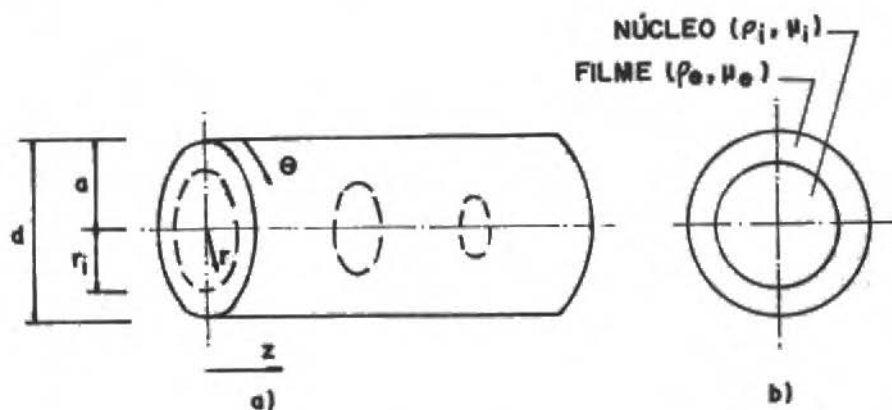


Fig. 1 Esquema ilustrativo do sistema de coordenadas utilizado

Como se sabe, o escoamento de um fluido tem um caráter elíptico, ou seja, ocorrências em qualquer ponto do campo de escoamento podem influenciar o comportamento em qualquer outro ponto. A propagação desta influência se faz, principalmente, por difusão e por meio de ondas de



pressão. Numa situação em que estes dois últimos mecanismos podem ser desprezados em relação ao primeiro, ainda que apenas numa dada direção, diz-se que o escoamento assume um caráter parabólico nessa direção (Almeida, 1989, Patankar e Spalding, 1972a e Raithby e Shneider, 1979).

Na região de desenvolvimento de um escoamento no interior de um tubo, segundo Patankar e Spalding (1972b), pode-se identificar a existência de uma direção preferencial, denominada, então, direção principal ou parabólica, ao longo da qual os efeitos difusivos são desprezíveis, se comparados aos efeitos convectivos,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Pode-se supor, portanto, que, nesse tipo de escoamento, as informações são transmitidas, de montante para jusante por convecção. Supõe-se, ainda segundo Patankar e Spalding (1972b), que a pressão  $p$  seja expressa em termos de um valor médio,  $\bar{p}$ , na seção transversal, ao qual se superpõe uma flutuação  $p^{**}$ , ou seja,

$$p(r, \theta, z) = \bar{p}(z) + p^{**}(r, \theta, z) \quad (2)$$

onde  $z$  é a coordenada axial, coincidente com a direção principal do escoamento, e  $r$  e  $\theta$  representam, respectivamente, as direções radial e angular, no plano da seção. Uma segunda suposição é, então, introduzida, qual seja, a flutuação da pressão tende a ser independente da posição axial, ou seja,

$$\frac{\partial p^{**}}{\partial z} \ll \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (3)$$

As equações de conservação resultantes são do tipo "camada limite" e a solução do sistema de equações representativo desse tipo de escoamento pode ser obtida numericamente, marchando-se ao longo da direção parabólica, uma vez que as propriedades de uma determinada seção do tubo independem das propriedades das seções à jusante,

$$p^* = p^{**} + \rho g r \sin \theta \quad (4)$$

Identificando-se a existência de simetria do escoamento na direção angular, tem-se que o componente angular da velocidade,  $u$ , e os termos de variação angular são nulos. Por conveniência, pode-se definir uma pressão modificada, a qual inclui os efeitos gravitacionais.

Supondo-se, então, a validade das hipóteses introduzidas e considerando-se, ainda, a situação de regime permanente, as propriedades físicas de valores constantes e a pressão modificada, as equações da continuidade e de quantidade de movimento, em coordenadas cilíndricas, assumem as seguintes formas adimensionais:

*equação da continuidade*

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho^* R V) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho^* W) = 0 \quad (5)$$

*equações de conservação da quantidade de movimento*

*direção axial (z)*

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho^* R V W) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho^* W W) = -\frac{d\bar{P}}{dZ} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \mu^* \frac{\partial W}{\partial R} \right) \quad (6)$$

*direção radial (r)*

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho^* R V V) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho^* V W) = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \mu^* \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \frac{\mu^* V}{R^2} \quad (7)$$

Nestas equações, as variáveis adimensionais introduzidas foram definidas como

$$R = \frac{r}{d}; \quad z = \frac{z}{\rho Re_{in}}; \quad \delta = \frac{r_i}{d}; \quad (8)$$

$$W = \frac{w}{w_{in}}; \quad V = \frac{\rho_i v d}{\mu_i}; \quad (9)$$

$$\bar{P} = \frac{p}{\rho_i w_{in}^2}; \quad P = \frac{p^* d^2 \rho_i}{\mu_i^2}; \quad (10)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_i}; \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_i}; \quad Re_{in} = \frac{\rho_i \bar{w}_{in} d}{\mu_i} \quad (11)$$

Os valores dos parâmetros adimensionais  $\rho^*$  e  $\mu^*$ , representativos da massa específica e da viscosidade dinâmica, respectivamente, são funções da região ocupada por cada fluido, ou seja, dependem da posição da interface,  $\delta$ . Logo:

$$\text{para } 0 \leq R < \delta; \quad \rho^* = 1, \quad \mu^* = 1;$$

$$\text{e para } \delta < R \leq 0,5; \quad \rho^* = \hat{\rho} = \frac{\rho_f}{\rho_i}, \quad \mu^* = \hat{\mu} = \frac{\mu_f}{\mu_i} \quad (12)$$

O campo de velocidade pode ser obtido resolvendo-se as equações acima para cada fluido, impondo-se uma condição inicial na entrada do duto, condição de não deslizamento nas paredes, e equações de compatibilidade na interface entre os dois fluidos.

As condições inicial e de contorno do problema são descritas abaixo.

Na entrada do tubo ( $Z = 0$ ;  $0 < R < 0,5$ ), adotou-se como condição inicial um perfil de velocidade axial uniforme e velocidade radial nula, logo:

$$W = 1, \quad V = 0 \quad (13)$$

Nas paredes do tubo ( $Z \geq 0$ ;  $R = 0,5$ ), considerando-se duas condições de contorno: não deslizamento entre o líquido externo e o contorno sólido, e impermeabilidade, tem-se,

$$W = 0, \quad V = 0 \quad (14)$$

No eixo do tubo, ( $R = 0$ ;  $Z \geq 0$ ), supõe-se simetria radial no campo de escoamento e a inexistência de fluxo mássico radial. Desta forma:

$$V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial R} = 0 \quad (15)$$

Finalmente, considera-se na interface, superfície de contato entre os dois fluidos ( $Z \geq 0$ ;  $R = \delta$ ), continuidade da velocidade e tensão cisalhante, ou seja,

$$W_i = W_f, \quad V_i = V_f \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial R} \right|_i = \mu^* \left. \frac{\partial W}{\partial R} \right|_f, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_i = \mu^* \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_f \quad (17)$$

Note-se que o gradiente de pressão axial  $dP/dZ$  e a posição da interface  $\delta$ , entre as fases, são desconhecidos. Para completar o conjunto de equações são necessárias as equações de conservação de massa global (duas fases) e de uma das fases, como sugerido por Issa (1988).

A vazão mássica total  $\dot{M}$  na tubulação é a soma da vazão mássica de cada fluido escoando na região interna  $\dot{M}_i$  e externa  $\dot{M}_f$ , ou seja,

$$\dot{M} = \dot{M}_f + \dot{M}_i, \quad \text{onde:} \quad \dot{M} = \frac{\dot{m}}{\rho_i w_{in} \frac{\pi d^2}{4}} \quad (18)$$

Como, na entrada, o perfil de velocidades é considerado uniforme (condição inicial, Eq. 13), tem-se:

$$\dot{M}_i = 4\delta_{in}^2 = 8 \int_0^{\delta} WR dR \quad (19)$$

$$\dot{M}_f = \hat{\rho} (1 - 4\delta_{in}^2) = 8 \hat{\rho} \int_0^{0,5} WR dR \quad (20)$$

e obviamente,

$$\dot{M} = 4\delta_{in}^2(1 - \hat{\rho}) + \hat{\rho} = 8 \int_0^{0,5} \rho^* WR dR \quad (21)$$

onde  $\delta_{in}$  representa o adimensional do raio da interface, na entrada do tubo.

Para se completar a especificação das condições iniciais é, também, necessário conhecer a região do domínio ocupada por cada um dos fluidos, na entrada da tubulação, isto é, o raio da interface inicial ( $\delta_{in}$ ).

Introduzindo-se a razão entre as vazões mássicas de cada fluido,  $\dot{m}^*$ , como um novo parâmetro, dado por

$$\dot{m}^* = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_i} = \frac{\dot{M}_f}{\dot{M}_i} \quad (22)$$

pode-se determinar a posição da interface inicial para um perfil plano de velocidades, utilizando-se as Eqs. (19) e (20).

$$\delta_{in} = \frac{0,5}{\sqrt{\frac{\dot{m}^*}{\hat{\rho}} + 1}} \quad (23)$$

Substituindo-se a equação acima na Eq. (21), obtém-se a vazão mássica total em função de  $\dot{m}^*$  e  $\hat{\rho}$ :

$$\dot{M} = \frac{1 + \dot{m}^*}{(1 + \dot{m}^*)/\hat{\rho}} \quad (24)$$

À medida que os perfis de velocidade se desenvolvem, a área ocupada por cada um dos fluidos pode se alterar, de forma a se garantir a conservação de massa dos mesmos, Eqs. (19) e (20). Note que isso implica em deslocamento da posição da interface ao longo da direção axial, ou seja,

$$\delta = \delta(Z) \quad (25)$$

Por outro lado, quando a condição de escoamento plenamente desenvolvido é atingida, a interface permanece fixa ao longo da direção principal, pois o perfil de velocidade também permanece constante.

Observe-se que o número de Reynolds não é um parâmetro explícito da formulação. Com a adimensionalização adotada, os parâmetros do problema são  $\bar{m}^*$ ,  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\mu}$ .

Para se avaliar o efeito da utilização de um filme externo na redução da perda de carga do escoamento é interessante examinar a variação do gradiente de pressão com a vazão mássica. Para tanto, introduz-se o fator de atrito  $f$ , da seguinte maneira:

$$f = \frac{-\frac{d\bar{P}}{dZ}d}{\bar{\rho}\bar{w}^2/2} \quad (26)$$

resultando, no adimensional,

$$fRe = \left(-\frac{d\bar{P}}{dZ}\right) \frac{2}{W} \frac{\mu_i}{\mu} \quad (27)$$

Sendo o número de Reynolds, em uma seção transversal, definido por

$$Re = \frac{\bar{\rho}\bar{w}d}{\bar{\mu}} \quad (28)$$

onde  $\bar{\rho}$  e  $\bar{\mu}$  representam a massa específica e a viscosidade médias na seção transversal, ponderadas pela área de cada fluido, dadas por

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_i} = (2\delta)^2 (1 - \hat{\rho}) + \hat{\rho} \quad (29)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_i} = (2\delta)^2 (1 - \hat{\mu}) + \hat{\mu} \quad (30)$$

Deve-se observar que a utilização das grandezas  $Re$ ,  $\rho$  e  $\mu$ , variáveis com as posições da interface,  $\delta$ , foi selecionada por acreditar-se que são grandezas mais representativas da perda de carga ao longo da direção principal do escoamento.

Para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido ( $v = 0$  e  $\partial w / \partial z = 0$ ), tem-se um problema unidimensional, facilmente resolúvel, que fornece os seguintes perfis de velocidade axial para os fluidos externo e interno

$$W_{f,des} = \left( -\frac{dP}{dZ} \right)_{des} \frac{1}{4\hat{\mu}} \left( \frac{1}{4} - R^2 \right) \quad (31)$$

$$W_{i,des} = \left( -\frac{dP}{dZ} \right)_{des} \frac{1}{4\hat{\mu}} \left[ \left( \frac{1}{4} - R^2 \right) + (R^2 - \delta_{des}^2) (1 - \hat{\mu}) \right] \quad (32)$$

Calculando-se as velocidades médias, obtém-se:

$$\bar{W}_{f,des} = \left( -\frac{dP}{dZ} \right)_{des} \frac{1}{8\hat{\mu}} \left( \frac{1}{4} - \delta_{des}^2 \right) \quad (33)$$

$$\bar{W}_{i,des} = \left( -\frac{dP}{dZ} \right)_{des} \frac{1}{8\hat{\mu}} \left[ \left( \frac{1}{4} - \delta_{des}^2 \right) + \frac{1}{4} + (\hat{\mu} - 1) \delta_{des}^2 \right] \quad (34)$$

e fazendo-se

$$\dot{m}^* = \hat{\rho} \frac{\bar{W}_f A_f}{\bar{W}_i A_i} \quad (35)$$

resulta

$$\delta_{des} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( 1 + \frac{\dot{m}^*}{\hat{\rho}} \right) \pm \sqrt{\frac{\dot{m}^*}{\hat{\rho}} \left( \frac{\dot{m}^*}{\hat{\rho}} + \hat{\mu} \right)}}{\frac{\dot{m}^*}{\hat{\rho}} (2 - \hat{\mu}) + 1} \right\}^{1/2} \quad (36)$$

onde  $A_f$  e  $A_i$  são as áreas de domínio ocupadas pelos fluidos externo e interno, respectivamente, e  $\delta_{des}$  representa a posição da interface na região plenamente desenvolvida.

Desta forma, o fator de atrito para escoamento desenvolvido é dado por:

$$fRe_{des} = \frac{64\hat{\mu}}{\left[1 + (\hat{\mu} - 1)(2\delta_{des})^4\right] \left[(2\delta_{des})^4(1 - \hat{\mu}) + \hat{\mu}\right]} \quad (37)$$

## Método Numérico

O método numérico selecionado para a solução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento foi o método de diferenças finitas com formulação em volumes de controle, e o esquema de interpolação foi o "Power Law", desenvolvido por Patankar (1980).

As equações de conservação formam um sistema não linear de equações diferenciais parciais de 2ª ordem. Sendo parabólica a equação do deslocamento na direção axial, é possível resolver este conjunto de equações juntamente com as condições de contorno, plano a plano, marchando-se ao longo da direção principal. As equações de conservação são resolvidas para cada plano transversal formado pelos eixos  $r$  e  $\theta$ . Elas são elípticas em relação às direções desse plano e foram resolvidas pelo algoritmo SIMPLE de Patankar e Spalding (1972b) que resolve o acoplamento velocidade e pressão  $p^*$ . Já o acoplamento velocidade  $w$  / gradiente de pressão axial  $dp/dz$  foi resolvido, utilizando-se o balanço global de massa, com um algoritmo análogo ao SIMPLE, também sugerido por Patankar e Spalding (1972b).

As equações discretizadas serão resolvidas de forma iterativa para um mesmo passo na direção parabólica, até que o resultado convirja. Portanto, faz-se necessário um critério para determinar que o programa marche nessa direção. Utiliza-se para isso, o resíduo local de massa e o resíduo global.

Os valores dos resíduos de massa local e global utilizados neste trabalho foram  $5 \times 10^{-7}$  e 0,1%, respectivamente.

O sistema de equações de conservação discretizadas será resolvido usando-se o algoritmo iterativo TDMA linha por linha, alternando-se o sentido e a direção de varredura no domínio, Patankar (1980). Utilizou-se ainda o algoritmo de correção por bloco, Almeida (1989), para aumentar a velocidade de convergência.

Definiu-se um modelo circular e concêntrico para a interface do escoamento. Desta forma, a razão entre as áreas do domínio ocupadas por cada fluido pode ser calculada a partir da razão entre suas vazões mássicas e suas massas específicas.

Desta forma, tem-se

$$\frac{A_f}{A_i} = \frac{\bar{m}^* \bar{W}_i}{\hat{\rho} \bar{W}_f} \quad (38)$$

onde  $\bar{W}_i$  e  $\bar{W}_f$  são as velocidades médias dos fluidos interno e externo, respectivamente.

Em cada seção do escoamento, os perfis de velocidade são alterados e conseqüentemente os seus valores médios podem mudar, em função da desaceleração causada pelo atrito viscoso entre a parede e o fluido e pela ação das forças centrífugas. A garantia da conservação da massa é alcançada pela variação das áreas de escoamentos  $A_f$  e  $A_i$ . O modelo adotado para a interface impõe que a Eq. (38) seja suficiente para fornecer sua posição ao longo da direção principal.

A variação da posição da interface processa-se continuamente durante o desenvolvimento hidrodinâmico. No entanto, como o domínio de cálculo usado neste trabalho é discreto e as faces do volume de controle devem coincidir com as descontinuidades das propriedades, a interface caminha aos saltos de uma face para outra, na direção radial.

A posição da interface é obtida após a determinação do perfil de velocidade, de forma a respeitar a equação de conservação de massa do fluido interno. A posição da interface é então ajustada de modo a coincidir com a face do volume de controle.

A distribuição de pontos nodais nas três direções do domínio foi feita, automaticamente, via lei de potências, usando-se a Eq. (38), sugerida por Almeida (1989). Aplicada à direção axial, tem-se

$$z_i = L \left( \frac{i-2}{NCV} \right)^\xi \quad (39)$$

para todo  $2 \leq i \leq NCV$ . Nesta equação tem-se:

$z_i$  posição da  $i$ ésima face do volume de controle

$NCV$  número total de pontos nodais

$L$  comprimento do domínio

$\xi$  expoente de não uniformidade da malha

Observa-se que se  $\xi = 1$ , tem-se uma distribuição uniforme; se  $\xi < 1$ , as malhas do final do domínio são maiores que no início e, se  $\xi > 1$ , a situação é invertida.

O numerador é subtraído de dois, pois a primeira face corresponde ao segundo ponto nodal principal.

## Análise de Resultados

Para cada combinação de fluidos selecionada para análise, examinou-se a influência da variação da razão de vazão,  $\dot{m}^*$ , no perfil de velocidade, na perda de carga e na posição da interface. A primeira combinação considerada foi água/querosene, com a água escoando no núcleo e o querosene na forma de um filme. Os parâmetros físicos são

$$\bar{\rho} = 1,04 \quad \text{e} \quad \bar{\mu} = 2,245 \quad (40)$$

A segunda combinação estudada, óleo/água, o óleo escoava internamente e a água externamente. Neste caso, os parâmetros físicos são os seguintes:

$$\hat{\rho} = 1,11 \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = 2,0 \times 10^{-2} \quad (41)$$

Para a solução numérica deste problema foram realizados diversos testes de malhas. Com base nesses testes, usou-se uma malha não-uniforme de 30 pontos na direção radial e 690 na direção axial, ( $\xi = 1,6$ ). O expoente  $\xi$  e a distribuição dos 30 pontos nodais da direção radial estão explicitados na Tabela 1.

As Figs. 2 e 3 apresentam os resultados de dois testes de malhas realizados, variando-se o número de pontos nodais radiais para as duas misturas selecionadas. A Fig. 2 corresponde à mistura água/querosene e a Fig. 3 à mistura óleo/água. Em ambos os casos, utilizou-se razão de vazões  $\dot{m}^* = 0,5$ . Nota-se uma excelente concordância entre os resultados no primeiro caso e pequena discrepância no segundo.



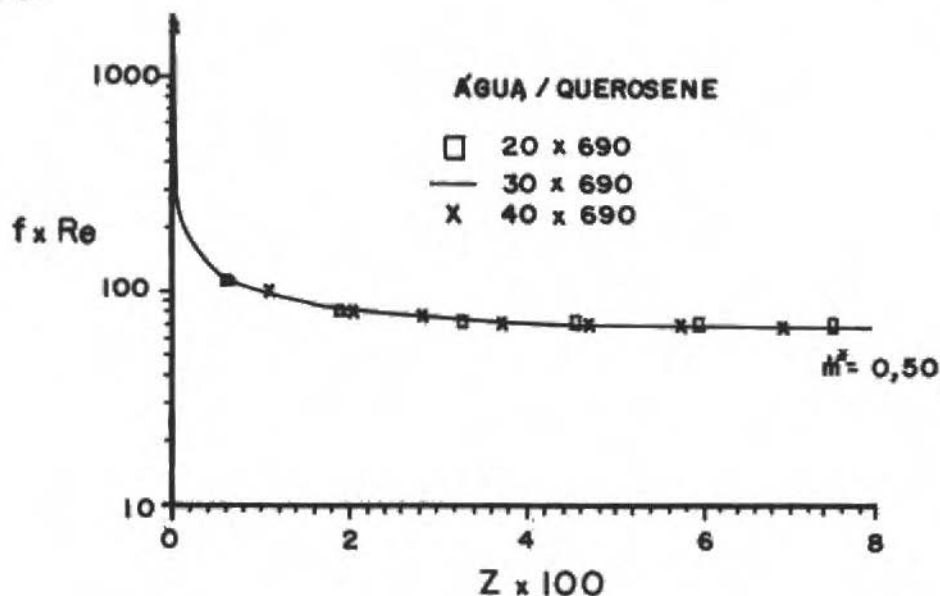


Fig. 2 Testes de malhas ao longo do escoamento;  $m^* = 0,5$  - mistura água/querosene

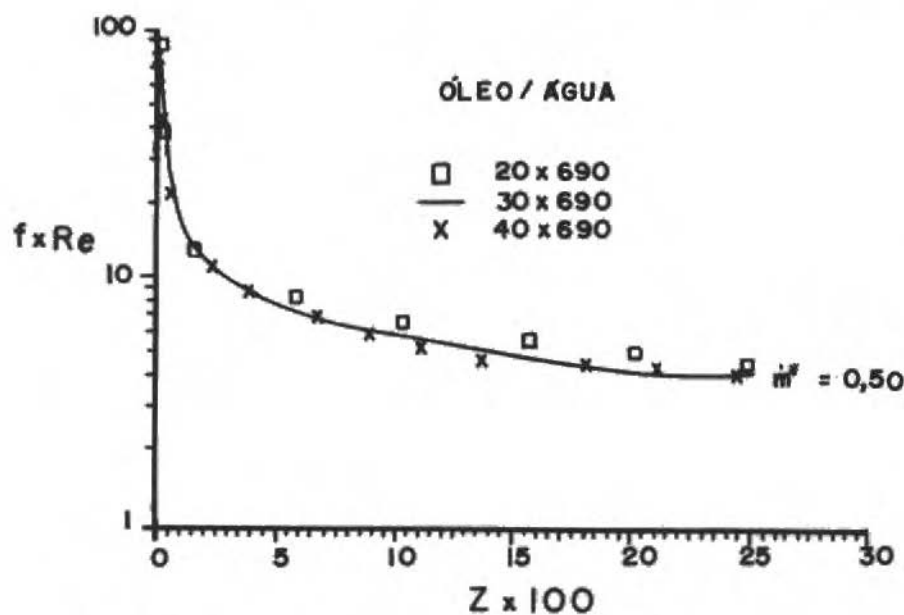


Fig. 3 Testes de malhas ao longo do escoamento;  $m^* = 0,5$  - mistura óleo/água

A malha intermediária de 30 pontos nodais foi selecionada por fornecer resultados bastante razoáveis.

Tabela 1 Características das malhas testadas

Mistura	Características	Número de Pontos Nodais (direção radial)			Expoente de não uniformidade
		Região do núcleo	Região da interface	Região do filme	
Água / Querosene	$\dot{m}^* = 1 \times 10^{-2}$	07	06	07	0,649
	$\delta_d = 0,4649$	10	09	11	0,626
	$\delta_{in} = 0,4976$	13	13	14	0,626
	$\dot{m}^* = 0,5$	07	06	07	0,103
	$\delta_d = 0,3086$	11	09	10	0,827
	$\delta_{in} = 0,4109$	15	12	13	0,827
	$\dot{m}^* = 10$	03	06	11	0,733
	$\delta_d = 0,1084$	05	08	17	0,185
	$\delta_{in} = 0,1535$	07	12	21	0,193
Óleo/Água	$\dot{m}^* = 1$				
	$\delta_d = 0,2982$	12	06	12	0,3482
	$\delta_{in} = 0,3627$				
	$\dot{m}^* = 0,5$	08	04	08	0,20641
	$\delta_d = 0,3617$	12	06	12	0,23662
	$\delta_{in} = 0,4152$	16	08	08	0,25152

### Velocidade Axial

Na Fig. 4, estão representados perfis de velocidade axial,  $W$ , em função da posição axial,  $Z$ , para diversas posições radiais,  $R$ , e razão de vazão mássica,  $\dot{m}^* = 0,5$  de uma mistura água/querosene. Selecionou-se analisar a variação da velocidade em posições próximas à parede e ao centro do duto.

Na entrada, o perfil de velocidade é plano e, portanto,  $W = 1$ . Note-se que o fluido próximo à região central (menores valores de  $R$ ) é acelerado sempre, até atingir, assintoticamente, a condição de escoamento desenvolvido. Esta aceleração ocorre de forma a garantir a conservação de massa. Observe-se junto à parede ( $R = 0,5$ ) forte desaceleração em virtude do atrito viscoso.

Observa-se que o escoamento na posição radial  $R = 0,337$  é, inicialmente, acelerado, mas o efeito viscoso é rapidamente propagado em direção à região central, desacelerando o escoamento nesta posição radial. Pode-se observar, também, que o desenvolvimento do escoamento ocorre próximo à posição-axial  $Z = 6 \times 10^{-2}$ .

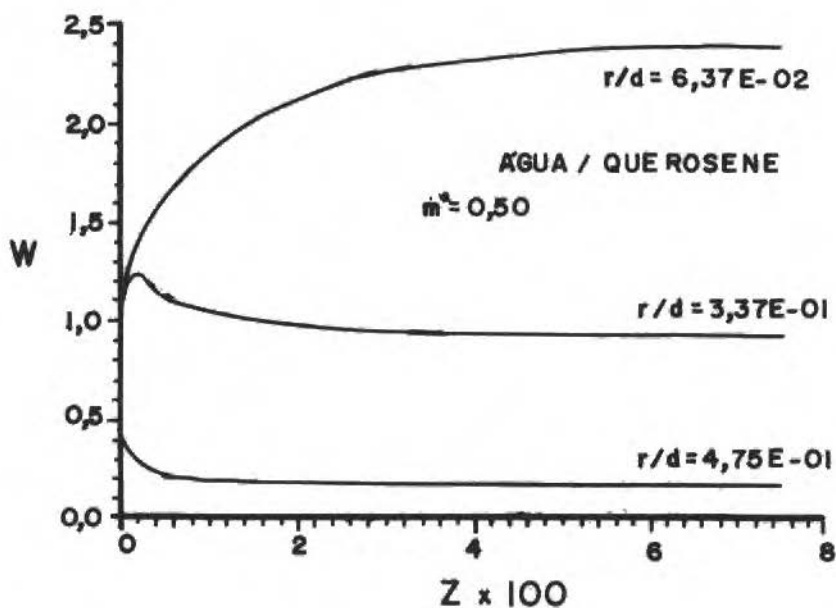


Fig. 4 Perfis de velocidade axial ao longo da direção para três pontos do domínio,  $\dot{m}^* = 0,5$ , mistura água/querosene

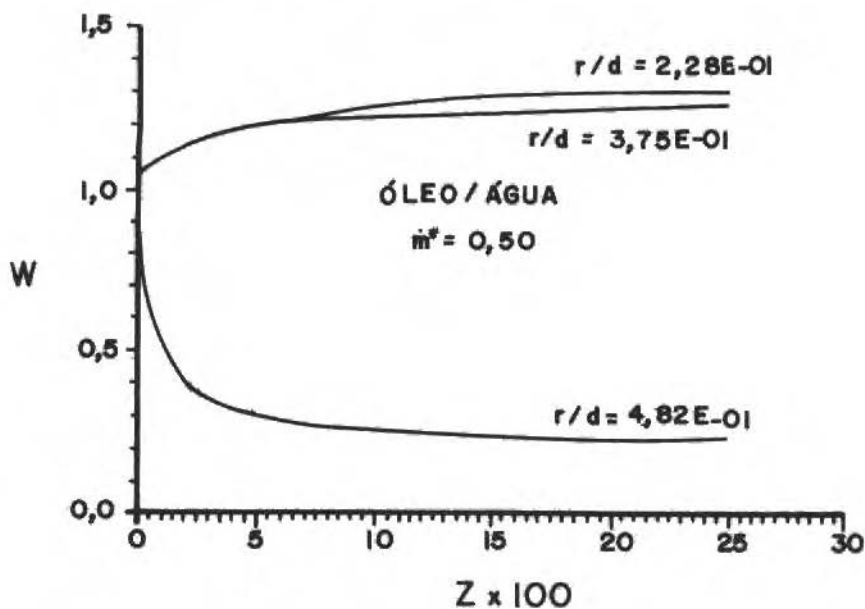


Fig. 5 Perfis de velocidade axial ao longo do escoamento em três pontos do domínio,  $\dot{m}^* = 0,5$ , mistura óleo/água.

O comportamento da velocidade axial na região central e próximo à parede, ao longo da tubulação, é análogo nas três razões de vazões estudadas. Para razões de vazões  $\dot{m}^*$  muito baixas ou muito altas, um dos fluidos predomina na tubulação e o seu desenvolvimento ocorre mais próximo da entrada ( $Z = 4 \times 10^{-2}$ ).

A variação da velocidade axial ao longo do duto para a mistura óleo/água é apresentada na Fig. 5, também para razão de vazões  $\dot{m}^* = 0,5$ . Observa-se um comportamento análogo ao escoamento da mistura querosene/água. No entanto, devido à alta viscosidade do óleo, que é o núcleo desta mistura, não ocorre uma forte aceleração do escoamento na região central ( $R \approx 0$ ), resultando em um retardamento do desenvolvimento em relação à mistura água/querosene. Para as duas razões de vazões estudadas (0,5 e 1,0), o desenvolvimento ocorre em torno da posição axial,  $Z = 25 \times 10^2$ .

O desenvolvimento do perfil de velocidade axial pode ser analisado através das Figs. 6 para água/querosene e 7 para óleo/água, respectivamente. A variação do perfil de velocidade axial com a posição radial é apresentada em seis posições axiais diferentes: em cinco posições próximas à entrada do tubo, onde as variações dos perfis de velocidade são mais significativas, e na região em que o escoamento encontra-se hidrodinamicamente desenvolvido.

Durante o desenvolvimento do escoamento para a água/querosene, como já observado na Fig. 4, o fluido na região central (água) é continuamente acelerado, enquanto que o querosene, próximo à parede, é desacelerado devido à ação viscosa. Note-se que, como a razão entre as viscosidades dinâmicas dos dois fluidos é próxima da unidade, a descontinuidade na derivada do perfil de velocidade não é muito acentuada.

Na Fig. 6, pode-se observar ainda o deslocamento da posição da interface em direção à região central, como esperado, pois, devido às altas velocidades no centro, a região ocupada pelo fluido interno deve diminuir, de forma a se garantir a conservação de massa de cada fluido.

No desenvolvimento do escoamento da mistura óleo/água, Fig. 7, pode-se notar uma semelhança no desenvolvimento do escoamento na fase água (fluido externo) com o ocorrido em um duto anular, onde o "tubo interior" se move com velocidade constante. Esta analogia é possível, porque o perfil de velocidade do óleo é praticamente uniforme, apresentando aceleração muito pequena, dada sua viscosidade muito maior que a da água. Observa-se que o deslocamento da interface em direção à região central também é pequeno. O perfil de velocidade da fase água é praticamente linear, e o da fase óleo é praticamente constante, apresentando forte descontinuidade na derivada da velocidade, na interface.

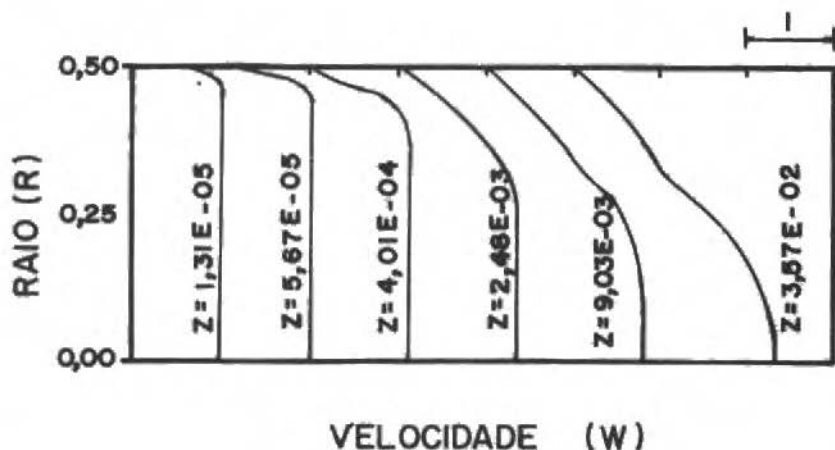


Fig. 6 Perfis de velocidade axial ao longo da direção radial do escoamento; razão de vazões  $\dot{m}^* = 0,5$ ; mistura água/querosene

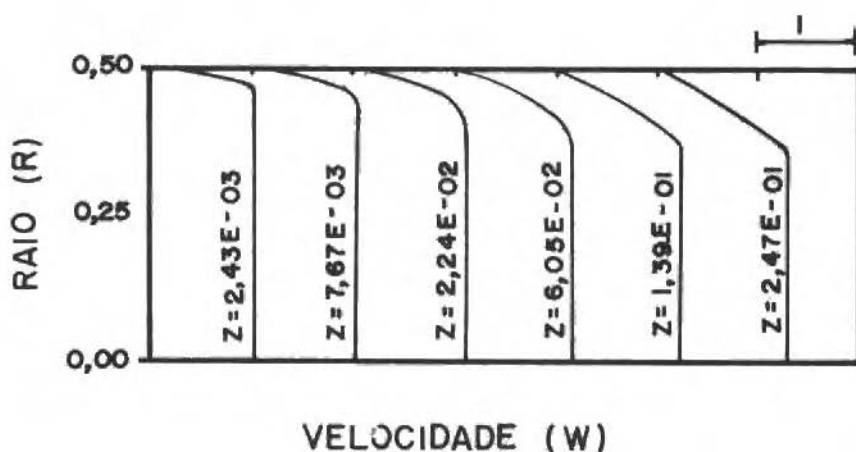


Fig. 7 Perfis de velocidade axial ao longo da direção radial do escoamento; razão de vazões  $m = 0,5$ ; mistura óleo/água

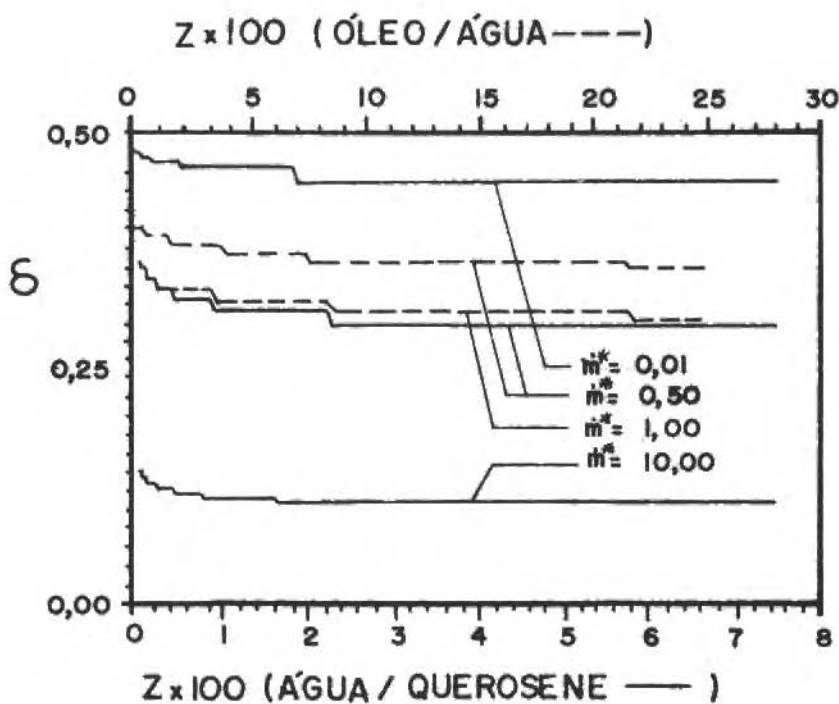


Fig. 8 Variação da posição da interface ao longo da direção principal

Observe-se que as posições axiais selecionadas para apresentação dos perfis de velocidade não são iguais para as duas misturas, uma vez que o desenvolvimento da mistura óleo/água ocorre bem mais lentamente do que a da mistura água/querosene.

## Comportamento da Interface

A variação da posição da interface e o efeito da razão de vazões ao longo da tubulação podem ser analisados pela Fig. 8, para os escoamentos das duas misturas consideradas. A espessura do filme diminui, à medida que a razão de vazões diminui, já que, para altas vazões do fluido interno, é necessário ocupar uma região maior do domínio.

Devido à diminuição da velocidade na região próxima à parede, a seção ocupada pelo fluido externo deve aumentar, de forma a se garantir a conservação de massa. Por isso, a interface entre as fases se desloca sempre em direção à linha de centro. Esse fato já havia sido observado ao se analisar o perfil de velocidade axial.

Note-se que, para altas e baixas razões de vazões, o deslocamento da interface é muito pequeno, uma vez que uma das fases predomina no duto, o que acarreta no desenvolvimento do escoamento em distâncias  $Z$  menores. Observe-se, também, que para a mistura óleo/água ( $\mu = 0,02$ ) existe um movimento bem menor da interface do que para a mistura água/querosene ( $\mu = 2,245$ ). Deve-se mencionar que as razões de massas específicas das misturas estudadas são próximas da unidade ( $\hat{\rho} = 1,04$  e  $\hat{\rho} = 1,11$ ), influenciando muito pouco no processo.

A Tabela 2 apresenta a posição da interface, determinada analiticamente, na entrada e na região desenvolvida, para cada mistura e razão de vazões, indicando, também, a variação entre as duas posições em direção à região central.

Tabela 2 Posição da interface

Mistura	$m^*$	Região de entrada	Região desenvolvida	Varição (%)
Água/ Querosene	$1 \times 10^{-2}$	0,4976	0,4637	6,84
	$5 \times 10^{-1}$	0,4109	0,3065	25,42
	$1 \times 10^1$	0,1612	0,1082	32,29
Óleo/Água	$5 \times 10^{-1}$	0,4152	0,3617	12,87
	$1 \times 10^0$	0,3627	0,2982	17,78

## Fator de Atrito

A variação do fator de atrito ao longo da direção principal do escoamento, em função das razões de vazões, pode ser analisada na Fig. 9. Para a mistura água/querosene, o fator de atrito cai bruscamente, uma vez que, dada a rápida propagação do efeito viscoso para dentro da tubulação, o fluido de maior viscosidade escoava externamente, atingindo a condição de escoamento desenvolvido em  $Z = 6 \times 10^{-2}$ . Outrossim, para a mistura óleo/água, o fluido mais viscoso escoava internamente e, portanto, observa-se uma diminuição mais suave do fator de atrito, indicando uma propagação lenta do efeito viscoso em direção ao centro da tubulação. Neste caso, a condição de escoamento desenvolvido só é atingida em  $Z = 25 \times 10^{-2}$ . O efeito da razão de vazões no fator de atrito é muito pequeno, para a mistura água/querosene, da ordem de 5%. Sendo mais pronunciado, porém, da ordem de 20%, na mistura óleo/água.

Finalmente, pode-se concluir que a utilização de água escoando na forma de filme, no bombeamento de óleo, reduz significativamente o fator de atrito, em relação à situação de escoamento monofásico de óleo na tubulação, para o mesmo número de Reynolds. Tal não é aplicável para a mistura água/querosene, pois as viscosidades são de mesma ordem de grandeza.

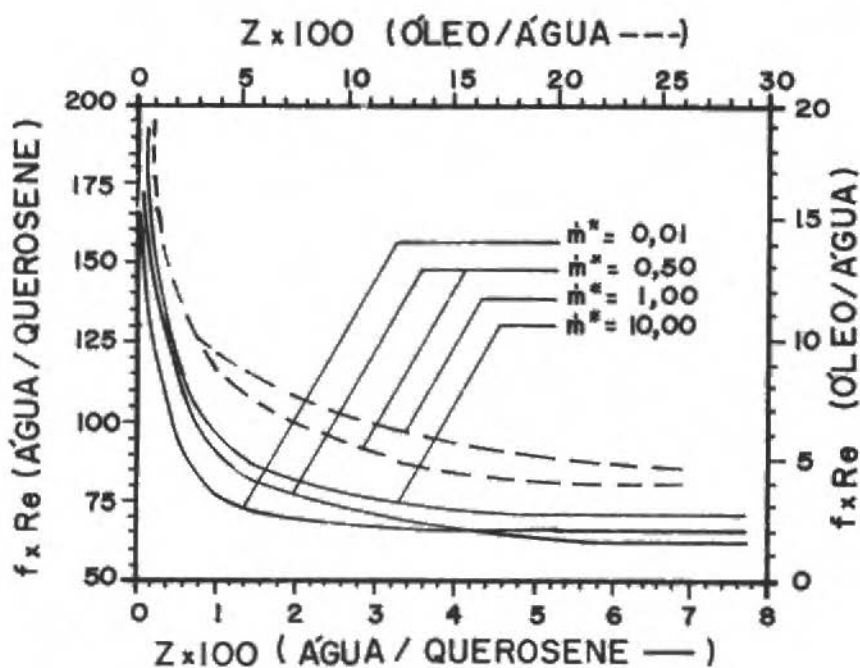


Fig. 9 Variação do fator de atrito ao longo da direção principal do escoamento

A, B, C - ÁGUA / QUEROSENE  
 D, E - ÓLEO / ÁGUA

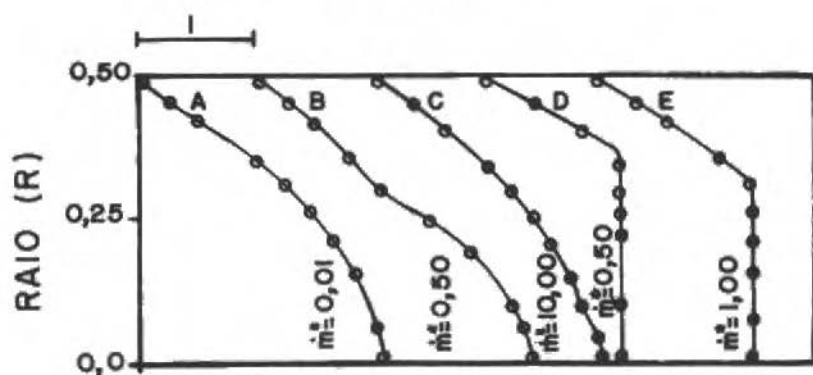


Fig. 10 Perfis de velocidade axial do escoamento plenamente desenvolvido

## Região de Esoamento Desenvolvido

Na Fig. 10, apresentam-se os perfis de velocidade axial nas regiões de escoamento hidrodinamicamente desenvolvido. A linha cheia representa os resultados obtidos através do programa desenvolvido e os pontos representam os resultados analíticos. A concordância entre os dois é excelente e o maior erro, em geral, no ponto mais próximo da parede, não ultrapassa 0,1%.

A posição da interface determinada numericamente, para a região de escoamento desenvolvido, foi comparada com a solução exata. A concordância entre as soluções é excelente, para ambas as misturas analisadas, e o erro é desprezível.

Vale ressaltar, no entanto, que a concentração de pontos nodais radiais na região de deslocamento da interface, suavizou este movimento, minimizando-se sensivelmente os erros introduzidos pela variação, em graus, da posição da interface.

O fator de atrito calculado numericamente, para o escoamento na região desenvolvida, foi comparado com os valores analíticos e os resultados estão apresentados na Tabela 3. Observa-se, mais uma vez, excelente concordância entre os resultados.

A conclusão geral, a que se pode chegar, é que o modelo proposto e o método de solução adotado descrevem o desenvolvimento do escoamento de uma forma tal que os valores assintóticos

### Nomenclatura

$d$ = Diâmetro do tubo (m)	equação de momento ( $\mu^*/R^2$ )	$\hat{\mu}$ = Razão de viscosidades dinâmicas do filme e do núcleo ( $\mu/\mu_i$ )
$f$ = Fator de atrito	$V$ = Componente radial da velocidade adimensional ( $\rho_1 v d/\mu_i$ )	$\mu^*$ = Razão entre as viscosidades dinâmicas ( $\mu/\mu_i$ )
$g$ = Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ )	$v$ = Componente radial da velocidade dimensional (m)	$\xi$ = Coeficiente de não uniformidade da malha
$L$ = Comprimento do domínio (m)	$W$ = Componente axial da velocidade adimensional ( $w/w_{in}$ )	—
$\dot{M}$ = Vazão mássica adimensional do escoamento ( $4m/\rho_1 w_{in} \pi d^2$ )	$w$ = Componente axial da velocidade dimensional (m)	$\rho$ = Massa específica média ( $kg/m^3$ )
$\dot{m}$ = Vazão mássica dimensional ( $kg/s$ )	—	$\rho$ = Massa específica ( $kg/m^3$ )
$p$ = Pressão dimensional ( $kg/ms^2$ )	$w_{in}$ = Velocidade média na entrada do tubo (m/s)	$\rho^*$ = Razão entre as massas específicas ( $\rho/\rho_i$ )
$\bar{p}$ = Pressão média na seção transversal ao escoamento ( $kg/ms^2$ )	$w_{in}$ = Velocidade na entrada do tubo (m/s)	$\hat{\rho}$ = Razão de massas específicas do filme e do núcleo ( $\rho/\rho_i$ )
$p^{**}$ = Flutuação de pressão ( $kg/ms^2$ )	$Z$ = Coordenada adimensional na direção axial ( $z/dRe_{in}$ )	<b>Índices</b>
$p^*$ = Pressão modificada ( $kg/ms^2$ )	$z$ = Coordenada dimensional na direção axial (m)	$i$ = Região do núcleo do escoamento
$r_i$ = Raio da interface (m)	$\delta$ = Posição adimensional da interface ( $r_i/d$ )	$f$ = Região do filme do escoamento
$r$ = Coordenada dimensional na direção radial (m)	$\theta$ = Coordenada adimensional na direção angular	$in$ = Entrada do tubo
$R$ = Coordenada adimensional na direção radial ( $r/d$ )	$\mu$ = Viscosidade dinâmica ( $kg/ms$ )	$d$ = Região desenvolvida
$Re$ = Adimensional de Reynolds	—	$des$ = Região desenvolvida
$Sp_v$ = Termo de fonte da componente radial da	$\mu$ = Viscosidade dinâmica média ( $kg/ms$ )	



correspondem aos valores exatos da solução analítica para o escoamento plenamente desenvolvido. Estes resultados demonstram a adequação do modelo aqui proposto.

Tabela 3 Fator de atrito

Mistura	$\dot{m}^*$	Solução exata	Solução numérica	Erro percentual
Água/ Querosene	$1 \times 10^{-2}$	63,6813	63,0301	1,022
	$5 \times 10^{-1}$	68,7241	68,5302	0,2385
	$1 \times 10^1$	65,5317	65,3086	0,3404
Óleo/Água	$5 \times 10^{-1}$	3,2833	3,2829	0,01122
	$1 \times 10^0$	3,9646	3,9631	0,0395

## Conclusões

Na região de escoamento plenamente desenvolvido, faz-se uma comparação dos resultados obtidos com a solução analítica. O desvio percentual resultante nunca ultrapassou a 1,0%. Na região de desenvolvimento, os resultados apresentados, referentes a perfis de velocidade axial, perda de carga e posição da interface, constituem contribuições deste trabalho ao estado da arte. Com base nos resultados obtidos conclui-se que:

- para altas e baixas razões de vazões (10 e 0,01), o escoamento é dominado por um dos líquidos da mistura e o seu desenvolvimento ocorre mais próximo da entrada do tubo, em comparação aos casos de razões de vazões moderadas ( $\dot{m}^* = 0,5$ );
- alta viscosidade do núcleo da mistura implica em fraca aceleração do escoamento na região central, o que retarda o desenvolvimento do escoamento, quando comparado a uma outra mistura que apresente uma razão de viscosidades mais próxima da unidade;
- para situações onde o núcleo é muito mais viscoso que o filme, o desenvolvimento deste último é semelhante ao desenvolvimento do escoamento em um duto anular, onde o tubo de dentro se move a velocidade constante;
- como o núcleo do escoamento é sempre acelerado, a espessura do filme aumenta ao longo da direção principal, garantindo-se, desta forma, a conservação de massa;
- a espessura do filme diminui com a diminuição da razão de vazões, uma vez que, para altas vazões do líquido interno é necessária uma região maior do domínio;
- o movimento da interface para a mistura água/querosene ( $\dot{m}^* = 2,245$ ) é bem maior do que a correspondente mistura óleo/água ( $\dot{m}^* = 0,02$ );
- para uma mistura em que  $\dot{m}^* > 1$ , o fator de atrito cai bruscamente à maior propagação dos efeitos viscosos para o interior da tubulação, e
- a utilização de água como filme externo no bombeamento de óleo reduz fortemente a perda de carga, em relação à situação de escoamento monofásico de óleo, dada a significativamente menor viscosidade da água em contato com as superfícies sólidas, em relação à viscosidade do óleo.

## Referências

- Almeida, W. T., 1989, "Programa Numérico para Solução das Equações de Transporte Tri-dimensionais Parabólicos", Tese M.Sc., Engenharia Mecânica, PUC, Rio de Janeiro.
- Everage, A. E. Jr., 1973, "Theory of Stratified Bicomponent Flow of Polymer Melts I-Equilibrium Newtonian Tube Flow", Transaction of the Society of Rheology, vol.17, no. 4, pp. 629-646.

- Gould, T. L., Tek, M. R. e Katz, D. L., 1974, "Two-Phase Flow Through Vertical, Inclined or Curved Pipe", *J. Pet. Technol.* 26: pp. 915-26.
- Hasson, D., Orell, A. e Fink, M., 1974, "A Study of Vertical Annular Liquid-Liquid Flow - Part I - Laminar Conditions", Paper no. A5, Multi-Phase Flow Systems Symp., Inst. Chem Engng., Symp. Ser. no. 38, Glasgow, 1-15.
- Issa, R. I., 1988, "Prediction of Turbulent Stratified Two-Phase Flow in Inclined Pipes and Channels", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 14, pp. 141-154.
- Leib, T. M., Fink, M. e Hasson, D., 1977, "Heat Transfer in Vertical Annular Laminar Flow of Two Immiscible Liquids", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 533-549.
- Nogueira, E., 1988, "Escoamento Laminar e Transferência de Calor em Fluidos Imiscíveis sem Estratificação", Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica e Mecânica, São José dos Campos.
- Oams, G., Segal, A. et al., 1984, "A Theoretical Model for Core-Annular Flow of a Very Viscous Oil Core and a Water Annular Through a Horizontal Pipe", *Int. Journal of Multiphase Flow*, vol. 10, no. 1, pp. 41-60.
- Patankar, S. V. e Spalding, D. B., 1972, "Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes", *J. Fluid Mech.*, vol. 62, part 3, pp. 539-551.
- Patankar, S. V. e Spalding, D. B., 1972b, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1787-1806.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Mc Graw-Hill Book Company.
- Raithby, G. D. e Schneider, G. E., 1979, "Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity - Pressure Coupling", *Numerical Heat Transfer*, vol. 2, pp. 441-454.

# Modelo do Fator Característico do Sistema de Manufatura

## *Model of the Characteristic Factor of the Manufacturing System*

Antonio Batocchio  
Oswaldo Luiz Agostinho

DEF - FEM - UNICAMP  
Caixa Postal 6122  
13083-970 - Campinas, SP - Brasil

### Abstract

The researchers have been concerned about finding parameters that allows an evaluation of the real conditions of the manufacturing system. This paper intends to introduce the concept and the model of the characteristic factor of the manufacturing system and the results of its application in the industry. It can become an important tool to the manufacturing managers in the analysis and estimation of the manufacturing system.

**Keywords:** Manufacturing Systems, Characteristic Factor Model, Flexible Automation, Manufacturing Cycle

### Resumo

Uma preocupação que tem sido constante entre os pesquisadores é a busca de parâmetros que permitam avaliar as reais condições do sistema de manufatura, de maneira que decisões possam ser tomadas, permitindo aumento nos níveis de produtividade, competitividade e qualidade dos produtos. Este trabalho pretende apresentar a conceituação e o modelo do fator característico do sistema de manufatura, além de resultados de sua aplicação numa empresa, colocando a disposição dos gerentes de manufatura uma ferramenta importante para análise e avaliação do sistema de manufatura.

**Palavras-chave:** Sistemas de Manufatura, Automação Flexível, Automação Rígida, Modelo do Fator Característico, Ciclo de Fabricação

### Introdução

Os empreendimentos industriais têm buscado constantemente, ao longo dos anos, a melhoria da produtividade, de maneira a racionalizar os recursos investidos. Há uma série de fatores externos que provocam mudanças no perfil fabril, através da introdução de novas técnicas e inovações tecnológicas. Esses fatores são: necessidade do mercado, competição entre fornecedores, ação da sociedade e exigência do cliente (Eversheim, Brachtendorf e Koch, 1986). Dessa maneira, esses fatores sugerem ações internas, para que sejam produzidos bens que satisfaçam as necessidades mercadológicas, através da diversificação de produtos e diminuição do ciclo de vida destes. Uma vez explicitadas essas duas condições, o sistema de manufatura deverá responder às reais necessidades do mercado, sob pena de desaparecer frente aos seus concorrentes. A resposta deverá vir através de adoção de novas técnicas de gerenciamento e de inovações tecnológicas, que propiciem melhoria da produtividade e possam fornecer resposta rápida do sistema produtivo.

À luz do contexto exposto, verifica-se a importância de se discutir alguns parâmetros, tais como a flexibilidade e automação e suas influências na produtividade do sistema fabril. As condições mercadológicas, referidas anteriormente, requerem facilidades do sistema de manufatura e, uma condição necessária e capaz de responder a esta questão, é a flexibilidade. Por outro lado, o parque de máquinas instalado, baseado na automação rígida, tornou-se extremamente inadequado para atender à nova tendência mercadológica, já que esses sistemas produtivos foram projetados para trabalharem com alta taxa de produção. Em função do aumento na diversificação e redução no tamanho dos lotes, esses sistemas demonstraram baixa flexibilidade, provocando queda nos níveis de produtividade. Como consequência, tem-se um elevado custo do produto, comparativamente a outros sistemas, que conseguem responder rapidamente aos estímulos mercadológicos, através de uma alta flexibilidade, via a automação flexível.

Uma preocupação que tem sido constante entre os pesquisadores é a busca de parâmetros que permitam avaliar as reais condições do sistema de manufatura, de maneira que decisões possam ser tomadas, permitindo aumento nos níveis de produtividade, competitividade e qualidade dos produtos. Este trabalho pretende apresentar a conceituação e o modelo do fator característico do sistema de manufatura, além de resultados de sua aplicação numa empresa, colocando à disposição dos gerentes de manufatura uma ferramenta importante para análise e avaliação do sistema de manufatura.

## Conceitos Básicos

A automação é um termo muito utilizado atualmente, devido ao impacto que provoca no contexto social e industrial. Interessa-nos, neste particular, o estudo da automação no contexto fabril, devido aos reflexos de sua utilização na organização industrial, através das profundas alterações nos diversos setores que constitui a empresa.

A automação pode ser conceituada da seguinte forma: "é a tecnologia que diz respeito à aplicação de mecanismos complexos, eletrônica e sistemas baseados em computadores, na operação e controle da produção" (Groover, 1980). A partir desta conceituação de automação, algumas indicações que caracterizam a tecnologia automação podem ser descritas: máquinas-ferramenta programáveis, sistemas automatizados de manuseio de materiais, postos de trabalhos automatizados para montagem de componentes e produtos, processo com fluxo contínuo, sistema com retroalimentação ("feedback"), sistema computacional para controle de processo, sistema computadorizado para aquisição de dados, planejamento e suporte para decisões das atividades de manufatura. Além disso, pode-se apresentar as principais características básicas da automação rígida e flexível (Groover, 1980).

### Automação Rígida

Ela ocorre quando a seqüência de execução das operações no sistema é fixada pela configuração do equipamento. As características típicas desse sistema são: elevado investimento inicial; alta taxa de produção, adequado para demanda de alto volume; as operações, em sua seqüência, são geralmente simples; a integração e coordenação de muitas operações numa única peça no equipamento, faz com que o sistema seja complexo; baixa flexibilidade - mudanças no processo para adequar mudança no produto são difíceis e onerosas; exemplos de automação rígida: linhas de transferência, linhas automáticas de montagem (não programáveis).

### Automação Flexível

O equipamento de produção é projetado para ser flexível (programável). As características desse tipo de sistema são: alto investimento, mas não tão alto como a automação rígida; capacidade de absorver mudanças na seqüência de operações e adaptação para diferentes configurações do produto. A seqüência de operações é controlada através de programa (instruções); o sistema é reprogramável para mudar a seqüência de operações; grande flexibilidade - faz o sistema ser adequado para pequena quantidade de produção de diferentes produtos; pequena taxa de produção comparativamente ao sistema de automação rígida; exemplos de automação flexível: máquinas CNC e DNC, robôs, Células Flexíveis de Manufatura (CFM) e Sistemas Flexíveis de Manufatura (SFM).

Há estudos de análise de custo comparativo entre a automação rígida e a flexível, em função do volume de produção, afirmando que a condição alto volume de produção e baixa diversificação de produtos é adequada para o emprego da "hard automation" (Edwaldz, 1986).

Outro trabalho enfoca primeiramente a automação rígida ("mechanical automation"), onde faz considerações sobre os princípios da mesma, as linhas de produção automatizadas e limitações desse sistema numa avaliação das vantagens desse tipo de automação; em segundo lugar, expõe os princípios da automação programável ("programmable automation"), expondo as vantagens desse sistema, os propósitos do desenvolvimento da automação programável e os efeitos desse tipo de automação; e finalmente, os requisitos necessários para a mais rápida difusão da automação programável (Gold, 1986).

Em função do exposto, pelos diversos autores citados, reveste-se de grande importância este trabalho, que pretende definir um parâmetro para análise do comportamento do sistema de manufatura, tanto no aspecto organizacional como tecnológico. Isto será feito no próximo item, através do desenvolvimento do modelo do fator característico do sistema de manufatura.

## Desenvolvimento do Fator Característico

### Embasamento Teórico

Preende-se, no contexto da manufatura ("shop floor"), a definição de um parâmetro para análise e avaliação do desempenho do nível organizacional e tecnológico do parque fabril de empresas metal-mecânica. Esse parâmetro será denominado de fator característico do sistema de manufatura (Cs).

Far-se-á uma análise das atividades envolvidas na manufatura, que possibilitarão a definição do fator característico Cs. As atividades consideradas são:

- Atividade de transformação: é a operação de obtenção da peça, podendo ser usinagem ou qualquer outra, desde que propicie mudança geométrica na peça bruta; a ela estará associada um determinado tempo, denominado de tempo de processamento básico (tpr).
- Atividade de carga e descarga: é a operação de pegar, colocar e fixar (e vice-versa) a peça no dispositivo da máquina; a ela estará associada um determinado tempo, chamado de tempo de carga e descarga (tcd).
- Atividade de transporte: é a operação de transportar a peça bruta do almoxarifado de matéria prima até a estação de trabalho e, depois de processada, até o setor de montagem ou estocagem. Associa-se a essa operação um determinado tempo, chamado de tempo de transporte (ttr). O tempo de transporte poderá ser subdividido em tempo de transporte externo (ttr<sub>e</sub>) e tempo de transporte interno (ttr<sub>i</sub>); essa situação se encontra, por exemplo, quando têm-se várias células de manufatura, ocorrendo transporte externo às células e transporte interno às mesmas. O tempo total do transporte será a somatória dos tempos externos e internos.
- Atividade de estocagem e montagem: estocagem é a operação de armazenamento da peça pronta no almoxarifado até o momento de sua utilização; montagem é a operação de união de diversas peças prontas, obtendo-se subconjuntos, conjuntos e produtos. Em ambos os casos, associa-se determinado tempo, chamado de tempo de estocagem (te) e tempo de montagem (tm).
- Atividades suporte: as atividades suporte consideradas são relativas à preparação da máquina (setup) e às de ajuste e trocas de ferramentas; a primeira considera o tempo de preparação (tsi) e, a segunda, o tempo de ajuste e troca (taj). Agregada à preparação da máquina está a frequência de reparação (Zi), que é fundamental para a manutenção dos níveis de flexibilidade e produtividade do equipamento.

Outras considerações importantes a serem discutidas, estão relacionadas às questões organizacional e tecnológica, que irão balizar o conceito do fator característico do sistema de manufatura.

- Questão organizacional: essas questões estão relacionadas com o nível de organização do chão de fábrica da empresa, detectadas em problemas de fluxo, quebra de máquina, falta de operador, falta de matéria prima, falta de ferramentas e de dispositivos, falta de energia elétrica, problemas de fila (carga de máquina e seqüenciamento), problemas de manutenção e flutuações de demanda.
- Questão tecnológica: essas questões estão relacionadas com o tipo de tecnologia utilizada nas atividades de transformação (inclusive o sistema de trocas de ferramentas), carga e descarga, transporte, estocagem e montagem. Como exemplo, na transformação têm-se máquinas universais, automáticas e a comando numérico e, um sistema de troca de ferramentas, que poderá ser manual, automática indexável e programável. Quanto à carga e descarga, têm-se manual, braço mecânico, pallets e robôs. Quanto ao transporte, têm-se manual, correias transportadoras, pallets, ponte rolante, empilhadeira e agv ("automated guide vehicles").

Quanto à estocagem, têm-se manual, automático e sistemas automáticos de armazenamento (programável) e a montagem poderá ser feita manualmente, com emprego de ferramentas automáticas e emprego de robôs. A tecnologia envolvida nesses sistemas está vinculada aos graus de liberdade do equipamento, o qual determina o quanto o equipamento é flexível (programável) ou não.

### Modelo do Fator Característico

O fator característico do sistema de manufatura ( $C_s$ ) é definido como: "a relação entre a somatória dos tempos de carga e descarga, transporte, setup e improdutivos de um determinado sistema de manufatura e o período ( $k$ ) correspondente à obtenção dos dados" (Batocchio, 1991). O período ( $k$ ) é normalmente medido em dias, semanas, meses ou ano. O  $C_s$  é calculado pela seguinte equação:

$$C_s = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m t_{cd_{ji}} + \sum_{j=1}^n t_{tr_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r t_{s_{ji}} \times Z_{ji} + \sum_{j=1}^n t_{ij} \right) / k$$

onde:

$m$ : quantidade de peças do lote;

$n$ : número de tipos de peças;

$r$ : número de vezes que se prepara a máquina para a execução do lote, e

$t_{ij}$ : tempos improdutivos do sistema de manufatura.

A somatória dupla é relativa à ocorrência da atividade do lote de peças  $m$  (ou  $r$  para preparação) e ao número de tipos de peças  $n$ . Já a somatória simples para a atividade de transporte é relativa ao transporte total, adotando-se que serão utilizadas caixas para transporte e não transporte individual de peças.

O  $C_s$  pela sua composição é sujeito à influência do número de tipos de peças ( $n$ ), já que todas as parcelas que compõem o fator característico são funções de  $n$ . Através da determinação do fator característico ( $C_s$ ), conhece-se, a qualquer momento, o estado do sistema de manufatura. Convém ressaltar que o fator característico é uma média, obtida num determinado período de tempo, portanto, representa uma situação efetivamente ocorrida com o sistema de manufatura. A partir deste fato, é possível, fazerem-se estimativas para o sistema de manufatura, mantendo-se os mesmos níveis ou melhorando os parâmetros que compõem o fator característico.

### Aplicação do Modelo do Fator Característico

A empresa selecionada tem como linha de produto as transmissões automotivas, tendo uma produção média mensal de 14.600 transmissões, para diversos tipos de veículos, quer sejam eles de passeio, de carga ou de manuseio de material. Conta com um parque instalado de 1394 máquinas, sendo que 54 delas são CNC e 1340 são universais, semi-automáticas e automáticas. Possui 11 Linhas de Transferência para o processamento de carcaças, 37 células de manufatura convencionais e uma célula flexível de processamento de carcaças, constituída de quatro centros de usinagem.

Em função dos objetivos do trabalho, decidiu-se selecionar dois tipos básicos de peças: peças de revolução e peças prismáticas. No contexto do primeiro grupo, selecionaram-se as peças do tipo engrenagens; já no segundo grupo, peças do tipo carcaças. Para as peças de revolução, definiu-se o estudo para as operações de torneamento, pois primeiramente essas operações eram realizadas no sistema de manufatura funcional (SMF), posteriormente numa célula de manufatura convencional (CMC) e, finalmente, num torno a comando numérico (CNC). As peças prismáticas, do tipo carcaças, eram processadas em três sistemas distintos: linha de transferência convencional (LTC), linha



composta de máquinas semiautomáticas (LTS) e célula flexível de manufatura (CFM). Os dados utilizados no trabalho são relativos a períodos distintos para cada sistema escolhido, obtidos dos relatórios da empresa.

Para cada um dos sistemas escolhidos, fez-se o cálculo do fator característico ( $C_s$ ), obtendo-se resultados que serão apresentados e discutidos na seqüência deste trabalho. Neste trabalho, adota-se  $k = 12$ , correspondente aos doze meses de dados obtidos para cada sistema.

- Cálculo de  $C_s$  para o SMF  
 $C_s = 5682,4/12 = 473$
- Cálculo de  $C_s$  para CMC  
 $C_s = 5295,75/12 = 441$
- Cálculo de  $C_s$  para o CNC  
 $C_s = 991,23/12 = 83$
- Cálculo de  $C_s$  para a LTC  
 $C_s = 23105,5/12 = 1925$
- Cálculo de  $C_s$  para a LTS  
 $C_s = 10098/12 = 841$
- Cálculo de  $C_s$  para a CFM  
 $C_s = 3884/12 = 324$

Dessa maneira tem-se um parâmetro representativo para cada sistema que é o fator característico  $C_s$ . Há de ressaltar que o  $C_s$  determinado para cada sistema é um valor médio (na verdade  $C_s$  está numa faixa de valores entre um máximo e um mínimo), portanto, contempla as variações ocorridas durante os diversos carregamentos, no período de tempo medido.

## Conclusão e Comentários

Os testes do fator característico ( $C_s$ ) para cada sistema de manufatura permitem concluir que: sistemas com maior nível de automação e maior nível organizacional têm menor fator característico  $C_s$ , sendo este um valor médio.

Analisando-se a influência de  $n$  no fator característico  $C_s$ , conclui-se: sistemas que têm boa adaptabilidade a aumento de  $n$  têm maior nível de automação e também organizacional, portanto, possuem menor fator característico  $C_s$  e são mais flexíveis.

É possível, a partir de testes realizados, mas não reproduzidos neste trabalho, discutir outras questões relativas ao fator característico do sistema de manufatura, tais como: simulação para novos programas de produção, análise dos tempos de setup, análise e comportamento do nível de automação no chão de fábrica, relação entre  $C_s$  e o índice de automação, etc.

Em resumo, o fator característico do sistema de manufatura ( $C_s$ ) permite uma análise do comportamento do sistema de manufatura e pode ser utilizado como uma ferramenta gerencial para tomada de decisões relativas aos parâmetros que compõem este fator  $C_s$ .

## Referências

- Batocchio, A., 1991, "Um Modelo de Índice de Automação Relacionando Flexibilidade e Produtividade dos Sistemas de Manufatura", Tese de doutorado, FEM/UNICAMP, Campinas, Brasil.
- Eversheim, W., Brachtendorf, T. e Koch, L. F., 1986, "Changes in the Role of Production Management in the CIM-Era", *Annals of the CIRP*, 35, pp. 505-512.
- Edwaldz, D. B., 1986, "Flexible Manufacturing Systems: Some Fact, Some Fiction", *Proceedings of the 5th International Conference on FMS*, 5 (Nov.), pp. 427-438.
- Gold, B., 1986, "Perspectives on Continuing Advances in Automation: Past Limitations and Emerging Potentials", *Technovation* (Apr.), pp. 153-162.
- Groover, M. P., 1980, "Automation, Production Systems and Computer-aided Manufacturing". Prentice-Hall, New York, EUA.

# Medidor de Densidade de Líquidos por Ultra-Som

## *Ultrasonic Density Measurement of Flowing Liquids*

Julio C. Adamowski

Lucas A. Moscato

Claudio Simon

Flávio Bulochi

Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP  
Caixa Postal 8174 - 01065-970 - São Paulo, SP

### Abstract

This work is about the development of continuous density measurement strategies of liquids flowing in pipelines, using pulsed ultrasonic propagation properties. Two density measurement strategies based on acoustic pressure reflection coefficient measurement at the interface between a reference material and the liquid which density will be measured were developed. In order to avoid errors due to the acoustic diffraction effect, the lack in stability (in time) of the transducer and the associated electronics, it was developed a double-element transducer, with ceramic emitter and a PVDF film receptor.

**Keywords:** Continuous Measurement, Liquid Density, Pulsed Ultrasonic Propagation

### Resumo

Este trabalho trata do desenvolvimento de estratégias de medição contínua de densidade de líquidos escoando em tubos, utilizando as propriedades da propagação de ultra-som pulsado. Foram desenvolvidas duas estratégias baseadas na medição do coeficiente de reflexão da pressão acústica na interface entre um material de referência e o líquido cuja densidade será medida. Para evitar erros devidos ao efeito de difração acústica e à falta de estabilidade (no tempo) do transdutor e eletrônica associada, utiliza-se um transdutor duplo elemento, com emissor cerâmico e receptor de filme de PVDF (Poly-Vinylidene Fluoride).

**Palavras-chave:** Medição Contínua, Densidade de Líquidos, Propagação de Ultra-som Pulsado

### Introdução

A caracterização de materiais, por ultra-som, é baseada na observação de parâmetros da onda acústica: velocidade de propagação, fase, amplitude, etc. Estes parâmetros sofrem alterações ao encontrar a interface entre materiais, e ao se propagar num destes materiais. A partir destes parâmetros pode-se calcular os coeficientes de reflexão e transmissão entre materiais, o coeficiente de atenuação, a impedância acústica de um dado material, etc.

McSkimin (1964) apresenta uma revisão sobre os métodos utilizados na medição de propriedades mecânicas de líquidos e sólidos. As técnicas mais antigas de caracterização de materiais utilizavam ondas contínuas e transdutores de quartzo. As técnicas mais modernas utilizam transdutores cerâmicos excitados com pulsos estreitos (banda larga) ou com trem de pulsos constituídos por alguns ciclos de senóide.

A densidade  $\rho$  de um líquido newtoniano é obtida pela relação  $Z = \rho c$ , sendo  $c$  a velocidade de propagação da onda acústica no líquido, e  $Z$  a impedância acústica característica do meio.  $Z$  é calculado a partir da medição do coeficiente de reflexão de uma onda plana entre um meio conhecido e o líquido em questão. A velocidade de propagação no meio é facilmente medida com uma boa precisão. Por outro lado, os métodos disponíveis para a medição de impedância acústica estão sujeitos a erros tais como: influência da atenuação no meio, efeito de difração acústica, falta de estabilidade do transdutor (emissão e recepção), acoplamento acústico do transdutor, etc. Além disso, estes métodos não são adequados à medição de propriedades acústicas e mecânicas de líquidos em movimento numa tubulação.



Neste trabalho propõe-se a utilização de dois métodos para a medição do coeficiente de reflexão, ambos implementados com um transdutor duplo elemento, emissor e receptor separados. Foram desenvolvidas células de medições para líquidos em repouso e líquidos em movimento. Os sinais são adquiridos digitalmente e processados posteriormente para obtenção da densidade do líquido.

## Medição do Coeficiente de Reflexão

Quando uma onda acústica, com pressão  $p_i$ , se propaga em um meio 1 (com densidade  $\rho_1$  e velocidade de propagação  $c_1$ ) e encontra a interface com um outro meio 2 (com densidade  $\rho_2$  e velocidade de propagação  $c_2$ ), parte desta onda é refletida, com pressão  $p_r$  e parte é transmitida, com pressão  $p_t$ , como mostrado na Fig. 1. A análise deste fenômeno é bastante simplificada quando assume-se a incidência de um onda plana, numa interface plana entre dois meios fluidos, homogêneos. Quando um dos meios é sólido o fenômeno é mais complicado, devido aos dois tipos de ondas, longitudinal e de cisalhamento, que se propagam em sólidos. No caso de incidência normal, que será utilizado neste trabalho, a grande maioria dos sólidos obedece as mesmas leis para os fluidos (Kinsler, 1982).

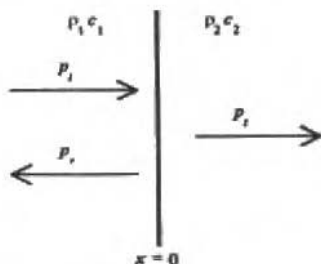


Fig. 1 Propagação na interface de dois meios

O coeficiente de reflexão de pressão é dado pela expressão:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (1)$$

onde  $Z_1$  é a impedância acústica característica do meio 1 e  $Z_2$  é a impedância acústica característica do meio 2.

O coeficiente de reflexão de pressão acústica é definido pela relação entre a pressão refletida e a pressão incidente. Devido à dificuldade de se medir diretamente a pressão incidente, utilizam-se métodos baseados em múltiplas reflexões que permitem, através de manipulações algébricas, o cancelamento da amplitude incidente. Através desses métodos pode-se cancelar também o efeito do acoplamento do transdutor com o meio, a atenuação acústica no meio, etc.

O método analisado por Papadakis (1990b), para medição de propriedades acústicas de sólidos, é baseado em múltiplas reflexões onde o coeficiente de reflexão é medido com a finalidade de se determinar o coeficiente de atenuação. Nesse método utiliza-se um meio que funciona como uma linha de retardo entre o transdutor e a amostra, cujas propriedades acústicas serão medidas. A amostra fica entre a linha de retardo e um meio refletor (impedância acústica muito diferente da amostra). A Fig. 2 mostra um desenho esquemático do método dos múltiplos ecos. O transdutor emite um pulso (ou um trem de pulsos) com amplitude  $A_i$  que se propaga pela linha de retardo (meio 1) e, ao encontrar a interface com a amostra (meio 2) parte do pulso é transmitida e parte é refletida e se propaga de volta até atingir o transdutor, com amplitude  $A_0$ . A parte transmitida que se propaga pela amostra é refletida pelo refletor (meio 3) e volta para a interface amostra/linha de retardo, sendo que parte é transmitida e captada pelo transdutor, com amplitude  $A_1$ , parte é refletida e se propaga na amostra até atingir o

refletor, sendo que parte deste eco chegará ao transdutor com amplitude  $A_2$ . O material da linha de retardo tem coeficiente de atenuação  $\alpha_1$ , e o da amostra tem coeficiente de atenuação  $\alpha_2$ . As expressões (2, 3, e 4) relacionam as amplitudes dos ecos com a amplitude incidente, através dos coeficientes de reflexão, transmissão e atenuação.

$$A_0 = A_i R_{12} e^{-2\alpha_1 l} \quad (2)$$

$$A_1 = A_i T_{12} R_{23} T_{21} e^{-2\alpha_1 l} e^{-2\alpha_2 L} \quad (3)$$

$$A_2 = A_i R_{21} T_{12} R_{23} R_{23} T_{21} e^{-2\alpha_1 l} e^{-4\alpha_1 L} \quad (4)$$

onde:

$R_{mn}$  coeficiente de reflexão da onda se propagando no meio  $m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) ao atingir o meio  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ );

$T_{mn}$  coeficiente de transmissão do meio  $m$  para o meio  $n$ ;

$l$  distância percorrida na linha de retardo, e

$L$  distância percorrida na amostra.

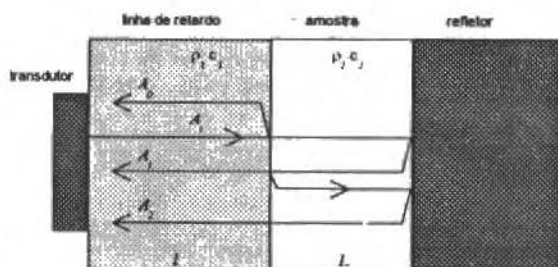


Fig. 2 Método das múltiplas reflexões

Considerando  $R = R_{12}$  chega-se à seguinte relação:

$$\frac{R^2}{(1 - R^2)} = -\frac{A_0 A_2}{A_1 A_i} \quad (5)$$

Os valores das amplitudes  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  devem ser acompanhados dos respectivos sinais (+ ou -), de acordo com a fase do eco recebido.

Devido à dimensão finita do transdutor, o feixe vai abrindo ao se propagar. Este efeito é conhecido como difração acústica e deve ser corrigido matematicamente. A correção depende da velocidade de propagação da onda acústica no meio e das características do transdutor.

Um outro método, proposto por McClements (1991) tem um arranjo físico semelhante ao do método das múltiplas reflexões. A amostra é colocada entre uma linha de retardo e um refletor. O refletor só é utilizado para determinar o coeficiente de atenuação do meio, e a velocidade de

propagação da onda acústica na amostra. O coeficiente de reflexão  $R$  é determinado pela relação entre a amplitude  $A_0$  do eco refletido da interface entre a linha de retardo e a amostra, dada pela expressão (2), e a amplitude  $A_{ar}$  do eco refletido da interface linha de retardo e o ar (refletor perfeito), dado pela expressão:

$$A_{ar} = A_i R_{1ar} e^{-2\alpha_1 l} \quad (6)$$

Como  $R_{1a} = 1$ , considerando  $R = R_{12}$ , tem-se que:

$$R = \frac{A_0}{A_{ar}} \quad (7)$$

O arranjo deste método é mais simples que o das múltiplas reflexões, porém menos robusto, pois  $R$  depende de medidas num refletor perfeito, no caso o ar, que funciona como referência. É necessário efetuar correções devido à variação de temperatura, e a excitação deve ser constante, pois tem um efeito direto na amplitude  $A_0$  do eco.

## Medição da Velocidade de Propagação

Existem vários métodos para medir a velocidade baseados na medição do intervalo de tempo entre ecos. Revisões desses métodos são apresentadas por Papadakis (1990a) e Breazele (1981). O tempo de propagação no meio é obtido através de um cronômetro que é disparado na emissão do pulso e travado na recepção do eco de uma superfície a uma distância conhecida. A precisão da medida de velocidade está relacionada com a distância percorrida e com a detecção do início e fim do intervalo de tempo. O gatilhamento do início e fim do intervalo é feito através de um circuito de detecção de nível ou de um detector de cruzamento por zero. Essas técnicas exigem circuitos eletrônicos rápidos e precisos.

Atualmente os sistemas digitais de aquisição de sinais estão bastante avançados e as técnicas de processamento digital de sinais fornecem bons resultados na determinação do intervalo de tempo entre ecos, com a aplicação de correlação cruzada (Foster, 1984).

A Fig. 3 mostra dois ecos de uma mesma interface. O primeiro eco  $A_1(t)$  serve como ponto de referência para medição do tempo. Depois do intervalo de tempo  $T$  chega um segundo eco  $A_2(t)$ . A função de correlação entre os dois ecos é definida por:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(t) A_2(t + \tau) dt \quad (8)$$

Os dois ecos têm a mesma forma de onda, porém o segundo eco está atrasado em relação ao primeiro pelo intervalo de tempo  $T$ , isto é,  $A_2 = A_1(t - T)$ , assim,

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(t) A_1(t - T + \tau) dt = C_{//}(\tau - T) \quad (9)$$

onde  $C_{//}(\tau - T)$  é a função autocorrelação de  $A_1(t)$  que é máxima quando  $\tau = T$ . Assim, o máximo da função correlação ocorre no tempo  $T$ .

O método de correlação cruzada é muito conveniente quando se trabalha com o sinal digitalizado. Os resultados são influenciados pela taxa de amostragem, e pela forma de onda dos ecos. No caso de ecos de interfaces planas e paralelas o resultado é muito preciso.

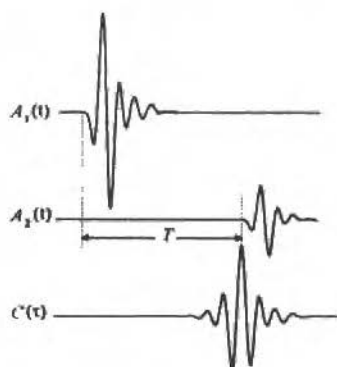


Fig. 3 Função correlação  $C(\tau)$  do primeiro eco  $A_1(t)$  com o segundo eco  $A_2(t)$

## Transdutor Duplo Elemento

Para minimizar os efeitos da difração foi desenvolvido um transdutor, constituído por dois elementos piezoelétricos: um para emissão e outro para recepção, separados por um sólido homogêneo (Adamowski, 1993). O emissor pode ser um transdutor utilizado em imagem médica por ultra-som ou em ensaios não destrutivos (END) e o receptor um filme fino (membrana) de PVDF, metalizado em ambas as faces, com um grande diâmetro (comparado ao diâmetro do emissor).

Para aplicações em líquidos, objetivo deste trabalho, o material da linha de retardo deve ser preferencialmente um plástico, para que as amplitudes  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  não tenham valores muito diferentes entre si. O plástico escolhido foi o polimetil-metacrilato, que apresenta uma baixa atenuação acústica em relação aos demais plásticos. A membrana de PVDF com espessura de  $52 \mu\text{m}$  é metalizada com uma fina camada de alumínio (ou alumínio-níquel) em ambas as faces formando os eletrodos do transdutor (receptor). As faces das linhas de retardo devem ser bem paralelas. A Fig. 4 mostra um desenho esquemático do transdutor duplo.

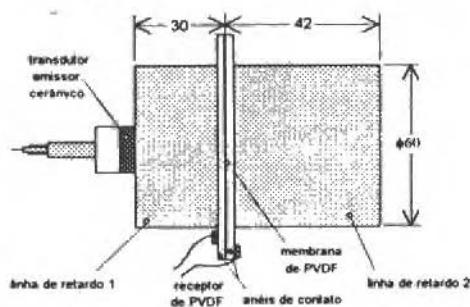


Fig. 4 Desenho esquemático do transdutor duplo

## Célula de Medição de Densidade

A célula de medição de densidade, mostrada na Fig. 5, funciona basicamente segundo os dois métodos utilizados para determinação do coeficiente de reflexão na interface entre dois meios. O transdutor emissor é excitado com um pulso estreito ou com ciclos de senóide (um ou mais ciclos), por um circuito de potência. O transdutor emite uma onda que se propaga no sólido da primeira linha de retardo até atingir a superfície do receptor. Este é sensibilizado (mede a onda de pressão transmitida  $A_T$ ) e deixa passar praticamente toda a onda incidente, devido ao bom casamento de impedância acústica e à pequena espessura da membrana de PVDF. A onda de pressão transmitida segue até atingir a interface entre a segunda linha de retardo e o líquido (amostra), onde parte da onda é refletida retornando ao receptor com amplitude  $A_0$ , e parte é transmitida para o líquido, refletida pelo refletor retornando para o receptor com amplitude  $A_1$ . O segundo eco  $A_2$  da interface amostra/refletor também é recebido pelo receptor.

Com este arranjo tem-se o sinal da onda transmitida  $A_T$ , que é utilizado para determinar a velocidade de propagação na linha de retardo, e também para corrigir o erro devido às variações do transdutor emissor que ocorre no método que utiliza como referência o coeficiente de reflexão da interface linha de retardo/ar. A velocidade de propagação na linha de retardo é utilizada para corrigir a variação da impedância acústica com a temperatura, pois o material da linha de retardo é a referência para o cálculo da impedância acústica do líquido.

O método de determinação do coeficiente de reflexão regido pela Eq. (7) pode ser melhorado, introduzindo-se uma normalização em relação ao sinal transmitido  $A_T$  que, como os sinais  $A_{ar}$  e  $A_0$ , varia no tempo. Considerando-se que  $A_{ar}$  e  $A_0$  variam proporcionalmente a  $A_T$ , a Eq. (7) pode ser tratada como:

$$R = \frac{[A_0/A_T]_{t_1}}{[A_{ar}/A_T]_{t_0}} \quad (11)$$

onde, os índices  $t_0$  e  $t_1$  significam que as relações  $A_{ar}/A_T$  e  $A_0/A_T$  foram calculadas com valores de amplitudes obtidas em momentos diferentes.

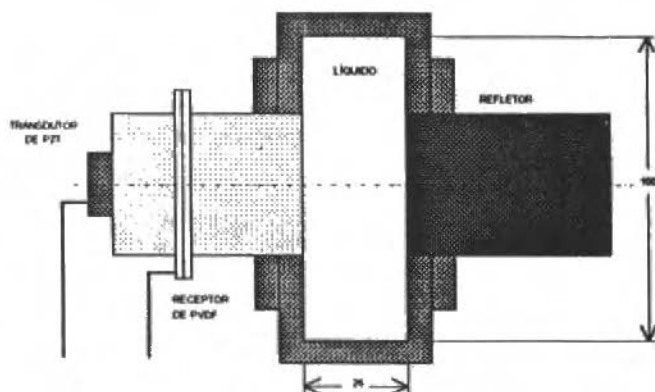


Fig. 5 Corte transversal da célula de medição de densidade (líquido em movimento)

A velocidade de propagação da onda acústica no material da linha de retardo é determinada a partir da medição do tempo de trânsito entre o sinal  $A_T$  e o sinal  $A_0$  pelo método de correlação cruzada, e do comprimento da linha de retardo, que é conhecido.

As expressões (5) e (11), utilizadas para calcular o coeficiente de reflexão devem ser aplicadas em valores de picos das amplitudes ( $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , e  $A_{ar}$ ) obtidos numa mesma frequência, porque os coeficientes de atenuações dependem da frequência, e foram cancelados supondo que as amplitudes referem-se a uma única frequência. No caso de excitação com ciclos de senóide os picos de amplitudes podem ser obtidos diretamente dos sinais, porém quando se trabalha com pulsos de banda larga devem ser obtidos os respectivos espectros em frequência dos sinais para extrair as componentes numa mesma frequência.

## Sistema de Medição

O sistema eletrônico utilizado na implementação dos métodos de medição de densidade de líquidos por ultra-som é mostrado no diagrama de blocos da Fig. 6.

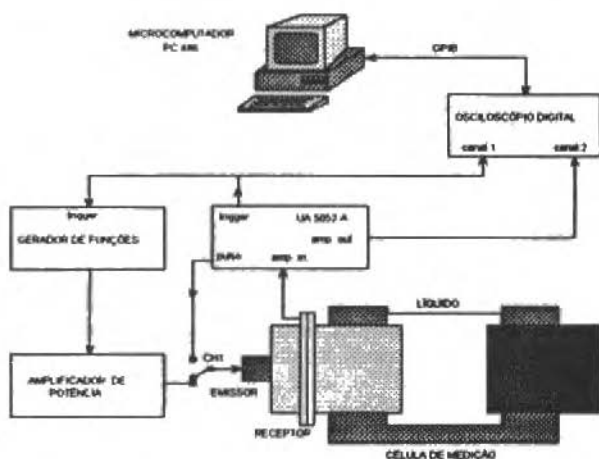


Fig. 6 Equipamentos eletrônicos utilizados no experimentos

A aquisição de sinais é feita através de um osciloscópio digital programável com taxa de aquisição de 400 Msamples/s (HP 5412D), munido de interface de comunicação GPIB. Este osciloscópio tem resolução de 8 bits (em modo repetitivo de amostragem) na medição de amplitude de um sinal. Os atrasos entre sinais são programáveis. Os sinais foram adquiridos através da média de 64 amostras. O osciloscópio está ligado a um microcomputador tipo PC486 através da interface GPIB.

## Resultados Experimentais

Foram realizadas experiências de medição de densidade de alguns líquidos (água, gasolina e óleo diesel). Utilizou-se um transdutor emissor de 1,6 MHz excitado com um ciclo de senóide. A Fig. 7 mostra os sinais típicos de uma medição. Os intervalos de tempo  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  foram medidos através da técnica de correlação cruzada.

Para executar as medições com o líquido em movimento foi construída uma linha hidráulica com vazão regulável de 0 a 20 litros/segundo (Buiochi, 1992).

Nas medições com o líquido em movimento foi utilizada apenas água. Verificou-se que o valor da densidade independe da vazão do líquido, mesmo com um elevado grau de turbulência, desde que não ocorra cavitação.

Os resultados experimentais foram comparados com os respectivos valores da densidade de cada líquido (medidos com picnômetro) e os desvios ficaram na faixa de  $\pm 1\%$ .

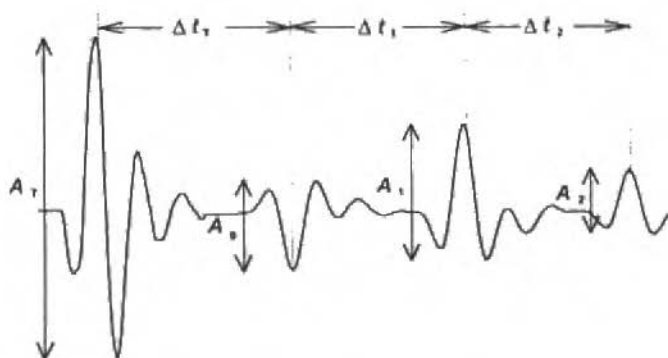


Fig. 7 Sinais obtidos na célula de medição de densidade

## Conclusões

Foram avaliadas duas estratégias para a medição de densidade de líquidos. Uma baseada no método de reflexão relativa e outra no método de múltiplas reflexões. As duas estratégias são aplicáveis tanto à medição de líquidos em repouso, quanto à medição de líquidos escoando em tubos. A estratégia baseada no método de múltiplas reflexões é menos sensível às variações no acoplamento do transdutor com a linha de retardo, porém não é muito apropriada para aplicações em tubulações com grandes diâmetros, devido aos efeitos de difração. A estratégia baseada no método de reflexão relativa é menos sensível ao problema de difração, porém depende da estabilidade (ao longo do tempo) do emissor, do receptor e da eletrônica analógica associada. O desenvolvimento do transdutor duplo elemento possibilitou a eliminação do efeito de difração (para curtas distâncias) e o problema de estabilidade dos componentes do sistema de medição.

O sistema de medição, constituído pela célula e a eletrônica associada possibilitou a obtenção de resultados com grande repetibilidade. Os resultados experimentais da medição de densidade de líquidos (água, gasolina e diesel) em repouso apresentaram resultados com desvio máximo da ordem de  $\pm 1\%$ . A medição de amplitude é o ponto mais crítico dos métodos de determinação do coeficiente de reflexão.

## Referências

- Adamowski, J. C., 1993, "Medição de Densidade de Líquidos por Ultra-Som", Tese de Doutorado, EPUSP, São Paulo, Brasil.
- Buiochi, F., Adamowski, J. C., 1992, "Análise da Medição de Vazão por Ultra-Som pelo Método da Contra-Propagação", Anais do 9º Congresso Brasileiro de Automática, pp. 1152-1157, Vitória, Brasil.
- Breazele, M. A., Cantrell Jr, J. H., Heyman, J. S., 1981, "Ultrasonic Wave Velocity and Attenuation Measurements", Methods of Experimental Physics, Vol. 19, pp. 67-135.
- Foster, S. D., 1984, "A Pulsed Ultrasonic Flowmeter Employing Time Domain Methods", Ph. D. Thesis in Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., 1982, "Fundamentals of Acoustics", John Wiley and Sons, 2nd ed.
- McSkimin, H. J., 1964, "Ultrasonic Methods for Measuring Properties of Liquids and Solids", Physical Acoustics, Vol. 1A, Academic Press, pp. 271-334.
- McClements, D. J., Fairley, P., 1991, "Ultrasonic Reflectometer", Ultrasonics, Vol. 29, pp. 58-62.
- Papadakis, E. P., 1990a, "The Measurement of Ultrasonic Velocity", Physical Acoustics, Vol. 19, Academic Press, pp. 81-107.
- Papadakis, E. P., 1990b, "The Measurement of Ultrasonic Attenuation", Physical Acoustics, Vol. 19, Academic Press, pp. 107-266.

# Análise Numérica e Experimental de uma Bomba Capilar

## *Numerical and Experimental Study of a Capillary Pump*

C. J. N. Ferreira  
R. F. de Miranda

Universidade Federal de Uberlândia  
Depto. Engenharia Mecânica  
Uberlândia, MG - CEP 38400-206

### Abstract

It is analyzed in this work the heat and flow in a vertical tube filled with a porous medium and this tube works as a capillary pump. The mathematical model is based on mass, momentum and energy equations along with the empirical correlation of Darcy. The solution is obtained by a numerical procedure, using the finite volume technic due to Patankar with the power-law method. Radial and axial velocities profiles are presented and the temperature profile as well, for different conditions of operations. The pumping mass is calculated and compared with the experimental data.

**Keywords:** Porous Medium, Capillary Pump, Mathematical Model, Pumping Mass Flow Rate

### Resumo

No presente trabalho é apresentado e analisado o escoamento e o transporte de energia em um duto recheado com uma estrutura porosa. O modelo matemático é baseado nas equações de conservação de massa, movimento e energia, além do modelo empírico de Darcy. A solução numérica é obtida pelo método dos volumes finitos proposto por Patankar, usando-se o conceito de malha deslocada e a técnica do power-law. Os resultados em forma de perfis da velocidade radial e axial e temperatura para várias condições de operação são apresentados e discutidos. A massa bombeada é calculada e comparada com os resultados experimentais.

**Palavras-chave:** Meio Poroso, Bomba Capilar, Análise Numérica

### Introdução

A transferência de calor e massa, além do escoamento de gases e líquidos através de um meio poroso, tem atraído a atenção de um grande número de pesquisadores.

O crescimento destes estudos pode ser creditado a dois fatores em especial: primeiro, melhorar o rendimento dos sistemas térmicos existentes que utilizam materiais porosos; o segundo fator seria gerar novas idéias e explorar novos caminhos com relação ao uso de materiais porosos em áreas em que a sua utilização é restrita, ou, não é economicamente vantajosa no momento.

Vafai e Tien (1982), utilizando o modelo empírico de Darcy junto com os termos convectivos e aplicando o princípio da média volumétrica local às equações de quantidade de movimento e energia, desenvolveram um modelo matemático para a análise de escoamentos em meios porosos.

Outros trabalhos nesta área que merecem destaque são os de Lehner (1979), propondo uma nova formulação matemática para as equações de um fluido viscoso escoando lentamente através de um meio poroso e, os de Renken e Poulikakos (1987), levando em conta os efeitos de inércia, porosidade variável e do atrito de Brinkman.

Na área de convecção natural em meios porosos destacam-se os trabalhos de Prasad et al. (1985), Kaviany et al. (1985), Yuçel (1990) e o de Nilsen e Storesletten (1990).

O presente trabalho consiste na comprovação experimental e numérica de uma bomba capilar cujo modelo analítico foi apresentado por Miranda (1991). Neste estudo, são considerados os efeitos de empuxo e de vaporização na borda superior da bomba. As equações governantes são obtidas através das equações de conservação da massa, movimento e energia junto com a relação empírica de Darcy. É analisado também, o comportamento da bomba além da comparação experimental e teórica da massa bombeada em diferentes condições de funcionamento da bomba.



## Formulação Matemática

A geometria da bomba é mostrada na Fig. 1. Consiste de um cilindro vertical, recheado com um meio poroso tendo sua extremidade inferior mergulhada em água. Quando a bomba está imersa, ocorre uma elevação do líquido até uma certa altura devido ao efeito de capilaridade, formando um menisco na interface entre o líquido e o ar existente dentro do meio poroso. O aquecimento das paredes da bomba faz com que o líquido em seu interior vaporize. Conforme este vapor se desloca através do meio poroso acaba se condensando e saturando o meio, com o líquido atingindo a borda da superfície do tubo e daí, vaporizando para o meio ambiente.

O aquecimento lateral é suficiente apenas para a promoção do deslocamento do líquido, sendo a vaporização processada na borda superior da bomba por difusão.

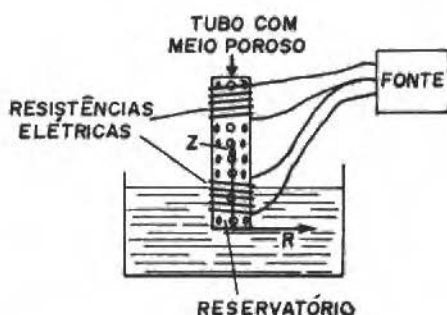


Fig. 1 Representação esquemática da bomba capilar em estudo

Considera-se que o meio é isotrópico, o fluido incompressível, com as paredes do tubo na temperatura  $T_p$  e a extremidade superior em contato com o meio ambiente à temperatura  $T_0$  e pressão  $P_0$ , as equações governantes para este problema são:

- Equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \langle V \rangle = 0 \quad (1)$$

- Equação do movimento:

$$\rho_f \langle V \rangle \cdot \nabla \langle V \rangle = -\varepsilon \nabla \langle P \rangle - \frac{\mu_f}{K} \langle V \rangle - \rho_f F \frac{\varepsilon^2}{K^{1/2}} + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \langle V \rangle + \rho_f g \beta (T - T_0) \quad (2)$$

- Equação da energia:

$$\langle V \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle = \frac{K e}{\rho_f C_p \varepsilon} \nabla^2 \langle V \rangle \quad (3)$$

Como os valores obtidos experimentalmente das velocidades do fluido através do meio poroso são pequenas, pode-se desprezar o termo de segunda ordem da equação de Darcy. Adotando as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned}
 U &= Vr/U_i & W &= Vz/U_i & R &= r/R_t \\
 Z &= z/L & p^* &= \frac{2P}{\rho V_i^2} & \theta &= \frac{T - T_o}{T_p - T_o}
 \end{aligned} \quad (5)$$

e os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{\rho_f U_i D}{\mu} & Da &= K/D^2 & Pr &= \frac{C_p \mu_f}{Ke} \\
 Gr &= \frac{g \beta D^3 (T_p - T_o)}{\nu^2} & Pe &= Pr Re
 \end{aligned} \quad (6)$$

Considerando que o problema em estudo é bi-dimensional com geometria cilíndrica e simetria em  $\theta$ , as equações governantes adimensionais são escritas da seguinte maneira:

- Equação de continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \frac{R}{L} \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (7)$$

- Equação de movimento na direção radial:

$$U \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{Rt}{L} W \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{2}{Re} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{Rt^2}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)^2 - \frac{\epsilon U}{2ReDa} \quad (8)$$

- Equação de movimento na direção axial:

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{Rt}{L} W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\epsilon Rt}{2L} \frac{dP^*}{dZ} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} - \frac{Rt^2}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) - \\
 - \frac{\epsilon W}{2ReDa} + \frac{gR}{2Re^2} \theta
 \end{aligned} \quad (9)$$

- Equação da energia:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{Rt}{L} W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{2}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{Rt^2}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (10)$$

Estas equações estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

- Na parede do tubo:

$$\begin{aligned} U &= 0 && \text{(condição de contorno sólido)} \\ W &= 0 && \text{(condição de não escorregamento)} \\ \theta &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

- Centro do tubo

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad \text{(condição de simetria)}$$

Na borda superior da bomba capilar, considera-se a velocidade de bombeamento na região de líquido, devido à vaporização, como sendo igual àquela encontrada na borda inferior, que está imersa na água. Portanto:

$$U(R, 0) = U(R, 1) = 0 \quad \text{ou} \quad W(R, 0) = W(R, 1) = U_i \quad (12)$$

e também tem-se que:

$$\begin{aligned} \theta(R, 1) &= 0 && \text{apenas a parede lateral é aquecida} \\ \text{ou} \\ \theta(R, 1) &= 1 && \text{parede lateral e borda superior aquecidas} \end{aligned}$$

e na parede lateral da bomba, temos

$$\begin{aligned} \theta(1, Z) &= 1 \\ \text{ou} \\ \theta(1, Z) &= q \end{aligned} \quad (12a)$$

Na borda inferior da bomba capilar, o fluido tem uma temperatura igual no ambiente, então:

$$\theta(R, 0) = 0 \quad (12b)$$

A taxa de transferência de massa pode ser obtida por uma expressão que é a função das pressões parciais do meio e do vapor de água, dada por:

$$Na = \frac{Sh}{RaTaD} \frac{0,000146 T^{2,5}}{P_{AB}(T+441)} [P_{AS} - P_{A0}] \quad (13)$$

Considerando que o transporte de massa na borda superior da bomba capilar ocorre como uma convecção mássica sobre uma placa plana, então para um número de Schmidt unitário, tem-se que o número de Sherwood pode ser dado pelas seguintes relações empíricas:

$$Sh = \frac{KcD}{D_{AB}} = 0,0365 Re_D^{4/5} \quad (\text{fluxo turbulento sobre uma placa plana})$$

$$Sh = \frac{KcD}{D_{ab}} = 0,360 Re_D^{1/2} \quad (\text{fluxo laminar sobre uma placa plana}) \quad (14)$$

Com as Eqs. (14) e (13) é possível determinar-se  $U_i$ .

## Análise e Discussão dos Resultados

Quando a bomba é imersa em água, esta sobe até uma certa altura devido à pressão de capilaridade. O fornecimento de um fluxo de calor na parede da bomba, cria um gradiente de pressão que auxilia a empurrar o menisco da interface vapor-líquido até a sua borda superior. Conforme a água sobe através do meio poroso sua temperatura vai aumentando, criando, assim, as condições necessárias para a sua vaporização por difusão na superfície da bomba.

Esta taxa de vaporização está relacionada ao fluxo de calor fornecido para o aquecimento das paredes da bomba, o diâmetro da bomba e o diâmetro das partículas. Portanto, não adianta fornecer um fluxo de calor muito elevado à parede da bomba, pois o sistema atingiria temperaturas muito superiores às de vaporização no interior do meio poroso, criando bolsões de vapor e, como o menisco líquido-vapor está acima da posição de equilíbrio da pressão de capilaridade, a bomba capilar deixa de funcionar como uma bomba, promovendo daí para frente a transferência de massa por vaporização no interior do meio poroso da bomba. E, se o aquecimento lateral para o bombeamento estiver acima da posição de equilíbrio da pressão da capilaridade, a bomba efetivamente entrará em colapso, pois a coluna de líquido estará abaixo da coluna de aquecimento.

Deve-se fornecer um fluxo de calor à parede da bomba, em uma faixa que varie entre o mínimo necessário para produzir-se as condições necessárias à vaporização do fluido na superfície da bomba e, um máximo correspondente à máxima taxa de vaporização que pode ser conseguida na superfície da mesma.

As Figs. 2-5 mostram os perfis teóricos obtidos na simulação numérica da distribuição radial das velocidades axial e radial, para os dois tubos, diferentes fluxos de calor aplicados no aquecimento das paredes da bomba, em três alturas próximas à região de vaporização.

Para o perfil da velocidade radial, observa-se que, na região da vaporização, a sua direção é contrária àquela apresentada nas regiões próximas, levando a crer que exista uma região de recirculação devido ao efeito de empuxo que é maior do que o efeito de vaporização.

Como o efeito de empuxo é menor para um número de Grashof menor, estes efeitos de recirculação são menores para a bomba de menor diâmetro, como mostram os gráficos das duas bombas com o mesmo fluxo de calor na parede e mesma altura acima do nível da água.

No caso do tubo de diâmetro maior, percebe-se que, conforme a proximidade da parede, há uma nova inversão na direção da velocidade, levando-se a acreditar que haja uma outra região de recirculação.

Pelo perfil radial da velocidade axial, observa-se que, próximo à região de vaporização, para a bomba de menor diâmetro, os valores da velocidade são bem próximos. No caso do tubo de diâmetro maior, estes valores vão se tornando mais próximos conforme se aproximam da parede do tubo. Em certas montagens, ocorreu uma inversão na direção da velocidade.

Este efeito do empuxo e da vaporização torna-se mais acentuado conforme aumenta o fluxo de calor na parede da bomba ocorrendo reversão do fluxo para as potências mais altas.

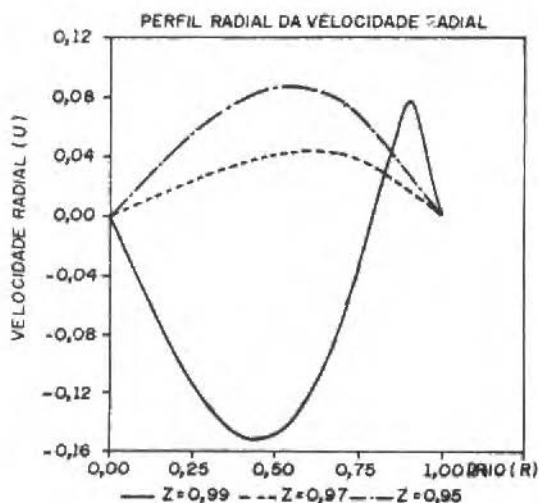


Fig. 2 Curvas teóricas da velocidade radial para o tubo de 80 mm de diâmetro todo imerso em água e potência de aquecimento igual a 75 watts

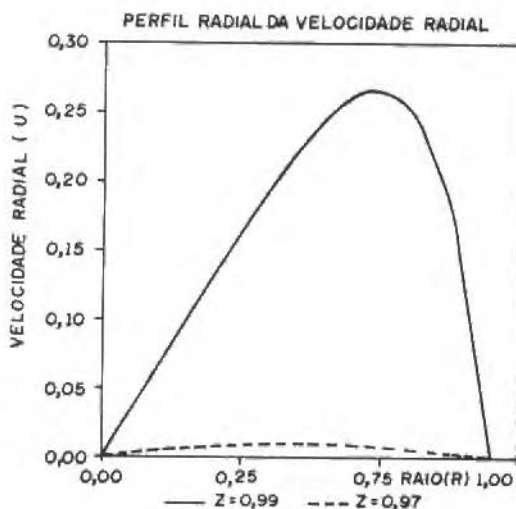


Fig. 3 Curvas teóricas da velocidade radial para o tubo de 56 mm de diâmetro todo imerso em água e potência de aquecimento igual a 75 watts

A Fig. 6 mostra os perfis experimentais da distribuição radial da temperatura. Observa-se que, pelos pontos experimentais plotados sobre as curvas teóricas, o modelo numérico descreve com boa precisão o experimento realizado.

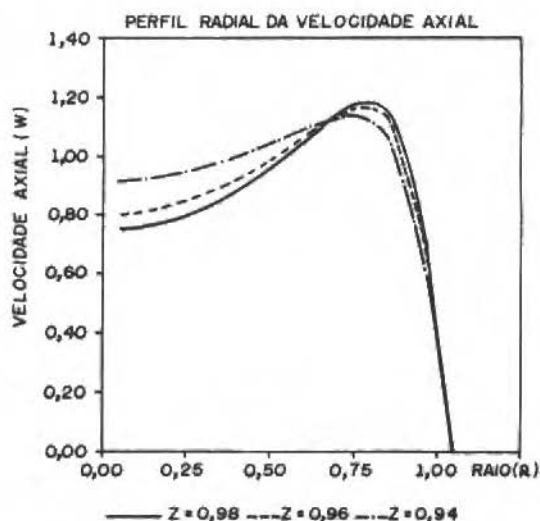


Fig. 4 Curvas teóricas da velocidade axial para o tubo de 80 mm de diâmetro todo imerso em água e potência de aquecimento igual a 75 watts

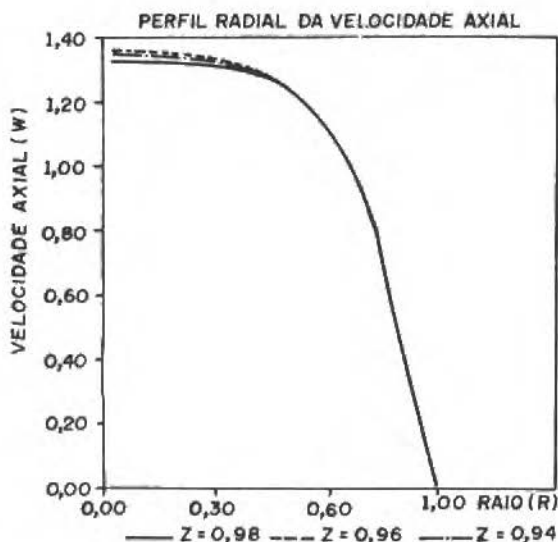


Fig. 5 Curvas teóricas da velocidade axial para o tubo de 56 mm de diâmetro todo imerso em água e potência igual a 75 watts

Na Tabela 1 são apresentados os valores teóricos experimentais da taxa de vaporização, pode-se notar que os resultados teóricos são menores que os experimentais. Isto é devido ao modelo proposto somente considerar que a difusão de massa ocorre na superfície superior da bomba. Na realidade, esta difusão ocorre no interior do meio poroso, sofrendo influência dos efeitos da parede e de inércia.

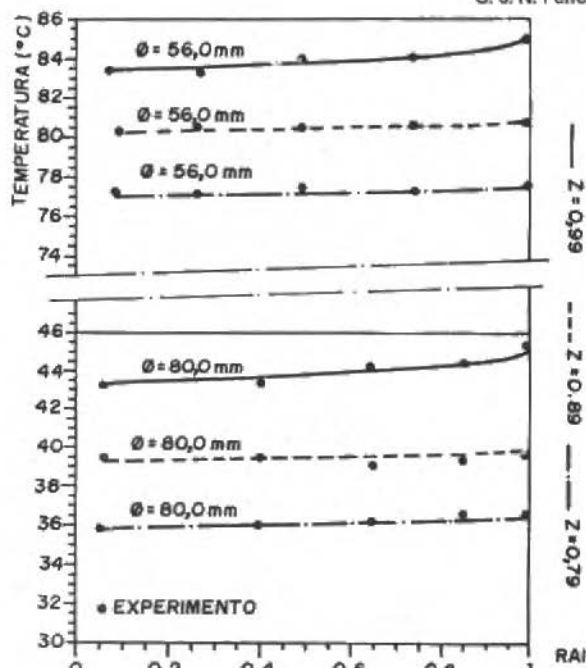


Fig. 6 Curvas experimentais da temperatura para o tubo de 80 e 56 mm de diâmetro todo imerso em água e potência de aquecimento igual a 75 watts.

A fase gasosa dentro do meio poroso desloca-se devido à concentração e ao gradiente de pressão nesta fase. No caso da fase líquida, somada à concentração, existe o movimento devido ao gradiente de tensão superficial, empuxo, inércia, ou combinação destes fatores.

Tabela 1 Valores experimentais e teóricos da taxa de vaporização

Velocidade de injeção (m/s)	Taxa teórica (Kg mol/m <sup>3</sup> s)	Taxa experimental (Kg mol/m <sup>2</sup> s)	Potência (watts)	Diâmetro do tubo
$3,23 \times 10^{-7}$	0,00020	0,00031	45	82 mm com 25 cm fora da água
$5,51 \times 10^{-7}$	0,00033	0,00053	75	
$9,18 \times 10^{-7}$	0,00058	0,00088	110	
$3,15 \times 10^{-7}$	0,00030	0,00030	75	82 mm todo imerso na água
$4,90 \times 10^{-7}$	0,00038	0,00047	110	
$6,30 \times 10^{-7}$	0,00044	0,00060	150	
$7,38 \times 10^{-8}$	0,00013	0,00071	45	57 mm com 25 fora da água
$1,14 \times 10^{-7}$	0,00026	0,00011	75	
$3,31 \times 10^{-7}$	0,00046	0,00032	110	
$8,09 \times 10^{-8}$	0,00078	0,00078	75	57 mm todo imerso na água
$2,27 \times 10^{-7}$	0,00022	0,00022	110	

## Conclusões

Pode-se concluir que o modelo proposto pode ser utilizado para a simulação de bombas capilares, mas deve-se adotar um modelo mais acurado para o fenômeno de difusão de massa na superfície da bomba.

O ponto mais crítico para o funcionamento da bomba capilar é a quantidade de calor fornecido para o seu aquecimento, já que este influencia diretamente a taxa de vaporização e também o efeito de empuxo do líquido.

Para uma melhor compreensão do efeito de empuxo e de vaporização na superfície da bomba, deve-se acoplar a equação de difusão de massa às condições de contorno do problema, melhorando assim o modelo matemático.

## Referências

- Kaviany, M., Tien, C. L., Hong, J. T., 1985, "Non-Darcian Effects on Vertical Plate Natural Convection in Porous Media with High Porosities", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 28, pp. 2149-2156.
- Lehner, F. K., 1979, "A Derivation of the Field Equations for Slow Flow through a Porous Medium", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol. 18(1), pp. 41-45.
- Miranda, R. F., 1991, "Performance Analysis of a Capillary Pump", *Proceedings of the 4th International Symposium on Transport Phenomena in Heat and Mass Transfer*, The University of New South Wales, vol. 4, pp. 1253-1264.
- Nilsen, T., Storesletten, L., 1990, "An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic Porous Channels", *ASME J. Heat Transfer*, vol. 112, pp. 396-401.
- Prasad, V., Kulacki, F. A., Keyhani, M., 1985, "Natural Convection on Porous Media", *J. Fluid Mech.*, vol. 150, pp. 89-119.
- Renken, K., Poulidakos, D., 1987, "Forced Convection in a Channel Filled with Porous Medium, Including the Effects of Flow Inertia, Variable Porosity and Brinkman Friction", *ASME J. Heat Transfer*, vol. 111, pp. 880-888.
- Renken, K., Poulidakos, D., 1988, "Experiments on Forced Convection from a Horizontal Heated Plate in a Packed Bed of Glass Spheres", *ASME J. Heat Transfer*, vol. 111, pp. 59-65.
- Renken, K., Poulidakos, D., 1988, "Experiment and Analysis of Forced Convective Heat Transfer in a Packed Bed of Spheres", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 31(7), pp. 1399-1408.
- Yucel, A., 1990, "Natural Convection Heat and Mass Transfer Along a Vertical Cylinder in a Porous Medium", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 33(10), pp. 2265-2274.
- Vafai, K., Tien, C. L., 1982, "Boundary and Inertia Effects on Convective Mass Transfer in Porous Media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 25(8), pp. 1183-1190.



## Abstracts

**Bianchi, E. C., Oliveira, J. F. G. and Souza, G. F., 1994, "(G) Ratio Optimization of CBN Resin Bond Wheels by the Grinding Conditions", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 94-104.**

This work shows experimental results of the wheel behavior during grinding of a tool steel and a hardened steel. The wheel wear phenomena are studied with emphasis on bond wear and grain wear mechanisms. The equilibrium between bond retention force and cutting force per grain is studied experimentally through grinding tests. The results analysis show that CBN 360 wheel wear can be reduced, improving the (G) ratio by the reduction of the bond wear. This bond wear can be optimized by changing the underformed chip geometry.

**Keywords:** Grinding Wheel Wear, Reduction of the Bond Wear

**Martinez, G. A. S. and Button, S. T., 1994, "Study on the Wire Drawing Speed Improvement of Austenitic Stainless Steel ABNT 304", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 105-119. (In Portuguese)**

This work presents a study on the wire drawing speed improvement with different die geometries and two types of lubricants. The influence of different die geometries on austenitic stainless steel ABNT 304 wire drawing force was also analyzed. Dies with bell angles of 10, 14 and 18° and bearing lengths of 20, 35 and 50% of the final diameter were used. The influence of high drawing speeds was studied also. The friction coefficient in wire drawing was also evaluated.

**Keywords:** Wire Drawing, Stainless Steel, Lubrication, Wires

**Bittar, A., Lucchesi, L., Sales, R. M. and Lima, A. C., 1994, "Application of LQG,  $H_\infty$  and LQG/ $H_\infty$  Controllers to a Magnetically Suspended Flexible Mechanical System", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 120-142. (In Portuguese)**

The subject of this work is the analysis and the design of controllers applied to a flexible mechanical system. The mechanical system considered is a flexible beam which is magnetically suspended by an electromagnet. Three controllers are considered for an experimentally identified model: LQG,  $H_\infty$  and LQG/ $H_\infty$  which control the levitation gap of the electromagnet. Design procedures and performance results are presented in each case.

**Keywords:** Flexible System, Robust Control, LQG,  $H_\infty$ , LQG/ $H_\infty$

**Mesquita Neto, E., Pontes Junior, B. R. and Sousa, E. A. C., 1994, "Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part 1: Formulation", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 143-158.**

The present article reviews briefly the advantages and drawbacks of the Finite Element Method (FEM) compared to the Boundary Element Method (BEM) in the field of solid mechanics, in particular for elastodynamics. A coupling procedure, which encompasses the advantages of both methods in the frequency domain is presented. The formulation for the interaction of the FE and BE meshes with a rigid body is also detailed. In an accompanying paper the described methodology is implemented, validated and applied to dynamic soil-structure interaction problems.

**Keywords:** Finite Element Method, Boundary Element Method, Elastodynamics

**Mesquita Neto, E., Pontes Junior, B. R. and Sousa, E. A. C., 1994, "Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics - Part 2: Numerical Results - Validations and Applications", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 159-176.**

The article presents the numerical results of a coupled Finite Element (FE) and a Boundary Element (BE) scheme for plane strain viscoelastodynamics in the frequency domain. The methodology and the implementation are validated for bounded and unbounded domains. Applications described include the dynamic interaction of engineering structures with homogeneous and inhomogeneous soils.

**Keywords:** Finite Element, Boundary Element, Elastodynamics.

**Ziviani, M., Nieckele, A. O. and Figueiredo, A. M., 1994, "Annular Flow of Two Immiscible Liquids in Straight Ducts", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 177-196. (In Portuguese)**

This paper shows a study on the hydrodynamic development of a laminar flow of two immiscible fluids in circular cylindrical tubes, assuming that thermodynamic and transport properties of fluids are constant. The model considers that the interfaces stream happens without penalty of its form, that is, it is supposed that the intersections of the interface with transverse planes always yield concentric circles along the axis of symmetry of the tube. This model is applied to the analysis of two fluid mixtures, oil (nucleus)/water (film) and water (nucleus)/kerosene (film). The main purpose of this work is to analyse the region of the hydrodynamic development of the flow, and evaluate the profile of the axial velocity, the pressure lost and the position of the interface along the tube.

**Keywords:** Annular Flow, Immiscible Liquids Flow, Straight Ducts, Hydrodynamic Development Region

**Batocchio, A. and Agostinho, O. L., 1994, "Model of the Characteristic Factor of the Manufacturing System", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 197-201. (In Portuguese)**

The researchers have been concerned about finding parameters that allows an evaluation of the real conditions of the manufacturing system. This paper intends to introduce the concept and the model of the characteristic factor of the manufacturing system and the results of its application in the industry. It can become an important tool to the manufacturing managers in the analysis and estimation of the manufacturing system.

**Keywords:** Manufacturing Systems, Characteristic Factor Model, Flexible Automation, Manufacturing Cycle

**Adamowski, J. C., Moscato, L. A., Simon, C. and Buiochi, F., 1994, "Ultrasonic Density Measurement of Flowing Liquids", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 202-209. (In Portuguese)**

This work is about the development of continuous density measurement strategies of liquids flowing in pipelines, using pulsed ultrasonic propagation properties. Two density measurement strategies based on acoustic pressure reflection coefficient measurement at the interface between a reference material and the liquid which density will be measured were developed. In order to avoid errors due to the acoustic diffraction effect, the lack in stability (in time) of the transducer and the associated electronics, it was developed a double-element transducer, with ceramic emitter and a PVDF film receptor.

**Keywords:** Continuous Measurement, Liquid Density, Pulsed Ultrasonic Propagation

**Ferreira, C. J. N., Miranda, R. F., 1994, "Numerical and Experimental Study of a Capillary Pump", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 16, no. 2, pp. 210-218. (In Portuguese)**

It is analyzed in this work the heat and flow in a vertical tube filled with a porous medium and this tube works as a capillary pump. The mathematical model is based on mass, momentum and energy equations along with the empirical correlation of Darcy. The solution is obtained by a numerical procedure, using the finite volume technic due to Patankar with the power-law method. Radial and axial velocities profiles are presented and the temperature profile as well, for different conditions of operations. The pumping mass is calculated and compared with the experimental data.

**Keywords:** Porous Medium, Capillary Pump, Mathematical Model, Pumping Mass Flow Rate

# **ABCM - The Brazilian Society of Mechanical Sciences**

## **Membership**

### **Annual Rate**

Member	US\$ 30.00
Student Member	US\$ 15.00
Institutional Member	US\$ 600.00

Membership Dues Schedule: January 1 to December 31

*ABCM members receive special discount in conferences, meetings, publications and courses. The Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences one year subscription is included with membership.*

The Journal is published quarterly by ABCM.

International Postage: add US\$ 24.00 per year

International Air Mail: add US\$ 36.00 per year

### **ABCM Headquarters**

Associação Brasileira de Ciências Mecânicas  
Av. Rio Branco 124 / 18º andar  
20 040 001 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil  
Tel./Fax: (021) 222 7128

## SCOPE AND POLICY

• The purpose of the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is to publish papers of permanent interest dealing with research, development and design related to science and technology in Mechanical Engineering, encompassing interfaces with Civil, Electrical, Chemical, Naval, Nuclear, Agricultural, Materials, Petroleum, Aerospace, Food, System Engineering, etc., as well as with Physics and Applied Mathematics.

• The Journal publishes Full-Length Papers, Review Papers and Letters to the Editor. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted to and accepted by the Journal. Exception can be made for papers previously published in proceedings of conferences. In this case it should be cited as a footnote on the title page. Copies of the conference referees reviews should be also included. Review articles should constitute a critical appraisal of published information.

• The decision of acceptance for publication lies with the Editors and is based on the recommendations of at least two ad hoc reviewers, and of the Editorial Board, if necessary.

## SUBMISSION

• Manuscripts and all the correspondence should be sent to the Editor or, alternatively, to the appropriate Associate Editor.

• Four (4) copies of the manuscript are required. The author should submit the original figures, which will be returned if the paper is not accepted after the review process.

• Manuscripts should be submitted in English or Portuguese. Spanish will also be considered.

• A manuscript submitted for publication should be accompanied by a cover letter containing the full name(s) of author(s), mailing addresses, the author for contact, including phone and fax number, and, if the authors so wish, the names of up to five persons who could act as referees.

## FORMAT

• Manuscripts submitted for publication should be accompanied by the english title, the abstract and up to five key words. If the paper's language is not English, an extended summary of about 500 words should be included. The manuscript should not contain the author(s) name(s).

• In research papers, sufficient information should be provided in the text or by referring to papers in generally available Journals to permit the work to be repeated.

• Manuscripts should be typed double-spaced, on one side of the page, using A-4 sized paper, with 2 cm margins. The pages should be numbered and not to exceed 24 pages, including tables and figures. The lead author of a RBCM paper which exceeds the standard length of pages will be assessed a excess page charge.

• All symbols should be defined in the text. A separate nomenclature section should list, in alphabetical order, the symbols used in the text and their definitions. The greek symbols follow the English symbols, and are followed by the subscripts and superscripts. Each dimensional symbol must have SI (Metric) units mentioned at the end. In addition, English units may be included parenthetically. Dimensionless groups and coefficients must be so indicated as dimensionless after their definition.

• Uncertainties should be specified for experimental and numerical results.

• Figures and Tables should be referred in consecutive arabic numerals. They should have a caption and be placed as close as possible to the text first reference.

• Line drawings should be prepared on tracing paper or vellum, using India ink, line work must be even and black. Laser print output is acceptable. The drawings with technical data/results should have a boundary on all four sides with scale indicators (tick marks) on all four sides. The legend for the data symbols should be put in the figure as well as labels for each curve wherever possible.

• Illustrations should not be larger than 12 x 17 cm. Lettering should be large enough to be clearly legible (1.5-2.0 mm).

• Photographs must be glossy prints

• References should be cited in the text by giving the last name of the author(s) and the year of publication of the reference: either "Recent work (Smith and Jones, 1985) ..." or "Recently Smith and Jones (1985) With four or more names, use the form "Smith et al. (1985)" in the text. When two or more references would have the same text identification, distinguish them by appending "a", "b", etc., to the year of publication.

• Acceptable references include: journal articles, dissertations, published conference proceedings, numbered paper preprints from conferences, books, submitted articles if the journal is identified, and private communications.

• References should be listed in alphabetical order, according to the last name of the first author, at the end of paper. Some sample references follow:

Bordalo, S.N., Ferziger, J.H. and Kline, S.J., 1989, "The Development of Zonal Models for Turbulence", Proceedings, 10<sup>th</sup> ABCM - Mechanical Engineering Conference, Vol. 1, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 41-44.

Clark, J.A., 1986, Private Communication, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Colmbra, A.L., 1978, "Lessons of Continuum Mechanics", Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brazil.

Kandlikar, S.G. and Shah, R.K., 1989, "Asymptotic Effectiveness - NTU Formulas for Multiphase Plate Heat Exchangers", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 111, pp. 314-321.

McCormack, R.W., 1988, "On the Development of Efficient Algorithms for Three Dimensional Fluid Flow", Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 10, pp. 323-346.

Silva, L.H.M., 1988, "New Integral Formulation for Problems in Mechanics", (In portuguese), Ph.D. Thesis, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil.

Sparrow, E.M., 1980a, "Forced-Convection Heat Transfer in a Duct Having Spanwise-Periodic Rectangular Protruberances", Numerical Heat Transfer, Vol. 3, pp. 149-167.

Sparrow, E.M., 1980b, "Fluid-to-Fluid Conjugate Heat Transfer for a Vertical Pipe-Internal Forced Convection and External Natural Convection", ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 102, pp. 402-407.

## ILLUSTRATIONS AND TABLES

## REFERENCES

VOL. XVI - Nº 2 - 1994

**Grinding**

- G-Ratio Optimization of CBN Resin Bond Wheels by the Grinding Condition Eduardo Carlos Bianchi 94

**Wire Drawing**

- Study on the Wire Drawing Speed Improvement of Austenitic Stainless Steel ABNT 304 (In Portuguese) Gustavo Aristides Santana Martinez and Sergio Tonini Bulfon 105

**Robust Control**

- Application of LQG,  $H_{\infty}$  and LQG/ $H_{\infty}$  Controllers to a Magnetically Suspended Flexiale Mechanical System (In Portuguese) Anselmo Bittar, Faencio Lucchesi, Roberto Moura Salles and Antonio Carlos de Lima 120

**Finite and Boundary Element Methods**

- Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics Part I: Formulation Eulides de Mesquita Neto, Bento Rodrigues de Pontes Junior and Edson Antonio Capello Souza 143
- Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures for Steady State Elastodynamics Part II: Validation and Application Eulides de Mesquita Neto, Bento Rodrigues de Pontes Junior and Edson Antunes Capello Souza 159

**Annular Flow**

- Annular Flow of Two Immiscible Liquids in Straight Ducts (In Portuguese) Marcio Ziviani, Angela Danvio Nieckele and Antonio MacDowell de Figueiredo 177

**Manufacturing**

- Model of the Characteristic Factor of the Manufacturing System (In Portuguese) Antonio Batochio and Oswaldo Luiz Agostinho 197

**Acoustics Instrumentation**

- Ultrasonic Density Measurement of Flowing Liquids (In Portuguese) Julio C. Adamowski, Lucas A. Moscato, Claudio Simon and Flavio Bulochi 202

**Capillary Pump**

- Numerical and Experimental Study of a Capillary Pump (In Portuguese) C. J. N. Ferreira and Ricardo Fortes de Miranda 210

**Abstracts - Vol. 16 - Nº 2 - 1994** 219

**ABCM Membership** 221