

# Revista Brasileira de Ciências Mecânicas

Journal of the Brazilian  
Society of Mechanical Sciences

2

PUBLICAÇÃO DA ABCM - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

VOL. XX - No.2 - JUNE 1998

ISSN 0100-7386

**REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
**JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF**  
**MECHANICAL SCIENCES**

Vol. 1, N. 1 (1979)  
 Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências  
 Mecânicas  
 Trimestral  
 Inclui referências bibliográficas.  
 1. Mecânica  
 ISSN-0100-7386

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
 publica trabalhos que cobrem os vários aspectos da  
 ciência e da tecnologia em Engenharia Mecânica,  
 incluindo interfaces com as Engenharias Civil, Elétrica,  
 Química, Naval, Nuclear, Aeroespacial, Alimentos,  
 Agrícola, Petróleo, Materiais, etc., bem como  
 aplicações da Física e da Matemática à Mecânica.

INDEXED by Applied Mechanics Reviews  
 and Engineering Information, Inc..

Publicação da / Published by  
**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS**  
**THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES**

Secretária da ABCM : **Ana Lúcia Fróes de Souza**  
 Avenida Rio Branco, 124 18º Andar  
 20040-001 Rio de Janeiro RJ  
 Tel. : (021) 221-0438/Fax: (021) 509-7128

Presidente: **Carlos Alberto de Almeida**  
 Vice-Presidente: **Hans Ingo Weber**  
 Secretário Geral: **Nestor Alberto Z. Pereira**  
 Diretor de Patrimônio: **Felipe Bastos de F. Rachid**  
 Secretário: **Paulo Batista Gonçalves**

Secretária da RBCM: **Maria de Fátima Alonso de Sousa**  
 UNICAMP - FEM - C.P. 6122  
 13083-970 Campinas SP  
 Tel. : (019) 788-3205/Fax: (019) 289-3722  
 E-Mail: abcm@fem.unicamp.br

**EDITOR**

**Leonardo Goldstein Jr.**  
 UNICAMP - ITM - DETF - C.P. 6122  
 13083-970 Camp. ras. SP  
 Tel. : (019) 289-3006 Fax: (019) 289-3722  
 E-Mail: abcm@fem.unicamp.br

**EDITORES ASSOCIADOS**

**Agenor de Toledo Fleury**  
 IPT - Instituto de Pesquisas Tecnológicas  
 Divisão de Mecânica e Eleticidade - Agrupamento de Sistemas de Controle  
 Cidade Universitária - C.P. 7141  
 01064-970 São Paulo SP  
 Tel. : (011) 208-2211 Ramal 504 Fax: (011) 869-3353  
 E-Mail: agfleury@ipt.br

**Alisson Rocha Machado**

Universidade Federal de Uberlândia  
 Departamento de Engenharia Mecânica - Campus Santa Mônica  
 38409-20E Uberlândia MG  
 Tel. : (034) 239-4149 Fax: (034) 235-0382  
 E-Mail: alissonm@ufu.br

**Angela Ourivio Nieckele**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
 Departamento de Engenharia Mecânica  
 Rua Marquês de São Vicente, 225 Gávea  
 22453-900 Rio de Janeiro RJ  
 Tel. : (021) 239-0719 Fax: (021) 294-9148  
 E-Mail: nieckele@mac.puc-rio.br

**Hans Ingo Weber**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
 Departamento de Engenharia Mecânica  
 Rua Marquês de São Vicente, 225 Gávea  
 22453-900 Rio de Janeiro RJ  
 Tel. : (021) 529-9323 Fax: (021) 294-9148  
 E-Mail: hans@mac.puc-rio.br

**Paulo Eigi Miyagi**

Universidade de São Paulo - Escola Politécnica  
 Departamento de Engenharia Mecânica - Mecatrônica  
 Avenida Prof. Mello Moraes, 2231  
 05508-900 São Paulo SP  
 Tel. : (011) 818-5580 Fax: (011) 818-5471/813-1866

**Seyyed Said Dana**

Universidade Federal da Paraíba  
 Centro de Tecnologia - Campus I  
 Departamento de Tecnologia Mecânica  
 58059-900 João Pessoa PB  
 Tel. : (083) 216-7356 Fax: (083) 216-7179  
 E-Mail: dana@dtm1.ufpb.br

**CORPO EDITORIAL:**

- Alcir de Faro Orlando (PUC-RJ)
- Antonio Francisco Furtos (UnB)
- Armando A. Bertazzi Jr. (UFSC)
- Atar Rius Neto (UNIVAF)
- Benedito Moraes Parreira (EESC-USP)
- Carlos Alberto de Almeida (PUC-RJ)
- Carlos Alberto Martin (UFSC)
- Cleiva Ramundo Maliska (UFSC)
- Emanuel Rocha Woski (UNESP-FEIS)
- Francisco Emílio Baccaro Nigro (IPT-SP)
- Francisco José Simões (UFPA)
- Genesio José Menni (FEEL)
- Henrique Rozentfeld (EESC-USP)
- Jair Carlos Dutra (UFSC)
- João Alzira Herz de Jornada (UFRGS)
- José João de Espinola (UFSC)
- Jurandir Itzo Yanagihara (EP-USP)
- Luís Schaefer (UFRGS)
- Lourival Boeltz (UFSC)
- Luis Carlos Sandoval Goes (ITA)
- Marcio Zivanich (UFMG)
- Mario Ussyr (EMBRACO)
- Mozes Zindruk (COPPE-UFRJ)
- Nisio de Carvalho Lobo Biam (COPPE-UFRJ)
- Nivaldo Lemos Coppini (UNICAMP)
- Paulo Afonso de Oliveira Sovero (ITA)
- Rogério Martins Salcanta da Gama (LNCC)
- Valcer Stetten Jr. (UFU)

REVISTA FINANCIADA COM RECURSOS DO

*Programa de Apoio a Publicações Científicas*



## Information for Authors

- SCOPE AND POLICY**
- The purpose of the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences is to publish papers of permanent interest dealing with research, development and design related to science and technology in Mechanical Engineering, encompassing interfaces with Civil, Electrical, Chemical, Naval, Nuclear, Materials, Aerospace, Petroleum, System Engineering, Food, Agriculture, etc., as well as with Physics and Applied Mathematics.
  - The Journal publishes Full Length Papers, Review Papers, Book Reviews and Letters to the Editor. Authors must agree not to publish elsewhere a paper submitted and accepted by the Journal. Papers previously published in proceedings of conferences can also be considered for publication; this event should be cited as a footnote on the title page. Copies of the conference referees' reviews should be included. Review articles should constitute a critical appraisal of the published information.
  - The decision of acceptance for publication lies with the Editors and is based on the recommendations of at least two ad hoc reviewers, and of the Editorial Board, if necessary.
- SUBMISSION**
- Manuscripts and correspondence should be sent to the Editor or, alternatively, to the nearest Associate Editor.
  - Five (5) copies of the paper are required. The Author should retain the manuscript disk until the end of the review process.
  - Manuscripts should be submitted only in **English**.
  - A manuscript submitted for publication should be accompanied by a cover page containing the full name of the Author(s), the Author for contact, institution address, phone number, e-mail address and, if the Authors so wish, the names of up to five (5) possible referees, with respective addresses.
- FORMAT**
- Manuscripts should begin with the title, followed by an Abstract and from three to five Keywords. The manuscript should not contain the Authors' names. The Abstract should state the objectives, methodology used and main conclusions, in no more than 200 words.
  - In research papers sufficient information should be provided in the text, or by referring to papers in generally available Journals, to permit the work to be repeated.
  - The paper must begin with an Introduction that is written for the general reader of the Journal, not for the specialist. This section should describe the problem statement, its relevance, significant results and conclusions from prior work, and objectives of the present work.
  - Uncertainties should be specified for experimental and numerical results.
  - Manuscripts should be typed double-spaced, on one side of the page, using A4 sized paper, with 2 cm margins. The pages should be numbered and not to exceed 24, including tables and figures. Avoid footnotes.
  - All symbols should be defined in the text. A separate nomenclature section should list, in alphabetical order, the symbols used and their definitions. The Greek symbols follow the English symbols, and are followed by the subscripts and superscripts. Each dimensional symbol must have SI (metric) units mentioned; in addition, English units may be included parenthetically. Dimensionless groups and coefficients must be so defined and indicated.
- MATHEMATICAL EQUATIONS**
- All mathematical expressions should be typewritten using only letters and symbols available on the keyboard.
  - Equations that extend beyond the text width should be restated to go in two or more lines, as necessary to fit within the page width.
  - Fractional powers should be used instead of root signs.
  - A solidus (/) should be used instead of an horizontal line for fractions, whenever possible; for example, use  $2/3$  for two-thirds.

- Mathematical expressions should not be introduced along the text itself, as part of a sentence line, but typed on individual lines.
- Numbers that identify mathematical expressions should be enclosed in parenthesis. Refer to equations in the text as "Eq.(1)" or, if at the beginning of a sentence, as "Equation (1)".
- Vectors should be typed **boldface**. Do not use arrows, wavy-line underscoring, etc.

## FIGURES AND TABLES

- Figures and Tables should be referred in consecutive Arabic numerals. They should have a caption and be placed as close as possible to their first reference in the text. Refer to figures in the text with the abbreviation "Fig. 1", except at the beginning of a sentence, where "Figure 1" should be used.
- The figures presenting technical data/results should have a boundary on all four sides, with scale indicators (tick marks) on all sides.
- The legend for the data symbols should be put inside the figure, as well as the labels for each curve. Lettering should be large enough to be clearly legible (1.5-2.0 mm).
- Laser print output line drawings are preferred. Drawings prepared on tracing paper or vellum, using black india ink, are acceptable.
- Photographs must be glossy prints.

## REFERENCES

- References should be cited in the text by giving the last name of the author(s) and the year of publication. Either use "Recent work (Smith and Farias, 1997) or "Recently Smith and Farias (1997)". With four (4) or more names, use the form "Smith et al. (1997)". If two or more references would have the same identification, distinguish them by appending "a", "b", etc., to the year of publication.
- Acceptable references include journal articles, numbered papers, dissertations, thesis, published conference proceedings, preprints from conferences, books, submitted articles, if the journal is identified, and private communications.
- References should be listed in alphabetical order, according to the last name of the first author, at the end of the paper. Some sample references follow:
- Soviero, P.A.O. and Lavagna, L.G.M.,1997. "A Numerical Model for Thin Airfoils in Unsteady Motion", RBCM- J. of the Brazilian Soc. Mechanical Sciences, Vol.19, No. 3, pp. 332-340.
- Bordalo, S.N., Ferziger,J.H. and Kline, S.J.,1989. "The Development of Zonal Models for Turbulence". Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Vol.1, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 41-44.
- Sparrow, E.M., 1980a. "Forced Convection Heat Transfer in a Duct Having Spanwise-Periodic Rectangular Protuberances", Numerical Heat Transfer, Vol.3, pp. 149-167.
- Sparrow, E.M., 1980b, "Fluid-to-Fluid Conjugate Heat Transfer for a Vertical Pipe-Internal and External Natural Convection", ASME Journal of Heat Transfer, Vol.102, pp. 402-407.
- Silva, L.H.M.,1988, "New Integral Formulation for Problems in Mechanics" (In Portuguese), Ph.D. Thesis, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, S.C., Brazil, 223 p.
- Coimbra, A.L., 1978, "Lessons of Continuum Mechanics", Ed. Edgard Blücher, S.Paulo, Brazil, 428 p.
- Clark, J.A.,1986, Private Communication, University of Michigan, Ann Harbor.

## FINAL VERSION OF THE MANUSCRIPT

- Upon notification of acceptance, Authors should submit two copies of the final version and the manuscript disk, in Windows or Macintosh, Word or WordPerfect, thus avoiding retyping, with subsequent reduction of errors.

# Optical and Thermal Parameters Characterization in CO<sub>2</sub> Laser Application in Thermosensitive Resins Using Stereolithography Processes

André L. J. Munhoz

Paulo R. S. Wagner

Maria Clara F. Ierardi

Unicamp - State University of Campinas  
College of Mechanical Engineering  
Department of Materials Engineering

Alvin E. Kiel

Marco A. F. Scarparo

Institute of Physics  
Laboratory of Laser Application to Fine Mechanics  
13083-970 Campinas, SP Brazil

## Abstract

*We present a theoretical and experimental study of thermosensitive resins used in thermal stereolithography. In usual practice, stereolithography makes use of photosensitive resins where HeCd (0.352 $\mu$ m) laser ultraviolet light initiates the curing process. In this work we study the process of local curing through the application of infrared radiation, which has proved to be useful in a new technique for the making of prototypes by means of selective heating with CO<sub>2</sub> laser (10.6 $\mu$ m). The presented sample consists of a thermosensitive resin (epoxy) with the curing agent (diethylene triamine) and a filler (silica). The ideal composition of the thermosensitive resins has proved to be 10 parts epoxy, 1.4 part diethylene triamine (the curing agent) and 0.7 part of silica powder. A physical theoretical model is applied for control of the parameters which influence the confinement of the curing in the irradiated bulk. A mathematical model is applied too, and it was developed through the resolution of the heat conduction equation dependent on time, in cylindrical co-ordinates, which enables to determine the behaviour of curing in terms of irradiation conditions. An experimental analysis has determined the temperature band at which the curing process starts and the optimum silica concentration for efficient curing. The application of Differential Scanning Calorimeter (DSC) is discussed, since the experiments aimed to obtain the same results as those obtained through the thermal analysis method.*

**Keywords:** Thermosensitive Resins. Thermal Stereolithography, Prototype Production

## Introduction

The great world movements in search of optimization in prototype production has placed stereolithography as a powerful technique used for obtaining tridimensional models. Usually, the conventional technique in stereolithography makes use of a system for application of ultraviolet light on photosensitive resins in the curing process, by operating a HeCd (0.352 $\mu$ m) laser for the obtainment of prototypes (Kaplan,1990; Belfore,1993). This work presents the study of an innovative technique of application of CO<sub>2</sub> (10.6 $\mu$ m) laser infrared radiation on thermosensitive resins by means of stereolithography (Barros,1992). It is believed to be a really new and advantageous method as compared with the process mentioned before. In previous works, the behavior of the influence parameters as well as the characteristics of the resins in the process of local curing were studied and defined (Barros,1994). The results were satisfactory as a starting point for the determination of a proper theoretical model (Scarparo,1995), aiming at the accurate determination of the local curing. In order we might come to such a composition for the local curing, and a detailed study was fulfilled considering the amount of silica in the process. The experimental analyses were carried out in two stages, one of thermal characterization and another of optical characterization of the thermosensitive resins. The results determined the temperature range at which the curing starts and the behavior of the absorption depth in terms of the silica variation in the composition. A mathematical model was applied by solving the equation for the conduction of heat dependence on time in the cylindrical co-ordinates, which allows to foresee the behavior of the curing in terms of irradiation conditions. One of the additional advantages in the use of this laser is related to the highly restricted and located area in which the curing

occurs when the diameter of the beam is taken into account. To date, stereolithography have been produced for a wide variety of industries, including automotive, aerospace, and consumer products. Automotive and aerospace manufactures, whose work involves complex parts and assemblies, have been especially interested in the technology because they typically integrate a large number of complex components that have been designed and produced separately.

## Theoretical Model

A physical theoretical model (Scarparo,1996) has been worked out aiming at the exact characterization of every physical phenomenon occurred in the process of local curing. The model describes the energy flow deposited by the laser in terms of the control of the operational parameters and the behavior of the resin, aiming at the local curing.

The determination of the released energy distribution is essential for obtaining the local curing. The models takes into account the thermal and the optical characteristics of the resin as well as the absorption depth, thermal conductivity and diffusivity. Initially, in order to obtain the power associated to the laser beam, the 'dwell time' of the beam in the sample was determined. The local curing was achieved by scanning a continuous wave (cw) CO<sub>2</sub> laser repeatedly over a circular trajectory on the sample's surface with a scan speed  $v$ . By dividing the beam diameter  $2\omega$  by the scan speed, one obtains the 'dwell time':

$$\tau_d = \frac{2\omega}{v} \quad (1)$$

concerning the time of interaction laser/resin at a surface point.

As the resin is highly absorptive at the CO<sub>2</sub> laser wavelength (10.6 $\mu$ m), it is assumed that, during the 'dwell time', nearly all the beam energy has go into the inner part of the sample at a distance from the surface equivalent to the absorption depth  $\delta$ . The absorption depth was determined by measuring the transmittance of a non-cured sample, having a thickness of 80 $\mu$ m at the band of the CO<sub>2</sub> (10.6 $\mu$ m) laser emission spectrum. It was found to be  $\delta = 22.4\mu$ m. It is assumed that energy  $E$  has been absorbed in the small cylindrical volume  $V$  during the 'dwell time', the volume being defined as:

$$V = \pi\omega^2\delta \quad (2)$$

The energy released in  $V$  is the product of the laser power by 'dwell time':

$$E = P\tau_d \quad (3)$$

The approach of (2) is reasonable in the experiment because the sample absorbs at very small depths. Energy absorption in materials is quite critical concerning the depths they reach. In materials which do not absorb the energy strongly, the absorption depth may exceed the focus depth of the beam. As a consequence the confinement of energy at the surface of the model is not maintained. By the mean energy  $E$  it is possible to determine the variation of temperature, which is proportional to the deposited energy concerning the specific heat  $C_p$  and mass  $m$  of the material contained in volume  $V$ , according to the following equation:

$$E_p = C_p m \Delta T \quad (4)$$

the mass of the heated volume may be calculated by using the mass density of the sample  $\rho = 1.16 \text{ g/cm}^3$ .

A numerical solution was applied based on the Finite Differences Method (MDF), developed to the general equation for conduction of heat (Carslaw,1959). If it is assumed that nearly all the flow of energy deposited by the laser beam is absorbed every moment the laser passes at a point on the surface

of the sample, it follows that the irradiated volume will undergo a temperature increase which is determined by the expression:

$$\Delta T = \frac{E_p}{mC_p} = \frac{P\tau_d}{\pi\omega^2 \delta \rho C_p} \quad (5)$$

As the laser induces a linear heating rate, the general equation for conduction of heat dependent on time is applied as follows:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{G}{K} \quad (6)$$

where D stands for the thermal diffusivity of the sample, K is the thermal conductivity, and G describes the rate of energy generated by the laser source. In a Gaussian profile (Sanders, 1984) of intensity of the laser beam, the term of source G generated by the CO<sub>2</sub> laser may be expressed by:

$$G = \frac{P}{\pi\omega^2 \delta} \exp\left(-r^2/\omega^2\right) \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) S(\tau_d) \quad (7)$$

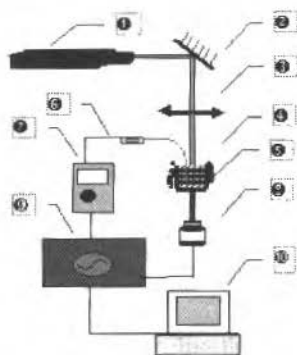
for  $0 \leq t \leq \tau_d$ ,  $S(\tau_d) = 1$ ;  $t > \tau_d$ ,  $S(\tau_d) = 0$  where  $S(\tau_d)$  is the function which considers the term of source in the general equation, r is the distance from the beam center, z is depth of sample surface,  $\delta$  is the absorption depth, P is the output power of the laser. The displacement scan speed over the trajectory of the circular way resulted in repetition rate of the laser equal to 35ms, and the 'dwell time' of 377 $\mu$ s for a beam focused to 1/e of the 0.3mm radius. These parameters were used in the numerical simulation, the constant of radial thermal transient  $\sigma$  being defined as follows:  $\sigma = \omega^2/D$ , where  $D = 22 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , thus  $\sigma$  is approximately 10s for the radial transient.

The Crank-Nickelson method of infinite differences was used to solve the equation for the conduction heat dependent on time in the cylindrical co-ordinates. The thermal conductivity of the epoxy sample is  $K = 0.359 \times 10^{-3} \text{ mW/cmK}$ , which is near the conductivity of air  $K = 0.24 \times 10^{-3} \text{ mW/cmK}$ . As a concern to the theoretical model, it was assumed that thermal properties K and D, as well as the optical properties  $\delta$  and reflectivity are all of them independent of temperature. The influence of silica in the process of local curing was disregarded.

## Experimental Analysis

### STAGE I

Initially, for the thermal characterization of the thermosensitive resin, it was essential the study of the sample behavior under the influence of the heat action. For that purpose, it was decided to simulate experimentally how the sample reacts when submitted to an external source of heat. In order to carry out the experimental analysis, the apparatus shown Fig 1 was used, in which a small semi-liquid volume of the sample was heated at different external temperatures. Although the result of the local curing may also be obtained with polyester resin, the decision to use the epoxy resin (D.E.R. 330) was taken because of its low coefficient of thermal diffusivity  $D=22 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , as well as its appropriate viscosity, thermosensitivity and stability in the course of the curing process. Though the epoxy resin presents a shorter handling time (pot-life) than the polyester resin, it offers less risk concerning toxicity, and presents greater rigidity as a final product. The local curing was obtained with the use of the CO<sub>2</sub> laser operating continuously within the infrared spectral absorption band at a wavelength of 10.6 $\mu$ m. The initial aim was to detail the experimental results of the local curing with the use of laser, since they are essential to the understanding of this process. However, in order that the explanations might be coherent, we were firstly decided to characterize the curing process occurring in the bulk of the sample. For that purpose, a small volume of liquid sample was heated in a beaker



#### Description of Equipments

- ① HeNe laser (632,8 nm)
- ② 100% reflective mirror
- ③ focusing lens (ZnSe) /  $f=26\text{cm}$
- ④ beaker (diameter=10 cm, height=1,5 cm)
- ⑤ heat tape
- ⑥ thermocouple
- ⑦ keitley 175 thermometer  
autoranging multimeter
- ⑧ detector for the visible / Model 818 F-SL
- ⑨ 600 MHz oscilloscope
- ⑩ data acquiring module

Fig. 1 Experimental apparatus used for the characterization of the curing process

wrapped in heat tape, which enabled to control the parameters which could bring information concerning the curing process. Initially, the temperature of the sample volume in terms of time was monitored by means of a thermocouple by applying different surrounding temperatures (external). The thermocouple signal recorded by the thermometer was sent to a digital oscilloscope connected to a data acquiring module where the data concerning the evolution of the sample temperature were stored. Simultaneously, in the apparatus the transmittance of the sample for the HeNe laser was measuring by means of a detector.

Transmittance, which allows the obtainment of the depth absorption of the material, is a simple method to identify the beginning of the curing in the sample, provided the liquid resin is relatively transmissible to the visible light of the HeNe laser, becoming opaque while it cures. Through the correlation between the evolution of the sample internal temperature and the transmittance record, it is possible to determine the rate of curing in function of the sample temperature. Temperatures of 310 K, 317 K, 330 K, 338 K, 436 K and 353 K were selected for the analysis of the curing behavior of the sample.

At temperatures higher than 353 K, the curing took place quite rapidly, reaching a very high speed in a period of time which was faster than the time response of the apparatus, which risked the accuracy of the experiment. The evolution of the curing is shown terms of temperatures and time of curing in Fig 2.

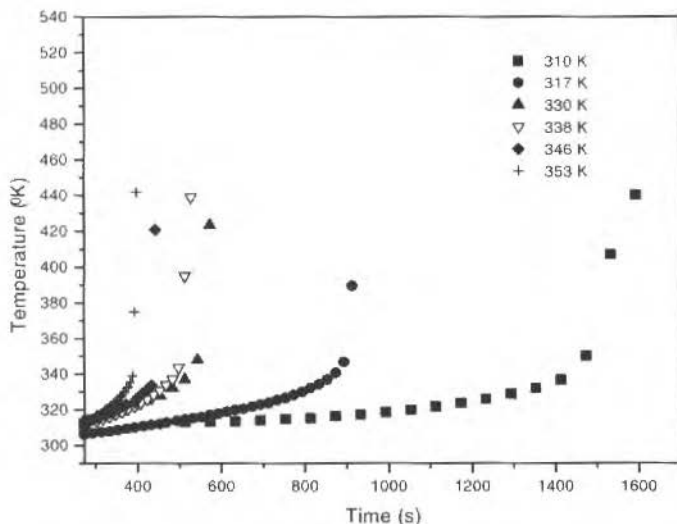


Fig. 2 Evolution of the sample internal temperature and onset of curing for different external temperature

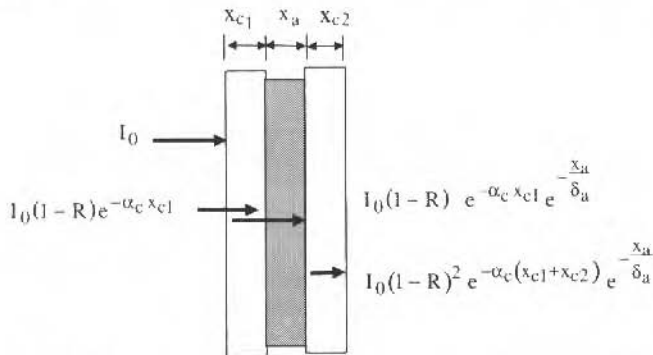


The results obtained in the graphics initially indicate a similar behavior in the evolution process of the curing at the different temperatures applied; however, it is clearly observed a much faster answer to the curing as the temperature increases. It is also noticed that the beginning of the curing process occurs in a very narrow temperature band of the sample (onset the curing). Such a variation arises out of the difficulty in controlling stoichiometry when preparing the sample.

## STAGE II

The optical characterization of the properties of the thermosensitive resin will depend on the sample composition, which in proper conditions permit the obtention of information about the absorption depth  $\delta$ . Therefore, these analyses have proved to be of great use for study of the samples behavior in terms of the silica absorption of energy, since each sample was submitted to a variation in the amount of silica in the composition. The absorption depth, as defined in the theoretical physical model, is essential for the definition of the volume of the cured sample. If the absorption depth determines the infra radiation depth in the sample, it follows that the amount of silica in the composition may determine the dimension of the cured volume, seeing that as the amount of silica changes, there occurs a variation in the absorption depth. In order to determine the absorption depth in each sample, the semi-liquid sample was inserted between two KBr crystals (transparent to infrared light).

An analytical solution - by applying Lambert-Beer Law ( $I_1 = I_0 e^{-x/\delta}$ ) was established. Considering that the intensity is partly reflected and attenuated by the crystals, through the analytical solution, it is possible to determine the depth of energy absorption by the sample. The determination of  $\delta$  is established as follows:



Considering that, when it reaches the walls of the crystals, the intensity of initial radiation undergoes a slight reflection, in the semi-liquid sample. Thus, by applying Lambert-Beer Law, a satisfactory estimate is obtained as follows:

$$I_T = I_0(1-R)^2 e^{-\alpha_c(x_{c1}+x_{c2})} e^{-\frac{x_s}{\delta_s}} \quad (9)$$

where:  $I_T/I_0$  = sample transmittance  
 $R$  = KBr crystal reflectance  
 $x_c$  = crystal thickness  
 $\alpha_c$  = optical absorption coefficient of the crystal  
 $\delta_s$  = sample absorption depth

If  $\delta_s$  is detached from equation (9), it follows:

$$\delta_s = -\frac{x_s}{\alpha_c(x_{c1} + x_{c2}) + \ln \left[ T \frac{1}{(1+R)^2} \right]} \quad (10)$$

where T stands for transmittance. Therefore, the analytical solution was used to find the depth of the sample optical absorption when two KBr windows have been used as substrate for the semi-liquid sample. In order that the analytical solution could be applied, it was necessary to determine the values of the sample transmittances. The equipment used for estimating and obtaining the transmittances was an infrared spectrum analyzer, Model IR-700, Japan Spectrophotometer, 2.0 version. In the second stage of experiments, the transmittances of the semi-liquid samples were determined first, and consequently the absorption depth in terms of the variation of powdered silica in each composition of the samples. The analyses of the optical absorption depth of the samples have show how silica is important in the calculation of the samples behavior under the influence of infrared radiation. In order to facilitate the accomplishment of these experiments, the proportion of the silica in the composition (which permits the local curing of the resin) was considered as the basis, where for each sample composition the following proportions were added in parts of the reagents. In Table I we consider the variation of the amount of silica, where percentage above (+) and below (-) the local curing composition is showed.

**Table 1** Variation of silica amount in the samples for transmittance analysis

Silica percentage (%)	Sample composition (in parts) DGEBA > DETA > silica
without silica	10 > 1.4 > 0.00
-75	10 > 1.4 > 0.12
-50	10 > 1.4 > 0.35
-25	10 > 1.4 > 0.54
local curing	10 > 1.4 > 0.70
+25	10 > 1.4 > 0.90
+50	10 > 1.4 > 1.10
+75	10 > 1.4 > 1.25
+100	10 > 1.4 > 1.40

## Results and Discussions

The experiments concerning samples under exothermic conditions indicate the possibility of influencing the curing of the sample through the control of factors which affect the speeds of reaction, and determine the moment the reaction starts. The experiment carried out in Fig. 2 suggests the determination of the activation energy involved in reaction during the curing process. Unfortunately this results do not allow to establish direct mathematical relationship between the parameters involved in the curing process. The experimental difficulties are clear along this process, which does not make possible to obtain the activation energy accurately, since the highest temperature point of reaction has not been attained. For the same reason, it is not possible, quantitatively, to define the rate at which the reaction happens. This experiment was conclusive as concerns the identification and selection of the controlling parameters of the sample curing process.

For example, to determine the reaction rate more accurately, in function of temperature, the DSC (differential scanning calorimetry) should be used. The DSC process can determine, graphically, the heat flow of a small amount of sample, both for a fixed temperature and for a variation in temperature. In either case the flow of heat which is required to maintain a certain temperature in the sample is compared with the flow of non-reactive alumina sample used as reference. While the reaction takes place in the reactive sample, it is possible to determine whether the reaction is endothermic or exothermic by comparing with the results of the experiments in question. The comparison between the heat flow emitted by the reactive sample and non-reactive one permits the obtainment of the enthalpy of the system.

The study of the sample by means of the DSC is being developed and aims to determine the conversion rate of the sample in the curing, in function of time as well as to determine the activation energy of the sample, which is estimated (Scarpato, 1996) to be around  $E_a = 50 \text{ kcal/mol}$ . The simple analytical solution established in terms of the sample transmittance and thickness was used for the analysis of the behavior of absorption depth in semi-liquid samples with variation of silica in the composition. As a matter of fact, the transmittances of each sample were measured first (as show in Fig. 3), so that the solution might be applied to the calculation of  $\delta$ . As it was foreseen, the experimental results have registered a decrease in transmittance as silica was added to the sample, which has proved the tendency that the silica presents to act as the energy absorptive medium between the sample reagents. From this experiment we could establish the relationship between the amount of silica variation

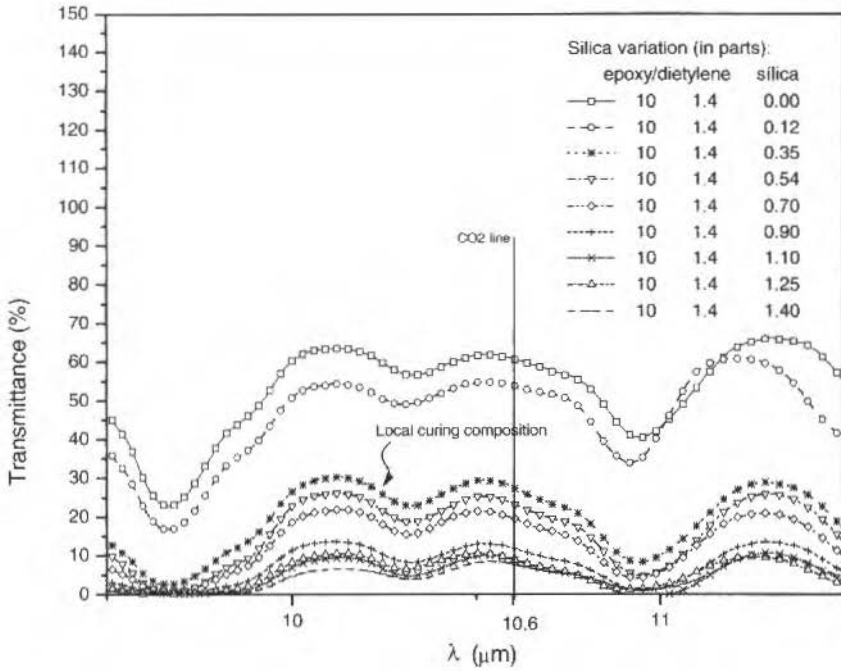


Fig. 3 Spectrums of CO<sub>2</sub> laser infrared radiation obtained from semi-liquid samples in terms of silica variation in the composition.

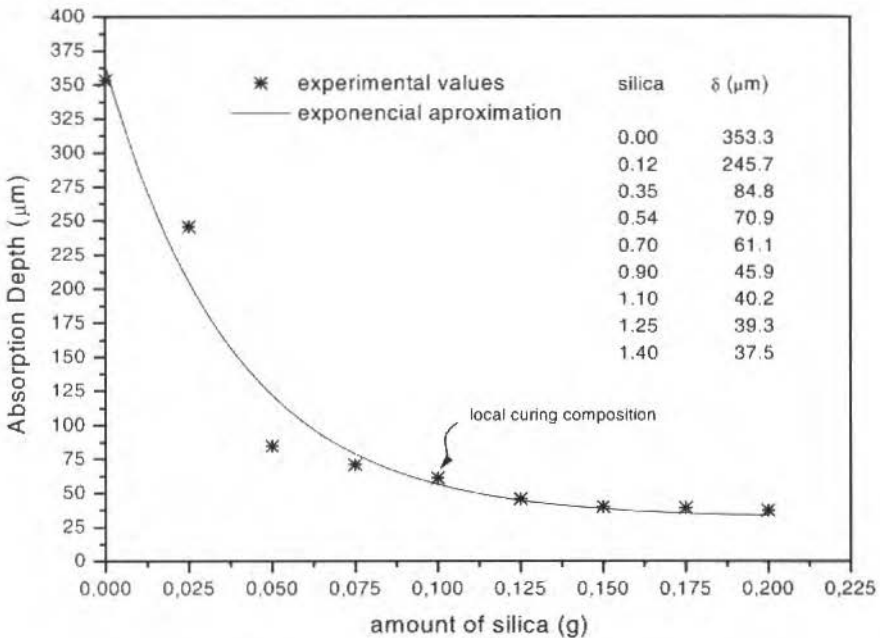


Fig. 4 Depth of optical absorption in terms of silica variation

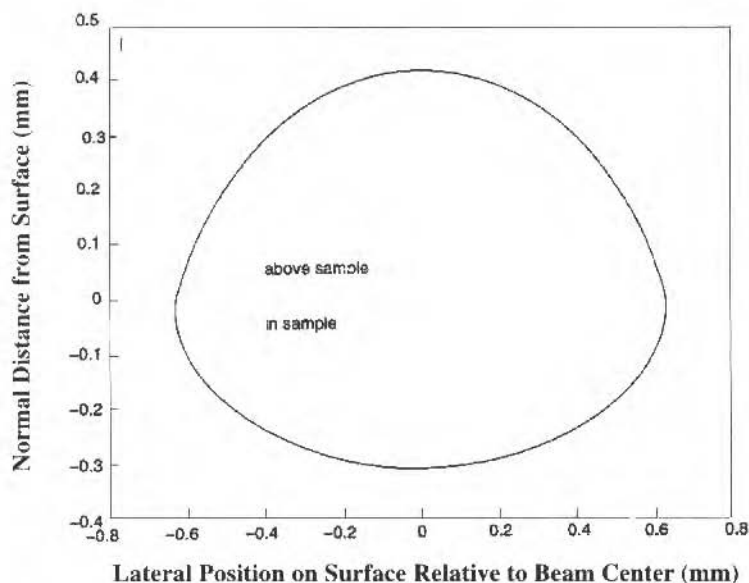


Fig. 5 Isothermal mapping for  $1/e$  of the highest temperature in the sample volume

mixture. A variation in any of mentioned parameters may affect the process of local curing decisively and, of course, the geometry of the cured sample and the quality of the final product. The experimental results obtained through the variation of the depth of optical absorption clearly indicate the necessity of controlling the thickness of the cured part in function of the variation of silica amount in the sample. In order that the process of local curing may happen along the whole tridimensional area, the energy must be deposited in a well-defined volume and the resulting heat should not be conducted along the lateral surroundings of the sample. The choice of the sample was appropriate, since it presents a relatively low thermal conductivity and high absorption of the CO<sub>2</sub> laser infrared radiation. Both advantages made it possible to confine the curing locally. Numerical simulation has proved successful as concerns the lateral confinement and the depth of the curing as dimensioned by the laser beam, with excellent spacial resolution, and with no shrinkage (Barros,1992) of the sample after the curing, to the detriment of the final product. Interesting results were obtained with the experiment related to the application of external temperature to the sample, which affect the reaction speed of the curing. For this experiments it is concluded that, if the boundary conditions are improved, it will be possible to obtain, for example, the activation energy of the reaction for the sample in question at a low cost, in a simpler experiment, since the reaction is exothermic. The application of DSC is already renewed and involves sophisticated equipment of high cost. However, it presents very good results for the obtainment of the activation energy of the reaction.

## Acknowledgement

The authors wish to acknowledge the financial support provided by FAPESP (The Scientific Research Foundation of the State of San Paulo), CNPq and FAEP.

## References

- Kaplan,R., 1990, Photonics Spectra, June, pp. 74-75.
- Belfore,D.A. , 1993, Laser Focus World, June , pp.126-131.
- Barros,M.L., 1992, Scarparo,M.A.F. and Gerck,E., "Stereolithography: A New Technique", in V State Symposium of Laser e Applications. IPEN-SP-BRASIL, vol. 1, pp. 311.

and the depth of the optical absorption (Fig. 4). It is observed, along the  $\text{CO}_2$  band, that the transmittances of each sample have decrease according to the amount of silica added to the composition. Although the analysis in the study may appear to be simple, other equipments and methods have been tested unsuccessfully. The response among the several spectrums, with the local curing composition located in the middle band, indicates a fairly good agreement among them, which confirms the viability of the system used for the present analysis, even with the slight variation of the silica amount (25%) in the composition. From a theoretical and experimental viewpoint, silica plays an important part in controlling the local curing, as it hinders heat diffusion to zones which are outside of the irradiated area. The amount of silica is understood to be critical in the process of local curing, since if silica occurs excessively in the composition, it restricts the curing of the reagents and absorbs all the energy. Thus, the curing is not complete, even if it occurs. On the other hand, if silica occurs in a small amount, heat may diffuse to undesirable areas, which facilitates the curing among the reagents and makes the local curing impracticable. Notwithstanding, it is possible to control the thickness of the cured layers when the absorption depth is known through the control of the silica amount added to the composition. Thus, the energy penetration in the sample is defined. The interest in analyzing the experiment in function of the variation of silica powder is associated with the obtainment of local curing, since it is the amount of silica powder that will determine the depth of energy entering into the irradiated sample, and consequently the thickness of the cured part. Considering the importance of silica in the formation of the appropriate composition of the thermosensitive resin, it is necessary to analyse the effect since it is considered to be one of the main parameters in the physical interpretation and development of the process to obtain local curing. A further preoccupation was to create a physical model with the laser operational parameters which could determine the boundary conditions of the laser application on the sample for the obtainment of the local curing. A careful control of these parameters (scan speed, power output, depth absorption) is essential for the confinement of the curing in the volume specified in the Eq.(2). In order to know the importance of the parameters which are involved, an experimental was made by scanning the beam through a circular trajectory at the sample surface, at a scan speed  $v = 159.2\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ , which result in a laser repetition rate of 35ms, a dwell time of  $\tau_d = 377\mu\text{s}$  was obtained. The laser beam was focused to 1/e maximum concentration of energy of the 0.3 mm radius, so that by using an absorption depth of  $\delta = 22.4$ , it was calculated the energy deposited by the laser at each 'dwell time' in the  $0.33 \times 10^{-2} \text{ mm}^3$  volume. The laser being operating continuously with  $P = 20\text{W}$ , the deposited energy was found to be  $E_p = 7.6\text{mJ}$  approximately.

The numerical model has shown to be quite flexible, on describing the complete bidimensional mapping of the thermal evolution in the sample bulk. An important element for the solution of Eq. (6) is term G, which represents the source of heat. In order to deal with the energy absorption, the term G is worked out in function of the absorption depth obtained from the semi-liquid sample. A particular interest is mapping out the irradiated volume by determining a real control of the heating generated by the laser. With the laser operating in the pulsed mode, and if the parameters and irradiation conditions are known, it is possible to control local curing with rapid increases in temperature, obtained with the short exposure time of the laser beam and the low thermal conductivity of the sample. The distribution of temperature at each point of the attained volume and over the sample surface was obtained through numerical simulation. Fig 5 shows the distribution of temperature along areas situated over and below the sample surface with isothermal profile described for 1/e of the highest temperature reached in the sample. The results produced by the numerical model proved the possibility of confining the curing within the same dimension of the laser beam. They are in conformity with the preliminary experimental results where tridimensional pieces were built by means of the superposition of layers with individual thickness varying from 0.1 to 0.2 mm.

## Conclusions

The results of the study in the process of local curing of a semi-liquid sample, composed of epoxy resin, diethylene triamine and powdered silica, with the use of a  $\text{CO}_2$  laser as selective source of heat, were presented. The use of infrared laser to locate the curing of thermosensitive resins is new, and it is believed to be an advantageous method as compared with the conventionally used process. It was observed that local curing only takes place with a specific composition of the sample. In order that the curing might occur, the sample surface was swept by the laser beam along a circular trajectory, at an appropriate speed. In order to adapt the process of local curing, with the use of infrared radiation, for the obtainment of plastic pieces of unlimited geometry, it is necessary the effective control of the parameters involved, including laser power, 'dwell time' or exposition time, speed and frequency of displacement, the laser beam dimension, the thermal conductivity of the sample, and the reagents

- Barros, M. L., 1994, Scarparo, M.A.F., Kiel, A., Hurtak, J.J. and Gerck, E., "Fast Prototyping with Thermal Stereolithography", 1959, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol. XVI, no. 1, pp. 51-57.
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1996, "Conduction of heat in solids", 2<sup>nd</sup> ed. 10 (Oxford University), New York.
- Sanders, D.J., 1984, "Temperature Distributions Produced by Scanning Gaussian Laser Beams", Applied Optics, vol. 23, no. 1, pp. 30-35.
- Scarparo, M.A.F., Chen, Q.J., Miller A.S., Zhang J.H., and Allen S.D., "Mechanisms of Carbon Dioxide Laser Stereolithography in Epoxy-Based Materials", Journal of Applied Polymer Science, vol. 62, pp. 491-500.
- Scarparo, M.A.F., Chen, Q.J., Miller A.S., Li C.J., Leary H. and Allen S.D., 1996, "Mechanisms of Carbon Dioxide Laser Stereolithography", Applied Surface Science, 106, pp. 275-281.

# Second Law Analysis For Balanced Heat Exchangers With Negligible Pressure Drop Irreversibility

**Francisco Eduardo Mourão Saboya**

Universidade Federal Fluminense  
Departamento de Engenharia Mecânica  
24220-210 Niterói RJ Brasil

**Carlos Eduardo S.M. da Costa**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Departamento de Engenharia Mecânica  
22453-400 Rio de Janeiro. RJ Brazil

## Abstract

*From the second law of Thermodynamics, the concepts of entropy generation and irreversibility are applied to counterflow, parallel flow and crossflow heat exchangers. In the analysis, the heat exchangers are assumed to be balanced, with negligible pressure drop irreversibility. In a balanced heat exchanger, the heat capacity rates are the same on the two sides of the heat transfer surface. The counterflow heat exchanger is compared with the other two types of heat exchangers and the comparison indicates which one has the minimum irreversibility. In this comparison, only the exit temperatures and the heat transfer rates of the heat exchangers are different. The other conditions (entrance temperatures, mass flow rates, number of transfer units) and the working fluids are the same in the heat exchangers.*

**Keywords:** *Balanced Heat Exchanger, Irreversibility, Entropy Generation, Heat Capacity Rate.*

## Introduction

As observed by Bejan (1982) and (1988), two distinct mechanisms of thermodynamic irreversibility are present in heat exchangers: heat transfer irreversibility and pressure drop irreversibility. In the present work, the pressure drop irreversibility is assumed negligible. The entropy generation, in this situation, is caused only by heat transfer across a finite temperature difference.

Costa and Saboya (1985) reported an irreversibility comparison of parallel flow and counterflow heat exchangers. In this work, the pressure drop irreversibility was also assumed negligible.

Bejan (1996) recognized in the structure of heat exchanger irreversibility an unavoidable irreversibility that is due solely to the flow arrangement. He named this irreversibility, remanent irreversibility or flow imbalance irreversibility. For balanced heat exchangers, with negligible pressure drop irreversibility, the imbalance irreversibility is a minimum. For a balanced counterflow heat exchanger the imbalance irreversibility is zero, while for a balanced parallel flow arrangement it is finite. In the calculations of the imbalance irreversibility, the heat exchanger approaches the ideal limit of infinite number of transfer units and zero pressure drop.

Gerdiv (1996) presented an analysis in which the entropy generation is minimized during the flow of a fluid in circular ducts. The irreversibility mechanisms were heat transfer and pressure drop caused by viscous friction. The importance of minimizing the irreversibility, or entropy generation, is to minimize the lost available work which is proportional to the entropy generation.

The purpose of this analysis is to apply the second law of Thermodynamics to counterflow, parallel flow and crossflow heat exchangers. The heat exchangers are assumed to be balanced. In this situation, the heat capacity rates are the same for the working fluids of the heat exchangers. Three types of crossflow heat exchangers are studied: both streams mixed, both streams unmixed, one stream mixed and the other unmixed.

Criteria will be established, based on the irreversibility concept, that will indicate which one has the minimum irreversibility when compared to the counterflow heat exchanger. Although it is commonly said that the counterflow heat exchanger is less irreversible than other heat exchangers, it will be shown that such statement is not true.

In order to compare the counterflow heat exchanger with other heat exchanger types, it will be assumed that they have the same entrance temperatures, the same mass flow rates, the same number of transfer units and the same working fluids. Only the exit temperatures and the heat transfer rates will be different.

## Heat Exchanger Effectiveness

An important parameter, that is used in the present investigation in conjunction with the irreversibility concept, is the heat exchanger effectiveness. The heat exchanger effectiveness  $\varepsilon$  is defined as:

$$\varepsilon = \frac{\text{actual heat transfer rate}}{\text{maximum possible heat transfer rate}} \quad (1)$$

or

$$\varepsilon = \frac{C_h (T_{hi} - T_{he})}{C_{\min} (T_{hi} - T_{ci})} = \frac{C_c (T_{ce} - T_{ci})}{C_{\min} (T_{hi} - T_{ci})} \quad (2)$$

where the maximum possible heat transfer rate  $Q_{\max}$  is given by:

$$Q_{\max} = C_{\min} (T_{hi} - T_{ci}) \quad (3)$$

and the heat capacity rate  $C$  is defined by:

$$C = \dot{m}c \quad (4)$$

In equation (4),  $\dot{m}$  is the discharge or mass flow rate and  $c$  is the specific heat at constant pressure. In equation (2),  $T$  is the fluid temperature, the subscripts  $h$  and  $c$  indicate the hot and cold fluids, respectively, and the subscripts  $e$  and  $i$  indicate the exit and the inlet of the heat exchanger, respectively. The subscript  $\min$  is for minimum.

From the heat exchanger theory, is possible to write:

$$\varepsilon = f(R_c, N) \quad (5)$$

where

$$R_c = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (6)$$

### Nomenclature

$A$  = heat transfer area,  $m^2$   
 $C$  = heat capacity rate,  $W/K$   
 $c$  = specific heat at constant pressure,  $J/kg \cdot K$   
 $I$  = irreversibility rate,  $W$   
  
 $m$  = discharge,  $kg/s$   
 $N$  = number of transfer units, dimensionless  
 $N^*$  = value of  $N$  for equal irreversibility rates of two exchangers, dimensionless  
 $N^{**}$  = value of  $N$  for maximum irreversibility rate of counterflow exchanger, dimensionless

$Q$  = heat transfer rate,  $W$   
 $R_c$  = minimum and maximum heat capacity rates ratio, dimensionless  
 $s$  = specific entropy,  $J/kg \cdot K$   
 $T$  = absolute temperature,  $K$   
 $T_D$  = ambient absolute temperature,  $K$   
 $U$  = heat exchanger overall heat transfer coefficient,  $W/m^2 \cdot K$   
 $X$  = inlet absolute temperatures ratio, dimensionless  
 $W$  = maximum and minimum heat capacity rates ratio, dimensionless

### Greek Symbols

$\varepsilon$  = heat exchanger effectiveness, dimensionless  
 $\varepsilon^*$  = value of  $\varepsilon$  for maximum irreversibility rate, dimensionless

### Subscripts

$e$  = exit of the heat exchanger  
 $i$  = inlet of the heat exchanger  
 $h$  = hot fluid  
 $c$  = cold fluid  
 $\min$  = minimum  
 $\max$  = maximum



$$N = \frac{U A}{C_{\min}} \quad (7)$$

The subscript max means maximum and  $N$  is the number of transfer units.  $U$  is the heat exchanger overall heat transfer coefficient and  $A$  is the heat transfer area.

It should be observed that the function given by Eq. (5) depends on the heat exchanger considered for analysis. Mills (1992) gives the effectiveness expressions for the heat exchanger types studied in the present research. They are:

a) Counterflow:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-N(1 - R_c)]}{1 - R_c \exp[-N(1 - R_c)]} \quad (8)$$

For a balanced heat exchanger  $C_{\min} = C_{\max}$  and  $R_c = 1$ . In this case Eq. (8) gives:

$$\varepsilon = \frac{N}{N+1} \quad (9)$$

b) Parallel flow:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-N(1 + R_c)]}{1 + R_c} \quad (10)$$

With  $R_c = 1$ , Eq. (10) gives:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp(-2N)}{2} \quad (11)$$

c) Crosflow, both streams unmixed:

$$\varepsilon = 1 - \exp\left\{\frac{N^{0.22}}{R_c} \left[\exp(-R_c N^{0.78}) - 1\right]\right\} \quad (12)$$

If  $R_c = 1$ , Eq. (12) gives:

$$\varepsilon = 1 - \exp\left[\frac{\exp(-N^{0.78}) - 1}{N^{-0.22}}\right] \quad (13)$$

d) Crossflow, both streams mixed:

$$\varepsilon = \left[ \frac{1}{1 - \exp(-N)} + \frac{R_c}{1 - \exp(-R_c N)} - \frac{1}{N} \right]^{-1} \quad (14)$$

With  $R_c = 1$ , Eq. (14) gives:

$$\varepsilon = \left[ \frac{2}{1 - \exp(-N)} - \frac{1}{N} \right]^{-1} \quad (15)$$

e) Crossflow,  $C_{\max}$  unmixed,  $C_{\min}$  mixed:

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{R_c} [1 - \exp(-R_c N)] \right\} \quad (16)$$

When  $R_c = 1$ , Eq. (16) gives:

$$\varepsilon = 1 - \exp[\exp(-N) - 1] \quad (17)$$

f) Crossflow,  $C_{\max}$  mixed,  $C_{\min}$  unmixed):

$$\varepsilon = \frac{1}{R_c} \{1 - \exp[R_c (\exp(-N) - 1)]\} \quad (18)$$

When  $R_c = 1$ , Eq. (18) gives:

$$\varepsilon = 1 - \exp[\exp(-N) - 1] \quad (19)$$

It should be observed that Eqs. (17) and (19) are identical.

## Heat Exchanger Irreversibility

The irreversibility rate  $I$  of an insulated heat exchanger, (without heat loss to the ambient) can be evaluated from:

$$I = T_o [\dot{m}_c (s_{ce} - s_{ci}) + \dot{m}_h (s_{he} - s_{hi})] \quad (20)$$

where  $s$  is the specific entropy of the working fluid and  $T_o$  is the ambient absolute temperature. Equation (20), assuming negligible pressure drop irreversibility, can be written as:

$$I = T_o \left( C_c \ln \frac{T_{ce}}{T_{ci}} + C_h \ln \frac{T_{he}}{T_{hi}} \right) \quad (21)$$

By using Eqs. (2) and (4) the exit temperatures  $T_{ce}$  and  $T_{he}$  can be eliminated from Eq. (21). This gives:

$$I = T_o \left[ C_c \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon Q_{\max}}{C_c T_{ci}} \right) + C_h \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon Q_{\max}}{C_h T_{hi}} \right) \right] \quad (22)$$

Assuming  $C_c$ ,  $C_h$ ,  $T_{ci}$ ,  $T_{hi}$  and  $T_o$  constant parameters, the only variable in Eq. (22) is the effectiveness  $\varepsilon$ . By taking the first and the second derivatives of  $I$  with respect to  $\varepsilon$ , it is easy to show that the irreversibility rate has a maximum for the following value of  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \frac{C_{\max}}{C_{\min} + C_{\max}} = \frac{W}{1+W} \quad (23)$$

where

$$W = \frac{1}{R_c} = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} \quad (24)$$

If  $C_c = C_{\min}$  Eq. (22) can be written as:

$$\frac{I}{T_o C_{\min}} = W \ln \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{W} (1-X) \right] + \ln \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{X} - 1 \right) \right] \quad (25)$$

If  $C_h = C_{\min}$  Eq. (22) gives:

$$\frac{I}{T_o C_{\min}} = W \ln \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{W} \left( \frac{1}{X} - 1 \right) \right] + \ln [1 - \varepsilon (1-X)] \quad (26)$$

In Eqs. (25) and (26),  $X$  is defined as:

$$X = \frac{T_{ci}}{T_{hi}} \quad (27)$$

For a balanced heat exchanger  $W = 1/R_c = 1$ . In this case  $\varepsilon^* = 1/2$  and Eqs. (25) and (26) are identical to the following Eq.:

$$\frac{I}{T_o C_{\min}} = \ln \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{X} - 1 \right) \right] + \ln [1 - \varepsilon (1-X)] \quad (28)$$

Equation (28) is valid for any balanced heat exchanger with negligible pressure drop irreversibility and it gives the dimensionless irreversibility as function of the effectiveness  $\epsilon$  and temperature ratio  $X$ .

Sekulic (1986) presented results of balanced heat exchangers with negligible pressure drop irreversibility. The temperature ratio  $X$  was taken equal to 0.5. The results for the irreversibility are in agreement with those of Eq. (28). The occurrence of a maximum in the irreversibility of various heat exchanger configuration is illustrated.

## Results

### Counterflow and Parallel Flow Heat Exchangers

With  $C_{\max} = C_{\min}$ , the effectiveness expressions for counterflow and parallel flow heat exchangers are given by Eqs. (9) and (11), respectively. In this situation it is possible, by using Eq. (28) in conjunction with Eqs. (9) and (11), to eliminate  $\epsilon$  obtaining  $I$  as function of  $N$  and  $X$ .

Figure 1 is a sketch (not to scale) that shows the irreversibility rate  $I$  as function of  $N$  for the two heat exchangers under consideration.  $X$ ,  $T_o$  and  $C_{\min} = C_{\max}$  are constant parameters.

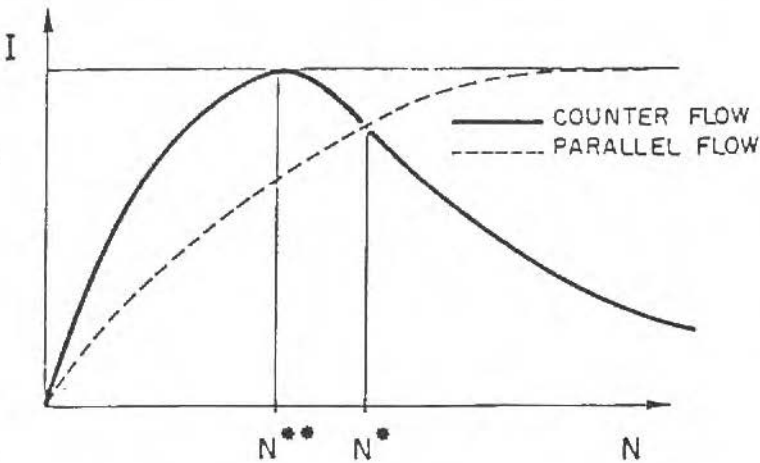


Fig. 1 Irreversibility rate as function of the number of transfer units.

In Figure 1, two values of the abscissa variable are in evidence:  $N^{**}$  = value of  $N$  for which the counterflow exchanger irreversibility rate is a maximum;  $N^*$  = value of  $N$  for which the two heat exchangers have the same irreversibility rate. By setting Eq. (9)  $\epsilon = \epsilon^* = 1/2$  and solving for  $N = N^{**}$ , results  $N^{**} = 1$ .

The condition of equal irreversibility rates of the two exchangers yields:

$$\frac{(N^* - 1)^2}{(N^* + 1)^2} - \exp(-4N^*) = 0 \quad (29)$$

The solution of Eq. (29) was obtained by numerical methods. Two roots were found,  $N^* = 0$  and  $N^* = 1.1997$ . Then, for  $W = 1.0$ ,  $N^*$  is independent of  $X$  and it is equal to 1.1997. The root  $N^* = 0$  has no significance in the analysis.

It is clear that when  $N < N^*$  the parallel flow heat exchanger is less irreversible than the counterflow. On the other hand, when  $N > N^*$  the counterflow heat exchanger is the less irreversible. Then it is possible to write:

If  $N < 1.1997$ , parallel flow exchanger is less irreversible.

If  $N > 1.1997$ , counterflow exchanger is less irreversible.

## Counterflow and Crossflow with Both Streams Unmixed

The effectiveness expressions for counterflow and crossflow (both streams unmixed) heat exchangers are given by Eq. (9) and (13), respectively. By using Eq. (28) in conjunction with Eqs. (9) and (13) it is possible to eliminate  $\varepsilon$  in Eq. (28). Two Eqs., for the heat exchangers under study, are obtained. They give I as function of N and X for the two heat exchangers.

The condition of equal irreversibility rates of the two exchangers yields:

$$\frac{N^*}{(N^* + 1)^2} - \exp\left[\frac{\exp(-N^{*0.78}) - 1}{N^{*-0.22}}\right] + \left\{ \exp\left[\frac{\exp(-N^{*0.78}) - 1}{N^{*-0.22}}\right] \right\}^2 = 0 \quad (30)$$

It is seen that Eq. (30) is independent of X. Then,  $N^*$  is also independent of X. The solution of Eq. (30) was obtained by numerical methods and the root with significance was found to be  $N^* = 1.0684$ .

Then it is possible to write:

If  $N < 1.0684$ , crossflow with both streams unmixed is less irreversible

If  $N > 1.0684$ , counterflow is less irreversible

## Counterflow and Crossflow with Both Streams Mixed

For this comparison, Eq. (28) is used in conjunction with Eqs. (9) and (15). The effectiveness  $\varepsilon$  is eliminated in Eq. (28), resulting in two Eqs. for the heat exchangers under consideration. These two Eqs. give I as function of N and X for the two heat exchangers.

The condition of equal irreversibility rates of the two exchangers gives the following equation:

$$\frac{N^*}{(N^* + 1)^2} - \left[ \frac{2}{1 - \exp(-N^*)} - \frac{1}{N^*} \right]^{-1} + \left[ \frac{2}{1 - \exp(-N^*)} - \frac{1}{N^*} \right]^{-2} = 0 \quad (31)$$

The solution of Eq. (31) was found to be  $N^* = 1.0933$  and it is independent of X. Then, results for the comparison:

If  $N < 1.0933$ , crossflow with both streams mixed is less irreversible

If  $N > 1.0933$ , counterflow is less irreversible

## Counterflow and Crossflow with One Stream Mixed and The Other Unmixed

In order to compare these heat exchangers, Eqs. (28), (9) and (17) must be used. The effectiveness  $\varepsilon$  is eliminated from Eq. (28). The two resulting Eqs. give I as function of N and X for the two heat exchangers.

To find  $N^*$ , the irreversibility rates of the two heat exchangers are set equal. The following equation is obtained:

$$\frac{N^*}{(N^* + 1)^2} - \exp[\exp(-N^*) - 1] + \{\exp[\exp(-N^*) - 1]\}^2 = 0 \quad (32)$$

The solution of Eq. (32) was found numerically and it is  $N^* = 1.0737$ . It is observed that this solution is independent of  $X$ . Then, the comparison is:

If  $N < 1.0737$ , crossflow with one stream mixed and the other unmixed is less irreversible

If  $N > 1.0737$ , counterflow is less irreversible

## Concluding Remarks

Very simple criterions, based on the irreversibility concept, were established. Although it is commonly said that the counterflow heat exchanger is less irreversible than other exchangers, it has been proved that this is not always true.

For balanced heat exchangers, with negligible pressure drop irreversibility, it has been shown that  $N^*$  does not depend on  $X$ . This is an interesting finding.

It can be observed that when the counterflow heat exchanger is less irreversible than the parallel flow, it will be less irreversible than all the exchangers of the present investigation.

On the other hand, when the counterflow heat exchanger is more irreversible than the crossflow with both streams unmixed, it will be more irreversible than all the exchangers studied in this work.

## References

- Bejan, A., 1982, "Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow", John Wiley and Sons Inc., New York.
- Bejan, A., 1988, "Advanced Engineering Thermodynamics", John Wiley and Sons Inc., New York.
- Bejan, A., 1996, "Entropy Generation Minimization", CRC Press, New York.
- Costa, C.F.S.M. da, and Saboya, F.E.M., 1985, "Second Law Analysis for Parallel Flow and Counterflow Heat Exchanger", Proceedings of the VIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering, pp. 185-187.
- Gerdov, G., 1996, "Second Law Analysis of Convective Heat Transfer in Flow Through a Duct with Heat Flux as a Function of Duct Length", HVAC and R. Research, Vol. 2, No. 2, pp. 149-157.
- Mills, A.F., 1992, Heat Transfer, Irwin, Homewood, IL.
- Sekulic, D.P., 1986, "Entropy Generation in a Heat Exchanger", Heat Transfer Eng., Vol. 7, No 1-2, pp. 83-88.

# On the Turbulent Transport Characteristics of Non Premixed Diffusion Flames in Mutual Interaction

A. Caldeira-Pires

M. V. Heitor

A. L. N. Moreira

Instituto Superior Técnico  
Technical University of Lisbon  
Dept. of Mechanical Engineering  
1096 Lisboa Codex Portugal  
armando@termcomb.ist.utl.pt

## Abstract

*Turbulent transport in single and multiple jet flames in mutual interaction is studied through the analysis of 1 and 3 propane flames with a Reynolds number of 20400. The experiments included the combination of a laser velocimeter, operated in the backscatter mode, with digitally-compensated thermocouples and extend previously acquired knowledge on the analysis of flames in mutual interaction. Although the oxygen insufficiency is the controlling mechanism in the propagation of interacting flames, the present results quantify the extent to which turbulent transfer is altered in the interacting flame zone. The results show that turbulent mixing is affected as a consequence of changes in the mean flow characteristics, but the turbulent heat fluxes remain qualitatively unaltered at the level of flame interaction studied here, with single and multiple flames exhibiting zones of non-gradient turbulent heat transfer.*

**Keywords:** Combustion, Turbulence, Scular Transport, Non Premixed Flame, Multiple Flames

## Introduction

Despite turbulent flames in mutual interaction are of great interest in a variety of practical systems, there is still a poor understanding of the influence of the interaction mechanisms between the individual flames and the surrounding air flow on flame structure and propagation. Previous studies have considered full-scale systems and report on the effects of operational parameters, such as load distribution and distance between burners on the flame length and pollutant emissions, Fricker et al.(1971). Payne(1977). Although they provide important information, a better knowledge of these effects on turbulent mixing and chemical kinetics is required and experiments at the laboratory-scale on simple geometries are crucial to provide this fundamental knowledge.

Previous laboratory experiments are sparsely reported in the literature, which include the natural gas and town gas jet flames of Lenze et al.(1975) and the propane lifted flames of Mennon and Gollahalli(1985, 1988). Their results showed that the interaction mainly arises from the lack of oxygen in the initial flame region with the consequent effects on the rates of combustion at downstream locations. Heitor et al.(1991) extended the analysis to lifted propane flames in the range  $6.3 < Re \times 10^3 < 37.3$  and  $0.65 < Fr \times 10^{-3} < 23.4$  and reported results in the absence of upward entrainment of cold air in the flame zone. In general, the results have been limited to the flame length and time-averaged temperature and a major species concentration, suggesting that flame interaction is predominantly affected by oxygen deficiency with the degree of interaction dependent upon the upstream boundary conditions. However, it has also been recognised that the increased turbulent mixing rates and induced buoyancy levels which may occur in interacting flames, compete with the oxygen insufficiency and may alter the rates of combustion and, in general, the nature of the turbulent transport processes. This has not been considered in previous works and is the main objective of the work reported here. The analysis is based on measurements of mean and fluctuating velocity and temperature complemented by those of gas composition, together with measurements of the correlations associated with the turbulent transport of heat and momentum.

The following section describes the experimental arrangement, the flames investigated and the instrumentation used to obtain the results. The error sources associated with the measurement are considered and assessments of accuracy provided. The results are presented and discussed in Results and Discussion and the main findings and conclusions are summarised in the Conclusion section.

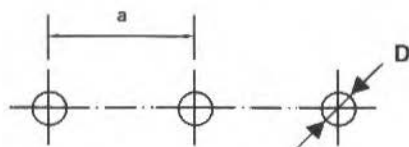
## Flow Configuration and Experimental Method

### The Burner Configuration

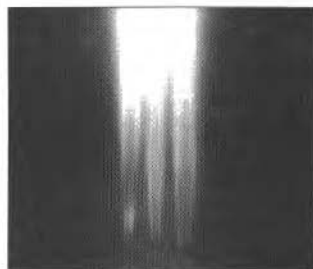
The experiments were conducted in jet flames formed on round nozzles with an exit diameter of  $D=5\text{mm}$  and boundary conditions typical of a fully-developed pipe flow. A co-axial flow of  $\text{H}_2$  was used to stabilise the flames and to attach them to the burners, in a way similar to that used by Godoy(1982). Commercial grade propane was used as jet fluid in the range 0.65 to 1.2g/s, resulting in single jet flames with Reynolds numbers in the range 20400 up to 37600 and Richardson numbers from  $1.5 \times 10^{-4}$  to  $4.6 \times 10^{-6}$ . The measurements reported here consider, however, arrangements up to 3 flames in line, with  $\text{Re}=20400$  and a separation distance,  $a$ , of 6 burner diameters. As suggested by one of the referees who has comment the work, we included in Fig. 1 a schematic diagram of the burner disposition as well as a photograph of the 3-flames arrangement. Analysis, which is not shown here for lack of space, proved that the results may be considered independent of the Reynolds number and showed time-averaged scalar characteristics in the single flames comparable to those reported by Godoy(1982).

### The Experimental Techniques

Velocity measurements were obtained with a dual-beam laser-Doppler velocimeter based on an argon-ion laser light source at 514.5nm, 2W, and operated in the backscatter mode, with sensitivity to the flow direction provided by a Bragg cell. The frequency shift was set up to 5 MHz. The transmitting optics of the velocimeter comprised a 300mm focal-length lens and the half angle between the beams was  $2.39^\circ$ ; the calculated dimensions of the measuring volume at  $e^{-2}$  intensity locations were 1.452 mm and 0.067 mm.



a)



b)

Fig. 1 a) Schematic diagram of a three burners configuration  
b) Three Flames configuration photography

### Nomenclature

$a$  = distance between the centre of two side-by-side burners  
 $D$  = burner exit diameter  
 $\text{Fr}$  = Froude number  
 $r$  = radial distance relative to the centre of the central burner  
 $\text{Re}$  = Reynolds number  
 $R_{uv}$  = axial velocity fluctuations / temperature fluctuations correlation coefficient,

$$R_{uv} = \frac{\overline{u''T''}}{(\overline{u''^2})^{1/2} (\overline{T''^2})^{1/2}}$$

$R_{uv}$  = axial velocity fluctuations / radial velocity fluctuations correlation coefficient,

$$R_{uv} = \frac{\overline{u''v''}}{(\overline{u''^2})^{1/2} (\overline{v''^2})^{1/2}}$$

$R_{vt}$  = radial velocity fluctuations / temperature fluctuations correlation coefficient,

$$R_{vt} = \frac{\overline{v''T''}}{(\overline{v''^2})^{1/2} (\overline{T''^2})^{1/2}}$$

$u''$  = axial velocity fluctuations  
 $U$  = axial velocity  
 $u''T''$  = axial velocity fluctuations / temperature fluctuations correlation

$u''v''$  = axial velocity fluctuations / radial velocity fluctuations correlation

$v''$  = radial velocity fluctuations  
 $V$  = radial velocity  
 $v''T''$  = radial velocity fluctuations / temperature fluctuations correlation

$x$  = axial distance relative to the centre of the central burner.

#### Superscript

$\sim$  = Frave average

$T''$  = temperature fluctuations  
 $T$  = temperature



The propane gas was seeded with submicron alumina particles making use of a range of cyclone generators. In addition, the entrained still air was also seeded by injecting seeded air below a plate located at the burner level in order to avoid the upward entrainment of cold air in the near burner flow. The light scattered by the particles was processed by a commercial frequency counter (DANTEC 55L96) interfaced with a 16-bit microcomputer, where all the velocity moments up to the third order were evaluated. The laser velocimeter was located on a three-dimensional traversing unit, allowing the positioning of the measuring control volume within  $\pm 0.25$  mm. The distributions of the Reynolds shear stress  $u''v''$  were obtained by traversing the control volume with the laser beams in the longitudinal and vertical planes and at  $\pm 45^\circ$ , as described by Durst et al.(1981).

Temperature measurements were obtained with butt-welded thermocouples made of Pt/Pt13%Rh wires with 0.40mm, in diameter. The output of the thermocouples was differentially amplified ( $\times 100$ ) and digitised by a 12-bit analogue-to-digital converter at sampling rates up to 30KHz. The noise level could be kept below 0.1% of full-scale deflection, corresponding to a maximum temperature error of 2K. The thermal inertia of the fine-wire thermocouples gives rise to first-order damping of their frequency response, for which numeric compensation was performed. The process of compensation followed the recommendations of Heitor et al.(1985) and Ferrão and Heitor(1992). The time constant of the thermocouple was obtained from the Collis and Williams law (see Collis and Williams, 1959), with the coefficients obtained at each point within the flame from the measured mean temperatures, velocities and gas species concentrations.

Major species concentrations of CO, CO<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO<sub>x</sub> and unburned hydrocarbons were measured by gas sampling and subsequent on-line analysis, using an L-shaped, water cooled probe with an outer diameter of 6 mm and an orifice of 1.5 mm in diameter. The analysis was performed in a wet basis and the results were shown to be independent of the suction velocity.

Simultaneous time-resolved velocity-temperature measurements were made with a system similar to that described by Ferrão and Heitor(1992), as presented in Fig. 2, implemented in a 16-bit, 80386

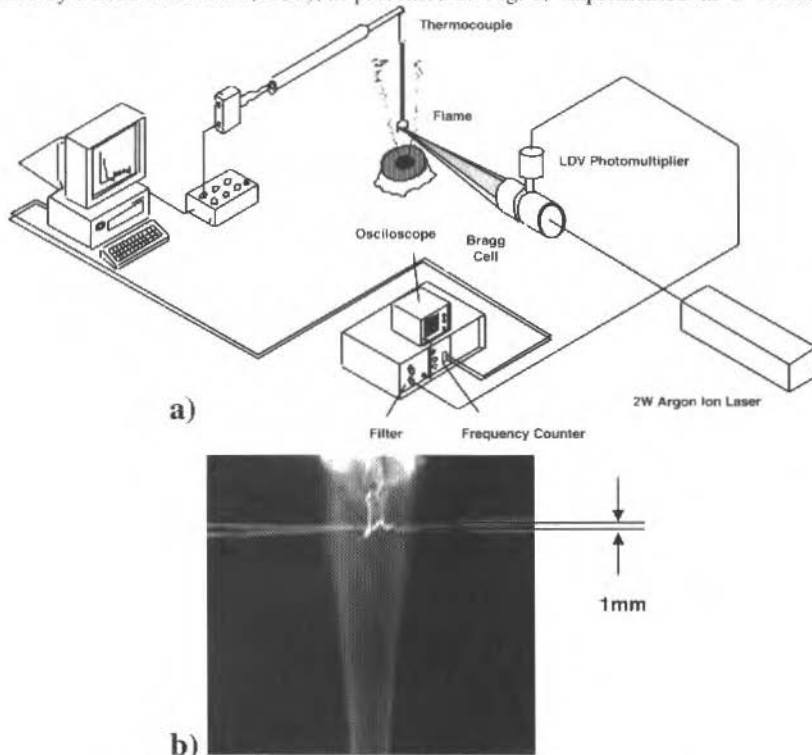


Fig. 2 a) Diagram of the experimental arrangement  
b) Photograph of the laser anemometer and of the thermocouple within the flame

personal computer making use of digital and analogue input/output boards for the temperature and the velocity signals, respectively. The thermocouple signals were continuously sampled through a DMA board and stored in a circular buffer memory. The occurrence of a velocity measurement was signalled by the data ready output of the LDV counter, which was hold until the transfer of a group of 13 temperature samples from the circular buffer to a separate storage area of the computer memory was performed. This set of temperature samples was necessary to evaluation the temperature derivatives at that specific velocity measurement. The data acquisition frequency could be set up to 100 kHz and, therefore, did not present a limitation to the joint measuring system which, on the other hand, was limited by the deterioration of the thermocouple as discussed in the following section. The population size varied with the measurement position, but was usually larger than 10000 samples for the measurements reported here.

The velocity and the temperature measurements conditioned by occurrence of the LDV signals correspond to Favre average quantities, as the measured gaseous species concentration. However, the unconditioned compensated temperatures correspond to unweighted values (e.g. Heitor and Moreira, 1993).

## Experimental Accuracy

The foregoing described the arrangement of the instrumentation that was used to characterise the flames analysed in this paper. This section presents the results of research made into the various aspects that potentially influence the simultaneous velocity-temperature results. The accuracy of the techniques used for the other time-averaged quantities reported has been analysed in the literature (eg. Heitor and Moreira, 1993, Caldeira-Pires and Heitor, 1997) and are not reported here.

The results may be affected by three main sources of error, namely:

- i) errors in the instantaneous compensated value of temperature;
- ii) spatial separation of the measurement locations of velocity and temperature
- iii) deterioration of the thermocouple bead;
- iv) frequency resolution

The first type of error is mainly due to the inaccuracy in the evaluation of the thermocouple time constant, which is particularly influenced by the type of flame considered. Here, three different approaches were tested. First, the internal heating procedure reported by Ferrão and Heitor(1992) was used, which is based on the analysis of the time-averaged decay of the temperature of the thermocouple bead after the removal of a direct-current overheating pulse. The method was found to be unsuitable for the present experimental conditions due to a number of reasons, including:

- the highly intermittence of the flame front did not allow to keep the full wire at a constant temperature, thus precluding measurements out of the central flame zone;
- the catalytic activity on the thermocouple surface when the probe was located in fuel-rich regions of the flame close to the burner outlet;
- the soot accretion on the wire limits the exposure times of the probe and, therefore, perturbs the measuring process.

A second approach was considered based on the method of Strahle and Muthukrishnan(1976). This requires that the signals acquired by two different thermocouples were recorded simultaneously and analysed in the frequency domain; then, the real and imaginary parts of the cross-correlation functions of the signals were used to evaluate the time constants of each wire, as also described by Son et al.(1988). This method was also found unsuitable for the present experimental flame conditions because the spatial separation between the two temperature measuring locations could not be controlled with the required precision and this strongly affects the results. In addition, the technique could not be used in the intermittent region of the flame, as also observed by Boyer and Queiroz(1991).

An alternative method to determine the time constant of the thermocouple wire, and that used throughout this work, consists in the evaluation of the heat transfer characteristics of the wire based on the law of Collis and Williams, as referred by Heitor et al.(1985), making use of the time-averaged flame properties at each measuring locations. The results have shown a monotonic increase of the time constant with the radial distance with values between 15 and 60ms, as in the non-premixed flame of Ballantyne and Moss (1977). Their accuracy is likely to be affected by a systematic error up to about -5%, with the largest errors occurring in highly intermittent flame zones.

We now turn to the analysis of the influence of the spatial separation between the temperature and the velocity measurement locations, which represents the largest random error affecting the accuracy of

## The Mean and Turbulent Flow Fields

Figure 4 shows radial distributions of the mean and turbulent velocity characteristics measured for the single flame from 10 to 40 diameters downstream of the burner exit. The results show the expected trends of a jet diffusion flame in still air: turbulence intensity is maximum in the shear layer where gradients of mean velocity are larger and where chemical reaction occurs. Probability density functions of velocity fluctuations (not shown here due to lack of space) were found to be nearly Gaussian, except near the outer edge of the jet, where the distributions are negatively skewed due to the entrainment of external air, as also observed by Driscoll et al.(1982).

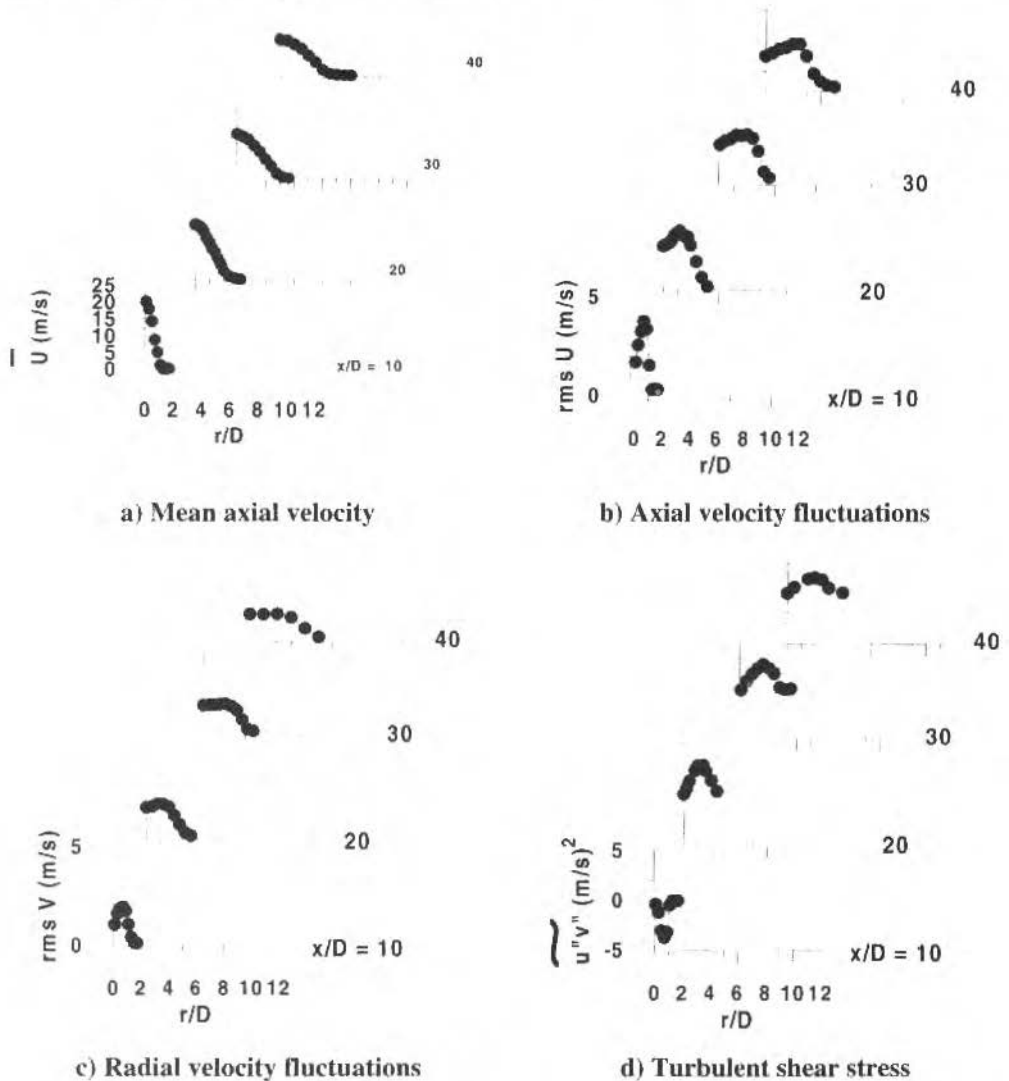


Fig. 4 Radial distributions of the non-dimensional velocity characteristics in the single flame.

Figure 5 shows the radial distributions of velocity characteristics measured in the multiple flames system by traversing the LDV control volume along a path perpendicular to the optical axis. The results showed that the flow is symmetric around the axis of the central flame and, here, only half profiles are presented, with the axis of the central flame located at  $r/D = 0$  in Fig. 5, and the axis of the outer flame

the turbulent heat fluxes. This has also been addressed by Yanagi and Mimura(1981), Tanaka and Yanagi(1983), Heitor et al.(1985) and Ferrão and Heitor(1992) and occurs because the thermocouple junction must lie outside of the velocimeter measuring volume, but it is difficult to place, reliably, both measurement locations closer than 1 mm.

Figure 3 shows a typical result of an experimental analysis performed to quantify the effects of this source of inaccuracy, which was obtained by measuring the velocity-temperature correlations with the velocimeter fixed at  $x/D = 20$  and  $r/D = 1.6$  and for various positions of the thermocouple. The results show that the dependence of the velocity/temperature correlations on the spatial displacement between the two measuring points is comparable along the streamwise and spanwise directions, with errors reaching 25% of the maximum value if the displacement becomes larger than 1.5mm.

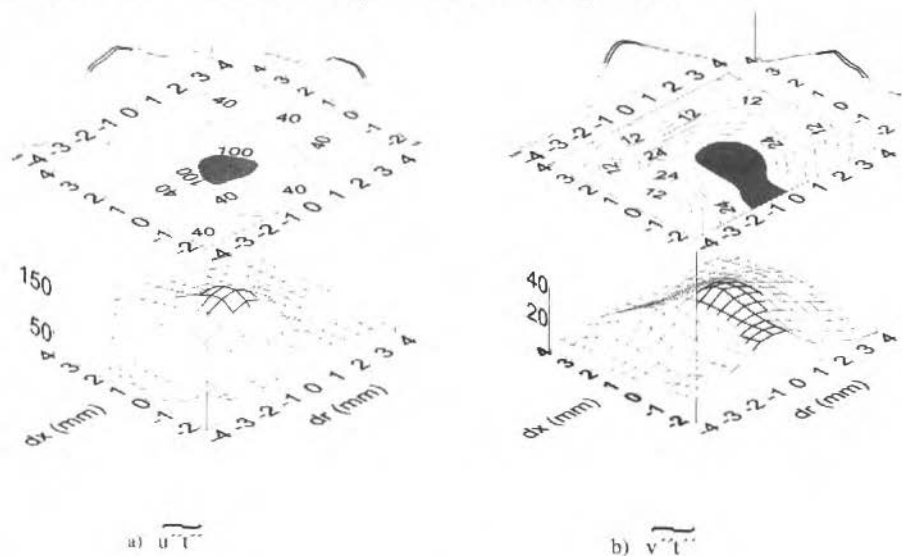


Fig. 3 Dependence of the velocity-temperature correlation on the distance between the LDV control volume, at  $x/D = 20$ ,  $r/D = 1.6$ , and the thermocouple.

Other errors may arise due to the deterioration of the thermocouple bead by seeding particle accretion, e.g., Ferrão and Heitor(1992). Analysis has shown that particle fluxes up to about 1000Hz result in a change of the time constant smaller than 10% over 10 minutes of exposure, and this data rate was used in the present work to avoid any significant deterioration of the bead during the measurements.

Finally, it is important to mention that the accuracy of the compensation of the output of the thermocouple affects the results in terms of the highest frequency component that could be measured. The method used here comprised a least-square numerical derivative approach, as described by Savitzky and Golay(1976), and its accuracy was evaluated by comparing the frequency spectra of uncompensated and compensated signals. The results showed that the energy-containing frequencies of the flames analysed are negligible above around 1.5 kHz, which is smaller than the frequency response of the system. Compensation was, therefore, performed over 2 decades, which is acceptable as discussed by Ballantyne and Moss (1977).

## Results and Discussion

The measurements of velocity, temperature, gas composition and turbulent heat flux obtained for single and multiple flames are presented in this section with the ultimate objective of discussing the extent to which the interaction of flames may alter the typical transport processes of a single jet flame. The mean and turbulent velocity and temperature and the mean major gaseous species concentrations are analysed in a first part and, then, the results of the velocity-temperature correlations are presented and discussed.

at  $r/D = 6$ . The central and the peripheral flames can be individualised up to  $x/D = 20$ , where both streams begin to merge. The width of the outer flame (defined as the radial distance between the points where the mean velocity is 5% of the centreline mean velocity) is about 20% larger than that of the central flame and comparison of these results with those of Fig. 2 shows that, at  $x/D = 20$ , the rate of spread of the central flame is decreased due to the proximity of the outer flames. Also, the locus of the minimum axial velocity in the region between the flames shows that the inner shear layer of the outer flow is deflected inwards. As a consequence, the interacting mixing zone established between the flames develops further downstream with an asymmetric shape on the  $r$ - $x$  plane, with larger radial gradients in the inner side and smaller gradients in the outer side.

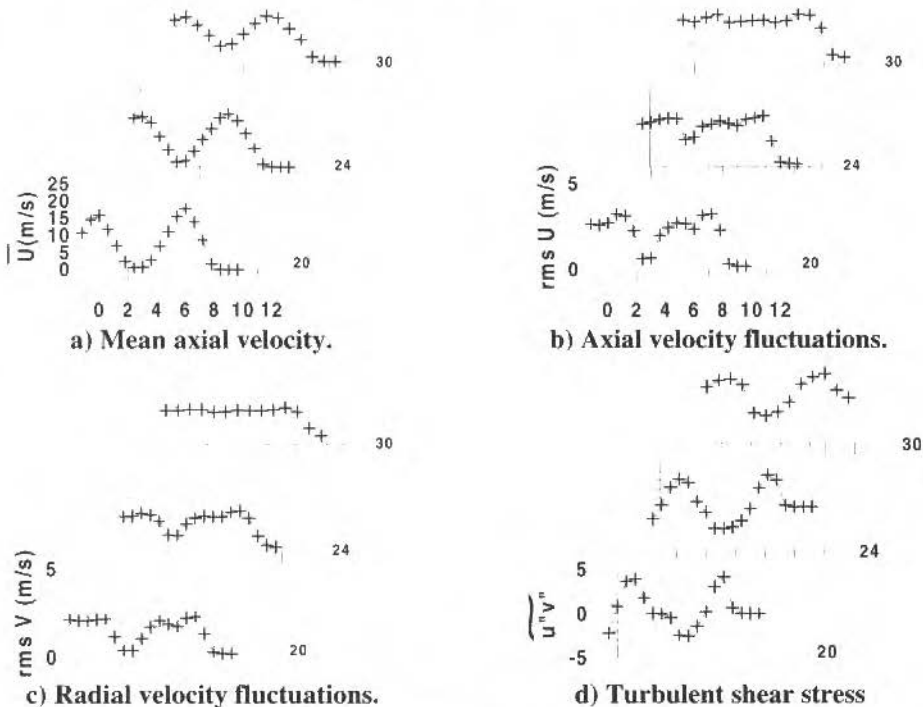


Fig. 5 Radial distributions of the non-dimensional velocity characteristics in the multiple flames.

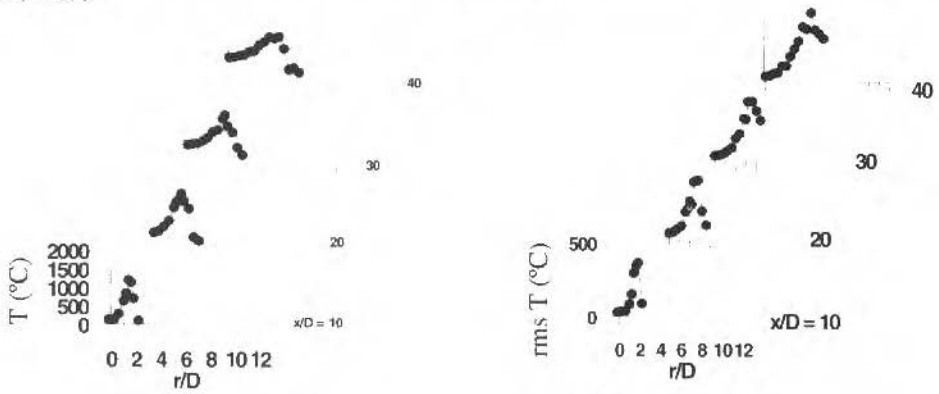
The turbulent flow field (Figs. 5b, c and d) is expected to vary in accordance with the changes observed in the mean flow. For example, the velocity fluctuations in the shear layer of the central flame are larger than those measured in the single flame, but smaller in the inner shear layer of the outer flame. Simultaneously, also the radial gradients of the normal stresses are increased, which alters turbulent diffusion further downstream. As a result, the normal stresses measured on the axis of the central flame at  $x/D = 30$  are larger than those measured in the single flame, while those in the axis of the outer flames are smaller.

The above results suggest that the primarily aerodynamic effect of flames in mutual interaction is due to changes in the radial gradients of the mean flow, which in turn change the pattern of the shear stress  $u'v'$  and, consequently, the interaction of  $u'v'$  with  $\partial U/\partial t$ , which is expected to be the main mechanism associated with turbulent production. This mechanism first feeds energy into the axial velocity fluctuations, which is subsequently redistributed among the other components and, therefore, the velocity fluctuations in the radial direction are more affected than those in the axial direction, as observed in Fig. 5 c). It must be noted that large radial velocity fluctuations were not measured in the upstream part of the interacting mixing layer, as observed in the multijet burner studied by Heitor and Moreira (1992), suggesting the unlikely influence of the axial gradients of mean velocity to turbulent production.

The analysis of the previous paragraphs suggest that the process of flame interaction may be important in practical systems where combustion is controlled, or strongly influenced, by the rates of

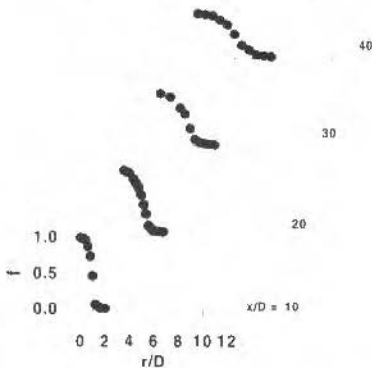
turbulent mixing and, thus, by turbulent fluctuations. However, this process does not act isolated, since the presence of side flames also affects the entrainment of ambient air and, consequently, the amount of reactants available for mixing and combustion. Therefore, a better interpretation of the process requires the analysis of the temperature and gas composition fields. These are shown in Figs. 6 and 7, respectively, in the form of radial distributions of mean and fluctuating temperatures and mean mixture fraction as calculated from the measured concentrations of stable species.

Figure 6a shows that the maxima values of mean temperature in the single flame occur in the mixing region between the external ambient air and the fuel jet, where the local mixture fraction is close to the stoichiometric value (see Figure 6c) and velocity fluctuations are larger. Temperature fluctuations are larger along the outer edge of the flame and peak values are associated with very lean local mixture fractions, as a result of the concurrent processes of mixing and chemical reaction (e. g., Scheffer and Dibble, 1985).



a) Mean temperature.

b) Temperature fluctuations.



c) Mean mixture fraction.

Fig. 6 Radial distribution of temperature and mixture fraction in the single flame

In the multiple flames arrangement, the mixing layer between the central and the outer flames corresponds to a region lacking of oxygen. The minimum value of the mixture fraction moves outwards (Figure 7c), suggesting that the ambient air is preferential entrained into the outer flames, and resulting in an asymmetric distribution of the mixture fraction with values in the axis of the central flame larger than those in the outer flames up to  $x/D = 30$ . While the lack of oxygen in the mixing layer does not significantly affect the temperature distributions at  $x/D = 20$ , the mean and the fluctuating temperatures further downstream are much smaller than those observed in the single flame.

Measurements of spectral emitted radiation reported in a companion paper (e.g., Heitor et al., 1994) show that the lack of oxygen in the interacting mixing layer inhibits the free-radical reactions necessary for the formation of the final products of reaction further downstream. Although these reactions release

a small amount of energy if they are not able to occur in the upstream part of the mixing layer, the decomposition reactions with high activation energy which should occur further downstream are inhibited, thus, contributing to a decrease of the final temperature of the combustion products. This, in turn, results in smaller rates of heat released by combustion, which mainly contributes to decrease the fluctuations of temperature in the interacting mixing layer, as observed by comparing Figs. 6b and 7b.

It must be noted here that a subsequent effect of the rate of heat release would be to decrease the dilatation effects, which would contribute to increase the turbulent velocity fluctuations, as discussed Bilger(1989). The fact that  $v''$  is decreased in the shear layer of the jet diffusion flame due to the presence of a side flame, suggests that the shear-induced mechanisms dominate over the combustion-induced mechanisms of turbulence generation. Therefore, the turbulent flow field in the interacting flames is likely to be more influenced by aerodynamic effects, rather than by chemical effects due to the lack of entrained ambient air.

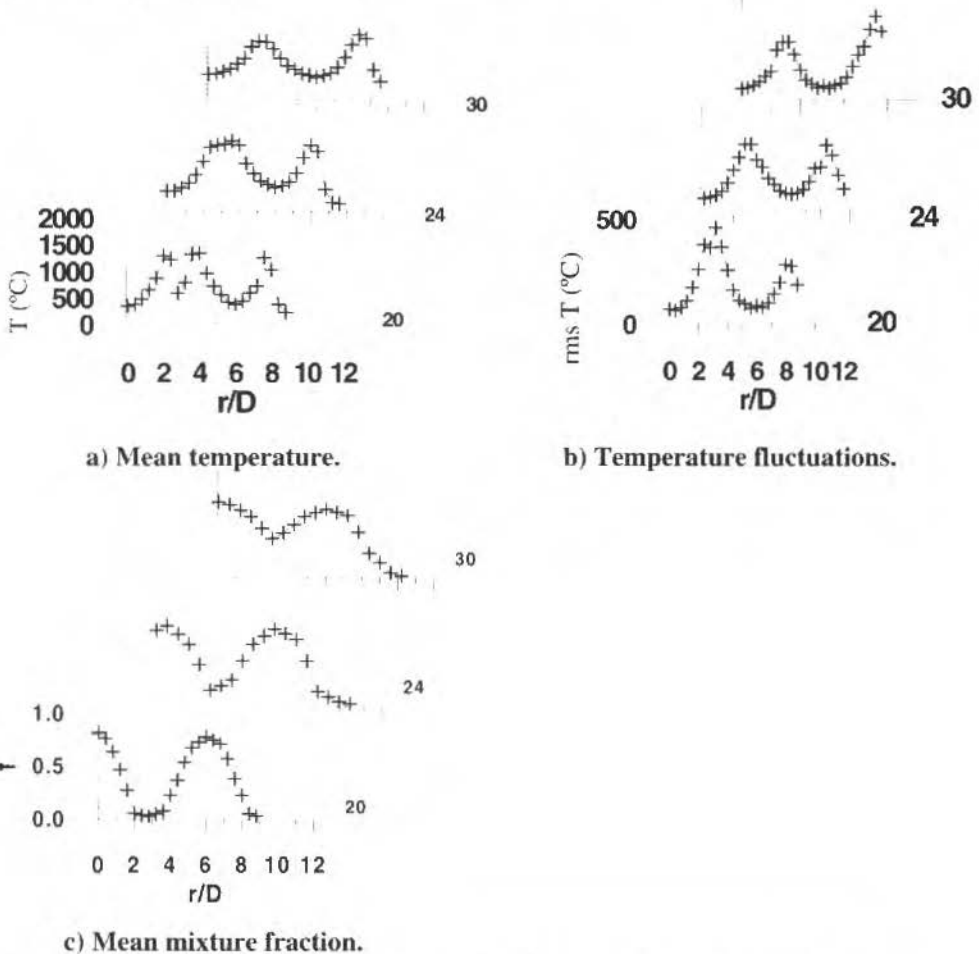


Fig. 7 Radial distribution of temperature and mixture fraction in the multiple flames.

## The Turbulent Fluxes

The main question addressed in the present paper is how the effects on the mixing patterns due to flame interaction influence turbulent transport and, thus, the structure and the mechanisms of flame propagation. To achieve these objectives, Fig. 8 shows the measured vectors of turbulent heat flux,  $u, t$ , superimposed on the radial profiles of mean axial velocity and temperature. These quantities

represent the turbulent heat transfer rate, and are responsible for the phenomenon of flame stabilisation at the burner nozzle and for the downstream flame propagation. The results show that the turbulent heat fluxes tend to be restricted to the mixing layers where larger temperature gradient occur, and exhibit a large component directed along the isotherms. Table 1 shows that the magnitude of the measured values is comparable to that reported in the literature for other jet flames. In addition, the results follow similar qualitative trends for single and multiple flames, although the details are affected by the interacting process, as considered in the following paragraphs.

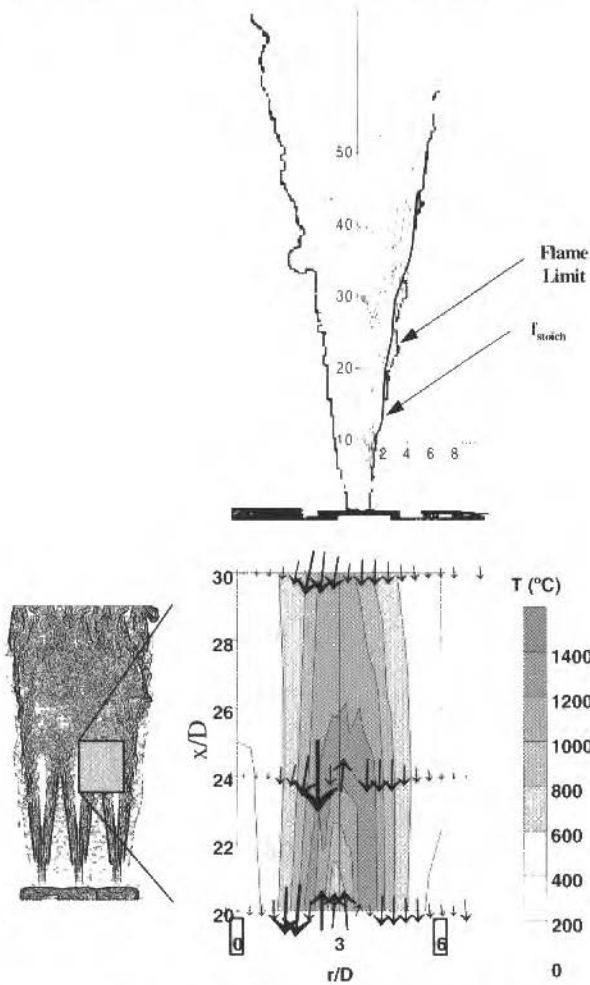
Table 1 Summary of Velocity-Temperature Correlation Measurements in Jet Flames

Reference	Flame characteristics	$\overline{u''t''}$ (Cm/s)	$\overline{v''t''}$ (Cm/s)	Comments
Present work	Non-premixed jet flame D=5mm; Re=20400	-134 @ r/D=1.4 x/D=20; -40 @ r/D=0.0 x/D=10;	22 @ x/D=10; r/D=1.0 -25 @ x/D=20; r/D=1.8	Zones of non-gradient diffusion
Günther and Wittmer (1980)	Free jet non-premixed flame D=8mm; Re=37000	40 @ x/D=50 r/D=0.0		$R_{11} > 0$ for $\partial T / \partial x > 0$ not explained
Yanagi and Mimura(1981); Tanaka and Yanagi(1983)	Open burner premixed flame D=8, 10mm; Re=3200	-30 @ x/D=2.5 r/D=35; (reaction zone)	30 @ x/D=2.5 r/D=4; (reaction zone)	Counter-gradient heat flux only within reaction and mixing zones
Stärner(1983)	H <sub>2</sub> non-premixed flame in co-flowing stream D=7.6mm; Re=11200		96 @ x/D=80;	Gradient diffusion of scalar characteristics over all the flame

For the single flame, it should be noted that in the region of the shear layer where combustion occurs,  $\overline{u''t''}$  is directed in the opposite direction of the axial gradient of mean temperature,  $\partial T / \partial x$ , while  $\overline{v''t''}$  changes from negative to positive close to the flame front, where  $\partial T / \partial r$  is still positive, so that non-gradient transport is likely to occur (see Fig. 8a). This occurs only for a limited zone of the shear layer centred at  $x/D=10$  and up to  $r/D=1$ . Otherwise, the assumption that heat is transported in the direction of the radial gradient is verified throughout all the flow. Similar observations of counter gradient diffusion of heat in the vicinity of the flame front has been reported in other jet diffusion flames (e. g., Yanagi and Mimura, 1981) and has been attributed to the occurrence of wrinkle flame fronts (e. g., Bilger, 1989): the passage of a burned gas pocket through the measuring point gives rise to a positive velocity fluctuation in the radial direction due to thermal expansion and to a positive temperature fluctuation and, therefore,  $\overline{v''t''} > 0$ . It is worth mentioning that this interpretation is consistent with the shape of the probability density functions of temperature measured throughout this work, which exhibit flatness values far from a typical Gaussian distribution in random turbulence.

The turbulent heat flux distributions measured for the multiple flames, Fig. 8b, show trends qualitatively similar to those analysed above for the single flame, with peak values occurring in regions of large gradients of mean temperature. Although the figures do not allow an accurate comparison of the variations in magnitude, it is worth noting that the peak value of  $\overline{u''t''}$  in the mixing region at  $x/D = 20$  is about 100% larger than that measured in the shear layer of the single flame. This difference is rapidly attenuated further downstream and, at  $x/D = 30$ , the peak values of  $\overline{u''t''}$  are similar in the two experimental conditions used. Larger differences are observed in the radial component of the turbulent heat flux,  $\overline{v''t''}$ , which is significantly smaller than that measured in the single flame throughout all the mixing region up to  $x/D = 30$ . While the initial increase of  $\overline{u''t''}$  is consistent with the initial increase of the fluctuations of the axial velocity, the decrease of  $\overline{v''t''}$  is associated with a comparatively larger decrease of the fluctuations of the radial velocity in the mixing layer, as discussed previously. Again, these results suggest that the aerodynamic effects on the turbulent transport of heat dominate over the chemical kinetic effects induced by the lack of oxygen in the mixing layer where the interaction between the flames occurs.





**Fig. 8** Radial distributions of the turbulent heat flux vectors  
 a) Single flame (superposed to the stoichiometric mixture fraction isocontour and to the digitised flame image)  
 b) Multiple flames (superposed to the isocontour of mean temperature)

Figures 9 and 10 show radial profiles of the correlation coefficients,  $R_{ut}$ ,  $R_{vt}$  and  $R_{uv}$  calculated from the measurements obtained in the single and in the multiple flames, respectively, and are important to analyse the relative contribution of the turbulent velocity fluctuations to the transport of temperature.

For all the cases studied,  $R_{vt}$  is always smaller than  $R_{ut}$ , as observed in other jet diffusion flames (e. g., Takagi et al., 1981, Yanagi and Mimura, 1981) and in strongly sheared recirculating diffusion flames (e. g., Fernandes et al., 1993), suggesting that the turbulent motions are more efficient in transporting heat along the axial direction than along the radial direction. This is in accordance with the interpretation that the flame is represented by a wrinkled flame structure, in that the wrinkled shape of the instantaneous flame front affects more the radial transport of heat than that along the streamwise direction because the average flame region is nearly vertical.

The negative values of  $R_{ut}$  in the single flame occur in the rich side of the flame, while the positive values occur in the outer part of the flame where mixing with the ambient air occurs. In the interacting shear layer of the multiple flames, negative values of  $R_{ut}$  occur in the upstream region up to  $x/D = 24$ . However, the absolute peak values are larger in the multiple flames (around 0.5), as compared with

those measured in the single flame (around 0.4). Similar trends, although with different magnitudes, are observed for the correlation coefficient  $R_{v1}$  despite the observed decrease of  $\overline{v'^2}$ . This result suggests that, though the mechanisms of turbulent transport are similar, the contribution of the turbulent motions to the transport of heat is more efficient in the multiple flames than in the single flame. The correlation coefficient for the turbulent transport of momentum,  $R_{uv}$ , follows the trends of the shear stress  $\overline{u'v'}$ , with peak values around 0.5 in the single flame (Fig. 9), in accordance with other measurements reported in jet diffusion flames (e. g., Glass and Bilger, 1978; Starner and Bilger, 1980, 1989). The results obtained in the multiple flames (Fig. 10) show a similar behavior suggesting that the interaction mechanisms do not give rise to extra mechanisms of production and transport of momentum.

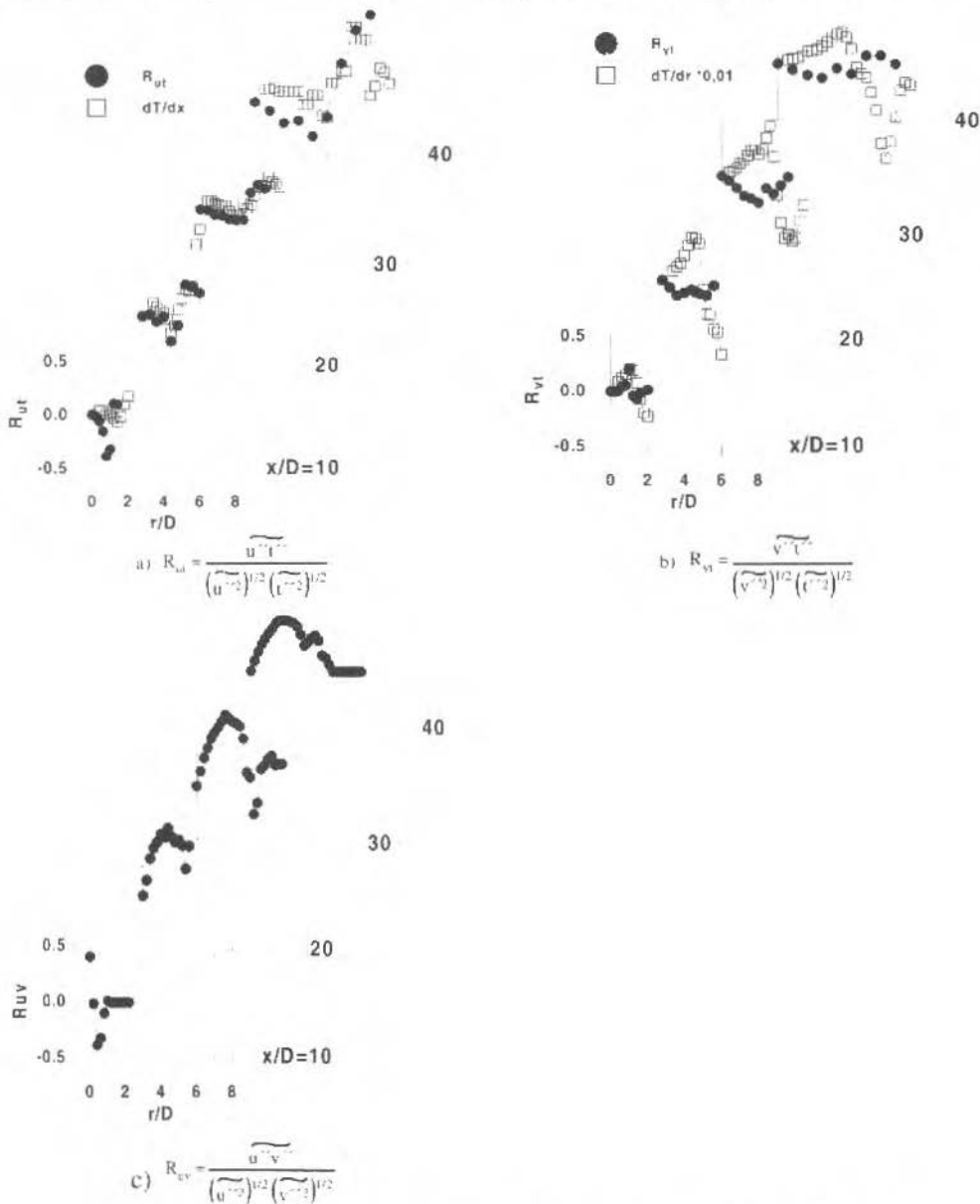


Fig. 9 Radial distributions of the turbulent correlation coefficients in the single flame.

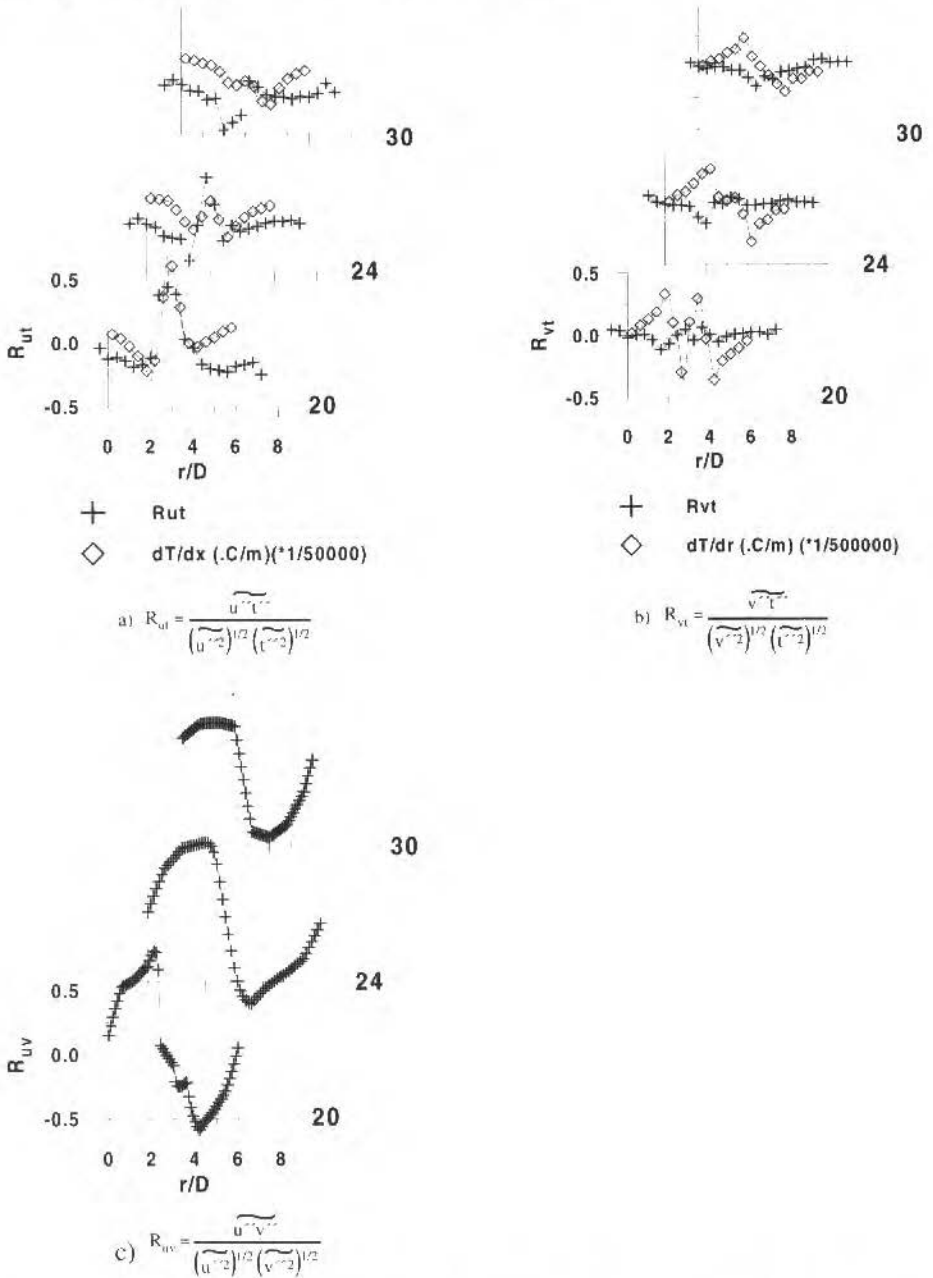


Fig. 10 Radial distributions of the turbulent correlation coefficients in the multiple flames.

## Conclusions

Detailed velocity, temperature and major species concentration measurements are presented for burner-attached jet propane flames at  $Re=20400$ . The measurements encompass the analysis of single

and 3 multiple flames in mutual interaction at a distance of 6 burner diameters and include the combination of a laser velocimeter with digitally-compensated thermocouples. The technique has been successfully applied, making use of thermocouple time-constants evaluated on the basis of the Collis and Williams law considering local flame properties. The largest error sources associated with the measurements are due to the spatial displacement between the two measuring zones, which may give rise to the underestimation of the velocity-temperature correlations by 25% of the maximum value if the displacement becomes larger than 1.5 mm.

The main question addressed is how the effects on the mixing patterns due to flame interaction influence the turbulent transport and the process of flame propagation. The results for the single flame show that the turbulent heat fluxes tend to be restricted to the mixing layer where large temperature gradients occur, and that they exhibit a larger component directed along the isotherms. Observations of non-gradient diffusion of heat in the vicinity of the flame front has been verified as already reported in others jet diffusion flames.

For the multiple flames, the results show qualitatively similar trends, with the process of turbulent flame propagation being unaltered at the level of flame interaction considered in this paper.

Analysis of the instantaneous velocity and temperature results shows that, in the multiple flames arrangement, the turbulent flow field appears to be more influenced by aerodynamic effects than by chemical effects due to the lack of entrained ambient air. The results further suggest that the interaction mechanisms do not give rise to extra mechanisms of production and transport of momentum.

## Acknowledgements

Financial support has been provided by the BRITE/EURAM programme of the DGXII of the European Commission, under the contract n° AER2-CT920035.

## References

- Ballantyne, A. and Moss, J.B., 1977. "Fine Wire Thermocouples Measurements of Fluctuating Temperature", *Comb. Sci. Tech.*, 17, pp. 63-72.
- Bilger, R. W. (1989), "Turbulent Diffusion Flames", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 21, pp. 101-135.
- Boyer, L. M and Queiroz, M., 1991, "Temperature Dissipation Measurements in a Lifted Turbulent Diffusion Flame", *Comb., Sci. and Tech.*, 79, pp. 1-34.
- Caldeira-Pires, A. and Heitor, M.V., 1997, "Temperature and related statistics in turbulent jet flames". *Experiments in Fluids*, to appear.
- Collis, D. C., Williams, M. J. 1959. "Two Dimensional Convection From Heated Wires At Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mechanics*, 6, pp. 357-384.
- Driscoll, J. F., Scheffer, R. W. and Dibble, R. W., 1982, "Mass Fluxes  $\rho'u$  and  $\rho'v$  measured in turbulent non premixed flame", 19th Symposium (Intl.) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburg, pp. 477-485.
- Durst, F., Melling, A and Whitelaw, J.H., 1981, *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*. Academic Press Inc., New York.
- Fernandes, E. C., Ferrão, P., Heitor, M. V. and Moreira, A. L. N., 1994, "Velocity-Temperature Correlations in Recirculating Flames with and without Swirl", *Exp. Thermal and Fluid Science*, to appear.
- Ferrão, P.M.C. and Heitor, M.V., 1992, "Simultaneous Measurements of Velocity and Scalar Characteristics for the Analysis of Turbulent Heat Transfer in Recirculating Flows", *Proc. 6th Int. Symp. Appl. Laser Tech. to Fluid Mechanics*, Lisbon, July 20-23.
- Fricke, N., Van Heyden, L. and Michelfelder, S., 1971, "Investigations Into the Combustion of Natural Gas in Multiple Burner Systems", IFRF, Ijmuiden, Doc. N° F35/a/5.
- Glass, M. and Bilger, R. W., 1978, "The Turbulent Jet diffusion Flame in a Co-Flowing Stream - Some Velocity Measurements", *Comb. Sci. and Tech.*, 18, pp. 165-177.
- Godoy, S. (1982), "Turbulent Diffusion Flames", Ph.D. Thesis, Univ. of London.
- Gunther, R. and Wittmer, V., 1981, "The Turbulent Reaction Field in a Concentric Diffusion Flame", 18th Symp. (Intl.) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburg, pp. 961-967.
- Heitor, M. V., Moreira, A. L. N. and Pires, A.A.C., 1994, "Interaction of Multiple Jet Propane Flames", 25th Symp. (Int.) on Combustion, Irvine, California, USA, July 31-August 5.
- Heitor, M. V. and Moreira, A. L. N., 1992, "On the Analysis of Turbulent Transport Processes in Nonreacting Multijet Burner Flows", *Experiments in Fluids*, 13, pp. 179-189.
- Heitor, M. V. and A.L.N. Moreira, 1993, "Thermocouples and Sampling Probes for Combustion Studies", *Prog. Energy Combust. Sci.*, 19, pp. 259-278.

- Heitor, M.V., Pires, A.C. and Simões, J.P., 1991, "The Thermal Characteristics of Turbulent Hydrocarbon Flames in Mutual Interaction", Proc. XI Brazilian Congress on Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil, December 11-13.
- Heitor, M.V., Taylor, A.M.K.P. and Whitelaw, J.H., 1985, "Simultaneous Velocity and Temperature Measurements in a Premixed Flame", *Exp. in Fluids*, 3, pp. 323.
- Lenze, B., Milano, M.E. and Gunther, R., 1975, "The Mutual Influence of Multiple Jet Diffusion Flames", *Comb. Sci. Tech.*, 11, pp. 1-8.
- Mennon, R. and Gollahalli, S.R., 1985, "Multiple Jet Gas Flames in Still Air" In: *Heat Transfer in Fire and Combustion Systems*, ed. C.K. Lawn, L. Jaluria, W.W. Yuen, K. Miyasaka, HTD vol. 45, ASME, New York, pp. 127-133.
- Mennon, R. e Gollahalli, S.R., 1988, "Combustion Characteristics on Interacting Multiple Jets in Cross Flow", *Comb., Sci. and Tech.*, 60, pp 375-389.
- Payne, R., 1977, "Report on the Multiple Burner Trials - MJ3", IFRF, Ijmuiden, Doc. N° F35/a/11.
- Savitzky, A. and Golay, M.J.E., 1976, "Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Square Procedures", *Anal. Chem.*, 36(8), pp 1627-1639.
- Scheffer, R. W. and Dibble, R. W., 1985, "Simultaneous Measurements of Velocity and Density in a Turbulent Nonpremixed Flame", *AIAA Journal*, 23, No. 7, pp. 1070-1078.
- Son, S.F., Queiroz, M. and Wood, C.G., 1988, "Digital Compensation of Thermocouple for Thermal Inertia Effects", Western States Section - The Combustion Institute, Fall Meeting.
- Starnes, S. H., 1983, "Joint Measurements of Radial Velocity and Scalars in a Turbulent Diffusion flame", *Comb. Sci. and Tech.*, 30, pp. 145-169.
- Starnes, S. H. and Bilger, R. W., 1980, "LDA Measurements in a Turbulent Diffusion Flame with Axial Pressure Gradient", 18th Symp. (Intl.) on Combustion, The Combustion Institute, pp. 921-930.
- Starnes, S. H. and Bilger, R. W., 1989, "Further Velocity Measurements in a Turbulent Diffusion Flame with Moderate Swirl", *Comb. Sci. and Tech.*, 63, pp. 257-274.
- Strahle, W.C. and Muthukrishnan, M., 1976, "Thermocouple Time Constant Measurements by Cross Power Spectra", *AIAA J.*, 14(11), pp 1642-1644.
- Takagi, T., Shin, H. D. and Ishio, A., 1981, "A Study on the Structure of Turbulent Diffusion Flame: Properties of Fluctuations of Velocity, Temperature and Ion Concentration", *Comb. and Flame*, 41, pp. 261-271.
- Tanaka, H. and Yanagi, T., 1983, "Cross-Correlation of Velocity and Temperature in a Premixed Turbulent Flame", *Comb. and Flame*, 51, pp. 183-191.
- Yanagi, T. and Mimura, Y., 1981, "Velocity-Temperature Correlation in Premixed Flame", 18th Symp. (Intl.) on Combustion, The Combustion Institut, Pittsburg, pp. 1031-1039.

# The Generalized Integral Transform Technique in Transient Convection-Diffusion: Theory, Applications and Research Needs

Renato M. Cotta

Marco A. Leal

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
COPPE - Programa de Engenharia Mecânica - CP 68503  
Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor  
21945-970 Rio de Janeiro, RJ Brasil

## Abstract

*This paper reviews the solution of linear and nonlinear transient convection-diffusion problems with applications in heat and mass transfer. The Generalized Integral Transform Technique (GITT) is the basic tool behind such developments offering analytical or hybrid numerical-analytical solutions within user prescribed accuracy. A number of examples are selected from the available literature to illustrate the relative merits of this novel approach. Research needs are then identified and briefly discussed.*

**Keywords:** Generalized Integral Transform Technique, Nonlinear Transient Convection-Diffusion Problems

## Introduction

Heat and mass transfer problems are often modeled by transient convection-diffusion equations, in which the convective and diffusive effects compete to provide the final solution behavior along the time variable. Due to the variable character of the associated velocity field, quite frequently in a nonlinear fashion, classical analytical approaches are not directly extensible to handle such equations in the exact sense. Purely numerical approaches are then in general adopted, basically as variations of the finite differences and finite elements methods. The discrete approximations may, however, experience some anomalous behavior, due to either numerical dispersion or dissipation effects, depending on the order of the specific numerical scheme considered. To a certain extent, these undesirable effects are alleviated through either some sort of artificial numerical viscosity and/or upwind differencing, introduced to correct classical discretization strategies. The availability of reliable benchmark results for different situations then becomes crucial, for the adequate inspection and calibration of the numerical scheme employed. It is, therefore, of natural and immediate interest, the development of analytic-type approaches so as to enlarge the database of test-cases for benchmarking purposes, made available to the computer simulation community. Besides, such an effort may also demonstrate the feasibility in proposing an alternative simulation tool on itself, based on hybrid numerical-analytical extensions to classical analytical methods. This work specifically deals with one such possibility of a hybrid approach, initially devised as a benchmarking tool, and which has been progressively advanced to handle more complicate problems, being gradually proved as a potential alternative to purely numerical approaches.

The Integral Transform Method [1-3] is here reviewed in the analytical and hybrid numerical-analytical solution of transient convective heat and mass transfer problems. This computational approach, based on the Classical Integral Transform Method [4], offers the advantages of automatic global error control, such as in a purely analytical solution, and only mild increase on overall computational costs for increasing number of independent variables (spatial coordinates), since the numerical tasks in any problem are always concentrated in one single independent variable (time, for instance).

Formal solutions for general coupled nonlinear convection-diffusion formulations are first presented, to illustrate the mathematical formalism behind this technique. A test-case is then considered, represented by the nonlinear version of the transient Burgers equations [5,6], to illustrate the computational performance of this hybrid approach. The automatic error control feature and the direct extendability to multidimensional situations are also discussed.

Both periodic and transient regimen were examined, for both laminar and turbulent flows, and hybrid solutions were provided in such cases, either on a complete or approximate point of view, as demonstrated through the ample literature available [7-30].

*Manuscript received: January 1997. Technical Editor: Angela Ourivio Nieckele.*

*Extended version of invited lectures at the ICHMT Symposium on Transient Convective Heat Transfer, Turkey, August 1996, and at the 2<sup>nd</sup> Workshop on Integral Transform Methods, IME, Rio de Janeiro, November 1996.*

The approach is here illustrated through examples of engineering simulations of representative practical applications in transient mass/heat convection, such as in transient cooling of electronic systems, migration of radioactive waste in soils, and tracer injection testing of oil reservoirs, and transient natural convection in enclosures.

Finally, future research needs are discussed, pointing out the directions of additional development required for a more definitive establishment of the Generalized Integral Transform Technique in this class of problems.

## Solution Methodology

We consider a sufficiently general formulation, for our purposes here, of a transient convection-diffusion problem of  $n$  coupled potentials (velocity, temperature or concentration), defined in the region  $V$  with boundary surface  $S$ , and including nonlinear effects in the convective terms as follows:

$$w_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \cdot \nabla T_k(\mathbf{x}, t) + L T_k(\mathbf{x}, t) = P_k(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (1a)$$

with initial and boundary conditions given, respectively, by:

$$T_k(\mathbf{x}, 0) = f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (1b)$$

$$B_k T_k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (1c)$$

where the equation and boundary operators are written as:

$$L_k \equiv -\nabla \cdot k_k(\mathbf{x}) \nabla + d_k(\mathbf{x}) \quad (1d)$$

$$B_k \equiv \left[ \alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) k_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] \quad (1e)$$

and  $\mathbf{n}$  denotes the outward drawn normal to the surface  $S$ .

Without the convection terms, i.e.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \equiv 0$ , problem (1) becomes a class I linear diffusion problem according to an earlier classification [4], for which exact analytical solutions were obtained through the classical integral transform technique [4]. For a non-zero vector  $\mathbf{u}$ , problem (1) is not *a priori* transformable, and the ideas in the generalized integral transform technique [1-3] can be utilized to develop hybrid numerical-analytical solutions to this class of problems. Following the formalism previously established for convection-diffusion [5-6] and purely diffusive nonlinear problems [31], the appropriate auxiliary problems are taken as:

## Nomenclature

$\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$	= coefficients matrix in system (7)
$b$	= coefficient in non-linear convection term
$d_k(\mathbf{x})$	= equation coefficients in linear dissipation terms
$f_k(\mathbf{x})$	= initial potentials distributions
$k_k(\mathbf{x})$	= equation coefficients in diffusion terms
$P_k(\mathbf{x}, t)$	= equation source functions
$t$	= time variable
$T_k(\mathbf{x}, t)$	= potentials distributions

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell)$	= velocity vector in convection terms
$u(T)$	= velocity in Burgers equation
$u_0$	= coefficient in linear convection term
$w_k(\mathbf{x})$	= equation coefficients in transient terms
$\mathbf{x}$	= position vector in general system (1)
$x$	= space coordinate in Burgers equation (8)

$\mathbf{y}(t)$	= solution vector in system (7)
<b>Greek Symbols</b>	
$\alpha_k(\mathbf{x})$	= boundary conditions coefficients
$\beta_k(\mathbf{x})$	= boundary conditions coefficients
$\phi_k(\mathbf{x})$	= boundary source functions
$\nu$	= coefficient in diffusion term of Burgers equation (8a)

$$L_k \psi_{ki}(\mathbf{x}) = \mu_{ki}^2 w_k(\mathbf{x}) \psi_{ki}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (2a)$$

with boundary conditions

$$B_k \psi_{ki}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2b)$$

where the eigenvalues,  $\mu_{ki}$ 's, and related eigenfunctions,  $\psi_{ki}(\mathbf{x})$ 's, are here assumed to be known from application of also recently advanced computational methods for Sturm-Liouville type problems [1]. Problem (2) then allows, through the associated orthogonality property of the eigenfunctions, definition of the integral transform pairs below:

$$\bar{T}_{k,i}(t) = \int_V w_k(\mathbf{x}) K_{ki}(\mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dV, \quad \text{transforms} \quad (3a)$$

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_{ki}(\mathbf{x}) \bar{T}_{k,i}(t), \quad \text{inverses} \quad (3b)$$

where the symmetric kernels  $K_{ki}(\mathbf{x})$  are given by:

$$K_{ki}(\mathbf{x}) = \frac{\psi_{ki}(\mathbf{x})}{N_{ki}^{1/2}} \quad (3c)$$

and the normalization integrals as:

$$N_{ki} = \int_V w_k(\mathbf{x}) \psi_{ki}^2(\mathbf{x}) dV \quad (3d)$$

The integral transformation of (1a) is now attempted by applying the operator  $\int_V K_{ki}(\mathbf{x}) dV$  to yield, after utilizing the boundary conditions (1c) and (2b),

$$\frac{d\bar{T}_{k,i}(t)}{dt} + \int_V K_{ki}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \cdot \nabla T_k(\mathbf{x}, t) \} dV + \mu_{ki}^2 \bar{T}_{k,i}(t) = \bar{g}_{ki}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad t > 0$$

$$k, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (4a)$$

where,

$$\bar{g}_{ki}(t) = \int_V K_{ki}(\mathbf{x}) P_k(\mathbf{x}, t) dV + \int_S k_k(\mathbf{x}) \left[ K_{ki}(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} - T_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial K_{ki}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \quad (4b)$$

while the untransformed term in (4a) above can be rewritten, after application of the inversion formula (3b), as:



$$\int_V K_{ki}(\mathbf{x})[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \cdot \nabla T_k(\mathbf{x}, t)] dv = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kij}^*(t, T_\ell) \bar{T}_{k,j}(t), \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (5a)$$

where

$$a_{kij}^*(t, T_\ell) = \int_V K_{ki}(\mathbf{x})[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, T_\ell) \cdot \nabla K_{kj}(\mathbf{x})] dv \quad (5b)$$

Equations (4.a) are then written more compactly as

$$\frac{d\bar{T}_{k,i}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kij}(t, T_\ell) \bar{T}_{k,j}(t) = \bar{g}_{ki}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad t > 0, \quad (6a)$$

$$k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

where,

$$a_{kij}(t, T_\ell) = \delta_{ij} \mu_{ki}^2 + a_{kij}^*(t, T_\ell) \quad (6b)$$

with

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{for } i \neq j \\ 1, & \text{for } i = j \end{cases} \quad (6c)$$

The initial conditions (1.b) are also integral transformed through the operator  $\int_V w_k(\mathbf{x}) K_{ki}(\mathbf{x}) dv$ , to provide:

$$\bar{T}_{k,i}(0) = \bar{f}_{ki} \equiv \int_V w_k(\mathbf{x}) K_{ki}(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) dv \quad (6d)$$

Equations (6) form an infinite system of coupled non-linear ordinary differential equations for the transformed potentials,  $\bar{T}_{k,i}$ 's. For computation purposes, system (6) is truncated at the Nth row and column, with N sufficiently large for the required convergence. The formal aspects behind the convergence to the infinite system solution as the truncation order, N, is increased, have been investigated elsewhere [1], and repeating such analysis is here avoided. The truncated system is then written in matrix form as:

$$\mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}(t, \mathbf{y})\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t), \quad t > 0 \quad (7a)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{f} \quad (7b)$$

where,

$$\mathbf{y}(t) = \{\bar{T}_{k,1}(t), \bar{T}_{k,2}(t), \dots, \bar{T}_{k,N}(t)\}^T, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7c)$$

$$A(t, y) = \{a_{kij}(t, T_f)\} \quad (7d)$$

$$g(t) = \{\bar{g}_{k1}(t), \bar{g}_{k2}(t), \dots, \bar{g}_{kN}(t)\}^T \quad (7e)$$

$$f = \{\bar{f}_{k1}, \bar{f}_{k2}, \dots, \bar{f}_{kN}\}^T \quad (7f)$$

The non-linear initial value problem defined by Eqs. (7) is likely to belong to a class of stiff ordinary differential systems, specially for increasing values of  $N$ , while the transformed solutions  $T_{k,i}(t)$ , decay at increasingly different rates in  $t$ . Fortunately, various special numerical integrators have been designed within the last two decades, to this class of systems. For instance, subroutine DIVPAG from the IMSL library [32] is an extremely reliable stiff integrator, which implements Gear's method of backward differentiation with variable order, and is widely available in most computer centres.

Once the transformed potentials have been computed from numerical solution of system (7), the inversion formula (3b) is recalled to reconstruct in explicit form the original potential  $T_k(x, t)$ .

## Test-case

The hybrid solution here presented is now illustrated through consideration of the one-dimensional nonlinear Burgers equation, which is a frequently employed model equation for transient convection-diffusion phenomena, and used for development and validation of numerical schemes. The mathematical formulation of the problem here considered is:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + u(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (8a)$$

with initial and boundary conditions given, respectively, by:

$$T(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (8b)$$

$$T(0, t) = 1; \quad T(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (8c, d)$$

and for the present application the non-linear function  $u(T_f)$  is taken as:

$$u(T) = u_0 + bT \quad (8e)$$

For best computational performance, the boundary conditions (8c,d) are made homogeneous through the simple transformation:

$$T(x, t) = T_\infty(x) + T^*(x, t) \quad (9a)$$

where  $T_\infty(x)$  is the solution of the linear steady-state problem:

$$u_0 \frac{dT_\infty(x)}{dx} = v \frac{d^2 T_\infty}{dx^2} \quad (9b)$$

$$T_{\infty}(0) = 1; \quad T_{\infty}(1) = 0 \quad (9c)$$

For  $b=0$  (linearized Burgers equation), the expressions obtained in [5] are readily recovered and a purely analytical solution is reached. Numerical results were obtained for typical values of the parameters that govern the relative importance of convection (linear and non-linear terms) and diffusion,  $u_0$ ,  $b$ , and  $\nu$ . Truncated systems of order  $N \leq 30$ , with automatic order control, were solved through IMSL subroutine DIVPAG, with sufficient accuracy requirement in terms of relative error, in order to demonstrate the convergence characteristics of the hybrid solution. Table I presents the potential distributions, at different values of  $t=0.1$  and  $0.5$ , for increasing values of  $N$ , but fixed at each run. The excellent convergence behavior is easily noticeable through Table I, but it is interesting to note the behavior with respect to the governing parameters. As usual in eigenfunction expansion techniques, convergence becomes slower for decreasing  $t$ ; also, as the importance of convection increases, either through the linear ( $u_0$ ) or non-linear ( $b$ ) contributions, larger systems are required to provide the same relative accuracy. For instances, with  $b=0.5$  and  $u_0=1.0$ , convergence to five digits is achieved with  $N \approx 15$ , while for  $b=5.0$  and  $u_0 = 1.0$  convergence is reached for  $N \approx 25$ . For validation purposes, a semi-discrete scheme based on the combined use of spatial collocation and method of lines was employed, which is readily available in subroutine DMOLCH from the IMSL library [32], for one-dimensional parabolic problems. The results from this well-established routine are in excellent agreement with those here presented, for 31 grid points in the spatial discretization. A fully discrete finite differences approach was also utilized, based on MacCormack's explicit predictor-corrector scheme, which is a second-order accurate scheme both in time and space. Again, with 31 grid points in the spatial discretization, a reasonably good agreement to three significant digits was achieved.

It should be noted that although the numerical results in Table I were produced with a fixed number of ordinary differential equations for each run, in order to demonstrate the convergence behavior for increasing  $N$ , the basic computational algorithm for this approach [1-3], proceeds in a more efficient way, by automatically controlling the order of truncation  $N$  at each time step. The analytical part of the solution, represented by the inversion formula (3b), provides a local error estimator at almost no cost, given by the maximum relative error of partial sums with respect to the total sum of (3b). Therefore, computation is started at  $t=0$  with an initial  $N$  estimated, for instances, from a lowest order solution of system (7), when non-diagonal elements of the coefficients matrices are completely neglected. By examining the convergence of the inversion formula at each subsequent time step, the value of  $N$  is adaptively changed, so as to satisfy the required accuracy and reduce computational costs. A typical run of this problem for a required tolerance of  $10^{-4}$  (4 digits accuracy), takes about 50 sec of CPU time on a CYBER 180/840 mainframe computer.

**Table 1** Convergence of hybrid solution and comparison with numerical solution.

$x/N$	5	10	15	20	30	Numerical*
$t = 0.1 (u_0 = 0.1; b = 0.5; \nu = 1.0)$						
0.1	0.97611	0.97609	0.97609	0.97609	0.97609	0.97607
0.3	0.90430	0.90428	0.90428	0.90428	0.90428	0.9022
0.5	0.76546	0.76541	0.76540	0.76540	0.76540	0.76531
0.7	0.52682	0.52680	0.52679	0.52679	0.52679	0.52670
0.9	0.19035	0.19038	0.19037	0.19037	0.19037	0.19033
$t = 0.5 (u_0 = 0.1; b = 0.5; \nu = 1.0)$						
0.1	0.91932	0.91952	0.91949	0.91947	0.91948	0.91948
0.3	0.74414	0.74417	0.74416	0.74415	0.74416	0.74415
0.5	0.55017	0.55014	0.55013	0.55013	0.55013	0.55013
0.7	0.33919	0.33926	0.33926	0.33926	0.33926	0.33926
0.9	0.11533	0.11528	0.11527	0.11527	0.11527	0.11527
$x/N$	5	10	15	20	30	Numerical*
$t = 0.1 (u_0 = 1.0; b = 0.5; \nu = 1.0)$						
0.1	0.98507	0.98458	0.98461	0.98463	0.98462	0.98461
0.3	0.93240	0.93243	0.93244	0.93243	0.93243	0.93238

Table I (continued)

0.5	0.81800	0.81774	0.81772	0.81772	0.81772	0.81764
0.7	0.59425	0.59409	0.59404	0.59403	0.59403	0.59395
0.9	0.23064	0.23110	0.23100	0.23097	0.23099	0.23095
$t = 0.5(u_0 = 1.0; b = 0.5; v = 1.0)$						
0.1	0.95031	0.95034	0.95032	0.95032	0.95032	0.95032
0.3	0.82591	0.82594	0.82594	0.82593	0.82593	0.82593
0.5	0.66018	0.66014	0.66014	0.66014	0.66014	0.66014
0.7	0.44271	0.44274	0.44273	0.44273	0.44273	0.44273
0.9	0.16424	0.16431	0.16429	0.16428	0.16429	0.16429
$t = 0.1(u_0 = 1.0; b = 5.0; v = 1.0)$						
0.1	1.0004	0.99846	0.99849	0.99852	0.99851	0.99851
0.3	0.98887	0.98897	0.98900	0.98897	0.98897	0.98896
0.5	0.94953	0.94774	0.94771	0.94770	0.94771	0.94769
0.7	0.79457	0.79337	0.79330	0.79325	0.79328	0.79324
0.9	0.35350	0.35452	0.35430	0.35420	0.35426	0.35423
$t = 0.5(u_0 = 1.0; b = 5.0; v = 1.0)$						
0.1	0.99799	0.99653	0.99655	0.99658	0.99657	0.99657
0.3	0.97866	0.97903	0.97904	0.97901	0.97901	0.97901
0.5	0.92319	0.92232	0.92226	0.92226	0.92227	0.92226
0.7	0.75150	0.75122	0.75111	0.75108	0.75110	0.75109
0.9	0.32549	0.32671	0.32649	0.32641	0.32646	0.32645

\*Subroutine DMOLCH/IMSL [32] (31 grid points).

The present approach is sufficiently straightforward and computationally efficient to offer an interesting alternative to purely numerical approaches, specially under high accuracy requirements such as for benchmarking purposes. Also, approximate solutions at low truncation orders are sufficiently accurate for most practical purposes, and computational effort is then kept to a minimum. Extension of such computations to multidimensional situations readily follow from the general solution here provided. The related eigenvalue problem (2) is then solved by standard approaches for Sturm-Liouville systems, after application of separation of variables on this auxiliary partial differential system. Also, the associated volume integrals for determination of the ODE system coefficients, are evaluated as multiple integrals (double or triple), and all of the remaining steps for the one-dimensional case are essentially the same. A number of multidimensional problems were previously handled by the present approach including the computational implementation that is practically unaffected by the nonlinear terms here introduced. It should be recognized that one major advantage of this method lies in the fact that the original potential is analytically expressed by the inversion formula in all but one independent variable,  $t$ , and a numerical discretization procedure is required only for integration along this coordinate, which allows one to employ well-established algorithms for ODE systems with automatic error control, widely available in subroutines libraries, yielding an overall robust and reliable tool.

## Applications

A number of applications are now considered that illustrate the performance of the integral transform approach in the solution of transient convection-diffusion problems. The first one selected for illustration is related with transient forced convection in channel flow, subjected to periodic disturbances of inlet temperature, for both laminar and turbulent regimen. A cooperative work with the University of Miami was initiated in 1989, towards the experimental and theoretical study of transient cooling in electronic equipment, and such results are compiled in various sources [11, 13, 15, 21, 24, 27, 29]. The smooth walls situation was first considered, and an effective rugosity model was later

introduced to simulate the presence of block-like electronic components at one wall. The periodic thermal response along the channel to these inlet temperature fluctuations is analyzed, offering comparisons between experiments and simulations, aimed at confirming the adopted models and at co-validating the experimental and computational techniques. The second application presented deals with the migration of radionuclides in soils [20]. Different accidental situations are analyzed, resulting from leakages of the radioactive contaminants through the repository engineering barriers. Transient convection-diffusion equations then are used to model the dispersion through the soil layer beneath the surface repository and along the aquifer. Such simulations are essential in the licensing of repository sites and safety analysis of radioactive waste installations. The third application shown is related to petroleum reservoir simulation problems. For the success of enhanced oil recovery projects, the knowledge of the reservoir characteristics is essential. For this purpose, well-to-well tracer tests are frequently employed, which are modeled by transient convection-diffusion equations for flow through porous media. The two-dimensional tracer problem for the five-spot pattern has been solved by the generalized integral transform technique [25, 28], and critically compared, in a wide range of situations, with alternative numerical solutions, as well as with experimental data from different sources. The fourth application deals with transient natural convection within two-dimensional enclosures, modeled through the streamfunction-only formulation of the flow equations [33,34] under Boussinesq approximation and the associated energy equation [35,36]. Both, the steady-state and transient versions of this classical coupled heat and fluid flow problem, were solved through integral transformation [35,36], and compared against previously reported numerical solutions.

Some sample results from these four applications are now briefly reviewed.

## Periodic Forced Convection in Channel Flow

We consider unsteady forced convection of a laminar or turbulent, incompressible, thermally developing and hydrodynamically developed Newtonian flow inside a circular tube or a parallel-plates channel, subjected to a periodically varying inlet temperature. The thermal response of the system to the inlet periodic perturbations is sought under a general fifth kind boundary condition (which accounts for the effects of external convection and wall heat capacitance), after the initial transients have disappeared. Axial conduction and viscous dissipation are neglected, and the physical properties are considered constant. The related dimensionless formulation of the problem is written as:

$$\frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial \tau} + U(R) \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial Z} = \frac{1}{R^n} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \varepsilon_h(R) R^n \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial R} \right], \text{ in } 0 < R < 1, Z > 0, \tau > 0 \quad (10a)$$

with boundary and inlet conditions given respectively as:

$$\left. \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \text{ for } Z > 0, \tau > 0 \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial R} + B\tau \theta(R, Z, \tau) + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial \tau} = 0, \text{ at } R=1, \text{ for } Z > 0, \tau > 0 \quad (10c)$$

$$\theta(R, Z, \tau) = \Delta \theta(R) e^{i\Omega \tau}, \quad Z = 0, 0 \leq R \leq 1, \tau > 0 \quad (10d)$$

$$n = \begin{cases} 0, & \text{for parallel-plates} \\ 1, & \text{for circular tube} \end{cases}$$

With this approach, the initial condition is not necessary, since only a periodic solution to the system of Eqs. (10) is being sought. Furthermore, since the present application is concerned only with solutions for large times, i.e., after the initial transients disappear, the problem admits a solution in the form:

$$\theta(R, Z, \tau) = \tilde{\theta}(R, Z)e^{i\Omega\tau} \quad (11)$$

The first part of the present study was devoted to the co-validation of the experimental and theoretical findings for a smooth parallel-plates channel within the periodic state, and to the analysis of the relative influence of the governing parameters,  $Bi$ ,  $a^*$  and  $\Omega$ , on the thermal response of the system.

In order to validate the modeling employed, the theoretical results were compared with the experimental ones, for thermally developing laminar flow situations within the periodic regime. The problem was also solved through the fully transient formulation, with excellent agreement for large times, at the onset of the quasi-steady state. The mixed finite differences/integral transform approach of Ref. [19] offers advantages over conventional purely numerical approaches. First, the additional restriction on the stability criteria, introduced by the transversal coordinate discretization, is completely eliminated. Second, analytic expressions for temperature are derived, which describe the behavior of the solution in the transversal coordinates.

The comparisons for selected Reynolds number,  $Re$ , and inlet frequencies,  $\beta$ , (or  $\Omega$ ) have been listed in [21]. Theoretical results were originally observed to be consistently above the experimental findings for the centerline temperature amplitudes. After the analysis advanced in [21] and reviewed here, additional effects, such as external convection, wall thermal capacitance and non-uniformity of inlet temperature profile, could be incorporated into the analysis and numerical results obtained for the dimensionless centerline temperature amplitudes, at prescribed Reynolds number, inlet frequency, and compared with measured centerline temperature amplitudes along the channel. For this purpose, Biot number,  $Bi$ , and fluid-to-wall thermal capacitance,  $a^*$ , were estimated according to the available data for the experimental set-up, and non-uniform variation of periodic inlet temperature profile across the duct was obtained experimentally. In Figure 1 the experimental results for  $Re = 434.6, 682.6, 845.0, 964.9, 1396.0, 2088.0$  and  $\Omega = 0.065$  ( $\beta = 0.01 \text{ Hz}$ ) are presented, and show a representative set of such comparisons. It is clear from Figure 1, that the effect of a non-uniform inlet temperature profile is quite significant in bringing the theoretical and experimental results to an acceptable agreement when an experimentally obtained non-uniform periodic inlet profile across the duct is considered, in place of a theoretical uniform distribution.

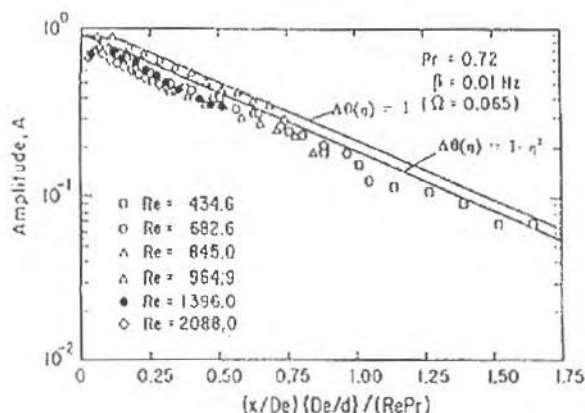


Fig. 1 Comparison of theoretical analysis with experimental results for periodic laminar convection in thermal entrance region.

This cooperative work followed towards the co-validation of transient convection inside circular tubes, turbulent flow situations, different inlet temperature disturbances, and wall rugosity due to block-like elements. Figure 2 illustrates one additional comparison of theoretical and experimental results for turbulent flow within circular tubes, showing the centerline temperature amplitude along the channel length.

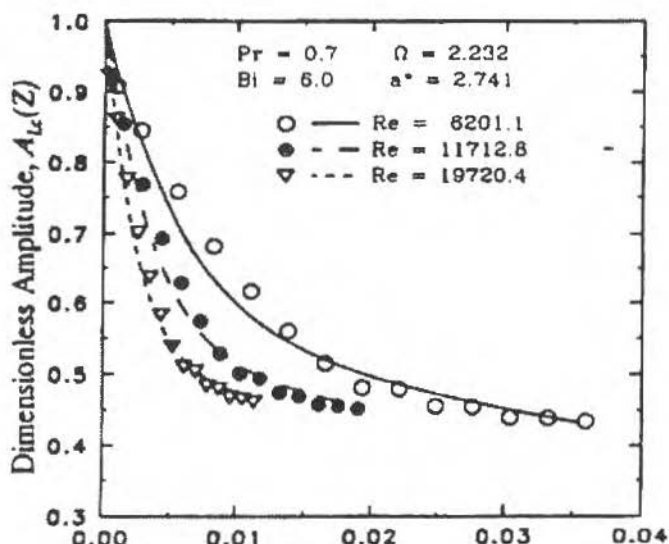


Fig. 2 Comparison of theoretical and experimental centerline temperature amplitudes at  $\Omega = 2.232$  (turbulent flow; circular tube).

As illustrated in the figure above, the amplitudes of the thermal oscillations are shown to decay faster along the channel as the Reynolds number increases, with each curve exhibiting similar exponential trends in the rate of decay with respect to the axial dimensionless distance. For the range of Reynolds numbers and frequency of inlet oscillations considered, an overall inspection of Fig. 2 shows that excellent agreement prevails between the experimentally and analytically determined centerline temperature amplitudes for a succession of axial positions along the duct. For the majority of points, this agreement is within 1.5%, with the maximum deviation being 2.3%, occurring at the lowest Reynolds number and inlet frequency. The excellent agreement provides confidence in the capabilities of the analytical model and numerical solution methodology in predicting the thermal response of the fluid, under periodic inlet conditions.

## Radionuclides Migration in Porous Media

The transport of radionuclides through geologic media is a result of a complex combination of various chemical, physical and biological phenomena. The four major mechanisms are represented by advection, dispersion, adsorption-desorption and ion exchange, and degradation. The mathematical formulation for this mass transfer problem in a porous planar media was derived in [20], including the radioactive decay of one species to its daughter in the isotope chain. In a one-dimensional finite domain of length  $L$ , with ground water flow along the  $Z$  direction, and constant transport properties, the problem formulation is written as:

$$K_f \frac{\partial N_f(Z, \tau)}{\partial \tau} + u \frac{\partial N_f}{\partial Z} + \lambda_f K_f N_f = D_f \frac{\partial^2 N_f}{\partial Z^2} + \lambda_{f-1} K_{f-1} N_{f-1},$$

$$\text{in } 0 < Z < L, t > 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

$$(12.a)$$

where  $N_f(Z, \tau)$  is the concentration of the  $f^{\text{th}}$  species in the radioisotope chain,  $K_f$  is the species retardation coefficient,  $D_f$  is the dispersion coefficient of the individual species,  $\lambda_f$  the radioactive decay constant,  $u$  the ground water pore velocity, and  $n$  is the number of isotopes in the chain.

Initially, the medium is free from any radionuclide, before the mass transport through the leakage starts. Then,

$$N_f(Z, 0) = 0, \quad 0 \leq Z \leq L \quad (12b)$$

Appropriate boundary conditions are specified at the waste package interface ( $Z=0$ ),

$$N_f(0, \tau) = N_f^0 \phi_f(\tau), \quad \tau > 0 \quad (12c)$$

which represents the rate of supply of each species in terms of a prescribed behavior in time given by function  $\phi_f(\tau)$ , and at the biosphere or backfill-rock interface located at  $Z=L$ ,

$$D_f \frac{\partial N_f}{\partial Z} + u\varepsilon N_f = h_f [N_f(L) - N_f^\infty(\tau)], \quad \tau > 0 \quad (12d)$$

which represents the convective mass transfer at this boundary, where  $\varepsilon$  is the porosity of the medium,  $h_f$  is the mass transfer coefficient, and  $N_f^\infty$  is the radionuclides concentration outside the porous matrix.

From data provided by the National Commission of Nuclear Energy Brazil (CNEN/Divisão de Instalações Nucleares), a set of numerical results for the dimensionless concentration distributions of  $CS^{137}$  were obtained, for different times of interest, and  $\phi(\tau) = 1$  for continuous leaching.

Figures 3.a-b illustrate the convergence characteristics of the proposed eigenfunction expansions for different dimensionless times  $\tau = 10^{-4}$  and  $10^{-3}$ , and provide a comparison with the purely numerical scheme, based on the method of lines, available in subroutine DMOLCH of the IMSL Library [32], previously employed in the solution of this problem [20]. For shorter times, a larger number of terms are required in the expansion ( $N=50$  for  $\tau=10^{-4}$ ), dropping down as time increases and the quasi-steady regime is approached ( $N \leq 20$  for  $\tau=10^{-3}$ ). The agreement with the results from the numerical approach represented by subroutine DMOLCH is almost perfect. However, this purely numerical technique was observed to degenerate when convection is significantly dominant over diffusion, which is nevertheless accommodated by the generalized integral transform technique.

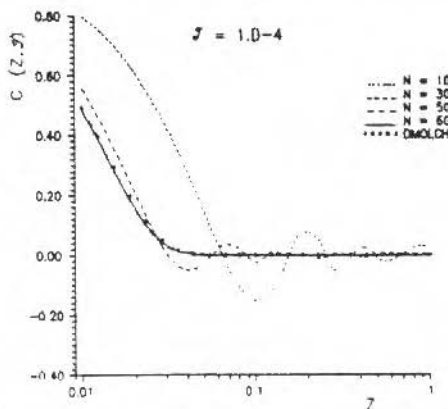


Fig. 3a Convergence analysis of eigenfunction expansion and comparison with numerical solution ( $\tau=10^{-4}$ ), for radionuclides migration in soils.



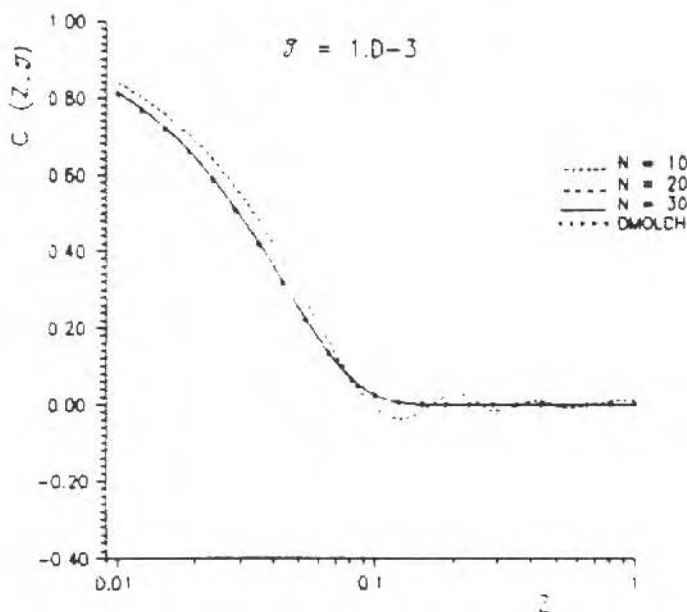


Fig. 3b Same as Fig. 3a, for  $\tau=10^{-3}$ .

Figure 4 presents an example of the marked computational performance improvement furnished by the truncation order adaptive procedure discussed in the previous section. For a relative error target of  $10^{-4}$  on the fully converged concentrations, the truncation order necessary to reach this prescribed accuracy falls down sharply along the integration path in the time variable  $\tau$ , significantly reducing computational costs.

After this critical evaluation, the approach could be extended to handle more involved situations with variable properties, non-homogeneous layered media, arbitrarily sized decay chains and multidimensional geometries, by incorporating recent developments in the generalized integral transform technique.

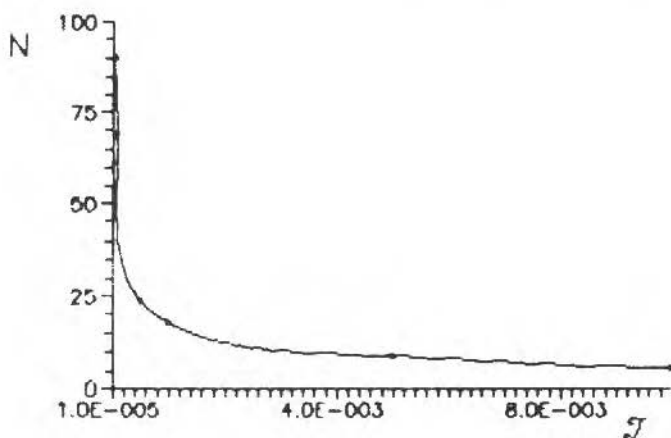


Fig. 4 Decay of truncation order,  $N$ , along integration path in the adaptive procedure.

## Tracer Transport in a Petroleum Reservoir

Tracer transport in a porous media is generally accepted to be subjected to two basic phenomena: convection and hydrodynamic dispersion. This led to modeling tracer flow by the convection-diffusion equation [25, 28]. The particular features of this equation, associated with complex geometries involved in petroleum reservoirs, result in a difficult problem which can only be solved by the well known conventional analytical methods, in very simple cases. Even for numerical methods these equations are among the most difficult to solve, since the behavior of the system ranges from parabolic to almost hyperbolic, depending on the ratio of convective to dispersive contributions to tracer transport.

### Pressure and Velocity Fields

The partial differential equation that describes the behavior of the pressure field is derived from the continuity equation and Darcy's law. For the present assumptions and Cartesian coordinate system, one has:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\mu q}{k h} [\delta(x)\delta(y-d) + \delta(x-d)\delta(y) - \delta(x)\delta(y) - \delta(x-d)\delta(y-d)],$$

$$0 < x < d, \quad 0 < y < d \quad (13a)$$

with boundary conditions given by:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=d} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=d} = 0 \quad (13b-e)$$

Darcy's law can then be applied to determine the expressions for the velocity components, namely,  $v_x = -k/\mu(\partial p/\partial x)$  and  $v_y = -k/\mu(\partial p/\partial y)$ .

### Concentration Field

The transport of the tracer in the porous media is here considered to be governed by the convection-diffusion equation. With the present assumption and the Cartesian coordinate system, and assuming a simplified diagonal tensor, one finds:

$$\phi \frac{\partial C_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha |v_x| \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x C_1) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha |v_y| \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y C_1) =$$

$$\frac{q}{h} C_{inj} [\delta(x)\delta(y-d) + \delta(x-d)\delta(y)] - \frac{q}{h} C_1 [\delta(x)\delta(y) + \delta(x-d)\delta(y-d)],$$

$$0 < x < d, \quad 0 < y < d, \quad t > 0 \quad (14a)$$

with initial and boundary conditions given, respectively, by:

$$C_1(x, y, 0) = 0 \quad (14b)$$

$$\left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{x=d} = 0; \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{y=d} = 0 \quad (14c-f)$$

where  $C_{inj}$  is the injection concentration for  $t > 0$ . If the injection is not continuous (tracer slug), Eq. (14.a) holds until  $t = t_{inj}$ . Beyond this injection time, Eq. (14.a) holds, once one sets  $C_{inj} = 0$  and assumes, as initial condition, the concentration distribution previously obtained at  $t = t_{inj}$ .

A literature review indicates that there is no complete analytical solution yet available to this problem. However, some approximate analytical or purely numerical solutions were identified.

As a first check, the diffusivity  $\alpha$  was reduced successively, leading the present formulation to approach the purely hyperbolic problem, which has a known analytical solution. Figure 5 shows these successive profiles and the comparison with this asymptotic solution. The Peclet number ( $Pe$ ) relates the convective and the dispersive contributions to the tracer transport and, for this problem,  $Pe = a/\alpha$  was adopted as a definition. In Figure 5, the dimensionless concentration [ $C_D = C_1(0,0,t)/C_{inj} = C_1(d,d,t)/C_{inj}$ ] is plotted against dimensionless time (pore volume injected,  $t_p = 2qt/\Phi d^2 h$ ), and the GITT results show a consistent agreement with the asymptotic solution for  $Pe \rightarrow \infty$ .

Another check is to proceed in the opposite direction, towards the purely diffusive problem, i.e., reducing the  $Pe$  number towards a zero. The solution for  $Pe = 0$  may be obtained through physical arguments. In this extreme case, all tracer mass introduced via the production well is immediately uniformly distributed over the whole domain, i.e., the concentration in all points is the same and is only a function of time. Such comparison is shown in Fig.6 below.

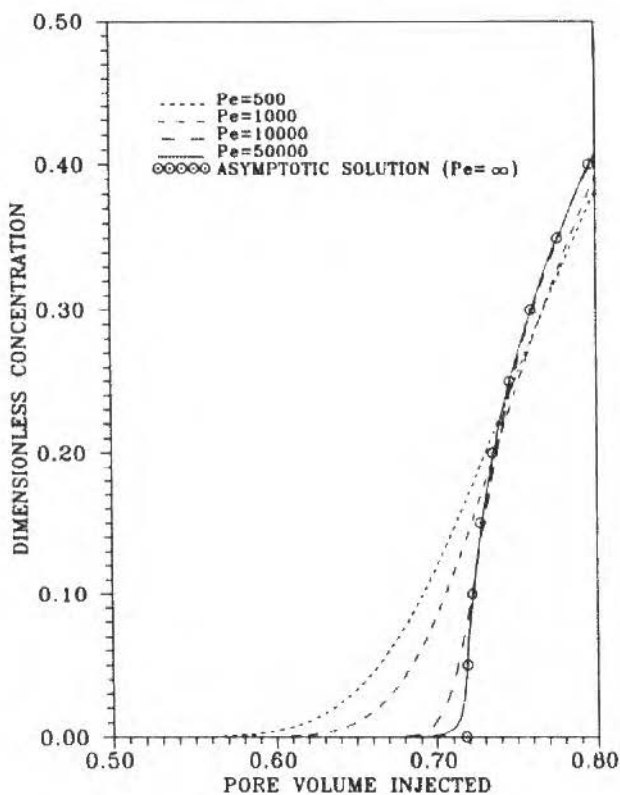


Fig. 5 Comparison of integral transform results, for increasing Peclet number, against asymptotic solution for  $Pe = \infty$  (tracer transport in petroleum reservoir).

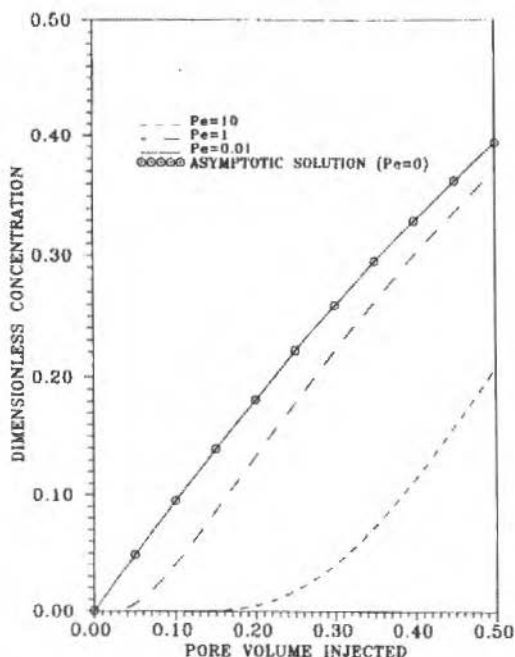


Fig. 6 Comparison of integral transform results, for decreasing Peclet number, against asymptotic solution for  $Pe = 0$  (tracer transport in petroleum reservoir).

Now, for comparison purposes with finite differences solutions, two representative schemes were adopted, namely, the nine-point exponential scheme and the third-order TVD scheme with Sweby's region. The calculations were performed with a  $15 \times 15$  diagonal grid in both cases [25, 28].

Figure 7 shows the behavior of the selected numerical schemes against the GITT solution for  $Pe=500$  and continuous tracer injection. The presence of significant numerical diffusion in the nine-point exponential scheme and the good agreement with the third-order TVD scheme are clear from this plot.

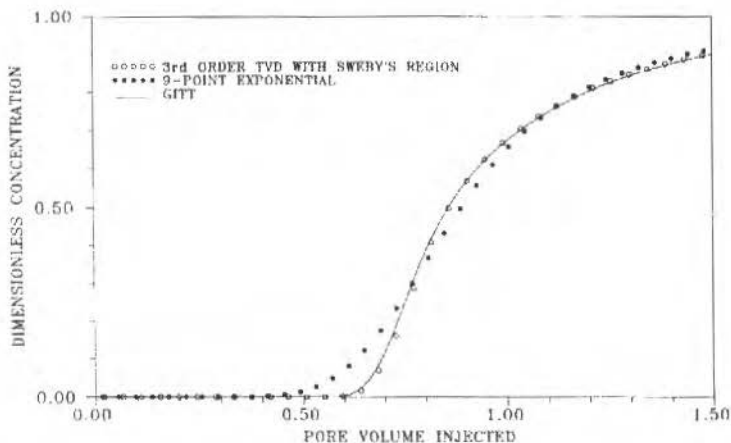


Fig. 7 Comparison of integral transform results against finite difference schemes, for  $Pe = 500$ .

Finally, Fig. 8 compares analytical (GITT) and numerical concentration (TVD Scheme) profiles along the injection well-production well line for a dimensionless time equivalent to 50% of pore volume injected and various Pe numbers.

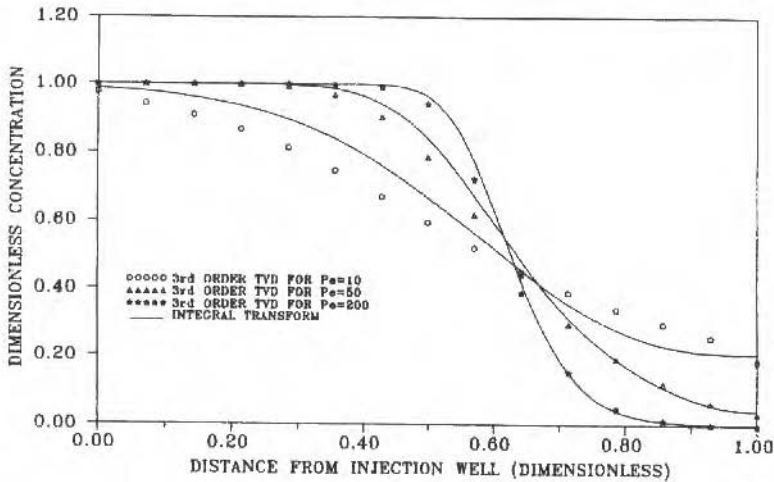


Fig. 8 Comparison of integral transform computed concentration distributions, for different Pe numbers, against the third-order TVD numerical scheme.

The difficulty of the numerical scheme in perfectly defining the wave front is noticeable in Fig. 8 above, especially at lower Peclet numbers.

The integral transform approach, again, opens new perspectives in the area of petroleum reservoir simulation.

### Transient Natural Convection in Enclosures

We consider a square air-filled enclosure, with differentially heated lateral walls, and insulated top and bottom walls. Buoyancy effects are taken into account through the Boussinesq approximation, under laminar flow regime. Benchmark results for the steady-state situation were established through integral transformation in [35,36], and the transient behavior of the coupled heat and fluid flow phenomena was also investigated [36], for different values of the Rayleigh number, Ra.

The governing equations are the vorticity transport equation in streamfunction-only formulation [33,34], and the associated energy equation, which in dimensionless form are given by:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial y} = Pr \nabla^4 \psi - Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T ; \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0 \tag{15b}$$

with initial and boundary conditions:

$$T(x, y, 0) = \psi(x, y, 0) = 0 ; \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \tag{15c,d}$$

$$T = 1; \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad x = 0 \quad (15e-g)$$

$$T = 0; \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad x = 1 \quad (15h-j)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad y = 0 \quad (15k-m)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad y = 1 \quad (15n-p)$$

where the Rayleigh number is defined as:

$$Ra = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3}{\alpha \nu} \quad (16)$$

and  $L$  is the enclosure height and length, while  $T_h$  and  $T_c$  are the hot and cold wall temperatures, respectively.

Table 2 illustrates some of the benchmark results obtained for the steady-state solution, in this case for  $Ra = 10^6$ , compared against previously reported purely numerical solutions, as detailed in [35]. The agreement is indeed excellent, reconfirming some of the most recent and careful benchmarking efforts available in the literature, even for the slower converging Nusselt number expansions.

**Table 2 Comparison of steady-state benchmark results for natural convection in a square cavity.**

	$Ra = 10^6 ; Pr = 0.71$				
	GITT	de Vahl Davis [37]	Saitoh & Hirose [38]	Hortmann et al. [39]	Le Quéré [40]
$ \Psi_{\text{MEZ}} $	16.39v	16.32	16.379	NA	16.386
$ \Psi_{\text{MAX}} $	16.81	16.750	NA	NA	16.811
$\Psi_{x,y}$	0.151;0.547	0.151;0.547			0.150;0.547
$ u_{\text{MAX}} $	64.83	64.63	674.886	64.8367	64.83
$y$	0.850	0.850	0.8505	0.85036	0.850
$ v_{\text{MAX}} $	220.6	219.36	220.47	220.461	220.6
$x$	0.0379	0.0379	0.03783	0.03887	0.038
$Nu_g$	8.825	8.800	8.7956	8.82513	8.825
$Nu_{1/2}$	8.825	8.799	8.7989	8.82513	8.825
$Nu_0$	8.826	8.817	8.8487	8.82513	8.825
$Nu_{\text{MAX}}$	17.54	17.925	17.140	17.536	17.536
$y$	0.0390	0.0378	0.0473	0.03902	0.039
$Nu_{\text{MIN}}$	0.9794	0.989	1.015	NA	0.9795
$y$	1	1	1		1

NA - Not Available

Figures 9.a,b show a comparison of the transient integral transform results against a finite elements simulation [41] at different dimensionless times for, respectively, temperature and vertical velocity component distributions along the longitudinal coordinate, with  $Ra = 10^5$ .

Again, the agreement is quite reasonable to the graph scale within the transient region, with some more noticeable deviations as the steady-state is approached, due to some error propagation effect in the purely numerical solution.

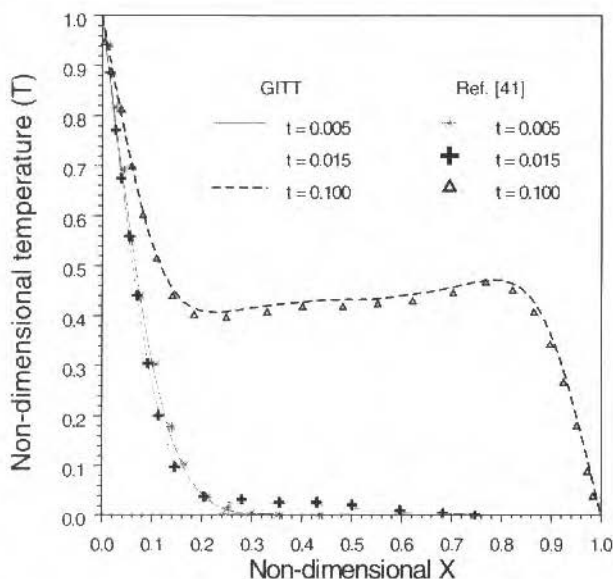


Fig. 9a Comparison of transient temperature distributions at the cavity midplane ( $y=1/2$ ) by integral transforms [36] and finite elements [41], ( $Ra = 10^5$ ).

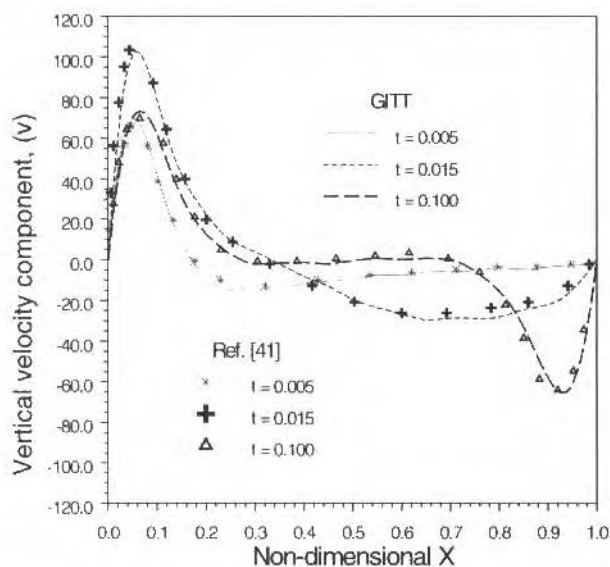


Fig. 9b Comparison of transient vertical velocity component (v) at the cavity midplane ( $y=1/2$ ) by integral transforms [36] and finite elements [41], ( $Ra = 10^5$ ).

Figure 10 shows the comparative transient behavior among the overall Nusselt numbers for different Rayleigh numbers,  $Ra = 10^3$ ,  $10^4$  and  $10^5$ , as obtained from fully converged integral transform results, to the graph scale. As the Rayleigh number increases, steady-state is reached after some oscillatory behavior on the overall Nusselt numbers, due to internal flow waves developed at early transient stage. As  $Ra$  is further increased, this phenomena leads to flow instabilities that restrict the system in reaching a fully steady pattern.

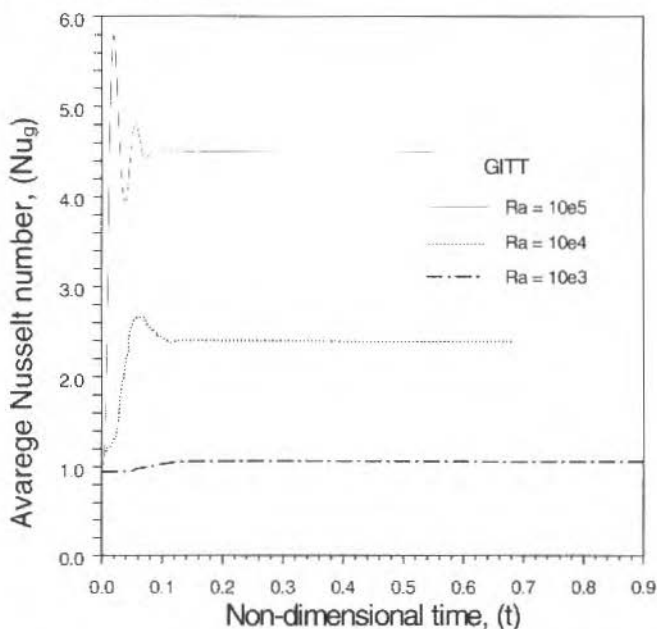


Fig. 10 Transient behavior of the overall average Nusselt number in a square cavity for different Rayleigh numbers ( $Ra = 10^3$ ,  $10^4$  and  $10^5$ ).

Algorithm optimization schemes should then allow for the employment of the integral transform approach in the analysis of unstable heat and fluid flow phenomena, with the quite desirable automatic error control feature, essential for the discrimination between numerical and physical oscillations in the final solution patterns.

## Conclusions

The major advantages of the presented integral transform method are as follows:

- The hybrid numerical-analytical nature, characteristic of this approach, collapses most of the numerical effort into one single independent variable, i.e., the numerical integration of an ODE system, which is nowadays a very well-established task in numerical analysis, even for stiff systems, including error control schemes.
- The wide availability of ODE solvers and other subroutines in scientific subroutines packages, for intermediate computational tasks, makes the computational implementation of the present approach quite simple, based on successive calls to such easily accessible and simple to use routines.
- The automatic global error control and estimation offers the extremely attractive feature of working within a user prescribed accuracy and with an almost optimized computational effort, not frequently found in numerical methods for PDE's.
- Irregularly shaped domains, with respect to the coordinates system adopted, are directly handled either through description of the boundary surfaces in each coordinate in terms of the other spatial variables, or when required, by decomposing the domain in regularly shaped regions and analytically coupling these solutions of each subdomain.



- Due to the hybrid nature discussed above, the increase in computational effort is not too significant when the number of independent variables in the PDE system is increased. Therefore, one, two and three-dimensional applications are handled within the same order of magnitude of computer CPU time. Numerical experiments on the transient Burgers equation of the previous section, for instance, confirmed this statement, with an increase of about 10% on CPU time for the two-dimensional case, and similarly for the three-dimensional situation. This is easily understood if one remembers that the numerical work in this approach is always reduced to a numerical integration of an ODE system (one single independent variable), while all the remaining independent variables are eliminated through integral transformation and recalled in analytic explicit form within the inversion formula, which is essentially a single, double or triple summation. This is indeed the major advantage over fully discrete approaches, which become in many cases prohibitive for multidimensional situations.

## Research needs

This section briefly discusses ideas already under investigation towards the enhancement and further extension of the Generalized Integral Transform Technique. The aim is to stimulate the collaboration among the various researchers involved in this effort, and point out some research opportunities for newcomers.

At the present stage of development, research needs can be identified on two categories, namely, application extensions and algorithm optimizations.

Among the different extensions presently under consideration, some already offering very encouraging conclusive results, we may point out the analysis of three dimensional flows, differential models of turbulence, compressible flows, heterogeneous media, anisotropic diffusion, convection-diffusion within irregular domains, inverse problem analysis, transient and unstable phenomena, quasi-hyperbolic formulations, chemically reacting flows, multidimensional moving boundary problems, external flows, etc. Such developments are directly associated with a number of thesis works in progress at LTTC, COPPE/UFRJ, and collaborators more closely involved from COPPE and other institutions within Brazil.

In terms of algorithm optimizations, attention has been directed to the development of local-instantaneous filtering, dynamic modulation of stiff ODE systems, non-classical eigenvalue problems, alternative primitive variables expansions, ordering schemes in multidimensional problems, vectorization and parallel computing, eigenvalue problems in arbitrary regions, and dedicated adaptive numerical integration. Such alternatives of performance enhancement are being tested and implemented within different situations, when required for the success of each individual extension, before a sufficient level of understanding is achieved that shall allow for the desirable unification of such sparse ideas within a single and general optimized algorithm, hopefully within the next few years.

Future research needs are also very closely associated with the development of mixed symbolic-numerical computation [42], which offers a very adequate development platform for hybrid numerical-analytical approaches. The only drawback in such class of methods, due to the considerable amount of analytical work usually required, would then be eliminated to a reasonable extent, and even, allow for automatic program generation strategies. Such aspects are better envisioned through new books to be soon available [43, 44].

## Acknowledgements

The first author is grateful to the Organizing Committee at IME for the invitation to present this lecture at the 2<sup>nd</sup> Workshop on Integral Transform Methods and share some of the research efforts undertaken at LTTC, COPPE/UFRJ. The financial support provided by CNPq and FINEP, both in Brazil, is sincerely acknowledged.

## References

1. Cotta, R.M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, FL.
2. Cotta, R.M., 1994, "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method", *Int. J. Heat & Mass Transfer*, Invited Paper, Vol. 37, Suppl. 1, pp. 381-394.

3. Cotta, R.M., 1994, "The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow", Special Keynote Lecture, Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf., Brighton, UK, SK-3, August, Vol. 1, pp. 43-60.
4. Mikhailov, M.D. and M.N. Özisik, 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York.
5. Cotta, R.M., R. Serfaty, and R.O.C. Guedes, 1990, "Integral Transform Solution of a Class of Transient Convection-Diffusion Problems", Int. Conf. Advanced Computational Methods in Heat Transfer, July, Vol. 1, pp. 239-250, Southampton, UK.
6. Serfaty, R., and R.M. Cotta, 1992, "Hybrid Analysis of Transient Nonlinear Convection-Diffusion Problems", Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow, Vol. 2, pp. 55-62.
7. Cotta, R.M. and M.N. Özisik, 1986, "Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature", ASME Winter Annual Meeting, Miami, FL, November 1985; also, Can J. Chem. Eng., V. 64, pp. 734-742.
8. Cotta, R.M., M.D. Mikhailov and M.N. Özisik, 1986, "Transient Conjugated Forced Convection in Ducts with Periodically Varying Inlet Temperature", Int. J. Heat & Mass Transfer, V. 30, No 10, pp. 2073-2082, 1987.
9. Cotta, R.M. and M.N. Özisik, "Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature", Int. J. Heat Mass & Transfer, V. 29, No 10, pp. 1495-1501.
10. Cotta, R.M., 1989, "On the Solution of Periodic Multidimensional Diffusion Problems", Int. Comm. Heat & Mass Transfer, V. 16, No 4, pp. 569-579.
11. Kakaç, S., W. Li, and R.M. Cotta, 1989, "Theoretical and Experimental Study of Transient Laminar Forced Convection in a Duct with Timewise Variation of Inlet Temperature", ASME Winter Annual Meeting, HTD V. 123, pp. 57-63, San Francisco.
12. Kim, W.S., R.M. Cotta, and M.N. Özisik, 1990, "Laminar Internal Forced Convection with Periodically Varying, Arbitrarily Shaped Inlet Temperature", 9th Int. Heat Transfer Conference, August, Paper # 16-TR-17, pp. 383-388, Jerusalem, Israel.
13. Kakaç, S., R.M. Cotta, F.F. Hatay, and W. Li, 1990, "Unsteady Forced Convection in Ducts for a Sinusoidal Variation of Inlet Temperature", 9th Int. Heat Transfer Conf., August, Paper # 8-MC-01, pp. 265-270, Jerusalem, Israel.
14. Guedes, R.O.C. and R.M. Cotta, 1991, "Periodic Laminar Forced Convection Within Ducts Including Wall Heat Conduction Effects", Int. J. Eng. Science, V. 29, No 5, pp. 535-547.
15. Kakaç, S., W. Li and R.M. Cotta, 1990, "Unsteady Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature", J. Heat Transfer, V. 112, pp. 913-920.
16. Cotta, R.M., C. Baohua, and P.F.L. Heilbron Filho, 1990, "Analytical Solutions to Transient Convective Mass Transfer Within Porous Media", August, Proc. of the NATO Advanced Study Institute - Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, Invited Lecture, NATO ASI Series E: Applied Sciences, V. 196, pp. 525-540, Turkey.
17. Scofano Neto, F. and R.M. Cotta, 1993, "Dynamic Analysis of Double-Pipe Heat Exchangers Subjected to Periodic Inlet Temperature Disturbances", Wärme-und Stoffübertragung, V. 28, pp. 497-503.
18. Guedes, R.O.C., M.N. Özisik, and R.M. Cotta, 1992, "Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection in a Parallel Plate Channel", 1992 National Heat Transfer Conference, HTD, August, V. 201, pp. 63-70, San Diego, CA.
19. Cotta, R.M. and J.E.V. Gerk, 1994, "Mixed Finite Difference/Integral Transform Approach for Parabolic Hyperbolic Problems in Transient Forced Convection", Numerical Heat Transfer - Part B: Fundamentals, Vol. 25, pp. 433-448.
20. Ostwald, P.N. and R.M. Cotta, 1992, "Simulation of Radionuclides Migration in Porous Media Through Integral Transform Method", IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas, IV ENCIT, pp. 325-328, Rio de Janeiro, RJ.
21. Kakaç, S. and R.M. Cotta, 1993, "Experimental and Theoretical Investigation on Transient Cooling of Electronic Systems", Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Cooling of Electronic Systems, Invited Lecture, NATO ASI Series E: Applied Sciences, June/July, Vol. 258, pp. 239-275, Turkey.
22. Santos, C.A.C. and R.M. Cotta, 1993, "Dynamic Analysis of Heat Exchangers with Externally Finned Tubes", Proc. of the ICHMT Int. Symp. on New Developments in Heat Exchangers, October, Portugal.
23. Guedes, R.O.C., M.N. Özisik, and R.M. Cotta, 1994, "Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection in a Parallel Plate Channel", J. Heat Transfer, February, V. 116, pp. 40-46.
24. Brown, D.M., S. Kakaç, C.A.C. Santos and R.M. Cotta, 1994, "Numerical and Experimental Investigation of Unsteady Laminar Forced Convection in Circular Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature", Proc. of the 2nd Biennial European-ASME Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis, London, UK, ASME HTD, July, Vol. 64-1.
25. Almeida, A.R. and R.M. Cotta, 1995, "Analytical Solution of the Tracer Equation for the Homogeneous Five-Spot Problem", SPE Journal, Paper # 29218.

26. Scofano Neto, F., R.O.C. Guedes and R.M. Cotta, 1994, "Unsteady Conjugated Heat Transfer Analysis in Low Reynolds Pipe Flow", 3rd Int. Conf. Adv. Comp. Meth. in Heat Transfer, Southampton, UK, August, pp. 115-122.
27. Brown, D.M., C.A.C. Santos, S. Kakaç and R.M. Cotta, 1994, "Dynamic Analysis of Unsteady Turbulent Forced Convection Heat Transfer Within the Thermal Entrance Region of Circular Ducts", International Mechanical Engineering Congress and Exposition - ASME Winter Annual Meeting, Chicago, Illinois, ASME HTD, November, Vol. 285, pp. 9-16.
28. Almeida, A.R. and R.M. Cotta, 1995, "Integral Transform Methodology for Convection-Diffusion Problems in Petroleum Reservoir Engineering", Int. J. Heat & Mass Transfer, V.38, no.18, pp.3359-3367.
29. Santos, C.A.C., D.M. Brown, S. Kakaç and R.M. Cotta, 1995, "Analysis of Unsteady Forced Convection in Turbulent Duct Flow", J. Thermophysics & Heat Transfer, Vol. 9, No 3, pp. 508-515.
30. Mikhailov, M.D. and R.M. Cotta, "Temperature Oscillations in a Slug Tube Flow", Int. Comm. Heat & Mass Transfer, in press.
31. Cotta, R.M., 1990, "Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems", Num. Heat Transfer, Part B, V. 127, pp. 217-226.
32. IMSL Library, MATH/LIB, Houston, TX, 1987.
33. Pérez Guerrero, J.S. and R.M. Cotta, 1992, "Integral Transform Method for Navier-Stokes Equations in Streamfunction-Only Formulation", Int. J. Num. Meth. in Fluids, V. 15, pp. 399-409.
34. Pérez Guerrero, J.S. and R.M. Cotta, 1996, "Benchmark Integral Transform Results for Flow over a Backward-Facing Step", Computers & Fluids, n° 5, pp. 527-540.
35. Leal, M.A., J.S. Pérez Guerrero and R.M. Cotta, "Natural Convection Inside Two-Dimensional Cavities: - The Integral Transform Method", Computers & Fluids, (submitted).
36. Leal, M. A., 1996, "Convecção Natural em Cavidades para Regimes Permanente e Transiente: - O Método de Transformação Integral", D.Sc. Thesis, COPPE/UFRJ.
37. de Vahl Davis, G., 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution", Int. J. Num. Meth. in Fluids, V. 3, pp. 249-264.
38. Saitoh, T. and K. Hirose, 1989, "High-Accuracy Bench Mark Solutions to Natural Convection in a Square Cavity", Computational Mechanics, V. 4, pp. 417-427.
39. Hortmann, M., M. Peric and G. Scheuerer, 1990, "Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Bench-Mark Solutions", Int. J. Num. Meth. in Fluids, V. 11, pp. 189-207.
40. Le Quéré, P., 1991, "Accurate Solutions to the Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number", Computers & Fluids, V. 20, no 1, pp. 29-41.
41. Sai, B.V.K.S., K.N. Seetharamu, and P.A.A. Narayana, 1994, "Solution of Transient Laminar Natural Convection in a Square Cavity by an Explicit Finite Element Scheme", Num. Heat Transfer, Part A, V. 25, pp. 593-609.
42. Wolfram, S., 1991, "Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer", The Advanced Book Program, Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, CA.
43. Cotta, R.M. and M.D. Mikhailov, 1996, "Heat Conduction: - Lumped Analysis. Integral Transforms, Symbolic Computation", Wiley-Interscience, Europe.
44. Mikhailov, M.D. and R.M. Cotta, "Integral Transform Method with Mathematica", in preparation.

# Estudos de Sensibilidade em um Modelo Simplificado de Canal Quente de um PWR Utilizando a Teoria de Perturbação via Formalismo Matricial

## *Sensitivity Studies in a Simplified PWR-Hot Channel Model Using Perturbation Theory by Matricial Formalism*

Edisson Sávio de Góes Maciel  
Fernando Roberto de Andrade Lima  
Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Energia Nuclear  
50740-540 Recife, PE - Brasil

### Abstract

*The matricial formalism of the perturbation theory is applied in a simplified PWR-hot channel model to study the sensitivity of some punctual and average functionals. The model is described by mass, linear momentum and energy conservation equations and adequate heat transfer and fluid mechanics correlations. Every one is discretized along the channel height. Thermalhydraulic calculations are carried out and stored to use in the matricial formalism. Sensitivity coefficients are determined for specific cases and comparisons between direct results and perturbative method have shown good agreement. The main advantages of the perturbative method are discussed and its importance to sensitivity analysis is emphasized.*

**Keywords:** PWR Hot Channel Model, Perturbation Theory, Matricial Formalism

### Resumo

*A teoria de perturbação, via formalismo matricial, é aplicada a um modelo simplificado de canal quente de reatores nucleares a água pressurizada ("Pressurized Water Reactors", PWR) para estudo de sensibilidade de funcionais pontuais e médios. O modelo é descrito pelas equações de conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de energia, além de correlações de transferência de calor e de mecânica dos fluidos apropriadas, todas discretizadas ao longo da altura do canal. Cálculos termohidráulicos são efetuados e armazenados para posterior uso do formalismo matricial. Através deste, coeficientes de sensibilidade para casos específicos são determinados e comparações entre resultados obtidos pela variação direta e pelo método perturbativo são realizadas enfocando as principais vantagens deste último, caracterizando-o como uma importante ferramenta para análise de sensibilidade.*  
**Palavras-chave:** Reator Nuclear a Água Pressurizada, Modelo de Canal Quente, Teoria de Perturbação, Formalismo Matricial

### Introdução

Na elaboração de projeto e edificação de centrais nucleares, a análise de segurança é indispensável na detecção das consequências diretas e indiretas de possíveis acidentes sobre os elementos e sistemas componentes (bombas, geradores de vapor, etc.), bem como na averiguação da capacidade dos diversos níveis de segurança em minimizar, quando ocorrer, a liberação de radiação e/ou produtos radioativos para o meio externo.

Esta análise é possível com a ajuda dos cálculos de sensibilidade efetuados mediante resultados obtidos de códigos de computação: COBRA-IV (Stewart et al., 1977), RELAP (Ransom et al., 1980), TRAC-PFI (Mahaffy et al., 1984), etc.

O estudo de sensibilidade é geralmente baseado na construção de superfícies de resposta. O procedimento consiste na utilização de condições não nominais implementadas nos códigos de computação a fim de representar situações de ocorrência dentro de uma central. Os parâmetros termohidráulicos fornecidos como dados de saída dos códigos proporcionam as informações necessárias para os cálculos de sensibilidade. Superfícies de resposta são construídas fornecendo o comportamento de funcionais (temperatura máxima da vareta combustível, por exemplo) em relação a parâmetros de

interesse. Assim, é possível obter o retrato operacional de uma central, para variações predeterminadas de seus parâmetros, o que permite a visualização das conseqüências de tais alterações.

Devido ao grande número de parâmetros e à complexidade dos modelos adotados para os cálculos termohidráulicos, o estudo de sensibilidade fazendo uso desta metodologia é demorado e oneroso, tendo em vista as repetidas execuções que são necessárias e os tempos computacionais gastos.

## Nomenclatura

$[A]_{j,j+1}$ =	matriz dos coeficientes do sistema de equações de conservação do modelo, associada ao vetor de estado na posição $j+1$	$m$ =	indicador de perda de pressão localizada em grades com aletas	$[\varepsilon]_{j,j+1}$ =	matriz dos coeficientes do sistema de equações derivadas do modelo, associada ao vetor de estado derivado na posição $j+1$
$A_c$ =	área de escoamento do refrigerante, $m^2$	$P$ =	parâmetro genérico	$\bar{Y}_{j,j+1}$ =	vetor componente do sistema derivado
$[B]_{j,j+1}$ =	matriz dos coeficientes do sistema de equações de conservação do modelo, associada ao vetor de estado na posição $j$	$P_L$ =	pressão do refrigerante em um volume de controle, $N/m^2$	$\rho$ =	vetor de fonte do sistema derivado
$cg$ =	coeficiente de perda de pressão na grade com aletas	$P_{LCB}$ =	perda de pressão localizada por contração brusca, $N/m^2$	$\bar{\rho}$ =	massa específica do refrigerante em um volume de controle, $Kg/m^3$
$cgs$ =	coeficiente de perda de pressão na grade sem aletas	$P_{LEB}$ =	perda de pressão localizada por expansão brusca, $N/m^2$	$\rho$ =	massa específica média do refrigerante em um volume de controle, $Kg/m^3$
$co$ =	coeficiente de perda de pressão por contração	$P_{LG}$ =	perda de pressão localizada na grade com aletas, $N/m^2$	<b>Subscritos</b>	
$\vec{d}_{j,j+1}$ =	vetor de termos independentes do sistema matricial de equações de conservação do modelo	$P_{LGS}$ =	perda de pressão localizada na grade sem aletas, $N/m^2$	$c$ =	refrigerante ("coolant"), combustível
$D_h$ =	diâmetro hidráulico do canal quente, $m$	$Q$ =	potência térmica cedida a um volume de controle, $W$	$e$ =	entrada de um volume de controle
$Ex$ =	coeficiente de perda de pressão por expansão	$R$ =	funcional resposta genérico	$h$ =	hidráulico
$F$ =	coeficiente de atrito	$\vec{S}$ =	vetor fonte da equação derivada matricial	$i$ =	índice espacial que define entrada de um volume de controle ou índice de somatório
$\vec{f}$ =	função de estado dada pelo vetor $[p \ P \ h]^T$	$t$ =	vetor fonte da equação derivada matricial	$j+1$ =	índice espacial que define saída de um volume de controle
$\vec{f}_p$ =	derivada da função de estado com relação ao parâmetro $p$ dada pelo vetor $[dp/dp \ dP/dp \ dh/dp]$		adjunta $\vec{F}$ dividido por $\Delta z$	$j$ =	índice espacial limite
$\vec{F}$ =	termo de fonte da equação adjunta (depende do funcional resposta analisado)	$[\Gamma]_{j,j+1}$ =	matriz dos coeficientes do sistema de equações derivadas, associada ao vetor de estado na posição $j+1$	$l$ =	localizada
$g$ =	aceleração local da gravidade, $m/s^2$	$v$ =	velocidade do refrigerante em um volume de controle, $m/s$	$LCB$ =	localizada por contração brusca
$h$ =	entalpia do refrigerante em um volume de controle, $J/Kg$	$\bar{v}$ =	velocidade média do refrigerante em um volume de controle, $m/s$	$LEB$ =	localizada por expansão brusca
$\bar{h}$ =	entalpia média do refrigerante em um volume de controle, $J/Kg$	$w$ =	vazão mássica lateral de refrigerante em um volume de controle, $Kg/s$	$LG$ =	localizada na grade com aleta
$H_C$ =	altura de uma vareta combustível, $m$	$y$ =	denota uma função característica	$LGS$ =	localizada na grade sem aleta
$K$ =	indicador de perda de pressão localizada por expansão	$z$ =	coordenada espacial medida em relação a entrada do canal, $m$	$\partial/\partial p$ =	derivada parcial de uma grandeza em relação ao parâmetro $p$
$l$ =	indicador de perda de pressão localizada em grades sem aletas e por contração	<b>Letras Gregas</b>		$s$ =	saída de um volume de controle
		$\alpha$ =	fração de vazios em um volume de controle	<b>Sobrescritos</b>	
		$[\beta]_{j,j+1}$ =	matriz dos coeficientes do sistema de equações derivadas do modelo, associada ao vetor de estado derivado na posição $j$	$T$ =	transposta de um vetor ou matriz
		$\Delta z$ =	altura de um volume de controle, $m$	<b>Símbolos Operacionais</b>	
				$-1$ =	denota matriz inversa
				$*$ =	função ou operador adjunto
				$[\ ]$ =	representação de matriz
				$\rightarrow$ =	representação de vetor cujos componentes são escalares
				$\{ \}$ =	representação de vetor cujos componentes são vetores

O desenvolvimento de formalismos de teoria de perturbação, inicialmente aplicados na área de Física de Reatores (Stacey, 1972) e Blindagem, e, posteriormente, nos estudos de Termohidráulica de Reatores Nucleares (Oblow, 1978, Cacuci et al., 1980, Andrade Lima e Alvim, 1986, Gandini, 1987, Andrade Lima, 1990, Maciel, 1995 e Maciel et al., 1995a), vem possibilitando a simplificação de tais cálculos em vista da rapidez e eficiência com que estes estudos podem ser realizados. Em acordo com isto, as análises de segurança, via métodos perturbativos, têm assumido um papel importante, incentivando pesquisadores e instituições: ENEA ("Ente per le Nuove Tecnologie, l'Energia e l'Ambiente", Itália), CAB ("Centro Atômico Bariloche", Argentina), UFRJ (Programa de Engenharia Nuclear da COPPE) e UFPE (Departamento de Energia Nuclear), por exemplo, a fazerem uso de tais ferramentas.

A filosofia dos métodos perturbativos amplamente explorada por Cacuci et al., (1980), Gandini (1987) e Andrade Lima (1990), entre outros, tem possibilitado obter o coeficiente de sensibilidade de um funcional resposta em relação a parâmetros do sistema estudado. Tal procedimento permite uma grande economia de tempo computacional quando comparado com a metodologia de superfície de resposta (procedimento que consiste na execução repetidas vezes do código computacional para cada variação de parâmetros do sistema a fim de obter uma distribuição do funcional resposta). O coeficiente de sensibilidade obtido pelos métodos perturbativos, linear na aproximação mais simples, permite determinar o comportamento do funcional resposta com uma única execução do programa.

O presente trabalho tem como objetivos: aplicar o formalismo matricial de teoria de perturbação a um modelo simplificado do canal quente de PWR's, obtendo o sistema matricial adjunto e a expressão geral do coeficiente de sensibilidade; realizar cálculos de sensibilidade dos seguintes funcionais:

- a Valor médio da pressão do refrigerante ao longo do canal quente;
- b Valor da pressão do refrigerante na posição axial central do canal quente;
- c Valor médio da entalpia do refrigerante ao longo do canal quente;
- d Valor da entalpia do refrigerante na posição axial central do canal quente;

em relação aos seguintes parâmetros: velocidade do refrigerante na entrada do canal quente, massa específica do refrigerante na entrada do canal quente, pressão do refrigerante na entrada do canal quente, entalpia do refrigerante na entrada do canal quente e diâmetro hidráulico do canal quente; e, finalmente, evidenciar a boa representatividade do formalismo matricial em relação à descrição do sistema perturbado, bem como suas facilidades e limitações.

## Modelo Termohidráulico do Canal Quente

### Modelo

O modelo adotado para análise de sensibilidade simula o comportamento termohidráulico do canal quente do núcleo de um típico PWR.

Ele fornece as grandezas termohidráulicas do refrigerante no canal quente e a distribuição de temperatura nas varetas combustíveis constituintes (Belém, 1993). No presente trabalho, somente variáveis relativas ao canal de escoamento serão consideradas para efeito de análise de sensibilidade.

Na operação normal de um típico PWR, as principais condições verificadas e adotadas no modelo são:

- a Condições de escoamento:
  - a.1 Regime de escoamento turbulento e permanente;
  - a.2 Processo de transferência de calor por "mixing" (transferência de energia sem troca de massa fluida) desprezível em relação ao processo de transferência de calor por "crossflow" (transferência de energia com troca de massa fluida).
- b Condições de geração térmica:
  - b.1 Região combustível: geração de potência térmica volumétrica obedece a uma distribuição senoidal ao longo da vareta e a transferência de calor do combustível para o espaço anular é por convecção natural;
  - b.2 Região espaço anular: não existe geração de potência térmica no gás contido no espaço anular e o aquecimento é devido à propagação de calor por condução. A transferência de calor do gás para o revestimento é por convecção natural;
  - b.3 Região revestimento: não existe geração de potência térmica e o aquecimento é devido à propagação de calor por condução. A transferência de calor do revestimento para o refrigerante é por convecção forçada.

O modelo admite ainda as seguintes hipóteses: (i) Potência térmica nominal; (ii) Barras de controle retiradas e (iii) Ausência de venenos (xenônio e índio, por exemplo).

## Metodologia de Simulação

O modelo divide o canal quente em volumes de controle ao longo de todo o comprimento de uma vareta combustível (Figura 1). O sentido da posição axial crescente de cada elemento de volume corresponde ao sentido de escoamento do refrigerante no canal. Através das condições iniciais do refrigerante na entrada do reator e das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento linear e da energia, são determinadas as condições de saída de cada volume de controle, as quais definem as condições de entrada do volume subsequente. O processo é repetido até o topo da vareta.

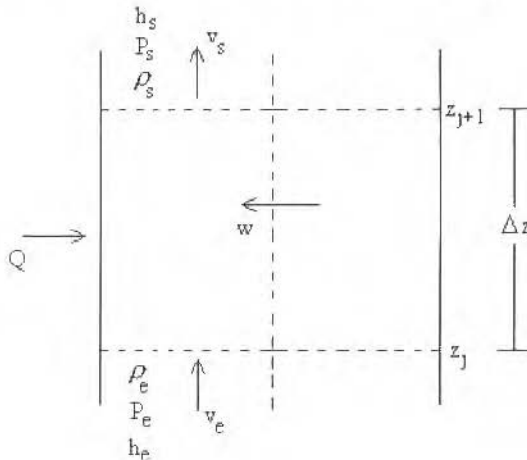


Fig. 1 Interação entre dois canais adjacentes com fronteiras laterais abertas

## Equações de Conservação

As equações de conservação para cada volume de controle são:

a) Lei da conservação da massa:

$$\rho_e v_e A_c = \rho_s v_s A_c + w \quad (1)$$

b) Lei da conservação da quantidade de movimento linear:

$$P_e + \frac{\rho_e v_e^2}{2} = P_s + \frac{\rho_s v_s^2}{2} + f \frac{\Delta z}{D_h} \times \frac{\rho v}{2} + \bar{\rho} \Delta z g + P_L + \frac{w}{A_c} \bar{v} \quad (2)$$

onde,  $P_L$  e  $w$  representam, respectivamente, a perda de pressão localizada e a vazão mássica lateral ("crossflow") e a barra horizontal sobre qualquer grandeza, doravante, significa a média aritmética entre os valores de entrada e saída no volume de controle desta grandeza.

c) Lei da conservação da energia:

$$A_c \rho_e v_e h_e + Q = A_c \rho_s v_s h_s + w \bar{h} \quad (3)$$

Os valores de  $P_L$  e  $w$  obtidos de Belém (1993), são:

$$P_L = \begin{cases} P_{LCB} = (co)\rho_e v_e^2 / 2 \\ P_{LEB} = (ex)\rho_s v_s^2 / 2 \\ P_{LGS} = (cgs)\rho_e v_e^2 / 2 \\ P_{LGS} = (cgs)\rho_e v_e^2 / 2 \end{cases} \quad (4)$$

e,

$$w = \rho_0 v_0 A_c \left( \frac{1}{1+0,6535\alpha_e} - \frac{1}{1+0,6535\alpha_s} \right) \quad (5)$$

em que  $\rho_0$  e  $v_0$  são, respectivamente, a massa específica e a velocidade do refrigerante na entrada do canal e as constantes da Eq. (5) tiveram valores determinados a partir do sistema internacional (SI).

Para realização dos cálculos, são admitidas algumas hipóteses simplificadoras:

H1 Na Eq.(2), o termo  $w\sqrt{A_c}$  é considerado desprezível em relação aos demais;

H2 Na Eq. (3), o termo  $wh$  é considerado desprezível em relação aos demais;

H3 As grandezas termohidráulicas do refrigerante em um volume de controle são calculadas a partir da entalpia na saída em virtude de ser um parâmetro de maior facilidade de obtenção; para isso, na Eq. (3), são consideradas a massa específica e a velocidade na saída iguais a massa específica e velocidade na entrada;

H4 Os fenômenos de convecção natural do combustível para o gás contido no espaço anular e deste para o revestimento, além dos fenômenos de propagação de calor por condução e irradiação no gás, são levados em consideração pelo uso do coeficiente global de transferência de calor no espaço anular (Belém, 1993);

H5 Os parâmetros coeficiente global de transferência de calor no espaço anular e condutividade do revestimento são considerados constantes.

Diante destas hipóteses, o programa TERMHIDR (Maciel, 1995), desenvolvido em linguagem de programação PASCAL, baseado no modelo proposto, efetua o cálculo das grandezas termohidráulicas.

## Aplicação - Formalismo Matricial

### Introdução

O uso do formalismo matricial é adequado para sistemas discretizados. A aplicação deste ao modelo em estudo tem como finalidade a determinação do coeficiente de sensibilidade para um funcional genérico em relação a um parâmetro de interesse.

### Representação Matricial

As funções de estado escolhidas no presente trabalho foram: massa específica, pressão e entalpia do refrigerante. As Eqs. (1), (2) e (3), com as hipóteses simplificadoras adotadas, são, então, escritas matricialmente como segue (Maciel, 1995):

a) Conservação da massa:

$$\begin{aligned} (a_{11})_{j,j+1} \rho_{j+1} + (a_{12})_{j,j+1} P_{j+1} + (a_{13})_{j,j+1} h_{j+1} + \\ (b_{11})_{j,j+1} \rho_j + (b_{12})_{j,j+1} P_j + (b_{13})_{j,j+1} h_j = (d_1)_{j,j+1} \end{aligned} \quad (6)$$

em que:

$$(a_{11})_{j,j+1} = -v_{j+1}; \quad (a_{12})_{j,j+1} = 0,0; \quad (a_{13})_{j,j+1} = 0,0; \quad (b_{11})_{j,j+1} = v_j;$$

$$(b_{12})_{j,j+1} = 0,0; \quad (b_{13})_{j,j+1} = 0,0; \quad (d_1)_{j,j+1} = \frac{w_{j,j+1}}{A_c}; \quad (6a)$$



b) Conservação da quantidade de movimento linear:

$$(a_{21})_{j,j+1} \rho_{j+1} + (a_{22})_{j,j+1} P_{j+1} + (a_{23})_{j,j+1} h_{j+1} + (b_{21})_{j,j+1} \rho_j + (b_{22})_{j,j+1} P_j + (b_{23})_{j,j+1} h_j = (d_2)_{j,j+1}, \quad (7)$$

em que:

$$(a_{21})_{j,j+1} = -\frac{v_{j+1}^2}{2} - f \frac{\Delta z}{16D_h} (v_j + v_{j+1})^2 - (k)(ex) \frac{v_{j+1}^2}{2} - \frac{\Delta z(g)}{2};$$

$$(a_{22})_{j,j+1} = -1,0; \quad (a_{23})_{j,j+1} = 0,0;$$

$$(b_{21})_{j,j+1} = +\frac{v_j^2}{2} - f \frac{\Delta z}{16D_h} (v_j + v_{j+1})^2 - (l)(cgs + co) \frac{v_j^2}{2} - (m)(cg) \frac{v_j^2}{2} - \frac{\Delta z(g)}{2};$$

$$(b_{22})_{j,j+1} = 1,0; \quad (b_{23})_{j,j+1} = 0,0; \quad (d_2)_{j,j+1} = 0,0; \quad (7a)$$

c) Conservação da energia:

$$(a_{31})_{j,j+1} \rho_{j+1} + (a_{32})_{j,j+1} P_{j+1} + (a_{33})_{j,j+1} h_{j+1} + (b_{31})_{j,j+1} \rho_j + (b_{32})_{j,j+1} P_j + (b_{33})_{j,j+1} h_j = (d_3)_{j,j+1}, \quad (8)$$

em que:

$$(a_{31})_{j,j+1} = 0,0; \quad (a_{32})_{j,j+1} = 0,0; \quad (a_{33})_{j,j+1} = v_j; \quad (b_{31})_{j,j+1} = 0,0;$$

$$(b_{32})_{j,j+1} = 0,0; \quad (b_{33})_{j,j+1} = -v_j; \quad (d_3)_{j,j+1} = \frac{Q_{j,j+1}}{A_c \rho_j}. \quad (8a)$$

As funções características  $k$ ,  $l$  e  $m$  (assumindo valores 1 ou 0) são introduzidas para a consideração ou não de determinada perda localizada.

O sistema de equações conservativas pode ser agora escrito matricialmente como (Maciel, 1995):

$$[A]_{j,j+1} \vec{f}_{j+1} + [B]_{j,j+1} \vec{f}_j = \vec{d}_{j,j+1} \quad (9)$$

As matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são formadas pelos coeficientes  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  das Eqs. (6a), (7a) e (8a). A Equação (9) permite obter os valores das grandezas na saída do volume de controle a partir daqueles já determinados na entrada do mesmo.

## Diferencial Total

O comportamento do sistema em relação a um parâmetro arbitrário  $p$  é avaliado mediante o cálculo da diferencial total em relação a este. Após esta operação, é possível escrever o seguinte sistema (Maciel, 1995):

$$[\varepsilon]_{j,j+1} (\vec{f}_{j,p})_{j+1} + [\beta]_{j,j+1} (\vec{f}_{j,p})_j = \vec{y}_{j,j+1}, \quad (10)$$

em que  $\vec{f}_{j,p}$  é a derivada de  $\vec{f}$  com relação ao parâmetro  $p$  e  $[\varepsilon]_{j,j+1}$  é formada pelos elementos:

$$(\epsilon_{11})_{j,j+1} = -v_{j+1}; (\epsilon_{12})_{j,j+1} = 0,0; (\epsilon_{13})_{j,j+1} = 0,0;$$

$$(\epsilon_{21})_{j,j+1} = -\frac{v_{j+1}^2}{2} - f \frac{\Delta z}{16D_h} (v_j + v_{j+1})^2 - (k)(ex) \frac{v_{j+1}^2}{2} - \frac{\Delta z(g)}{2}; \quad (10a)$$

$$(\epsilon_{22})_{j,j+1} = -1,0; (\epsilon_{23})_{j,j+1} = 0,0;$$

$$(\epsilon_{31})_{j,j+1} = \frac{Q_{j,j+1} v_{j+1}}{A_c \rho_j^2 v_j}; (\epsilon_{32})_{j,j+1} = 0,0; (\epsilon_{33})_{j,j+1} = v_j;$$

e  $[\beta]_{j,j+1}$  por:

$$(\beta_{11})_{j,j+1} = v_j; (\beta_{12})_{j,j+1} = 0,0; (\beta_{13})_{j,j+1} = 0,0;$$

$$(\beta_{21})_{j,j+1} = +\frac{v_j^2}{2} - f \frac{\Delta z}{16D_h} (v_j + v_{j+1})^2 - (l)(cgs + co) \frac{v_j^2}{2} - (m)(cg) \frac{v_j^2}{2} - \frac{\Delta z(g)}{2}$$

$$(\beta_{22})_{j,j+1} = 1,0; \quad (10b)$$

$$(\beta_{23})_{j,j+1} = 0,0; (\beta_{31})_{j,j+1} = Q_{j,j+1} / A_c \rho_j^2; (\beta_{32})_{j,j+1} = 0,0; (\beta_{33})_{j,j+1} = -v_j$$

Os termos  $(\gamma_m)_{j,j+1}$  do vetor  $\bar{\gamma}_{j,j+1}$  dependem dos parâmetros a serem considerados na análise (Maciel, 1995). A Equação (10) pode ser escrita de uma forma mais compacta supondo que o vetor  $(f/p)_0$  seja conhecido. Para cada  $j$  é válido o seguinte desenvolvimento:

$$[\epsilon]_{0,1}(\bar{f}/p)_1 + [\beta]_{0,1}(\bar{f}/p)_0 = \bar{\gamma}_{0,1}$$

$$[\epsilon]_{1,2}(\bar{f}/p)_2 + [\beta]_{1,2}(\bar{f}/p)_1 = \bar{\gamma}_{1,2}$$

$$[\epsilon]_{j-1,j}(\bar{f}/p)_j + [\beta]_{j-1,j}(\bar{f}/p)_{j-1} = \bar{\gamma}_{j-1,j}$$

Logo, admitindo o termo  $[\beta]_{0,1}(\bar{f}/p)_0$  agrupado no segundo membro da equação para  $j = 0$ , é possível escrever a seguinte equação matricial:

$$[T]_{j,j+1} \{(\bar{f}/p)_{j+1}\} = \{(\bar{S})_{j,j+1}\} \quad (11)$$

com  $[T]_{j,j+1}$  sendo a matriz dos coeficientes,  $\{(\bar{f}/p)_{j+1}\}$  o vetor de estado derivado e  $\{(\bar{S})_{j,j+1}\}$  o vetor de fonte da equação derivada matricial (Maciel, 1995).

## Sistema Adjunto

O sistema adjunto é obtido pela multiplicação matricial do sistema derivado, Eq. (11), pela transposta do vetor coluna adjunto,  $\{(\vec{f}^*)_{j+1}^T\}^T$ , (Maciel, 1995). Ou seja,

$$\{(\vec{f}^*)_{j+1}^T\}^T [T]_{j,j+1} \{(\vec{f}/\rho)_{j+1}\} = \{(\vec{f}^*)_{j+1}^T\}^T \{(\vec{S})_{j,j+1}\}, \quad (12)$$

em que:

$$\{(\vec{f}^*)_{j+1}^T\}^T = [\vec{f}_1^* \quad \vec{f}_2^* \cdots \vec{f}_j^*] \quad \text{é o vetor linha adjunto.} \quad (12a)$$

Em seguida, a Eq. (12) é transposta resultando em (Maciel, 1995):

$$\{(\vec{f}/\rho)_{j+1}^T\}^T [T]_{j,j+1}^T \{(\vec{f}^*)_{j+1}\} = \{(\vec{S})_{j,j+1}^T\}^T \{(\vec{f}^*)_{j+1}\} \quad (13)$$

O produto  $[T]_{j,j+1}^T \{(\vec{f}^*)_{j+1}\}$  é por definição o vetor de fonte  $\{(\vec{F})_{j+1}\}$  (ou  $\{(\vec{S}^+)_{j+1}\}$ ) do sistema adjunto. A equação adjunta a ser resolvida é definida, então, por:

$$[T]_{j,j+1}^T \{(\vec{f}^*)_{j+1}\} = \{(\vec{F})_{j+1}\}, \quad j = 0, \dots, J-1 \quad (14)$$

em que:

$\{(\vec{F})_{j+1}\}^T = [\vec{F}_1 \quad \vec{F}_2 \quad \dots \quad \vec{F}_j]$  é o vetor coluna de fonte da adjunta, definida pelo funcional resposta. Esta última equação depende apenas do funcional em estudo.

A Equação (13) pode ser reescrita como:

$$\{(\vec{f}/\rho)_{j+1}^T\}^T \{(\vec{F})_{j+1}\} = \{(\vec{S})_{j,j+1}^T\}^T \{(\vec{f}^*)_{j+1}\} \quad (15)$$

A Eq. (14) conduz ao seguinte desenvolvimento:

$$[\varepsilon]_{0,1} (\vec{f}^*)_1 + [\beta]_{1,2} (\vec{f}^*)_2 = \vec{F}_1$$

$$[\varepsilon]_{1,2} (\vec{f}^*)_2 + [\beta]_{2,3} (\vec{f}^*)_3 = \vec{F}_2$$

$$\dots$$

$$[\varepsilon]_{J-2,J-1} (\vec{f}^*)_{J-1} + [\beta]_{J-1,J} (\vec{f}^*)_J = \vec{F}_{J-1},$$

para  $j$  variando de 0 até  $J-2$ , que pode ser escrita na forma matricial como:

$$[\varepsilon]_{j,j+1} (\vec{f}^*)_{j+1} + [\beta]_{j+1,j+2} (\vec{f}^*)_{j+2} = \vec{F}_{j+1}, \quad (16)$$

com  $j$  variando de 0 até  $J-2$ .

A Equação (16), com a imposição da condição final  $\vec{f}^*_{j+1} = \vec{0} \forall j \geq (J-1)$ , fornece:

$$\vec{f}^*_{j+1} = [\varepsilon]_{j,j+1}^{-1} \vec{F}_{j+1} - [\varepsilon]_{j,j+1}^{-1} [\beta]_{j+1,j+2} \vec{f}^*_{j+2} \quad (17)$$

## Coeficiente de Sensibilidade

A expressão geral do coeficiente de sensibilidade é obtida a partir da definição do funcional. Sendo um funcional  $R$  representado por:

$$R = \sum_{j=0}^J [t(f_{1j}) \times f_{1j} + t(f_{2j}) \times f_{2j} + \dots + t(f_{nj}) \times f_{nj}] \Delta z \quad \text{ou} \quad R = \sum_{j=0}^J (\bar{F})_j^T (\bar{f})_j, \quad (18)$$

em que:

$$(\bar{F})_j^T = \{t(f_{1j}) \Delta z \quad t(f_{2j}) \Delta z \quad \dots \quad t(f_{nj}) \Delta z\}; \quad (18a)$$

$t(f_{1j})$ ,  $t(f_{2j})$ , ..., e  $t(f_{nj})$  associados às respectivas componentes do vetor de estado, definidos pelo tipo de funcional resposta.

A sensibilidade da resposta é avaliada pela derivação da Eq. (18) em relação a um parâmetro genérico  $p$ . Logo,

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \sum_{j=0}^J (\bar{F}_{/p})_j^T (\bar{f})_j + \sum_{j=0}^J (\dot{F})_j^T (\bar{f}_{/p})_j \quad (19)$$

O segundo termo do membro direito da Eq. (19) pode ser escrito como:

$$\sum_{j=0}^J (\bar{F})_j^T (\bar{f}_{/p})_j = \{(\bar{F})_{j+1}^T\}^T \{(\bar{f}_{/p})_{j+1}\} + (\dot{F})_0^T (\bar{f}_{/p})_0 \quad (19a)$$

É possível obter uma expressão mais simples para o coeficiente de sensibilidade seguindo os seguintes passos:

- Efetuar a transposta sobre a Eq. (15);
- Substituir a transposta da Eq. (15) no segundo membro da Eq. (19a);
- Substituir a equação resultante do item **b** no segundo membro da Eq. (19).

Após estas operações, a expressão genérica do coeficiente de sensibilidade é (Maciel, 1995):

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \{(\bar{f}^*)_{j+1}^T\}^T \{(\bar{S})_{j,j+1}\} + \sum_{j=0}^J (\bar{F}_{/p})_j^T (\bar{f})_j + (\bar{F})_0^T (\bar{f}_{/p})_0 \quad (20)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \sum_{j=0}^J (\bar{f}^*)_{j+1}^T (\bar{S})_{j,j+1} + \sum_{j=0}^J (\bar{F}_{/p})_j^T (\bar{f})_j + (\bar{F})_0^T (\bar{f}_{/p})_0, \quad (20a)$$

em que todos os termos são conhecidos.

## Exemplo de Simulação

O exemplo estudado na aplicação do modelo foi a simulação do canal quente do núcleo do reator da Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto, unidade Angra-1, descrito no Relatório Final de Análise de Segurança ("Final Safety Analysis Report" - FSAR), citado por Belém (1993).

As características de projeto da unidade Angra-1 utilizadas na simulação do canal quente são fornecidas na Tabela 1. Apenas os símbolos das variáveis que aparecem no presente trabalho são exibidos com o intuito de simplificar o texto.

Para completar os dados necessários à execução do programa TERMHIDR, são introduzidos os parâmetros físicos e geométricos gerais do sistema. Estes são entendidos como todos os dados físicos complementares que não fazem parte diretamente dos dados de projeto da unidade Angra-1. Assim, dados como entalpia de líquido saturado e de vapor saturado do refrigerante são parâmetros do sistema necessários à descrição de fenômenos admitidos no modelo e que não são característicos da Tabela 1.

**Tabela 1** Dados de projeto do núcleo da unidade Angra-1

Parâmetro de projeto	Valor
Altura das varetas combustíveis ( $H_C$ ) [m]	3,60
Área de escoamento do refrigerante ( $A_C$ ) [ $m^2$ ]	0,0000809
Coefficiente de perda de pressão nas grades aletadas (cg)	2,276
Coefficiente de perda de pressão nas grades sem aletas (cgs)	1,029
Coefficiente de perda de pressão por contração brusca (co)	0,4
Coefficiente de perda de pressão por expansão brusca (ex)	1
Coefficiente global de transferência de calor [ $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ ]	8000
Condutividade térmica do revestimento de Zircaloy [ $W/(m^\circ C)$ ]	13,0
Constante de difusão do combustível ( $UO_2$ ) [m]	0,00352
Diâmetro hidráulico do canal quente ( $D_H$ ) [m]	0,01085
Espessura do revestimento, m	0,0005715
Fator de efeito de fluxo não uniforme	1,07
Fator de efeito de grade no DNBR	0,066
Fator de efeito de parede não aquecida	1,0
Fator de pico axial de potência	1,55
Fator de pico radial de potência	1,55
Fator multiplicativo corretivo do DNBR	0,81
Fluxo mássico do refrigerante na entrada do canal quente [ $Kg/(m^2 \cdot s)$ ]	3512,3
Fluxo térmico médio na superfície externa da vareta [ $W/m^2$ ]	590226,0
Perímetro molhado do canal quente ( $p_m$ ) [m]	0,03
Pressão do refrigerante na entrada do canal quente ( $P_0$ ) [ $N/m^2$ ]	$1,573 \times 10^7$
Raio da pastilha combustível [m]	$4,09575 \times 10^{-3}$
Raio externo do revestimento [m]	$4,83235 \times 10^{-3}$
Seção de choque macroscópica de absorção do combustível [ $m^{-1}$ ]	55,4
Temperatura do refrigerante na entrada do canal quente [ $^\circ C$ ]	287,5
Velocidade do refrigerante na entrada do canal quente ( $v_0$ ) [m/s]	4,7

Desta forma, os dados relativos aos parâmetros físicos e geométricos gerais são fornecidos na Tabela 2.

**Tabela 2** Parâmetros físicos e geométricos gerais

Parâmetro físico	Valor
Aceleração local da gravidade (g) [ $m/s^2$ ]	9,8
Calor específico do refrigerante à pressão constante [ $J/(Kg^\circ C)$ ]	5782,0
Coefficiente de difusão térmica da grade espaçadora	0,038
Condutividade térmica do refrigerante na entrada do canal [ $W/(m^\circ C)$ ]	0,5778
Entalpia do líquido saturado [ $J/Kg$ ]	1616084
Entalpia do refrigerante na entrada do canal ( $h_0$ ) [ $J/Kg$ ]	1278144
Entalpia do vapor saturado [ $J/Kg$ ]	2605086
Massa específica do refrigerante na entrada do canal ( $\rho_0$ ) [ $Kg/m^3$ ]	747,3
Número de volumes de controle entre duas grades espaçadoras	5
Passo axial de simulação ( $\Delta z$ ) [m]	0,1
Viscosidade do refrigerante na entrada do canal [ $Kg/(s \cdot m)$ ]	0,000098
Volume específico do líquido saturado [ $m^3/Kg$ ]	0,001663
Volume específico do vapor saturado [ $m^3/Kg$ ]	0,01024

Finalmente, a vareta combustível foi dividida em 36 volumes de controle e a origem do sistema de coordenadas axial foi adotada na entrada do canal quente.

## Casos para Análise de Sensibilidade

### Funcionais Estudados

As respostas estudadas no presente trabalho, na tentativa de explorar funcionais médios e pontuais, foram:

1) Valor da pressão média ao longo do canal quente:

$$\bar{P} = \sum_{j=0}^{J-1} (\bar{F})_j^T (\bar{f})_j \quad \text{ou} \quad \bar{P} = \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ 0,0 \quad \Delta z / H_C \quad 0,0 \right\} \times \begin{Bmatrix} \rho_j \\ P_j \\ h_j \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Para esta definição do valor da pressão média, o termo de fonte do sistema adjunto e, por consequência, das Eqs. (14), (17) e (20a) é:

$$\bar{F}_j = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ \Delta z / H_C \\ 0,0 \end{Bmatrix} \quad (21a)$$

2) Valor da pressão na posição axial central do canal quente:

$$P_Z = \sum_{j=0}^J (\bar{F})_j^T (\bar{f})_j \quad \text{ou} \quad P_Z = \sum_{j=0}^J \left\{ 0,0 \quad y \quad 0,0 \right\} \times \begin{Bmatrix} \rho_j \\ P_j \\ h_j \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Da mesma forma,

$$\bar{F}_j = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ y \\ 0,0 \end{Bmatrix} \quad (22a)$$

com y satisfazendo:

$$y = \begin{cases} 0 & \forall \quad z \neq H_C / 2 \\ 1 & \forall \quad z = H_C / 2 \end{cases} \quad (22b)$$

3) Valor da entalpia média ao longo do canal quente:

$$\bar{h} = \sum_{j=0}^{J-1} \left\{ 0,0 \quad 0,0 \quad \Delta z / H_C \right\} \times \begin{Bmatrix} \rho_j \\ P_j \\ h_j \end{Bmatrix} \quad (23)$$

e,

$$\bar{F}_j = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ \Delta z / H_C \end{Bmatrix} \quad (23a)$$

4) Valor da entalpia na posição axial central do canal quente:

$$h_{\bar{z}} = \sum_{j=0}^J \left\{ \begin{matrix} 0,0 & 0,0 & y \end{matrix} \right\} \times \begin{Bmatrix} \rho_j \\ P_j \\ h_j \end{Bmatrix} \quad (24)$$

e.

$$\bar{F}_j = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ y \end{Bmatrix}, \quad (24a)$$

com  $y$  satisfazendo o critério da Eq. (22b).

## Parâmetros de Interesse

Os parâmetros para cálculos de sensibilidade foram:

- $\rho_0$ , massa específica do refrigerante na entrada do canal;
- $P_0$ , pressão do refrigerante na entrada do canal;
- $h_0$ , entalpia do refrigerante na entrada do canal;
- $v_0$ , velocidade do refrigerante na entrada do canal;
- $D_h$ , diâmetro hidráulico do canal.

## Sistema Derivado e Cálculos de Sensibilidade

### Vetor de Estado Derivado na Posição $j = 0$

O vetor  $(f_{/p})_0$ , necessário ao cálculo do coeficiente de sensibilidade, é obtido pela derivação do vetor de estado na posição  $j = 0$  em relação a um parâmetro  $p$ . Do exposto, pelos parâmetros definidos anteriormente:

a) Para  $p \neq \rho_0 \wedge p \neq P_0 \wedge p \neq h_0$ :

$$\{(f_{/p})_0\}^T = \{0,0 \quad 0,0 \quad 0,0\}^T \quad (25)$$

b) Para  $p = \rho_0$ :

$$\{(f_{/p})_0\}^T = \{1,0 \quad 0,0 \quad 0,0\}^T \quad (26)$$

c) Para  $p = r_0$ :

$$\{f_{j,p}\}_0^T = \{0,0 \quad 1,0 \quad 0,0\}^T \quad (27)$$

d) Para  $p = u_0$ :

$$\{f_{j,p}\}_0^T = \{0,0 \quad 0,0 \quad 1,0\}^T \quad (28)$$

### Vetores $\tilde{\gamma}_{j,j+1}$

Para a obtenção do vetor de fonte do sistema derivado ( $S_{j,j+1}$ ) é necessário o cálculo dos vetores componentes  $\tilde{\gamma}_{j,j+1}$ . Através da operação de diferenciação total realizada anteriormente e verificação dos termos remanescentes, é possível escrever:

a) Para  $p = \rho_0$ :

$$\tilde{\gamma}_{j,j+1} = \begin{Bmatrix} \frac{w_{j,j+1}}{A_c \rho_0} \\ 0,0 \\ (\gamma_3)_{j,j+1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

com:

$$(\gamma_3)_{j,j+1} = \begin{cases} -\frac{Q_{0,1}}{A_c \rho_0^2}, & j = 0 \\ 0,0, & j \neq 0 \end{cases} \quad (29a)$$

b) Para  $p = P_0$ :

$$\tilde{\gamma}_{j,j+1}^T = \{0,0 \quad 0,0 \quad 0,0\}^T \quad (30)$$

c) Para  $p = h_0$ :

$$\tilde{\gamma}_{j,j+1}^T = \{0,0 \quad 0,0 \quad 0,0\}^T \quad (31)$$

d) Para  $p = v_0$ :

$$\tilde{\gamma}_{j,j+1}^T = \{(\gamma_1)_{j,j+1} \quad (\gamma_2)_{j,j+1} \quad (\gamma_3)_{j,j+1}\}^T, \quad (32)$$

em que:



$$(\gamma_1)_{j,j+1} = \begin{cases} \frac{w_{0,1}}{A_c v_0} - \rho_0, & j=0 \\ \frac{w_{j,j+1}}{A_c v_0}, & j \neq 0 \end{cases} \quad (32a)$$

$$(\gamma_2)_{j,j+1} = \begin{cases} f \frac{\Delta z}{8D_h} (v_0 + v_1) \rho_1 + \left[ (l)(cgs + co)v_0 + (m)(cg)v_0 - v_0 + f \frac{\Delta z}{8D_h} (v_0 + v_1) \right] \rho_0, & j=0 \\ 0,0, & j \neq 0 \end{cases} \quad (32b)$$

e,

$$(\gamma_3)_{j,j+1} = \begin{cases} h_0 - h_1, & j=0 \\ 0,0, & j \neq 0 \end{cases} \quad (32c)$$

e) Para  $p = D_h$  :

$$\tilde{\gamma}_{j,j+1} = \begin{pmatrix} -\frac{4w_{j,j+1}}{p_m(D_h)^2} \\ -f \frac{\Delta z}{16(D_h)^2} (v_j + v_{j+1})^2 (\rho_j + \rho_{j+1}) \\ -\frac{4Q_{j,j+1}}{p_m(D_h)^2} \rho_j \end{pmatrix}, \quad (33)$$

em que  $p_m$  é o perímetro molhado do canal quente, m.

## Cálculos de Sensibilidade

Com o vetor de estado derivado em  $j = 0$  e os vetores  $\tilde{\gamma}_{j,j+1}$  determinados, lembrando que o vetor de fonte adjunto derivado segue os mesmos passos das Eqs. (25), (26), (27) e (28), todos os termos constituintes do coeficiente de sensibilidade (Eq. (20a)) estão agora com expressões definidas.

O cálculo dos coeficientes de sensibilidade para cada funcional e parâmetro descritos, bem como o cálculo dos valores perturbados dos funcionais resposta, são feitos por uma subrotina CSFM (Maciel, 1995), em linguagem de programação PASCAL, acoplada ao programa principal TERMHIDR. Tanto o programa principal como a subrotina são executados em um microcomputador PC AT-386.

O tempo computacional gasto pelo programa principal, em modo executável, é em torno de 20 segundos e pela subrotina, considerando um funcional e um parâmetro, em torno de 50 segundos. Este último leva em conta o tempo de interação com o usuário nas etapas de escolha de funcionais e parâmetros, além do que das perturbações desejadas para estudo.

É importante salientar que a eficiência e a rapidez dos formalismos de perturbação são mais significativas para códigos em que o programa principal, simulador do comportamento de um sistema, apresenta um tempo computacional de execução maior que o tempo computacional associado aos cálculos de sensibilidade, como acontece nos utilizados para análise de segurança em reatores nucleares, nos quais modelos os mais gerais possíveis são utilizados. Estes sistemas apresentam um

número grande de parâmetros para estudo e tal análise, pela perturbação direta nestes códigos (alteração dos dados de entrada), tornariam os gastos excessivos.

No presente trabalho esta vantagem não é característica em virtude do modelo considerado ser uma simplificação da situação real encontrada no núcleo de PWR's. No entanto, o tempo computacional total gasto (TERMHIDR e CSFM) para os casos escolhidos levou em torno de 20 minutos, o que pode ser considerado pequeno. Além disso, a necessidade de várias execuções do programa principal (vinte vezes por variação percentual) foi eliminada, o que constitui outra vantagem.

## Resultados e Análises

Os coeficientes de sensibilidade calculados por CSFM são exibidos na Tabela 3.

**Tabela 3** Coeficientes de sensibilidade

P	Funcionais			
	Entalpia média $\bar{h}$ [J/Kg]	Pressão média $\bar{P}$ [N/m <sup>2</sup> ]	Entalpia $\bar{Z}$ $h_{\bar{Z}}$ [J/Kg]	Pressão $\bar{Z}$ $P_{\bar{Z}}$ [N/m <sup>2</sup> ]
$\rho_0$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	-1,70	-5,80	-1,70	-5,90
$P_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	0,00	1,00	0,00	1,00
$h_0$ [J/Kg]	1,00	0,00	1,00	0,00
$v_0$ [m/s]	-135,00	-1679,20	-138,90	-1727,20
$D_h$ [m]	-15605442,80	1501329,10	-15793361,40	1556794,60

$\bar{Z}$  representa a coordenada espacial do ponto médio do canal quente.

É importante notar, no entanto, que a Tabela 3 exibe valores relativos dos coeficientes de sensibilidade (coeficientes dimensionais). Em outras palavras, não são possíveis de serem comparados em escala absoluta.

No intuito de uma comparação real entre vários parâmetros, a fim de expor as variações paramétricas mais críticas de um determinado sistema (um dos objetivos da análise de sensibilidade), é possível definir o coeficiente de sensibilidade absoluto como:

$$CS_{ABS} = \frac{\partial R / R_{REF}}{\partial p / p_{REF}} = \frac{\partial R}{\partial p} \times \frac{p_{REF}}{R_{REF}} \quad (34)$$

em que:

$CS_{ABS}$  é o coeficiente de sensibilidade absoluto;

$\frac{\partial R}{\partial p}$  é o coeficiente de sensibilidade relativo;

$R_{REF}$  é o valor do funcional em estudo não perturbado;

$p_{REF}$  é o valor do parâmetro em estudo não perturbado.

Os valores não perturbados de funcionais e parâmetros são obtidos pelo conjunto de dados de entrada (Tabelas 1 e 2) sem perturbação no sistema. Eles são exibidos na Tabela 4 a seguir.

**Tabela 4** Valores não perturbados

Grandezas de interesse	Valores não perturbados
Entalpia média [J/Kg]	1493838,60
Pressão média [N/m <sup>2</sup> ]	16061339,50
Entalpia em $\bar{Z}$ [J/Kg]	1450508,10
Pressão em $\bar{Z}$ [N/m <sup>2</sup> ]	15630348,30
$\rho_0$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	747,3
$P_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	1,573x10 <sup>7</sup>
$h_0$ [J/Kg]	1278144
$v_0$ [m/s]	4,7
$D_h$ [m]	0,01085

Através da Eq. (34) e dos resultados da Tabela 4 é possível agora determinar os coeficientes de sensibilidade absolutos. Os resultados são exibidos na Tabela 5 a seguir.

**Tabela 5** Coeficientes de sensibilidade absolutos

P	Funcionais			
	Entalpia média [J/Kg]	Pressão média [N/m <sup>2</sup> ]	Entalpia [J/Kg]	Pressão [N/m <sup>2</sup> ]
$\rho_0$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	-0,00085	-0,00027	-0,000876	-0,00028
$P_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	0,00000	0,97900	0,00000	1,01000
$h_0$ [J/Kg]	0,85600	0,00000	0,88100	0,00000
$v_0$ [m/s]	-0,00043	-0,00049	-0,00045	-0,00052
$D_h$ [m]	-0,11300	0,00101	-0,11800	0,00108

Pela análise da Tabela 5 é verificado que os parâmetros  $P_0$  e  $h_0$  são os que mais afetam os funcionais escolhidos, havendo, é claro, a restrição para o caso de funcionais que caracterizam funções de estado independentes do parâmetro em estudo ( $h_0$  em relação aos funcionais de pressão e  $P_0$  em relação aos funcionais de entalpia). A maior sensibilidade indicada pelo método perturbativo a estes parâmetros é esperada levando em consideração o fato de terem influência direta no valor do funcional.

Pela Tabela 5 é também verificado que os parâmetros  $v_0$  e  $\rho_0$  são os que menos influenciam o sistema e o fazem na mesma ordem de grandeza. Uma justificativa para tal comportamento é o fato dos termos de “crossflow” serem desprezados nas Eqs. (2) e (3), conduzindo a uma sensibilidade menor do sistema ( $w$  depende diretamente destes parâmetros). Além disso, ainda pelas hipóteses H1 e H2, o sistema é, aparentemente, pouco sensível a estes devido às pequenas contribuições que fornecem às equações de conservação.

Por fim, o parâmetro  $D_h$  tem razoável influência sobre o sistema, apresentando, no entanto, uma ação perturbativa maior com relação aos funcionais ligados a entalpia. Isto é aceitável em virtude deste parâmetro ser utilizado em um bom número de correlações, utilizadas pelo modelo, de determinação de grandezas referentes à transferência de calor no sistema (coeficiente de transferência de calor entre revestimento e refrigerante, por exemplo). O fato de sua presença no cálculo dos coeficientes de atrito isotérmico e não isotérmico e a lembrança que os termos de perda de pressão desta natureza, em um sistema, representam parcelas significativas, conduzem a uma coerência dos resultados obtidos.

Os resultados perturbados provindos do formalismo matricial e da variação direta no modelo são exibidos nas Tabelas 6 e 7 a seguir.

**Tabela 6** Dados dos funcionais relativos à entalpia

p	$\delta p/p_0$ (x100)	Funcional [J/Kg]			Funcional [J/Kg]		
		PD (x10 <sup>-3</sup> )	FM (x10 <sup>-3</sup> )	Erro (%)	PD (x10 <sup>-3</sup> )	FM (x10 <sup>-3</sup> )	Erro (%)
$\rho_0$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	+10%	-0,06	-0,13	0,01	-0,06	-0,13	0,01
	-10%	0,07	0,13	< 0,01	0,07	0,13	< 0,01
$P_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	+10%	-0,90	0,00	0,06	-0,80	0,00	0,06
	-10%	0,96	0,00	0,06	1,05	0,00	0,07
$h_0$ [J/Kg]	+10%	136,69	127,81	0,54	132,08	127,81	0,27
	-10%	-134,69	-127,81	0,51	-128,62	-127,81	0,06
$v_0$ [m/s]	+10%	-0,06	-0,06	0,00	-0,06	-0,07	< 0,01
	-10%	0,07	0,06	< 0,01	0,07	0,07	0,00
$D_h$ [m]	+10%	-17,71	-16,93	0,05	-16,65	-17,14	0,03
	-10%	19,94	16,93	0,12	18,75	17,14	0,11

Tabela 7 Dados dos funcionais relativos à pressão

$\rho$	$\delta p/\rho_0$ (x100)	Funcional $[N/m^2]$			Funcional $[N/m^2]$		
		PD (x10 <sup>-4</sup> )	FM (x10 <sup>-4</sup> )	Erro (%)	PD (x10 <sup>-4</sup> )	FM (x10 <sup>-4</sup> )	Erro (%)
$\rho_0$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	+10%	-1,06	-0,04	0,06	-1,00	-0,04	0,06
	-10%	1,06	0,04	0,06	1,00	0,04	0,06
$P_0$ [N/m <sup>2</sup> ]	+10%	161,62	157,30	0,25	157,27	157,30	0,00
	-10%	-161,58	-157,30	0,30	-157,18	-157,30	0,01
$h_0$ [J/Kg]	+10%	-0,10	0,00	0,01	-0,21	0,00	0,01
	-10%	0,15	0,00	0,01	0,28	0,00	0,02
$v_0$ [m/s]	+10%	-1,10	-0,08	0,06	-1,04	-0,08	0,06
	-10%	1,09	0,08	0,06	1,03	0,08	0,06
$D_h$ [m]	+10%	0,20	0,16	< 0,01	0,20	0,17	< 0,01
	-10%	-0,23	-0,16	< 0,01	-0,24	-0,17	< 0,01

A Tabela 6 exibe os resultados obtidos para os funcionais associados à entalpia do fluido refrigerante. As colunas referenciadas como "PD" exibem as diferenças entre o valor obtido pela simulação direta no modelo e o valor de referência do funcional resposta. As colunas referenciadas como "FM" exibem as diferenças entre o valor obtido pelo formalismo matricial e o mesmo valor de referência do funcional resposta. Finalmente, para uma análise do erro relativo entre o valor perturbado via formalismo matricial e o valor perturbado via alteração direta no modelo, tendo este último como valor padrão, são exibidas as colunas referenciadas como "ERRO" a fim de evidenciar a precisão do método perturbativo.

Na Tabela 7 são realizados os mesmos cálculos da Tabela 6, envolvendo agora os funcionais relativos à pressão do refrigerante.

Nos resultados das Tabelas 6 e 7, são mostrados os sinais resultantes das variações estudadas. Isto visa fornecer informações qualitativas a respeito do acréscimo ou do decréscimo do funcional perturbado em relação ao seu valor de referência e, assim, possibilitar a análise do formalismo matricial quanto a sua representatividade do comportamento do funcional.

Pela análise das Tabelas 6 e 7, o formalismo matricial fornece os seguintes resultados relativos ao sistema perturbado:

- Erros relativos baixos (no geral inferiores a 1%), indicando boa precisão;
- Descrição correta (ver sinais) do comportamento dos funcionais, evidenciando, a priori, boas características de representatividade;
- Funcionais relativos à pressão com maior sensibilidade a  $P_0$  e os funcionais relativos a entalpia com maior sensibilidade a  $h_0$ , como esperado. Para estes casos, também são detectadas as maiores variações absolutas do estudo, indicando, assim, que  $P_0$  e  $h_0$  representam parâmetros críticos do sistema;
- Funcionais relativos à pressão apresentam erros percentuais em relação à  $\rho_0$  e  $v_0$  maiores que a  $D_h$ . Novamente é plausível aceitar a não consideração do termo de "crossflow" como responsável por tal discrepância. No entanto, os erros decorrentes de tal hipótese não representam valores expressivos no âmbito geral;
- As variações decorrentes de  $v_0$  e  $\rho_0$  apresentam valores pequenos e na mesma ordem de grandeza para um dado funcional, ratificando a análise feita a respeito da Tabela 5;
- O parâmetro  $D_h$  ratifica sua contribuição mais significativa do que os parâmetros  $v_0$  e  $\rho_0$  para os funcionais associados à entalpia do refrigerante. Isto conduz a uma maior aceitação da hipótese H2.

## Conclusões

As principais conclusões do trabalho são:

- a) A determinação do coeficiente de sensibilidade absoluto constitui uma importante etapa na identificação dos parâmetros de maior relevância no valor de um funcional perturbado;
- b) Os resultados obtidos demonstraram o formalismo matricial de teoria de perturbação com boa representatividade para a maioria dos casos estudados;
- c) Em alguns casos a exatidão dos resultados foi muita boa e na maioria o formalismo apresentou boa precisão e exatidão;
- d) Os parâmetros mais relevantes para os funcionais escolhidos foram  $P_0$  e  $h_0$ ;
- e) Uma desvantagem do método ficou evidenciada na limitação deste em descrever sistemas não bem comportados devido as suas características de linearização. Teorias de perturbação de ordens superiores podem atenuar tal discrepância.

## Referências

- Andrade Lima, F. R. e Alvim, A. C. M., 1986, "TEMPERA-V2 - Um programa para análise de sensibilidade num canal refrigerante de reatores nucleares", PEN - 139, Federal University of Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Andrade Lima, F. R., 1990, "Aplicações de métodos perturbativos ao modelo multi-canal COBRA-IV-I, para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares", (in portuguese), Ph.D. Thesis, Federal University of Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Belém, J. A. T., 1993, "Modelo simplificado para simulação do comportamento termohidráulico do canal quente de reator nuclear tipo PWR", (in portuguese), Master Thesis, Federal University of Pernambuco, Recife, PE, Brazil.
- Cacuci, D. G., Weber, C. F., Oblow, E. M. e Marable, J. H., 1980, "Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations", Nuclear Science and Engineering, vol. 75, pp. 88-110.
- Gandini, A., 1987, "Generalized perturbation theory (GPT) methods. A heuristic approach", Advanced in Nuclear Sciences and Technology, vol. 19, pp. 205-380.
- Maciel, E. S. G., 1995, "Análise de sensibilidade em um modelo simplificado do canal quente de reatores a água pressurizada via formalismo matricial" (in portuguese), M. S. C. Thesis, Federal University of Pernambuco, Recife, PE, Brazil.
- Maciel, E. S. G., Andrade Lima, F. R. e Lira, C. A. B. O., 1995a, "Análise de sensibilidade no canal quente de reatores nucleares tipo PWR, via formalismo matricial", Proceedings X ENFIR (X National Meeting on Reactor Physics and Thermalhydraulics), Águas de Lindóia, SP, Brazil, pp 190-195.
- Mahaffy, J. H., Liles, D. R., Metzger, V. B., 1984, "TRAC-PF1: An advanced best-estimate computer program for pressurized water reactor analysis", NUREG/CR-3567, LA-994-MS, February.
- Oblow, E. W., 1978, "Sensitivity theory for reactor thermal-hydraulics problems", Nuclear Science and Engineering, vol. 68, pp. 322-337.
- Ransom, V. H., Wagner, R. J., Trapp, J. A., Carlson, K. E., Kiser, D. M., Kuo, H. H., Nelson, R. A., James, S. W., 1980, "RELAP/MOD1 - Code Manual: System models and numerical methods", Vol. 1, November.
- Stacey Jr., W. M., 1972, "Variational estimates of reactivity worths and reaction rate ratios in critical nuclear reactors", Nuclear Science and Engineering, vol. 48, pp. 444-458.
- Stewart, C. W., Wheeler, C. L., Cena, R. J., McMonagle, C. A., Cuta, J. M. e Trent, D. S., 1977, "COBRA-IV: the model and the method", BNWL-2214, NPC - 4, Battelle, Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

# Estudo da Influência da Poli(acrilamida Iqapol PA na Redução de Atrito em Escoamentos Turbulentos

## Study of the Polyacrylamide Iqapol PA Influence on Drag Reduction in Turbulent Flow

Jayme Pinto Ortiz  
Guilherme Vilalta Alonso

Universidade de São Paulo  
Escola Politécnica  
Departamento de Engenharia Mecânica  
05508-900 São Paulo, SP - Brasil  
jportiz@usp.br

### Abstract

The behavior of aqueous polyacrylamide solutions (Iqapol PA) in the reduction of viscous friction in turbulent pipe flow is experimentally analysed. Due to the polymer addition, a reduction of 30% can be verified in the Darcy friction factor  $f$  for values of the Reynolds number around  $Re \approx 5 \cdot 10^5$  and concentrations ( $C_w$ ) higher than 70 ppm (up to 110 ppm). An equation is presented for  $f$  as a function of the Reynolds number and the concentration, differing from experimental results 7-9% in average.

Two expressions of the literature are evaluated: the Vortinskaya's equation and the Tam's general correlation. A good agreement with the Vortinskaya's equation was obtained, with differences of about 10% in the range of the experiments carried out. However the Tam's general correlation does not apply for the conditions of the present study.

**Keywords:** Drag Reduction, Turbulence, Velocity Profiles, Polymer Solutions.

### Resumo

Neste trabalho analisa-se experimentalmente a influência do uso de soluções poliméricas (água e poli(acrilamida) de Iqapol PA na resistência hidráulica de um escoamento turbulento em tubulações. Devido a adição de polímeros verifica-se uma diminuição do coeficiente de perda de carga universal  $f$  da ordem de 30% para valores de  $Re \approx 5 \cdot 10^5$  e concentrações ( $C_w$ ) maiores do que 70 ppm (até 110 ppm). Apresenta-se uma equação para determinar  $f$  como função do número de Reynolds e da concentração com diferenças médias na faixa de 7-9% com relação aos resultados experimentais.

Duas expressões da literatura são avaliadas: a equação de Vortinskaya e a correlação geral de Tam, obtendo-se boa concordância no caso da utilização da equação de Vortinskaya, com diferenças da ordem de 10%, para a faixa dos experimentos efetuados. Todavia, verifica-se que a correlação geral de Tam não se aplica para as condições do presente estudo.

**Palavras-chave:** Redução de Atrito, Turbulência, Perfis de Velocidade, Soluções Poliméricas.

### Introdução

A adição de polímeros a um escoamento turbulento provoca diminuições do coeficiente de perda de carga universal,  $f$ , tornando tecnologicamente atrativa sua aplicação nos escoamentos hidráulicos em condutos forçados. Os polímeros, quando adicionados a água, permitem acréscimos significativos das vazões volumétricas, em comparação com as vazões dos escoamentos hidráulicos turbulentos (água pura), para os mesmos gradientes de pressão.

Embora a bibliografia reflita de forma ampla as aplicações práticas da adição de polímeros, que inclui diversas áreas tecnológicas, tais como: transporte de sólidos a longa distância, biomedicina, agricultura, indústria de minérios e de petróleo, escoamento e tratamento de esgotos etc, os mecanismos que governam o processo de redução de atrito por adição de polímeros, ainda hoje, não estão totalmente esclarecidos. Existem duas abordagens fundamentais para o estudo do problema: a abordagem molecular e a abordagem da dinâmica dos fluidos (considerados estes como meios contínuos).

No estudo da teoria da camada limite, normalmente é importante definir a força de arrasto,  $F_D$ , que atua sobre as fronteiras sólidas imersas em uma corrente fluida e consequentemente o respectivo coeficiente de arrasto,  $C_D$ . Apesar do termo "drag reduction" (literalmente traduzido como redução de arrasto) relacionar-se, em princípio, com a diminuição do coeficiente  $C_D$ , ao longo da bibliografia

consultada encontramos que este termo está muito mais associado à redução do coeficiente de perda de carga  $f$  e do coeficiente de atrito,  $C_f$ , coeficientes estes de maior interesse na análise de escoamentos turbulentos em condutos forçados. Portanto, neste trabalho, utilizar-se-á, indiferentemente, o termo Redução de Arrasto ou Redução de Atrito (R.A.), significando portanto, a redução do coeficiente de perda de carga universal,  $f$ .

Este trabalho tem por objetivo estudar as características redutoras de atrito da poliacrilamida Iqapol PA para escoamentos turbulentos em condutos forçados, assim como apresentar uma comparação dos resultados obtidos com aqueles disponíveis na literatura consultada.

O estudo experimental foi feito através da determinação da relação  $\Delta p$  vs  $Q$  e dos perfis de velocidade. Esta é a forma de análise mais comum registrada na literatura, já que estas medições são relativamente simples de serem obtidas, embora não oferecendo informações detalhadas, necessárias para a descrição do complexo comportamento dos escoamentos turbulentos nas proximidades das paredes da tubulação.

## O Fenômeno da Redução de Atrito: Uma Visão Geral

A essência da definição de redução de atrito por adição de polímeros pode ser explicada da seguinte forma: em certas condições, um escoamento turbulento de soluções soluto-solvente precisa de uma menor energia quando comparado com o escoamento turbulento do solvente puro. Desta forma, a R.A. pode ser definida como qualquer modificação em um escoamento que resulte numa modificação da taxa de perda de energia.

Sabe-se que a R.A. é um fenômeno que ocorre na região de parede ( $0 < Y^+ < 100$ ). Todavia, devido à pequena espessura desta região, as pesquisas experimentais sobre as modificações nas escalas de turbulência que ocorrem nos escoamentos turbulentos, provocadas pela adição de polímeros, necessitam de instrumentos de medição de velocidade instantânea (média e flutuações), cuja resolução permita medições precisas na camada limite do escoamento. Em termos práticos, isto resulta em algumas limitações no uso de medidores de velocidade convencionais, privilegiando o uso dos Sistemas de Anemometria Laser.

As primeiras noções sobre este fenômeno foram registradas no final da década de 40, quando foram publicados os resultados de Toms (1948) demonstrando que o escoamento de soluções poliméricas (soluções diluídas de polimetilmetacrilato em monolobenzeno como solvente) em condutos forçados precisam de menor energia por unidade de vazão volumétrica que o solvente puro. Outros estudos posteriores confirmaram este fenômeno, que ficou conhecido na literatura como "efeito Toms".

Desde então um sério esforço investigativo tem sido dispendido, no sentido de tentar obter uma generalização do estudo deste fenômeno, tendo em vista a utilização cada vez maior de substâncias redutoras de atrito na indústria.

## Nomenclatura

$A$ = Coeficiente nas relações 11 e 12 -	$K$ = Coeficiente nas relações 11 e 13 -	$\beta_c$ = Coeficiente nas relações 16 e 18 -
$A_r$ = Desvios aleatórios -	$L$ = Comprimento da seção de teste, m	$\delta$ = Declividade do perfil de veloc. adimensionalizado -
$B_r$ = Desvios sistemáticos -	$Q$ = Vazão volumétrica, m <sup>3</sup> /s	$\epsilon$ = Coeficiente na relação 21 -
$C$ = Constante adimensional definida na equação 5 -	$Re$ = Número de Reynolds -	$\varphi$ = Coeficiente de Eficiência da Redução de Arrasto -
$C_D$ = Coeficiente de arrasto -	$T$ = Constante na determinação de $k_g$ ( $=0.2$ ) -	$\gamma$ = Peso específico do fluido N/m <sup>3</sup>
$C_f$ = Coeficiente de atrito -	$U^*$ = Velocidade local adimensionalizada ( $u/u^*$ ) -	$\nu$ = Viscosidade cinemática do fluido, m <sup>2</sup> /s
$C_v$ = Concentração volumétrica, %	$U$ = Velocidade média do escoamento, m/s	$\tau_w$ = Tensão de cisalhamento de parede, N/m <sup>2</sup>
$C_w$ = Concentração em peso, ppm	$u$ = Velocidade de atrito m/s	$\Delta p$ = Queda de pressão, N/m <sup>2</sup>
$D$ = Diâmetro interno da tubulação, m	$u$ = Velocidade média local axial m/s	$\Delta H$ = Perda de carga, m
$D_M$ = Diâmetro efetivo da molécula em solução, m	$u'$ = Componente Flutuante da velocidade $u$ , m/s	$\Gamma$ = Coeficiente nas relações 16, 19 e 20 -
$e$ = Rugosidade absoluta da tubulação, m	$v'$ = Componente Flutuante da velocidade $v$ , m/s	<b>Sobrescritos</b>
$f$ = Coeficiente de perda de carga -	$y$ = Distância da parede m	* = Relativo ao início da Redução de Atrito
$F_D$ = Força de arrasto, N	$Y^*$ = Número de Reynolds de Atrito ( $y \cdot u/v$ ) -	+ = Relativo às coordenadas de parede
$g$ = Aceleração da gravidade m/s <sup>2</sup>	$W^*$ = Número de ondas no início da R.A. ( $u/v$ ), m	<b>Subscritos</b>
$I_i$ = Incertezas na determinação de $f$ -	$\alpha$ = Coeficiente nas relações 16 e 17 -	s = Relativo ao solvente
$k_g$ = Número de onda dissipativo ( $T \cdot u/v$ ), m		p = Relativo ao polímero
		w = Na parede

Conforme mencionado anteriormente, existem duas abordagens básicas para o estudo deste fenômeno: a abordagem molecular e a abordagem da dinâmica dos meios contínuos. Embora os estudos de interpretação fenomenológica da R.A. tenham se iniciado na década de 60, pesquisas específicas relativas aos aspectos químicos, mecânicos e hidrodinâmicos associados ao fenômeno e consequentemente a respectiva interpretação da diminuição da resistência hidráulica necessitam ser aprimoradas.

Em um trabalho mais recente Stupin (1990) retoma a discussão das abordagens para a análise da R.A. Apoiado na abordagem da dinâmica dos meios contínuos, destaca a utilização das equações constitutivas do escoamento não-Newtoniano, enfatizando, no entanto, a necessidade de um modelo reológico não-linear que possa descrever adequadamente o comportamento das soluções poliméricas. Por outro lado, Stupin (1990) destaca que a análise teórica da R.A. pode seguir um caminho que ele denomina de "via estrutural", que se baseia na análise da interação entre micropartículas individuais (moléculas) com as perturbações turbulentas do escoamento. A principal dificuldade desta via de análise é a descrição do mecanismo de interação do movimento molecular com as perturbações turbulentas, além da necessidade de se utilizar equações constitutivas não-lineares.

A análise da literatura mostra que existem, basicamente, dois modelos, a partir dos quais, tenta-se explicar, fenomenologicamente, a R.A.: o Modelo de Expansão Molecular (Lumley 1977) e o Modelo da Sub-Camada Elástica (Virk 1971).

No Modelo de Expansão Molecular de Lumley (1977) busca-se uma explicação através da relação entre a taxa de deformação e a vorticidade nas três regiões da camada limite (a subcamada viscosa, a subcamada elástica e o núcleo turbulento), considerando o efeito da influência da expansão molecular na variação da viscosidade das soluções poliméricas.

Esta análise está baseada no fato que no núcleo turbulento de um escoamento sujeito a altos valores de números de Reynolds a vorticidade e a taxa de deformação não estão correlacionadas uma com a outra, podendo ocorrer virtualmente qualquer combinação entre elas. Ambas apresentam uma distribuição de probabilidades para os extremos ("long tail"), não ocorrendo portanto uma distribuição Gaussiana. Deste modo, há uma possibilidade de se encontrar regiões em que ocorrem altas taxas de deformação com baixa vorticidade, sendo esta a condição que permite a expansão da molécula. Na subcamada viscosa, no entanto, os valores da taxa de deformação e da vorticidade são da mesma ordem de grandeza, sendo que não é de se esperar nesta região a ocorrência de uma expansão molecular significativa.

Quando a molécula de polímero se expande, a viscosidade da solução se incrementa. Essencialmente este incremento depende do campo de velocidade ao redor da molécula. Como a molécula pode-se expandir por um fator de subunidades moleculares da ordem de  $10^3$ , o incremento na viscosidade pode ser significativamente alto. Isto significa que a viscosidade no núcleo turbulento do fluido se incrementa mas não na subcamada viscosa. Este efeito provoca a supressão da vorticidade e consequentemente das tensões de Reynolds na subcamada intermediária, provocando um incremento da espessura desta subcamada e portanto a redução de arrasto. Hoje, esta teoria é apontada como uma das mais satisfatórias para explicar, molecularmente, a R.A.

É importante frizar que, quando proposta, esta teoria estava baseada no que "presumivelmente acontece" sem que existisse uma comprovação real da mesma.

O Modelo da Sub-Camada Elástica (S.C.E.) de Virk (1971) destaca que o efeito dos polímeros pode ser observado pela formação de uma região entre a sub-camada viscosa e o núcleo turbulento, denominada Sub-Camada Elástica. As características desta sub-camada dependem do tipo de polímero e de sua concentração na solução polimérica. A espessura da S.C.E. é um índice do efeito redutor de atrito de um polímero determinado e pode aumentar até ocupar toda a seção da tubulação para a condição de máxima redução de atrito.

O comportamento de uma solução polimérica pode ser analisado a partir da Fig. 1, onde podem ser observadas regiões características que abrangem os cinco regimes de escoamento (Virk 1975).

Na Figura 1, na região onde  $Re < 10^4$ , independentemente dos parâmetros poliméricos, não existe efeito redutor de arrasto das soluções poliméricas. Nesta região ocorrem os seguintes regimes:

- Regime Laminar ( $Re < 2300$ ): Aqui, tanto as soluções poliméricas quanto o solvente, seguem a mesma lei (Lei de Poiseuille) para tubulações lisas e rugosas, não existindo redução de atrito. O valor do coeficiente de perda de carga,  $f$ , pode ser calculado pela relação

$$f = \frac{64}{Re} \quad (1)$$



- Regime de transição do escoamento laminar para turbulento: Neste regime o solvente e as soluções poliméricas devem seguir o mesmo comportamento tanto para tubulações lisas quanto para as rugosas, embora não se conheça uma lei matemática que caracterize este comportamento.
- Regime turbulento sem redução de atrito: Até a faixa de  $Re \approx 10^4$  (ponto A na Fig. 1), as soluções poliméricas e o soluto obedecem à mesma relação para o fator de perda de carga,  $f$ , com  $f=f(Re)$ , sendo válida a equação para regime turbulento hidraulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log Re \sqrt{f} - 0,8 \quad (2)$$

A partir do ponto A, início da redução de atrito, as curvas das soluções poliméricas começam a se afastar da curva de Prandtl-Kármán, entrando o escoamento em uma região polimérica que está caracterizada pelos seguintes regimes:

- Regime turbulento com redução de atrito: O comportamento das soluções poliméricas depende de parâmetros, tais como: concentração, peso molecular e solvatação (associação molecular soluto-solvente). A influência destes parâmetros pode ser vista pelo incremento na declividade ( $\delta$ ) do perfil de velocidades adimensionalizado das soluções poliméricas com respeito ao do solvente e pela variação das características da tensão de cisalhamento de início de R.A. na parede,  $\tau_w^*$  (ou equivalentemente, do número de ondas no início da R.A.,  $W^*$ ). A relação que representa este regime, conforme Virk (1975), está dada por:

$$\left(\frac{f}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = (4,0 + \delta) \log Re \left(\frac{f}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 0,4 - \delta \log \sqrt{2} DW^* \quad (3)$$

Para as mesmas condições de escoamento, o coeficiente de perda de carga pode diminuir em até 70%, sendo que os valores médios estão na faixa de 30-40%.

- Regime polimérico com redução de atrito, independentemente dos parâmetros poliméricos: Quando o escoamento alcança o ponto B (Fig. 1), o fenômeno em estudo é limitado por um valor que é independente dos parâmetros poliméricos, ou seja, incrementos dos valores da concentração não conseguem mais melhorar o desempenho dos polímeros, valendo a equação:

$$\left(\frac{f}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 19,0 \log Re \left(\frac{f}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 32,4 \quad (4)$$

Este limite é conhecido na literatura como Assíntota de Máxima Redução de Atrito (A.M.R.A.) obtida por Virk *et al.*, (1967).

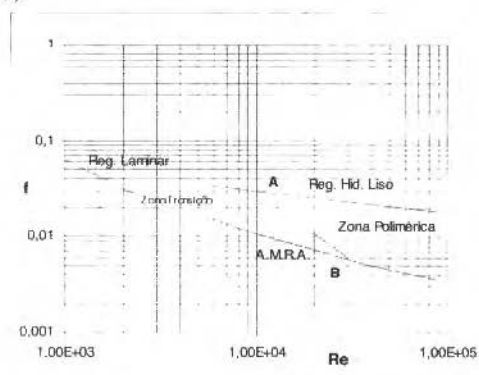


Fig. 1 Regiões típicas de um escoamento de soluções poliméricas redutoras de atrito.

## O Início da Redução de Atrito

Do ponto de vista do estudo e da compreensão do fenômeno da R.A. é importante a análise dos aspectos relacionados com o início do efeito dos polímeros sobre os escoamentos turbulentos. Três critérios estão hoje estabelecidos para caracterizar o processo de início de R.A.:

Como primeiro critério, Virk *et al.*, (1967), a partir da forma brusca como se inicia a R.A., destacam que deve existir uma condição que explicitamente relacione a molécula de polímero com as características turbulentas do escoamento, e que deve ser satisfeita para a ocorrência da R.A.

Considerando as características energéticas da R.A. os autores definem o parâmetro  $k_d$ , número de onda dissipativo, para caracterizar a turbulência. Este valor é obtido a partir do espectro de energia turbulenta na região próxima da parede e definido como o número de onda onde a dissipação é maior. Desta forma,  $k_d$  está associado a uma medida das menores escalas de turbulência para as quais ocorre a dissipação de energia turbulenta. Considerando estes aspectos, os autores propuseram uma hipótese de início de arrasto, que é uma tentativa de relacionar o diâmetro molecular com a escala dissipativa da turbulência durante o início da R.A. Esta hipótese estabelece que a R.A. se inicia para um valor constante do produto  $DMk_d^*$ , que é uma relação entre as dimensões moleculares e as menores escalas de turbulência:

$$DMk_d^* = C \quad (5)$$

onde:  $C$  é uma constante adimensional que independe do polímero e da concentração.

Um segundo critério está associado a influência da sub-camada viscosa no início da R.A. Utilizando um método de visualização de escoamentos Tiederman *et al.*, (1985) e Luchik e Tiederman (1988) concluíram que os efeitos dos polímeros são sentidos na sub-camada viscosa ( $Y^+ < 5$ ), sendo que a causa da redução de atrito é a inibição da formação da estrutura de estrias típica nesta região. Isto ocorre devido à capacidade das soluções poliméricas de resistir ao fenômeno de esticamento de vórtices. Por outro lado, resultados experimentais (Spangler 1969, Virk 1971, Usui 1990 e Wei e Willmarth 1992) tem demonstrado que os polímeros atuam na Região Intermediária ( $10 < Y^+ < 70$ ). A ação dos polímeros nesta região provoca mudanças no balanço de energia (produção e dissipação), sendo que o principal efeito é um incremento da componente flutuante da velocidade na direção axial,  $u'$  e uma redução da componente flutuante na direção normal  $v'$ .

Finalmente, como um terceiro critério, Virk (1975) faz uma extensa análise para determinar a relação entre a tensão de cisalhamento de parede no início da R.A. ( $\tau_w^*$ ) como função do diâmetro da tubulação, da concentração das soluções poliméricas e da viscosidade do solvente. Os resultados da análise de Virk estão apresentados, resumidamente, a seguir:

- Diâmetro da tubulação: depois de analisar um conjunto de resultados experimentais mostra que  $\tau_w^*$  é essencialmente independente do diâmetro. Resultados mais recentes, todavia, tem demonstrado que existe dependência deste parâmetro. Hoyt (1991) obteve que para maiores diâmetros da tubulação (para um mesmo polímero e concentração) o início da R.A. se verifica para um valor do número de Reynolds mais alto.
- Concentração do polímero ( $C_w$ ): os resultados de Paterson e Abernathy (1970) e de Hansen e Little (1971) [apud Virk 1975] mostram que  $\tau_w^*$  diminui com o incremento de  $C_w$ . Por outro lado Clarke (1971) e Virk (1966) [apud Virk 1975], obtiveram como resultado que  $\tau_w^*$  é independente de  $C_w$  com valores  $\tau_w^* \cong 8,0 \text{ N/m}^2$  e  $20 < C_w < 1000$ . Como conclusão desta análise, assinala-se que não existe uma dependência precisa de  $\tau_w^*$  e  $C_w$ .
- Viscosidade do solvente: não existe efeito significativo da viscosidade do solvente sobre  $\tau_w^*$ .

## Procedimento Experimental

### Bancada experimental e processamento de dados

A instalação experimental usada neste estudo é apresentada na Fig. 2, Nakae (1994).

Os principais equipamentos da bancada são os seguintes:

- **M.E** Motor Elétrico;
- **V.E** Variador Eletromagnético de Rotação;
- **B.C** Bomba Centrífuga;
- **T.P** Tomada de Pressão;
- **T.D** Transdutor Diferencial de Pressão;
- **T.T** Tubo de Pitot;
- **M.V** Medidor Electromagnético de vazão;
- **T.M** Termômetro;
- **S.T** Sensor do termômetro.

Também faz parte da bancada experimental um microcomputador que recebe os sinais enviados pelos instrumentos de medição (transdutores de pressão diferencial, medidor eletromagnético de vazão e termômetro). Estes sinais após passarem por uma placa de conversão de sinais analógicos em digitais, são analisados por um programa denominado AQUÍ3 (Fundação Centro Tecnológico de Hidráulica, F.C.T.H.), calculando-se a vazão ( $Q$ ), a queda de pressão ( $\Delta p$ ) e a velocidade média local ( $u$ ). A leitura dos dados é feita num período de tempo de 100 segundos, com 20 pontos por segundo, sendo portanto adquiridos 2000 pontos por ensaio.

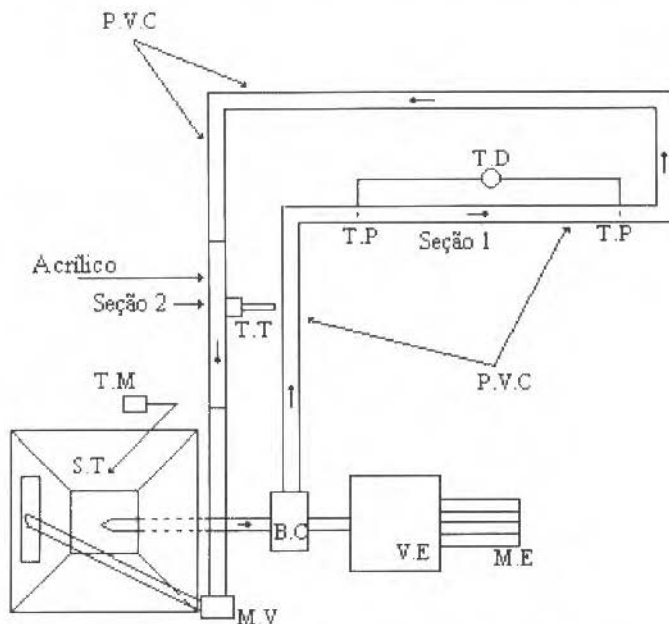


Fig. 2 Esquema da bancada experimental.

A instalação oferece a possibilidade de trabalhar com vazões de 8 a 40 l/s, ou seja, velocidades médias entre 1 e 4,8 m/s. Consequentemente, os valores de número de Reynolds cobrem a faixa de  $10^3$  a  $5 \cdot 10^3$ . Através da análise da bibliografia não se encontrou nenhum trabalho no qual a faixa de número de Reynolds fosse tão alta. Geralmente as instalações experimentais estão projetadas para trabalhar com  $Re=10^3$ , valor típico para a ocorrência do fenômeno de início da redução de atrito.

O perfil de velocidade média local foi medido com tubo de Pitot. Hoyt (1972) faz referência às limitações do tubo de Pitot para medições de velocidade em escoamentos de soluções poliméricas, destacando a necessidade que seu uso estivesse restrito às aplicações onde pudesse ser feita uma calibração precisa sob as condições de uso. No presente trabalho, a existência de um medidor eletromagnético para determinar a vazão no sistema, eliminou qualquer limitação, pois toda vez que o tubo de Pitot foi utilizado na obtenção do perfil de velocidade, determinou-se a constante do aparelho (C) para os ajustes de cálculo (Nakae, 1994 e Vilalta, 1995).

A instalação experimental está constituída por duas seções de testes, cujas características são apresentadas a seguir:

Tabela 1 Características das seções de testes.

Seção	Dimensão (m)	Material da tubulação	Medições feitas	Resultados obtidos
1	L=3,00 m D=0,10295 m	P.V.C.	Queda de pressão	Relação $f$ vs. $Re$
2	L=2,00 m D=0,100 m	Acrílico	Velocidade média local	Perfil de velocidade

## Soluções Poliméricas

A solução polimérica foi preparada como solução-mãe a uma concentração de 1%. A adição do polímero à água foi lenta e gradual incidindo diretamente no vórtice formado pela agitação a fim de evitar grumo e má dissolução. A agitação máxima não ultrapassou a 450 rpm de modo a evitar a quebra das cadeias poliméricas. Depois do preparo desta solução-mãe esperou-se aproximadamente 4 horas para que se completasse a hidrólise das soluções. A água utilizada tanto na preparação da solução mãe quanto na realização dos ensaios era proveniente da rede pública.

## Análise de Incertezas

O coeficiente de perda de carga  $f$  foi determinado aplicando a equação da energia entre as duas seções de teste, obtendo-se:

$$f = \frac{2gD\Delta p}{\gamma LU^2} = \frac{2gD\Delta H}{LU^2} \quad (6)$$

Nesta equação os termos de perda de carga ( $\Delta p/\gamma = \Delta H$ ), comprimento ( $L$ ) e diâmetro ( $D$ ) foram medidos diretamente na instalação experimental, enquanto que a velocidade ( $U$ ) foi determinada indiretamente através da equação da continuidade, sendo que os desvios sistemáticos destes parâmetros foram  $B_{v_f} = \pm 0,0153$ ,  $B_r = \pm 0,001$ ,  $B_D = \pm 0,00005$ ,  $B_U = \pm 0,0057$ , respectivamente.

As incertezas na determinação de  $f$  foram calculadas pela relação:

$$I_f = \sqrt{B_f^2 + A_f^2} \quad (7)$$

Como, durante a realização dos ensaios, cada ponto foi medido uma única vez, o termo dos desvios aleatórios ( $A_f$ ) não foi considerado. Devido a isto a incerteza de  $f$  foi calculada como função, apenas, dos desvios sistemáticos ( $B_f$ ), de modo que a relação (7) pode ser simplificada:

$$I_f = \sqrt{B_f^2} = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2} \quad (8)$$

Considerando-se as Eqs. (6) e (8), tem-se que:

$$I_f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial U} \right)^2 \Delta U^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial D} \right)^2 \Delta D^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \Delta H} \right)^2 \Delta \Delta H^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial L} \right)^2 \Delta L^2} \quad (9)$$

Determinando-se  $I_f$  para cada ponto da relação  $f$  vs  $Re$  (tanto para o solvente quanto para as soluções poliméricas a diferentes concentrações), obtém-se que o valor da incerteza na determinação de  $f$  é  $\pm 0,00054$ , ou seja, uma incerteza relativa de 3,70% (com um intervalo de confiança de 95%).

## Análise dos Resultados

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos é importante destacar alguns aspectos que caracterizam o presente trabalho.

Primeiramente é necessário apontar o fato que a tubulação utilizada para estudar a perda de carga é considerada lisa ( $e=0$ ). Portanto os resultados estão restritos ao regime hidraulicamente liso. Um outro aspecto a considerar é que, pelo próprio projeto da instalação, a faixa de número de Reynolds está entre  $10^3$  a  $5 \cdot 10^4$ , não permitindo a análise direta do processo de início da R.A. Numa tentativa de solucionar esta dificuldade, o estudo da faixa  $Re \approx 10^4$  foi feito por extrapolação gráfica.

Por último é importante salientar o fato que na realização dos cálculos as propriedades físicas das soluções poliméricas foram consideradas com idênticos valores ao da água para as condições do escoamento. Isto é possível, tendo em vista que a solução polimérica utilizada é perfeitamente diluída e que os valores de concentração utilizados nos ensaios são baixos ( $C_w \leq 110 \text{ ppm}$ ).

## Análise da Degradação Mecânica por Cisalhamento

Do ponto de vista prático é importante a determinação das características relativas à degradação mecânica por cisalhamento da solução polimérica, já que esta determinação dá uma idéia da perda do efeito redutor de atrito no tempo. A degradação mecânica é definida como a perda da capacidade redutora de arrasto, a qual pode ocorrer, principalmente, pelo intenso cisalhamento no interior das bombas centrífugas. Outra causa que pode provocar este fenômeno é o envelhecimento das soluções poliméricas.

A análise da degradação mecânica foi feita a partir da determinação do perfil de velocidade adimensional  $U^+$  vs  $Y^+$  e da comparação dos perfis do solvente e das soluções poliméricas para diferentes concentrações e tempos (tempo de circulação das soluções poliméricas na instalação depois de começados os ensaios). A avaliação foi feita para dois valores de vazões (20 e 30 l/s) e quatro concentrações (10, 50, 70 e 110 ppm).

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos para vazão de 20 l/s e  $C_w=50 \text{ ppm}$  (Fig. (3a)) e para 30 l/s e  $C_w=50 \text{ ppm}$  (Fig. (3b)). Nestas figuras observa-se que a tendência dos perfis é de coincidir com o da água com o passar do tempo. Para o tempo máximo de ensaio (duas horas) é possível observar variações da ordem de 5% com respeito à solução fresca ( $t=0$ ). No caso da Fig. (3b), a tendência à coincidência é maior já que o incremento da vazão favorece as condições turbulentas, o que implica em uma perda mais rápida da capacidade redutora de atrito do Iqapol PA.

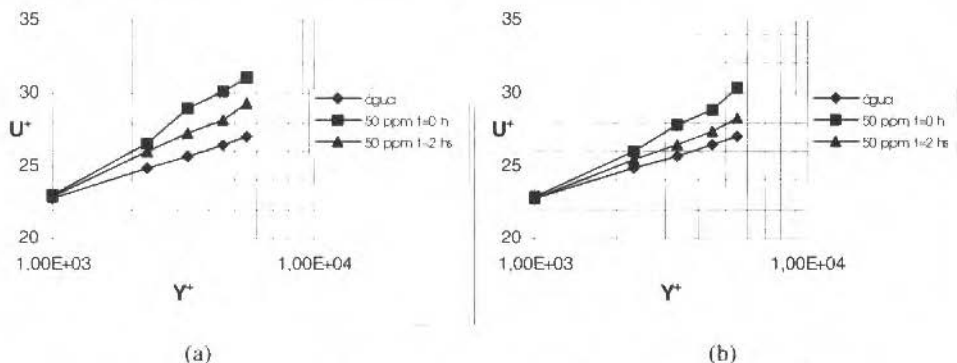


Fig. 3 Perfil de velocidade adimensional para a análise da degradação mecânica: (a) 20 l/s e  $C_w=50 \text{ ppm}$ , (b) 30 l/s e  $C_w=50 \text{ ppm}$ .

Como os ensaios foram feitos no período de 30-40 minutos após o início de operação da bomba centrífuga, nota-se que os resultados caem na faixa entre as curvas dos perfis de velocidade para  $t=0$  e  $t=2 \text{ h}$ , com ligeira tendência a coincidir com o perfil da solução fresca ( $t=0$ ). Portanto pode-se concluir neste caso que a degradação mecânica não é relevante e que os resultados experimentais não estão afetados por este efeito.

## Determinação do Gráfico $f$ vs $Re$

A diminuição do coeficiente de perda de carga  $f$  é uma consequência do efeito provocado pela adição de substâncias redutoras de arrasto a um escoamento turbulento. Constitui portanto um dos

objetivos deste trabalho quantificar a magnitude da diminuição de  $f$ , assim como sua dependência com relação à concentração das soluções poliméricas.

A Figura 4 representa o gráfico do coeficiente de perda de carga  $f$  versus o número de Reynolds (em escala logarítmica) onde aparecem os resultados para as soluções poliméricas de Iqapol PA a diferentes concentrações.

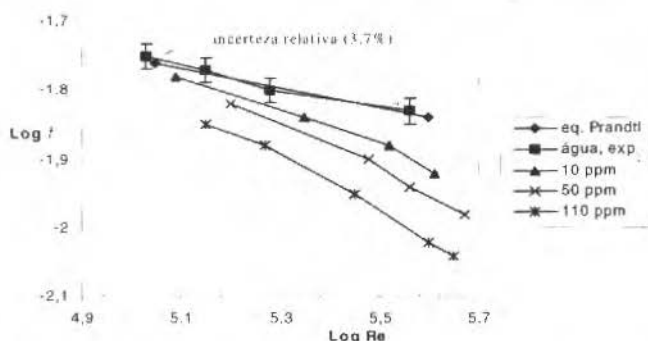


Fig. 4 Variação do coeficiente de perda de carga  $f$ , como função do número de Reynolds e da concentração das soluções poliméricas de IQAPOL PA.

Inicialmente pode-se destacar que a curva da água adere-se bem à equação de Prandtl enquanto que para as soluções poliméricas existe um afastamento da curva do regime hidraulicamente liso, tendendo-se para o regime polimérico, onde o comportamento e a magnitude da redução de atrito dependem da concentração. Esta dependência significa que com o aumento da concentração, para um mesmo valor de  $Re$ , os valores de  $f$  são menores até atingir a região da A.M.R.A.

A magnitude da diminuição do coeficiente  $f$ , é medida a partir da definição da Eficiência da Redução de Arrasto ( $\varphi$ ), que pode ser determinada como:

$$\varphi = \frac{|f_s - f_p|}{f_s} 100 \quad (10)$$

É possível observar, da Fig. 5, que para as concentrações menores e números de  $Re=2.10^5$  não existe um efeito importante na redução de atrito, ficando esta na ordem de 10%. Só para concentrações maiores (>70 ppm) e valores de  $Re=4.10^5$  é que a adição de polímero resulta em valores significativos do coeficiente  $\varphi$ .

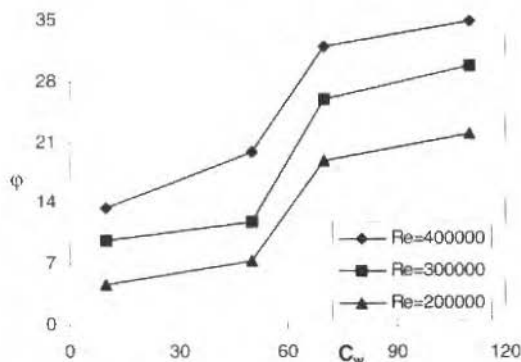


Fig. 5 Relação entre a Eficiência da Redução de Arrasto ( $\varphi$ ) e a concentração para diferentes valores de número de Reynolds.

A partir dos resultados obtidos determinou-se uma equação para o cálculo do coeficiente de perda de carga,  $f$ , como função do número de Reynolds ( $Re$ ) e da concentração ( $C_w$ ). Ajustando as curvas ( $f$  vs  $Re$ ) segundo uma função logarítmica e buscando a relação entre os coeficientes da mesma com a concentração tem-se que:

$$f = -A \log Re + K \quad (11)$$

sendo  $A$  e  $K$  coeficientes que dependem da concentração (em ppm) e podem ser determinados pelas relações:

$$A = -9,2 \cdot 10^{-7} C_w^2 + 1,15 \cdot 10^{-4} C_w + 6,9 \cdot 10^{-3} \quad (12)$$

$$K = -5 \cdot 10^{-6} C_w^2 + 6 \cdot 10^{-4} C_w + 5,22 \cdot 10^{-2} \quad (13)$$

Os coeficientes de correlação no ajuste da função  $f=f(Re)$ , foram sempre maiores que 0,99 e para o ajuste dos coeficientes  $A$  e  $K$  estão na faixa de 0,92-0,93, sendo que o ajuste polinomial (o escolhido) oferece melhores resultados que os outros ajustes possíveis neste caso (exponencial ou linear).

Para estudar o início da redução de arrasto foi feita a extrapolação gráfica dos resultados experimentais (ver Fig. 6). As curvas apresentadas nesta figura, para  $Re < 10^5$ , correspondem à aplicação da Eq. (11).

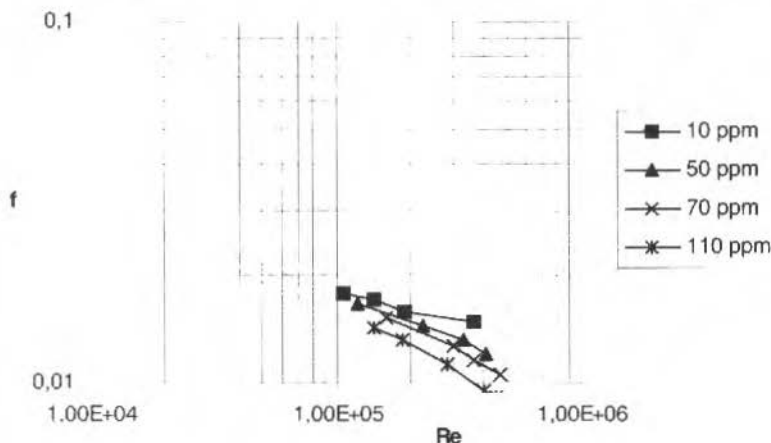


Fig. 6 Diagrama que mostra o início da R.A. por extrapolação gráfica.

Da análise desta figura é possível observar que a solução polimérica mostra o comportamento característico associado ao efeito Toms em tubulações lisas. Note-se, conforme estabelecido pela teoria de Virk *et al.*, (1967), que o início da R.A. corresponde à faixa de número de Reynolds da ordem de  $10^4$ . Duas regiões típicas do escoamento são identificadas. Para  $Re < 10^4$ , há uma tendência no sentido de que a solução polimérica e o solvente apresentem mesmo comportamento descrito pela equação de Prandtl (para tubulações lisas), sem que exista R.A. Para  $Re > 10^4$ , a chamada região polimérica, existe R.A. cuja magnitude vai depender da concentração, do regime do escoamento ( $Re$ ) e do polímero utilizado.

## Avaliação dos Resultados

Com o intuito de se tentar uma generalização dos resultados obtidos, estes foram comparados com duas relações importantes da literatura.

A primeira relação, devido a Vortinskaya (apud Rabinovich 1987), permite o cálculo de  $f$  a partir de diferentes parâmetros: concentração volumétrica ( $C_V$ , em %), velocidade de atrito ( $u_*$ ), velocidade média do escoamento ( $U$ ) e rugosidade relativa ( $e/D$ ). Esta relação tem a forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \left( \frac{2,8u_*}{U\sqrt{f}} \right)^{5,75} \left( \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} + \frac{e}{3,7D} \right) \right] \quad (14)$$

sendo que  $\beta$  é o termo que depende da concentração e pode ser determinado por:

$$\beta = 10^3 C_V \quad (15)$$

Esta equação é válida para  $0,0005 < C_V < 0,012$ . Verifica-se que para escoamento de água ( $C_V=0$ ,  $\beta=0$ ) a Eq. (14) resulta na equação de Colebrook-White.

As Tabelas 2 e 3 mostram a comparação dos resultados de  $f$  obtidos por três vias: utilizando os pontos experimentais, utilizando a equação proposta neste trabalho (11) e utilizando a relação de

**Tabela 2 Resultados da comparação do coeficiente  $f$  para 50 ppm**

Re	$f$ exp.	$f$ proposto	$f$ Vortinskaya	% diferença exp. vs proposto	% diferença exp. vs Vortinskaya
1,57E+05	0,0153	0,0158	0,0153	3,3	0
2,31E+05	0,0137	0,0141	0,0137	2,0	0
3,09E+05	0,0127	0,0128	0,0127	0,8	0
3,79E+05	0,0117	0,0119	0,0124	1,7	5,9
4,36E+05	0,0112	0,0112	0,0121	0	8,0
4,78E+05	0,0104	0,0108	0,0118	3,8	13,4

Vortinskaya (14), para dois valores diferentes de concentração das soluções poliméricas (50 e 70 ppm) respectivamente. Estes valores foram escolhidos por estarem na faixa de validade da equação de Vortinskaya.

**Tabela 3 Resultados da comparação do coeficiente  $f$  para 70 ppm**

Re	$f$ exp.	$f$ proposto	$f$ Vortinskaya	% diferença exp. vs proposto	% diferença exp. vs Vortinskaya
1,38E+05	0,0153	0,0159	0,0153	3,9	0
2,50E+05	0,0116	0,0132	0,0120	13,8	3,4
3,14E+05	0,0106	0,0123	0,0115	16,0	8,5
3,74E+05	0,0099	0,0114	0,0106	15,1	7,1
4,33E+05	0,0092	0,0107	0,0101	16,30	9,8
4,52E+05	0,0091	0,0100	0,0100	9,9	9,9

A análise dos resultados das Tabelas 2 e 3 permite estabelecer a validade dos resultados experimentais e das Eqs. (11) e (14) tendo em vista a magnitude das diferenças obtidas entre estes valores. Verifica-se, via de regra, que estas diferenças aumentam fundamentalmente para os maiores valores de número de Reynolds. Isto ocorre devido a problemas operacionais existentes para os maiores valores de vazões e que impedem uma maior precisão nos resultados.

A segunda relação importante da literatura é a correlação geral proposta por Tam *et al.*, (1992) para descrever o perfil de velocidade das soluções poliméricas. Esta correlação foi obtida a partir do modelo de mistura de Prandtl.

A correlação obtida tem a forma:

$$\alpha \left( U_p^+ - \Gamma \right) + \beta_c = 2,43 \ln Y^+ + 6,5 \quad (16)$$

onde os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_c$  e  $\Gamma$  podem ser determinados pelas relações seguintes:



$$\alpha = -2,864 + 105,5\epsilon - 654,4\epsilon^2 \quad (17)$$

$$\beta_c = 24,98 - 679,9\epsilon + 4140\epsilon^2 \quad (18)$$

$$\Gamma = -396,1 + 1,692 \times 10^4 \epsilon - 1,665 \times 10^5 \epsilon^2 \quad \text{para } \epsilon < 0,05 \quad (19)$$

$$\Gamma = 2,2 \quad \text{para } \epsilon > 0,05 \quad (20)$$

O mérito da Eq. (16) é que permite a determinação do perfil de velocidade a partir do coeficiente de perda de carga,  $f$ , pela relação:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (21)$$

Ao estabelecer a validade da Eq (16), Tam *et al.*, (1992) compararam os seus resultados experimentais com os obtidos aplicando a correlação, comprovando portanto a boa concordância dos resultados. Todavia nas conclusões do trabalho de Tam existem dois pontos conflitantes. Em um ponto estabelecem que a Eq (16) permite determinar, com precisão, o perfil de velocidades para "qualquer solução polimérica", mas em outro ponto fixam que os testes estão restritos somente a quatro polímeros, para uma faixa de concentração entre 20 e 200 ppm e valores do número de Reynolds entre 4000 e 15000.

A Figura 7 apresenta os resultados comparativos para concentrações de 50 ppm (Fig. 7a) e 110 ppm (Fig. 7b) respectivamente, observando-se que, para as condições de ensaio do trabalho aqui apresentado, a aplicação da correlação de Tam não conduz a bons resultados.

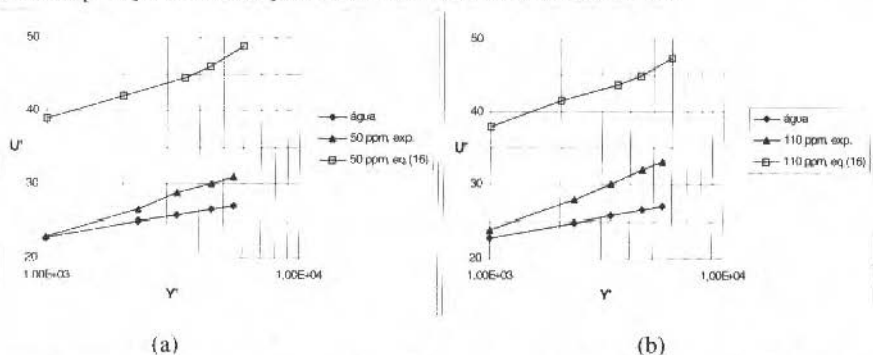


Fig. 7 Comparação dos resultados experimentais com a correlação de Tam para  $Re=10^5$  (do presente trabalho); Resultados de Tam *et al.*, (1992), (a)  $C_w=50$  ppm, (b)  $C_w=110$  ppm

Acredita-se que isto deva-se ao fato desta correlação ter sido obtida para condições muito específicas, ficando difícil de se generalizar os resultados de um fenômeno tão complexo, onde intervêm diversas variáveis e onde, ainda, não existem bases sólidas para definir relações universais que expliquem o fenômeno da R.A.

A Tabela 4 mostra uma comparação das principais características do trabalho de Tam *et al.*, (1992) com o presente trabalho.

Tabela 4 Características gerais do trabalho de Tam *et al.* (1992) e do presente trabalho.

Itens	Tam <i>et al.</i> , (1992)	Presente trabalho
Material da tubulação	Vidro	Acrílico e PVC
Diâmetro interno [mm]	9	100
Faixa do número de Reynolds	$4 \cdot 10^3$ a $1,5 \cdot 10^5$	$10^3$ a $5 \cdot 10^5$
Faixa de concentração [ppm]	20 a 200	5 a 110
Instrumento de medição da velocidade média	Anemômetro Laser	tubo de Pitot

## Conclusões

No trabalho aqui apresentado, determinou-se o coeficiente de perda de carga universal,  $f$ , para escoamentos turbulentos em tubulações com e sem a adição do polímero Iqapol PA.

Os resultados experimentais mostram que  $f$  diminui com a adição de polímeros até os limites de concentração estudados, sem ter-se alcançado a Assíntota de Máxima Redução de Atrito. Os melhores resultados foram obtidos para valores de  $Re=4.10^3$  e  $C_w>50$  ppm, onde a redução do coeficiente  $f$  é da ordem de 30%. Para aplicações industriais deve-se tomar especial cuidado no que se refere à degradação mecânica das soluções poliméricas.

A aplicação da equação obtida neste trabalho oferece bons resultados quando comparados com os resultados experimentais na sua faixa de validade. Neste sentido destaca-se a boa concordância ao comparar os resultados experimentais com a equação de Vortinskaya o que não acontece com a correlação geral de Tam, que não pode ser considerada como geral e aplicável a "qualquer solução polimérica" (Tam *et al.*, 1992).

É necessário aprofundar o estudo do mecanismo físico da R.A., de modo a se obter maior consistência na análise teórica-experimental deste fascinante fenômeno.

## Agradecimentos

Os autores deste trabalho agradecem ao Centro Tecnológico de Hidráulica do DAEE/USP e em particular ao Prof. Dr. Takashi Nakae do referido centro, por terem colocado a disposição a bancada experimental que possibilitou a realização deste estudo.

O Eng<sup>o</sup> Guillermo Vilalta Alonso agradece a CAPES pela bolsa de mestrado concedida durante a realização deste trabalho.

O Prof. Jayme P. Ortiz agradece ao CNPq pela bolsa de pesquisador concedida durante a realização deste trabalho.

## Referências

- Hoyt, J.W., 1972 "The effect of additives on fluid friction", J. of Basic Engng., Trans. ASME, Series D, pp. 258-269.
- Hoyt, J.W., 1991 "Negative roughness" and polymer drag reduction", Exp. in Fluids, Vol. 11, pp. 142-146.
- Luchik, T.S. e Tiederman, W.G., 1988 "Turbulent structure in low-concentration drag-reducing channel flow", J. Fluid. Mech., Vol. 190, pp. 241-263.
- Lumley, J.L., 1977 "Drag reduction in two phase and polymer flow", Phys. Fluid, Vol. 20, No. 10, Pt II.
- Nakae, T., 1994 "Influência dos sedimentos finos na redução de arraste em escoamentos de areia em condutos forçados", Tese de Doutorado, Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, São Paulo, S.P, Brasil.
- Spangler, J.G., 1969 "Studies of viscous drag reduction with polymer including turbulence measurements and roughness effects", in Viscous Drag Reduction, pp. 131-135, Plenum Press, New York.
- Stupin, A. B., 1990 "A semiempirical theory of drag reduction", Fluid Mech.- Soviet Research, Vol. 19, No. 5, Sept-Oct.
- Rabinovich, E.Z., 1987 "Hidráulica" Edit. Mir, Moscú, URSS.
- Tam, K.C., Tiu, C., e Keller, K.J., 1992 "A general correlation for turbulent velocity profile of dilute polymer solutions", J. Hydr. Res., Vol. 30, No. 1, pp. 117.
- Tiederman, W.G., Luchik, T.S. e Bogar, D.G., 1985 "Wall-structure and drag reduction", J. Fluid Mech., Vol. 156, pp. 419-437.
- Toms, B.A., 1948 "Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers", Proc. First Intern. Congr. on Rheology, Vol. II, pp. 135-141, North Holland, Amsterdam.
- Usui, H., 1990 "Drag reduction caused by the injection of a polymer solution into a pipe flow", Structure of turbulence and drag reduction (ed. A.Gyr) IUTAM Sump. Zürich. Springer Verl., pp. 257-274.
- Vilalta, G., 1995 "Análise da redução de atrito em escoamentos por adição de polímeros: ensaios experimentais com soluções de poliácrlamidas", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, São Paulo, S.P, Brasil.
- Virk, P.S., Merrill, E.W., Mickley, H.S, Smith, K.A e Mollo-Christensen, E.I., 1967 "The Toms phenomenon: turbulent pipe flow of polymer solutions", J. Fluid Mech., Vol. 30, Part. 2, pp. 305-328.
- Virk, P.S., 1971 "An elastic sublayer model for drag-reduction by dilute solutions of linear macromolecules", J. Fluid. Mech., Vol. 45, Part 3, pp. 417-440.

Virk, P.S., 1975 "Drag reduction fundamentals", J. AIChE, Vol. 21, No. 4, pp. 625-656.

Wei, T. e Willmarth, W.W., 1992 "Modifying turbulent structure with drag-reducing polymer additives in turbulent channel flows". J. Fluid Mech., Vol. 245, pp. 619-641.

# On Comparing Theory and Experiment of Aerodynamic Forces and Moments on T-Tail Configurations

**Maher N. Bismarck-Nasr**

Instituto Tecnológico da Aeronáutica  
Divisão de Engenharia Aeronáutica  
12228-900 São José dos Campos, SP Brasil

## Abstract

*The present paper deals with the theoretical calculation of steady aerodynamic loads and moments on nonplanar lifting surfaces. The steady counterpart of the doublet lattice method is used in the analysis. Several numerical results are presented and these are compared with experimental findings. It is shown that the steady counterpart of the doublet lattice method, while being extremely cost efficient in terms of computation requirements, can predict with a high degree of precision the airloads and the aerodynamic coefficients for nonplanar lifting configurations.*

**Keywords:** *Nonplanar Lifting Surfaces, Air Loads, Aerodynamic Coefficients.*

## Introduction

Multhopp in 1950 was the first to introduce an accurate numerical method for the calculation of aerodynamic load distributions on wings of various shapes in low speed flows. The method uses the potential flow theory to relate the pressure difference across the wing to the downwash field on the wing surface. The method was then modified for complex planforms, as well as adapted in a form suitable for high speed computation by Lamar in 1968. The Multhopp method is applicable to a wing alone and therefore cannot predict aerodynamic loads on general configurations such as bodies, wing-bodies or nonplanar lifting surfaces. In 1966, Hess and Smith presented for the first time a method for the calculation of pressure distributions on general slender nonlifting bodies for incompressible flows, approximating the integral equation of the source distribution by a set of discrete sources distributed on the surface of the body. Applying the condition of tangency of the flow on the body, a set of algebraic linear equations are obtained and their solution provides the values of the source intensity, from which the velocity and pressure distributions can be calculated. The Hess and Smith method was the precursor of panel methods, nowadays extensively used in aerodynamic computations. Later on, Hess and Smith (1972), extended the application to lifting cases by superposing to the surface source distributions a system of vortex distribution. The inclusion of compressibility effects was then treated in the review paper of Hess in 1975. The main disadvantage of the use of the vortex method over finite span lifting surface is the requirement of the vortex extension as a trailing vortex sheet in the wake. Another limitation of the method is that it is not directly applicable for the supersonic case. Further developments using the source distributions superposed to a vortex system resulted in several operational programs. Among these, one can cite Margason and Lamar code (1971) and the Woodward codes published in 1968, 1973 and 1980. In 1981 Carmichael and Erickson presented the PAN AIR program, which is possibly the most advanced program for general three dimensional subsonic and supersonic flows over arbitrary configurations. The PAN AIR program is documented in the NASA reports CR 3251 to CR 3254 published in 1980. The PAN AIR program uses a superposition of linear sources and quadratic doublet distributions in order to attain a higher degree of precision and ensure convergence for general arbitrary configurations. The PAN AIR program, while probably the most efficient panel method computer program, has the disadvantages of requirements of high hardware capabilities and being an operationally costly program. The doublet lattice method originally proposed by Albano and Rodden in 1969 for the calculation of incremental nonstationary airloads on general nonplanar configurations is nowadays widely used in aeroelastic numerical computations for subsonic stability and response problems. This method has proved to be versatile, can treat nonplanar surfaces and can be applied to problems with control surfaces without difficulties. In the doublet lattice method the lifting surfaces are divided into panel segments. Each panel is constructed such that the two side edges are parallel to the unperturbed flow, which in turn is assumed to be in the  $x$ -direction of the coordinate system. At the quarter mean chord position of each element an acceleration doublet of unknown intensity is assumed to be positioned. The boundary conditions are applied at the 3/4 position of the mean chord of each element, resulting in a set of linear algebraic equations. The solution

provides the values of the doublet intensities, from which the velocity and pressure distributions can be calculated. In the present paper the steady state counterpart of the doublet lattice method is used for the calculation of aerodynamic load distributions on general nonplanar lifting surfaces. Several numerical results are presented and these are compared with experimental findings. It is shown that the steady state counterpart of the doublet lattice method, while being extremely cost efficient in terms of computation requirements, can predict with a reasonable degree of accuracy the airloads and the aerodynamic coefficients for nonplanar lifting configurations.

## Problem Formulation

The integral equation relating the pressure and the normalwash distribution in (unsteady or steady) potential (subsonic or supersonic) three dimensional flows was first derived by Küssner in 1940 and can be written as

$$\frac{w(x, y, z)}{U} = \frac{1}{8\pi} \iint_A \left[ \frac{\Delta p(\xi, \eta, \zeta) K(x, y, z, \xi, \eta, \zeta; k, M)}{qr^2} \right] d\xi d\eta, \quad (1)$$

where  $w(x, y, z)$  is the normalwash velocity at point  $x, y, z$ ;  $U$  is the free stream velocity of the unperturbed flow assumed in the  $x$ -direction,  $\Delta p(\xi, \eta, \zeta)$  is the aerodynamic pressure difference at point  $\xi, \eta, \zeta$ . The free stream dynamic pressure is denoted by  $q$  and is equal to  $\rho U^2/2$  where  $\rho$  is the free stream air density, and  $K$  is the Kernel function of the integral and is a function of the relative position, the free stream Mach number  $M$ , and the reduced frequency  $k = \omega c/U$ , where  $\omega$  is the lifting surface oscillation frequency and  $c$  is any reference length (usually taken as the mean aerodynamic chord of the main lifting surface) used for nondimensionalizing the reduced frequency. For the steady state counterpart of the doublet lattice method  $\omega = 0$ , and therefore  $k = 0$ . The Kernel function of the integral Eq. (1) for three dimensional problems can be written as

$$K = e^{\frac{-i\omega x_0}{U}} \left[ K_1 T_1 + K_2 T_2 \right], \quad (2)$$

where  $T_1$  and  $T_2$  are geometric relations, and are given by

$$T_1 = \cos(\gamma_r - \gamma_s)$$

$$T_2 = \frac{(z_0 \cos \gamma_r - y_0 \sin \gamma_r)(z_0 \cos \gamma_s - y_0 \sin \gamma_s)}{r^2}, \quad (3)$$

where

$$x_0, y_0, z_0 = x - \xi, y - \eta, z - \zeta,$$

$$r = [(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}. \quad (4)$$

The subscripts  $r$  and  $s$  stand for the receiving and the sending points respectively. The functions  $K_1$  and  $K_2$  were evaluated by Landahl in 1967, as well as Albano and Rodden in 1969, and are given by

$$K_1 = \frac{Mr e^{-iku}}{R(1+u^2)^{1/2}} + N_{3/2}$$

$$K_2 = -\frac{ikM^2 r^2 e^{-iku}}{R^2(1+u^2)^{1/2}} - \frac{Mr e^{-iku} [(1+u^2)\beta^2 r^2 + 2R^2 + MRru]}{R^3(1+u^2)^{3/2}} - 3N_{5/2},$$
(5)

where

$$R = (x_0^2 + \beta^2 r^2)^{1/2},$$

$$u = \frac{(Mr - x_0)}{\beta^2 r},$$
(6)

$$N_{3/2} = \int_u^\infty \frac{e^{-ikv}}{(1+v^2)^{3/2}} dv,$$

$$N_{5/2} = \int_u^\infty \frac{e^{-ikv}}{(1+v^2)^{5/2}} dv,$$

$$\beta = (I - M^2)^{1/2}.$$

Since Küssner (1940) introduced the integral equation relating the pressure and the normalwash distribution in unsteady potential three dimensional flows, many authors investigated his integral equation in order to reduce it to a form suitable for digital computation. The main contributions are due to Watkins, Ruyan and Woolston (1955), Laschka (1963), Landahl (1967), Albano and Rodden (1969), Dat and Malfois (1970), Demarais (1982) and Bismarck-Nasr (1991a,b,c and 1994). In the doublet lattice method, a constant strength acceleration doublet with unknown intensity is assumed to be positioned at the quarter mean chord location of each element. The boundary conditions are applied at the 3/4 position of the mean chord of each element. Thus, at the control point  $r$  we can write for the contribution of all the elements

$$\frac{w(x, y, z)}{U} = \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{4\pi\rho U^2} \int_{l_j} K d\mu,$$
(7)

where  $f_j$  is the intensity of the doublet of the element  $j$ ,  $l_j$  is the span of the element  $j$  and the integration is performed along the span of the element  $j$ . The aerodynamic pressure difference for the element  $j$  can be written as

$$P_j = \frac{\text{force}}{\text{element area}} = \frac{f_j l_j}{a_j},$$
(8)

where  $a_j$  is the area of the element  $j$ . Using Eqs. (7) and (8), the integral Eq. (1) is transformed to an algebraic equation given by

$$\left\{ \frac{w}{U} \right\} = [D] \left\{ \frac{P}{\rho U^2 l} \right\}.$$
(9)

The elements of matrix  $[D]$  are given by

$$D_{ij} = \frac{l}{8\pi} \frac{a_j}{l_j} \int_{l_j} K d\mu . \quad (10)$$

Finally, matrix  $[D]$  is inverted and we obtain a relation between the pressure difference vector and the downwash vector in the form

$$\left\{ \frac{P}{\rho U^2 l_2} \right\} = [A] \left\{ \frac{w}{U} \right\} , \quad (11)$$

where  $[A] = [D]^{-1}$ . The matrix relation (11) relates the pressure difference to the normalwash distribution. In order to evaluate numerically the aerodynamic influence coefficient matrix, we write for the integral of Eq. (7) a quadratic approximation in the form

$$I_{ij} = \int_{l_j} K d\mu = \int_{-e}^e \frac{A\eta^2 + B\eta + C}{(\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2} d\eta , \quad (12)$$

where  $e = l_j \cos \lambda_j / 2$ ,  $\lambda_j$  is the local sweep angle of the element  $j$ , and

$$\eta_0 = [y_r - y_{sm}] \cos \gamma_s + [z_r - z_{sm}] \sin \gamma_s ,$$

$$\zeta_0 = -[y_r - y_{sm}] \sin \gamma_s + [z_r - z_{sm}] \cos \gamma_s , \quad (13)$$

$$A = [\kappa_i - 2\kappa_m + \kappa_0] / 2e^2 , B = [\kappa_0 - \kappa_i] / 2e , C = \kappa_m ,$$

$$\kappa = r_j^2 K .$$

The subscripts  $i, m$  and  $o$  indicate values at the innermost extreme point, middle point and outermost point of the line doublet, and the coordinates  $\eta$  and  $\zeta$  are given by

$$\eta = y \cos \gamma_s + z \sin \gamma_s , \quad (14)$$

$$\zeta = -y \sin \gamma_s + z \cos \gamma_s .$$

We can thus perform the integration analytically and the result reads

$$I_{ij} = \left[ (\eta_0^2 - \zeta_0^2) A + \eta_0 B + C \right] |\zeta_0|^2 \tan^{-1} \frac{2e|\zeta_0|}{r_j^2 - e^2} + [0.5 B + \eta_0 A] \ln \frac{r_j^2 - 2\eta_0 e + e^2}{r_j^2 + 2\eta_0 e + e^2} + 2eA , \quad (15)$$

where  $r_i = (\eta_0^2 + \zeta_0^2)^{1/2}$  and for the case of planar condition, i.e.,  $\zeta_0 \rightarrow 0$ , the integral reads

$$I_{ij} = [ \eta_0^2 A + \eta_0 B + C ] \left[ \frac{1}{\eta_0 - e} - \frac{1}{\eta_0 + e} \right] + [0.5 B + \eta_0 A] \ln \frac{\eta_0 - e}{\eta_0 + e} + 2eA . \quad (16)$$

In order to compute the constants  $A, B$  and  $C$ , the Kernel function  $K$  must be calculated at the three points  $i, m$  and  $o$ . For steady flow these functions are directly obtained in an explicit form using the exact solution of Bismarck-Nasr (1991a,b,c and 1994).

## Analysis

Two cases have been treated. The first case is the model tested in wind tunnel by Clevenson and Leadbetter in 1958, where aerodynamic measurements of forces and moments were made for a simplified T-tail configuration. The T-tail model consisted of a 12" (0.305 m) span, 12" (0.305 m) chord vertical tail and a 12" (0.305 m) chord, 12" (0.305 m) span horizontal tail mounted at the fin tip. The root chord of the fin was mounted on the tunnel wall. Aerodynamic forces and moments due to yawing were measured. This model is analyzed in the present work using the "doublet lattice method" and the aerodynamic coefficients as defined in the original paper. In the analytical model a system image was made in order to simulate the tunnel wall effect. Eight spanwise elements and five chordwise elements were used in the model for the horizontal tail while four spanwise elements and five chordwise elements were used for the fin. This results in a total of 120 elements including the image system. Figures 1 and 2 show the dimensions of the model, the sign convention used and the idealization made. The pressure distribution was calculated for a yaw angle of 0.1745 radians ( $=10^\circ$ ). The load acting on each element was then considered to act at the midspan and 1/4 chord position of the element with a uniform pressure distribution over the element area. These loads were then integrated in order to produce forces and moments. Aerodynamic coefficients were then calculated using the same definitions as made by Clevenson and Leadbetter in 1958. Namely, the side force coefficient, the rolling moment coefficient due to yaw, and the yawing moment coefficient due to yaw were calculated. The analysis was made for incompressible flow, i.e.,  $M$  was taken equal to zero. The second case treated is that of Riley (1953), where a wind tunnel investigation has been conducted on a vertical tail with a stub fuselage in combination with various horizontal tails dimensions and positions. The dimensions of the models tested are shown in Fig. 3. For this model four chordwise elements were considered, together with sixteen spanwise elements for the horizontal tail and four spanwise elements for the vertical tail for the numerical calculations performed in the present paper. The main objective of the present analyses is to calculate the rolling moment coefficient due to sideslip of the horizontal tail. In the present analysis the stub fuselage was not considered. The analyses were performed for a Mach number equal to 0.131, which corresponds to the tested wind tunnel condition.

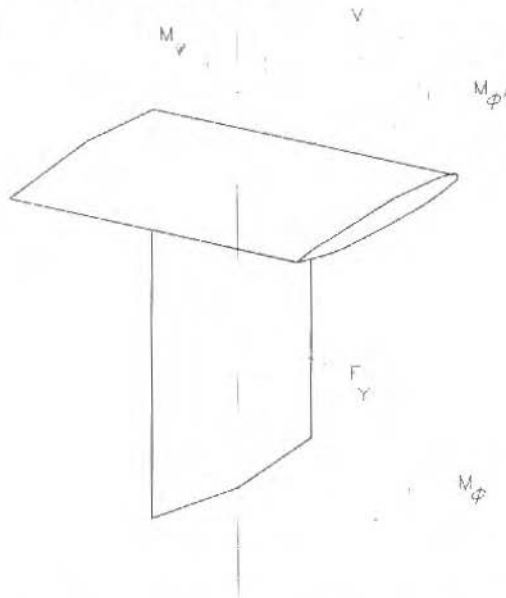


Fig. 1 Simplified T-tail model, sign convention and notations.



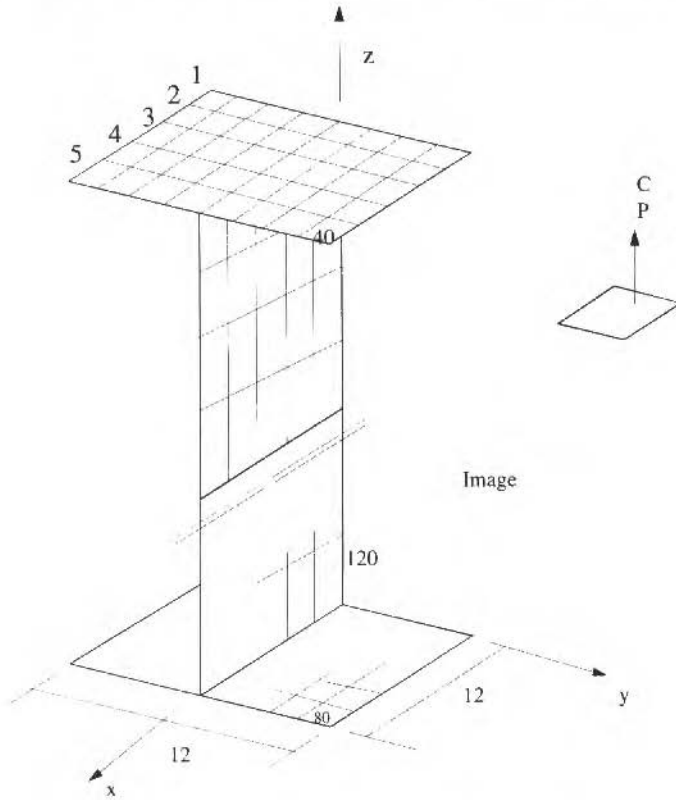


Fig. 2 Aerodynamic idealization of the simplified T-tail model.

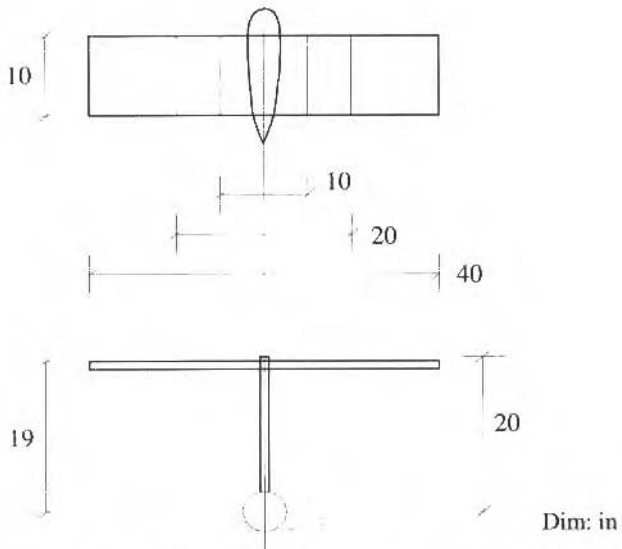


Fig. 3 T-tail with a stub fuselage model, dimensions and geometry.

## Numerical Results and Comparison with Experimental Findings

Results of the pressure coefficient distribution for the first example considered are given in Table 1.

**Table 1** Local  $C_p$  distribution due to a  $10^\circ$  angle of attack on the vertical tail of the simplified T-tail model of Fig. 1.

Element	$C_p$	Element	$C_p$	Element	$C_p$
1	-0.2199	21	0.4451	81	-1.5793
2	-0.1163	22	0.2157	82	-0.5736
3	-0.0801	23	0.1243	83	-0.3450
4	-0.0525	24	0.0764	84	-0.2164
5	-0.0298	25	0.0409	85	-0.1213
6	-0.3362	26	0.4321	86	-1.7296
7	-0.1858	27	0.2360	87	-0.6263
8	-0.1216	28	0.1446	88	-0.3815
9	-0.0771	29	0.0893	89	-0.2418
10	-0.0423	30	0.0478	90	-0.1377
11	-0.4321	31	0.3362	91	-1.8060
12	-0.2360	32	0.1858	92	-0.6575
13	-0.1446	33	0.1216	93	-0.4030
14	-0.0893	34	0.0771	94	-0.2574
15	-0.0478	35	0.0423	95	-0.1478
16	-0.4451	36	0.2199	96	-1.8407
17	-0.2157	37	0.1163	97	-0.6728
18	-0.1243	38	0.0801	98	-0.4137
19	-0.0764	39	0.0525	99	-0.2651
20	-0.0409	40	0.0298	100	-0.1528

From these pressure coefficients the following have been calculated:

a- *Side force*  $F_y$ . The side force  $F_y$  can be written as

$$F_y = q \sum_i a_i c_{p_i} \quad (17)$$

where  $a_i$  is the element area,  $c_{p_i}$  is the corresponding pressure coefficient and  $q$  is the dynamic pressure. Clevenson and Leadbetter (1958) defined the side force coefficient  $C_{y,\psi}$  as

$$C_{y,\psi} = \frac{F_y}{\pi q s \psi} \quad (18)$$

where  $s$  is the fin area and  $\psi$  is the yaw angle in radians. Using Eqs. (17) and (18) we obtain for the side force coefficient  $C_{y,\psi}$  a numerical value equals to 1.146. The experimental value measured by Clevenson and Leadbetter (1958) is 1.2.

b- *Rolling moment due to yaw*. The rolling moment due to yaw  $M_\phi$  was measured by Clevenson and Leadbetter (1958) about an axis six inches inboard of the root fin. The rolling moment can be written as

$$M_{\phi} = q \sum_i a_{i_v} c_{p_i} Z_i + q \sum_i a_{i_h} c_{p_i} Y_i, \quad (19)$$

where the first summation is made over the fin and the second summation is made over the horizontal tail. The coordinates  $Z_i$  and  $Y_i$  are measured from the point where the corresponding  $c_{p_i}$  coefficient acts to the axis of the rolling moment. The rolling moment coefficient due to yaw,  $C_{l_{\psi}}$  was defined by Clevenson and Leadbetter (1958) as

$$C_{l_{\psi}} = \frac{M_{\phi}}{\pi q s \psi c / 2}, \quad (20)$$

where  $c$  is the fin chord. Using Eqs. (19) and (20) we obtain  $C_{l_{\psi}}$  as 2.381. The experimental value measured by Clevenson and Leadbetter (1958) is 2.5.

c- *Yawing moment.* The yawing moment  $M_{\psi}$  was measured by Clevenson and Leadbetter (1958) about the midchord axis. The yawing moment can be written as

$$M_{\psi} = q \sum_i a_i c_{p_i} X_i. \quad (21)$$

The yawing moment coefficient due to yaw  $C_{n_{\psi}}$  is defined as

$$C_{n_{\psi}} = \frac{M_{\psi}}{\pi q s \psi c / 2}. \quad (22)$$

Using now the pressure coefficients of Table. 1, we obtain  $C_{n_{\psi}}$  as 0.638. The experimental value measured by Clevenson and Leadbetter (1958) is 0.61.

Results of the pressure coefficient distribution for the second example considered are given in Table 2. Three sets of calculations have been made. The first case was calculated for a horizontal tail span of ten inches. In the second case, a twenty inch span for the horizontal tail was considered. In the third case the horizontal tail span was taken equal to forty inches. From the results shown in Table 2, the rolling moment coefficient due to yaw of the horizontal tail has been calculated using the same procedure described in the first example analyzed. Riley (1953) defines this coefficient as

$$C_{l_{\beta}} = \frac{\partial C_l}{\partial \beta}, \quad (23)$$

and

$$C_l = \frac{L'}{q s_v b_v}, \quad (24)$$

where  $L'$  is the rolling moment,  $q$  is the dynamic pressure,  $s_v$  is the vertical tail area,  $b_v$  is the vertical tail span and  $\beta$  is the side slip angle in degrees. The results obtained are shown in Fig. 4 and are compared with the experimental results of Riley (1953). The small discrepancy between the result here obtained and the experimental value for the case of a 40" span would be due to the fuselage effect, which has not been considered in the present analysis. This can be confirmed from the experimental results of Riley (1953), where it is clearly observed that the effect of the fuselage is negligible for the cases of a span of 10" and 20".

**Table 2** Local  $C_p$  distribution due to a  $10^\circ$  angle of attack on the vertical tail of the simplified T-tail model of Fig. 3.

a- Horizontal tail span 10 in.

Element	$C_p$	Element	$C_p$	Element	$C_p$
1	-0.1404	17	-0.3386	65	-1.7375
2	-0.0715	18	-0.1744	66	-0.5295
3	-0.0435	19	-0.0949	67	-0.3037
4	-0.0231	20	-0.0475	68	-0.1636
5	-0.2114	21	-0.3389	69	-0.7896
6	-0.1097	22	-0.1715	70	-0.5171
7	-0.0650	23	-0.0906	71	-0.3025
8	-0.0339	24	-0.0405	72	-0.1684
9	-0.2652	25	-0.2589	73	-1.7128
10	-0.1338	26	-0.1337	74	-0.4740
11	-0.0800	27	-0.0679	75	-0.2721
12	-0.0411	28	-0.0334	76	-0.1509
13	-0.3085	29	-0.0297	77	-1.4027
14	-0.1611	30	-0.0371	78	-0.3320
15	-0.0903	31	-0.0148	79	-0.1841
16	-0.0456	32	-0.0063	80	-0.1018

b- Horizontal tail span 20 in.

Element	$C_p$	Element	$C_p$	Element	$C_p$
1	-0.1248	17	-0.3519	65	-1.8880
2	-0.0617	18	-0.1959	66	-0.6187
3	-0.0430	19	-0.1241	67	-0.3672
4	-0.0262	20	-0.0673	68	-0.2008
5	-0.1910	21	-0.4022	69	-1.8900
6	-0.0996	22	-0.2225	70	-0.5674
7	-0.0680	23	-0.1343	71	-0.3406
8	-0.0402	24	-0.0707	72	-0.1929
9	-0.2465	25	-0.4254	73	-1.7724
10	-0.1330	26	-0.2276	74	-0.5012
11	-0.0892	27	-0.1294	75	-0.2926
12	-0.0513	28	-0.0665	76	-0.1645
13	-0.2993	29	-0.2085	77	-1.4346
14	-0.1649	30	-0.1211	78	-0.3453
15	-0.1081	31	-0.0624	79	-0.1940
16	-0.0604	32	-0.0311	80	-0.1085

c- Horizontal tail span 40 in.

Element	$C_p$	Element	$C_p$	Element	$C_p$
1	-0.0891	17	-0.3282	65	-2.2773
2	-0.0400	18	-0.1739	66	-0.8922
3	-0.0283	19	-0.1219	67	-0.5466
4	-0.0183	20	-0.0736	68	-0.3018
5	-0.1415	21	-0.4224	69	-2.1223
6	-0.0684	22	-0.2302	70	-0.6830
7	-0.0480	23	-0.1576	71	-0.4259
8	-0.0302	24	-0.0917	72	-0.2467
9	-0.1939	25	-0.5457	73	-1.9081
10	-0.0971	26	-0.3043	74	-0.5623
11	-0.0685	27	-0.1953	75	-0.3381
12	-0.0427	28	-0.1073	76	-0.1945
13	-0.2542	29	-0.6559	77	-1.5091
14	-0.1309	30	-0.3455	78	-0.3757
15	-0.0924	31	-0.1986	79	-0.2165
16	-0.0570	32	-0.1041	80	-0.1237

1. Elements 1 to 32 represent the left horizontal tail.
2. Elements 32 to 64 represent the right horizontal tail, and are antisymmetric to the elements 1 to 32.
3. Elements 65 to 80 represent the vertical tail.

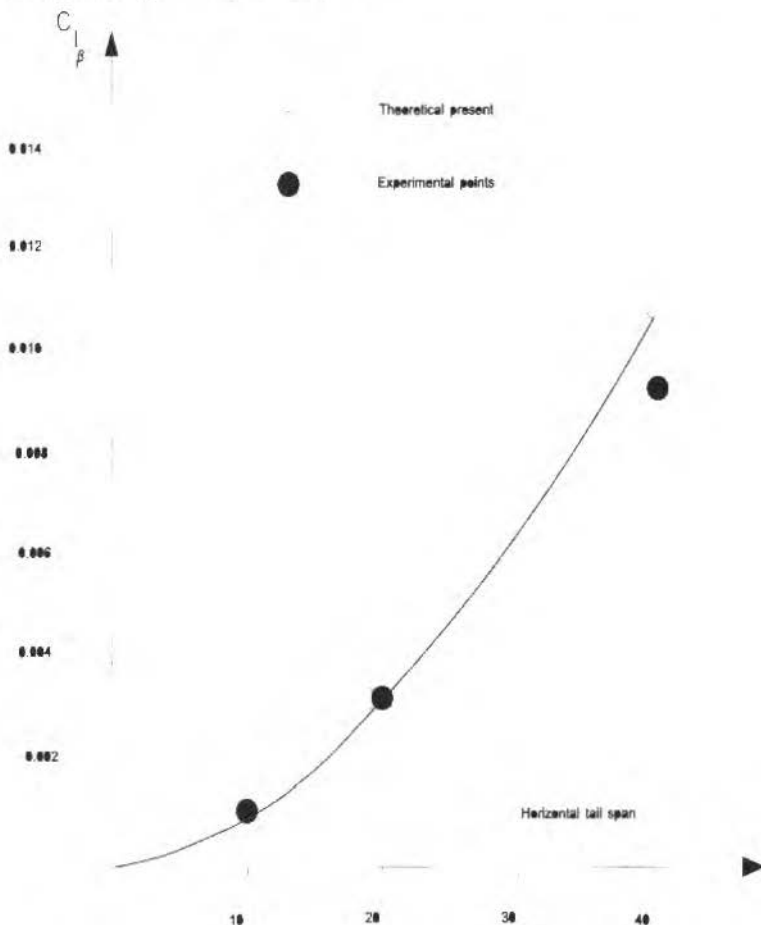


Fig. 4 Variation of  $C_{l\beta H}$  with the horizontal tail span and comparison with the wind tunnel results of Riley (1953), for the T-tail with a stub fuselage models.

## Conclusions and Final Comments

The steady state counterpart of the doublet lattice method has been used for the calculation of aerodynamic load distributions on nonplanar lifting surfaces. Several numerical results have been presented and these have been compared with experimental findings. It has been shown that the steady state counterpart of the doublet lattice method, while being extremely cost efficient in terms of computation requirements, can predict with a high degree of precision the airloads and the aerodynamic coefficients for nonplanar lifting configurations.

## References

- Albano, E. and Rodden, W.P., 1969, "A doublet-lattice method for calculating lift distribution on oscillating surfaces in subsonic flows", *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 279-285.

- Bismarck-Nasr, M.N., 1991, "Kernel function occurring in subsonic unsteady potential flow", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 6, pp. 878-879.
- Bismarck-Nasr, M.N., 1991, "On the Kernel function occurring in supersonic unsteady potential flow", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 11, pp. 2006-2007.
- Bismarck-Nasr, M.N., 1991, "On some integral representation of the Kernel function occurring in unsteady subsonic potential flow", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XIII, No. 46, pp. 361-371.
- Bismarck-Nasr, M.N., 1994, "Connections between the unsteady potential Kernel function and the exponential and trigonometric integral functions", *International Journal for Engineering Analysis and Design*, Vol. 1, No. 4, pp. 373-378.
- Carmichael, R.L., and Erickson, L.L., 1981, "PAN AIR - A high order panel method for predicting subsonic and supersonic linear potential laws about arbitrary configurations", AIAA Paper 81-1225.
- Clevenson, S.A., and Leadbetter, S.A., 1958, "Measurements of aerodynamic forces and moments at subsonic speeds on a simplified T-tail oscillating in yaw about the fin midchord", NACA TN 4402.
- Dat, R., and Malfois, J.P., 1970, "Sur le calcul du noyau de l'équation integrale de la surface portante en écoulement subsonique instationnaire", *La Recherche Aéronautique*, Vol. 5, pp. 251-259.
- Demarais, R.N., 1982, "An accurate and efficient method for evaluating the Kernel of the integral equation relating pressure to normalwash in unsteady potential flow", *AIAA Paper* 82-0687.
- Hess, J.L., and Smith, A.M.O., 1966, "Calculation of potential flow about arbitrary bodies", in *Progress of Aeronautical Sciences*, Vol. 8, pp. 1-138.
- Hess, J.L., 1972, "Calculation of potential flow about arbitrary three dimensional lifting bodies", McDonald-Douglas Co., Report No. MDC J5679-01, AD 755 480.
- Hess, J.L., 1975, "Review of the integral equation technique for solving potential flow problems with emphasis on the surface source method", *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, Vol. 5, pp. 145-196.
- Küssner, H.G., 1940, "Allgemeine Traglächentheorie", *Luftfahrtforschung*, Vol. 17, No. 11-12, pp. 370-379, see also, Küssner, H.G., 1941, "General Airfoil Theory", NACA TM 979.
- Lamar, J.E., 1968, "A modified Multhopp approach for predicting lifting pressure and camber shape for composite planforms in subsonic flow", NASA TN D-4427.
- Landahl, M.T., 1967, "Kernel function for nonplanar oscillating surfaces in subsonic flow", *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 5, pp. 1045-1046.
- Laschka, B., 1963, "Zur Theorie der Harmonisch Schwingenden Tragenden Fläche bei Unterschallanströmung", *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, Vol. 11, No. 7, pp. 265-292.
- Margason, R.J., and Lamar, J.E., 1971, "Vortex lattice fortran program for estimating subsonic aerodynamics characteristics of complex planforms", NASA TN D 6142.
- Multhopp, H., 1950, "Methods for calculating the lift distribution of wings (Subsonic lifting-surface theory)", *British ACR R&M* No. 2884.
- "PAN AIR - A computer program for predicting subsonic and supersonic linear potential flows about arbitrary configurations using higher order panel method", Vol. I - Theory Document, NASA CR - 3251, 1980. Vol. II - User's Manual, NASA CR - 3252, 1980. Vol. III - Case Manual, NASA CR - 3253, 1980. Vol. IV - Maintenance Manual, NASA CR - 3254, 1980.
- Riley, D.R., 1953, "Effect of horizontal-tail span and vertical location on the aerodynamic characteristics of an unswept tail assembly in sideslip", NACA Report 1171.
- Watkins, C.E., Ruyan, H.L., and Woolston, D.S., 1955, "On the Kernel function of the integral equation relating the lift and the downwash distribution of the oscillating finite wings in subsonic flows", NACA Report 1234.
- Woodward, F.A., 1968, "Analysis and design of wing-body combinations at subsonic and supersonic speeds", *Journal of Aircraft*, Vol. 5, No. 6, pp. 528-534.
- Woodward, F.A., 1973, "An improved method for the aerodynamic analysis of wing-body-tail configurations in subsonic and supersonic flow", Part I - Theory and Application, NASA CR 2228.
- Woodward, F.A., 1980, "USSAERO computer program development, Version B and C", NASA CR 3227.

# Análise Não-Linear de Mancais Hidrodinâmicos Montados em um Rotor Vertical

## *Non-Linear Analysis of Hydrodynamical Bearings in a Vertical Shaft*

**Katia Lucchesi Cavalca**

**Everton Nogueira Lima**

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Mecânica

Departamento de Projeto Mecânica

13083-970 Campinas, SP Brasil

### **Abstract**

*In a running rotor, bearings are of fundamental importance in defining its dynamic behaviour. Physically, the oil film viscous flow caused by the relative motion between the shaft and the bearing internal part builds up a pressure distribution on the rotor surface, yielding to non-linear hydrodynamic forces which are position and fluid condition dependent, in journal bearings. The knowledge of these forces is of fundamental importance in the analysis of the vibratory motion in mechanical equipments. This work consists in the presentation and the application of non-linear mathematical models that can represent hydrodynamic forces exerted by the oil film in bearings, which support a vertical flexible shaft in rotating machines. These non-linear forces are analytically evaluated based on the rotor shaft orbital position in the hydrodynamical bearings. These hydrodynamic forces, as well as those resulted from any eccentric unbalance, are the external excitation sources included in the system equation of motion. A particular characteristic of this method is the easy determination of the non-linear forces through an indirect solution for the pressure distribution integration. The dynamical behaviour of the system, due to external unbalancing forces, is analysed by means of the orbits, graphically plotted for some interesting running conditions. From the numerical analysis presented, the oil film whip phenomena as well as a limit cycle in cylindrical bearings for the orbits at different rotational speeds can be observed. Strong non-linearities can be observed in the tilting-pad bearings due to its variable geometry, analysing the tilt angle of the pads. The tilting-pad bearing high stability can be noticed by the rotor frequency response and its orbit amplitudes in this type of bearings.*

**Keywords:** *Hydrodynamical Bearings, Pressure Distribution, Vertical Flexible Shaft, Non-Linear Model*

### **Introdução**

O conhecimento dos fenômenos de vibração em rotores possibilitou a concepção da Dinâmica de Rotores como síntese de duas importantes áreas de pesquisa: Vibrações em Estruturas e Análise de Mancais Hidrodinâmicos. Este fato ocupa uma posição de destaque na Engenharia, por ser, atualmente, um procedimento indispensável na fase que antecede ao projeto de equipamentos rotativos. Assim, o conhecimento do comportamento dinâmico dos sistemas rotativos através do emprego de modelos matemáticos elaborados antes do projeto definitivo permitem ao analista a "predição" de possíveis problemas de operação, principalmente em relação aos níveis admissíveis de amplitudes dos deslocamentos devidos ao movimento vibratório do rotor e, especialmente, quando da passagem por alguma de suas velocidades críticas no caminho para a velocidade de operação.

Para analisar o comportamento de um sistema dinâmico com estas características, simulações numéricas para mancais do tipo cilíndrico foram apresentadas por Capone G., 1986, 1991 e Dedini F.G. et al., 1994, obtendo as órbitas descritas pelo movimento do centro do rotor com relação a um sistema de referência fixo no centro do mancal. Nestes trabalhos, algumas condições de operação para um modelo proposto de rotor são simuladas. Outro problema especificamente abordado na literatura refere-se à modelagem de mancais hidrodinâmicos do tipo segmentado (Cavalca K.L. et al., 1994 e Cavalca K.L., Lima E.N., 1997). Neste caso, a dedução do modelo emprega um sistema de referência fixo ao mancal, estabelecendo-se funções que definem as distribuições de pressões geradas no filme de óleo. Também este modelo tem sido utilizado na verificação do procedimento matemático apresentado por Cavalca K.L. et al., 1994 para representar as forças fluidodinâmicas não-lineares resultantes do campo

de pressão presente em mancais hidrodinâmicos do tipo segmentado, presentes em um rotor vertical flexível.

Um dos primeiros tipos de mancais a ser desenvolvido e a ter sua patente requerida foi o mancal do tipo segmentado, concebido no início deste século por Kingsbury e Michell. Seu emprego em grande escala, entretanto, só ocorreu após a constatação da presença de instabilidades nos mancais de geometria fixa, devidas as condições mais severas de carga aplicada ou velocidades de operação impostas pelo advento dos turbo-rotore. Com o desenvolvimento dos rotores que operam em alta rotação, e objetivando melhorar as suas condições de operação, o projeto destes equipamentos passou a utilizar a dependência das características dinâmicas do sistema sobre a folga radial, chegando-se a concepção dos mancais segmentados.

Desta forma, os mancais segmentados são projetados para melhorar as características de estabilidade pelo aumento da folga radial em operação, ou do setor carregado do mancal. Este tipo de arranjo reduz o problema da instabilidade nos rotores pela minimização dos termos de acoplamento da rigidez, por exemplo  $K_{xy}$  e  $K_{yx}$ , nos mancais cilíndricos. Neste tipo de mancal existem segmentos pivotados internamente, que oscilam em torno do ponto de pivotamento. Esta condição possibilita um ajuste da geometria do mancal à distribuição da pressão interna no filme de óleo entre o rotor e a superfície do segmento. Não existe limite para o número de segmentos a ser utilizado no projeto de um mancal. As usinas hidroelétricas, por exemplo, apresentam mancais com 12 ou até 16 segmentos, de acordo com as necessidades de projeto.

No início do movimento, o fluxo de óleo lubrificante gerado pela diferença de pressões interna faz com que o segmento se incline de um certo ângulo ao redor de seu ponto de pivotamento. O mesmo fenômeno ocorre em todos os segmentos do mancal, porém cada uma terá um ângulo de giro próprio. A força hidrodinâmica sobre o rotor é resultante das componentes cartesianas da força desenvolvida em cada segmento isoladamente.

## Modelo Matemático

### Modelo Matemático do Rotor

Para um sistema dinâmico, composto por um eixo rotativo vertical, a equação diferencial que descreve seu movimento é dada pela expressão:

$$[M] \ddot{q}(t) + [C] \dot{q}(t) + [K] q(t) = \{f_e\} + \{f_o\} \quad (1)$$

onde:

- [M] = Matriz de massa do eixo e elementos associados
- [C] = Matriz de amortecimento do eixo, que inclui a matriz giroscópica
- [K] = Matriz de rigidez do eixo
- {f<sub>e</sub>} = Vetor forças externas
- {f<sub>o</sub>} = Vetor forças do filme de óleo
- {q̈} = Vetor aceleração das coordenadas do centro do eixo
- {q̇} = Vetor velocidade das coordenadas do centro do eixo
- {q} = Vetor deslocamento das coordenadas do centro do eixo

Na Equação (1) o vetor forças externas {f<sub>e</sub>} pode agir em qualquer uma das coordenadas do sistema. Neste estudo, as forças externas agem apenas na mesma seção do Disco Rígido e são devidas à excentricidade de massa, que causa um desbalanceamento no rotor. O vetor {f<sub>o</sub>} representa as forças fluido-dinâmicas exercidas pelo filme de óleo, e contém as forças não-lineares, dependentes da posição e da velocidade do centro do rotor com relação ao centro do mancal hidrodinâmico. Consideram-se assim os efeitos da não-linearidade envolvida no movimento.



## Modelo Matemático para Mancais Cilíndricos

O mancal cilíndrico plano é o tipo mais simples e também o mais usado entre os mancais hidrodinâmicos, na ausência de altas velocidades de rotação ou elevadas cargas aplicadas. Os parâmetros dinâmicos equivalentes são o amortecimento e a rigidez.

O movimento relativo entre as superfícies do rotor e do mancal, na presença do filme de óleo e devido às variações de atrito do lubrificante, provoca uma variação na distribuição da pressão interna. A Figura 1 mostra o sistema de referência em um mancal cilíndrico plano. Devido ao efeito cunha (divergente e convergente), o fluido situado entre o rotor e a superfície do mancal é forçado a escoar pelo movimento do rotor, tendo sua pressão aumentada. Formando assim um fluxo de lubrificante no sentido da região convergente para a divergente do mancal. A pressão varia devido ao atrito viscoso do lubrificante. A distribuição da pressão hidrodinâmica atuante no rotor é equivalente a uma força que reage à carga aplicada. A não-linearidade inerente aos mancais hidrodinâmicos depende do movimento relativo do eixo no filme de óleo (Capone G., 1986, 1991). No caso de máquinas rotativas com posicionamento vertical, este movimento é relativamente grande, pois a força gravitacional que age sobre o rotor não possui componente horizontal. Esta força é a responsável pela ocorrência de um ponto de operação nos mancais em máquinas de posicionamento horizontal. O problema básico na análise de mancais hidrodinâmicos é o da determinação da distribuição da pressão no filme de óleo para dada geometria de mancal. Esta distribuição de pressão é, neste trabalho, estimada pela solução da equação diferencial de Reynolds.

Na Figura 1 representa-se o esquema de um corte na seção transversal de um rotor horizontal e do mancal com um sistema cartesiano de referência ( $Oxyz$ ) fixo ao seu centro. A carga  $W$ , ou peso próprio, é aplicada sobre o centro do rotor na direção do eixo cartesiano  $x$ , porém com sentido oposto a este. O centro  $O$  do sistema de referência é coincidente com o centro  $O_m$  do mancal e o eixo  $Oz$  é coincidente com o eixo central do mancal e a direção do vetor  $\omega$ .  $O_e$  é o centro geométrico do eixo,  $h$  é a espessura do filme de óleo e  $C$  é a folga radial do mancal. As características geométricas deste mancal são dadas pela relação entre o raio  $R=D/2$  e o comprimento  $L$ . Não são considerados os efeitos de outras forças, a não ser aquelas descritas na equação de movimento (1).

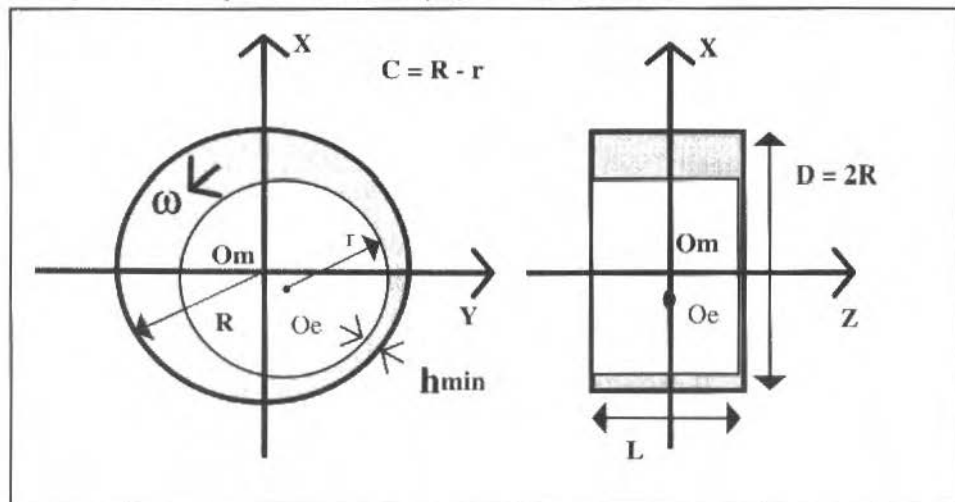


Fig. 1 Mancal cilíndrico: principais características geométricas

A Equação (2) descreve como a pressão se desenvolve no interior de um mancal hidrodinâmico cilíndrico plano, em função da espessura do filme de óleo, considerando-se os gradientes circunferencial ( $\vartheta$ ) e axial ( $z$ ) devidos ao movimento do fluido lubrificante.

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2 \frac{dh}{d\tau} \quad (2)$$

onde:

$$h = \frac{\bar{h}}{C}, x = \frac{\bar{x}}{C}, y = \frac{\bar{y}}{C}, z = \frac{\bar{z}}{L}, k = \frac{R}{L}, \tau = \omega t, \frac{\bar{p}}{p_0} = p \text{ e } \left( \frac{\cdot}{\cdot} \right) = \frac{d}{d\tau}$$

$$p_0 = 6\mu\omega \left( \frac{R}{C} \right)^2$$

$\bar{h}$  = espessura do filme de óleo

$\bar{p}$  = pressão

R = raio do mancal

r = raio do rotor

$\mu$  = viscosidade do lubrificante

$\bar{z}, \vartheta$  = coordenadas polares

$\omega$  = velocidade de rotação do eixo.

O método desenvolvido considera a hipótese de mancais curtos, onde o gradiente de pressão na direção circunferencial pode ser desprezado em relação ao gradiente na direção axial. Nestes mancais, a relação  $K=R/L$  é maior que 1. Assim, a Eq. (2) reduz-se a:

$$K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2\dot{h} \quad (3)$$

Considerando-se a configuração geométrica apresentada à Fig. 3, a espessura do filme de óleo, em sua forma adimensionalizada, pode ser obtida:

$$h = \frac{\bar{h}}{C} = 1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \quad (4)$$

A condição de contorno impõe pressão nula nas extremidades do mancal. Assim, integrando-se a Eq. (3) sujeita a estas condições para  $-1/2 \leq z \leq 1/2$ , obtém-se:

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \left[ \frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y + 2\dot{x}) \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] (4z^2 - 1) \quad (5)$$

Esta equação representa o modelo matemático da distribuição de pressão em função das coordenadas polares, para um mancal hidrodinâmico curto do tipo cilíndrico plano.

A força hidrodinâmica não-linear é obtida da integração da Eq. (5) ao longo da área de contato. A força total é, portanto, a soma vetorial das componentes nas direções  $x$  e  $y$ . Estas componentes são obtidas pela integração da expressão (5) na forma:

$$\bar{F} = - \int_A \bar{p} \, d\bar{A} \quad (6)$$

onde a superfície  $A$  é dada por:

$$A = R d\vartheta \cdot L dz \quad (7)$$

A pressão  $\bar{p}$  pode ser substituída na expressão (6) como sendo o produto dos termos  $p_0$  e  $p$ , definidos para a Eq. (2):

$$\bar{F} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} p_0 p R d\vartheta L dz \quad (8)$$

onde:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{y+2\dot{x}}{x-2\dot{y}}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{y+2\dot{x}}{x-2\dot{y}}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y+2\dot{x}) \quad (\text{Capone G.,1986})$$

Tem-se, portanto:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -3\mu\omega \frac{R^2}{C^2} (RL) \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[ \frac{(x-2\dot{y})\operatorname{sen}\vartheta - (y+2\dot{x})\operatorname{cos}\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \operatorname{cos}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (9)$$

O número de Sommerfeld modificado, para mancais curtos, é definido por:

$$\sigma = \frac{\mu\omega}{W} \left( \frac{R^2}{C^2} \right) \left( \frac{L^2}{D^2} \right) (RL) \quad (10)$$

A força hidrodinâmica não-linear é, portanto, definida pela integral dupla (11):

$$f = \frac{F}{\sigma W} = -3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[ \frac{(x-2\dot{y})\operatorname{sen}\vartheta - (y+2\dot{x})\operatorname{cos}\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \operatorname{cos}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (11)$$

Integrando-se, inicialmente ao longo da coordenada  $z$ , a Eq. (11) torna-se:

$$f = \frac{F}{\sigma W} = 2 \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[ \frac{(x-2\dot{y})\operatorname{sen}\vartheta - (y+2\dot{x})\operatorname{cos}\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \operatorname{cos}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta \end{Bmatrix} d\vartheta \quad (12)$$

Que pode ser rescrita como:

$$f = 2 \cdot \begin{Bmatrix} (x-2\dot{y}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{cos}\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} d\vartheta - (y+2\dot{x}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\operatorname{cos}^2\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} d\vartheta \\ (x+2\dot{y}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} d\vartheta - (y+2\dot{x}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{cos}\vartheta}{(1-x\operatorname{cos}\vartheta - y\operatorname{sen}\vartheta)^3} d\vartheta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

As expressões acima fornecem as componentes das forças não-lineares exercidas nas direções  $x$  e  $y$ , do sistema de referência fixado ao centro do mancal, pelo filme de óleo sobre o rotor. Para obtê-las é necessário resolver as integrais abaixo:

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2 \vartheta}{(1-x\cos\vartheta-y\sin\vartheta)^3} d\vartheta; \quad I_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1-x\cos\vartheta-y\sin\vartheta)^3} d\vartheta$$

$$I_3 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(1-x\cos\vartheta-y\sin\vartheta)^3} d\vartheta$$
(14)

Para se evitar as integrações na Eq. (13), propõe-se uma solução do tipo indireta empregando a definição da integral:

$$G(x, y, \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1-x\cos\vartheta-y\sin\vartheta)}$$
(15)

A função  $G(x, y, \alpha)$  é definida como:

$$G(x, y, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \arctg \left( \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$
(16)

Assim, as componentes da força hidrodinâmica em  $x$  e  $y$  resultam em:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{F}{\sigma W} = 2 \begin{Bmatrix} (x-2\dot{y}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x \partial y} - (y+2\dot{x}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x^2} \\ (x+2\dot{y}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial y^2} - (y+2\dot{x}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$
(17)

O aperfeiçoamento deste procedimento para obtenção das componentes da força hidrodinâmica não-linear em mancais cilíndricos planos leva a derivação parcial de primeira ordem uma nova função analítica  $V(x, y, \alpha)$ . Assim, a força hidrodinâmica passa a ser obtida pela soma vetorial de suas componentes nas direções  $x$  e  $y$ :

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \left[ (x-2\dot{y})^2 + (y+2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial V(x, y, \alpha)}{\partial x} \\ \frac{\partial V(x, y, \alpha)}{\partial y} \end{Bmatrix}$$
(18)

onde a função  $V(x, y, \alpha)$  é dada pela expressão:

$$V(x, y, \alpha) = \frac{2 + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)G(x, y, \alpha)}{(1-x^2-y^2)}$$
(19)

No entanto, com o intuito de ainda simplificar a avaliação da força hidrodinâmica, evitando-se o processo de derivação da função  $V(x, y, \alpha)$ , esta operação pode ser substituída pela introdução de uma nova função,  $F(x, y, \alpha)$ , que combinada as funções  $G(x, y, \alpha)$  e  $V(x, y, \alpha)$ , definidas em (16) e (19), passa a fornecer a força hidrodinâmica pelo sistema de equações:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \frac{[(x-2\bar{y})^2 + (y+2\bar{x})^2]^{3/2}}{(1-x^2-y^2)} \begin{Bmatrix} 3xV(x,y,\alpha) - \text{sen}\alpha G(x,y,\alpha) - 2\cos\alpha F(x,y,\alpha) \\ 3yV(x,y,\alpha) + \cos\alpha G(x,y,\alpha) - 2\text{sen}\alpha F(x,y,\alpha) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

onde:

$$F(x,y,\alpha) = \frac{(x\cos\alpha + y\text{sen}\alpha)}{(1-x^2-y^2)}$$

Como visto no sistema de Eqs. (20), este novo procedimento dispensa a necessidade de derivações na avaliação da força hidrodinâmica não-linear, o que agiliza em muito as operações numéricas.

## Modelo Matemático para Mancais Segmentados

A Figura 2 mostra a geometria de um mancal hidrodinâmico tipo segmentado.

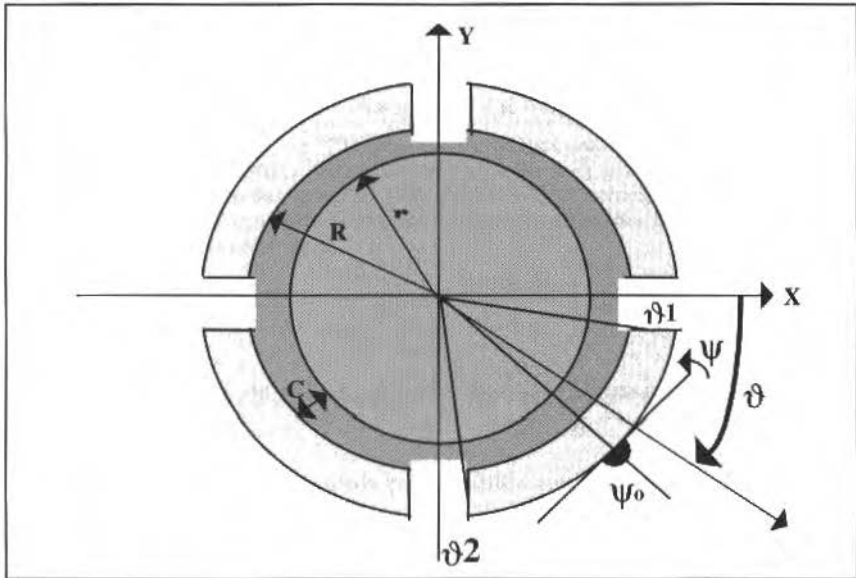


Fig. 2. Esquema representativo de Mancal Segmentado e sua geometria.

A pressão desenvolvida no segmento é obtida em função da altura mínima do filme de óleo da solução da equação diferencial de Reynolds (2) (Cavalca K.L. et al., 1994).

Para este tipo de mancal, a hipótese de mancal curto também é utilizada, o que significa que  $K=R/L$  é maior que 1. Sua integração dependerá das relações trigonométricas nas pás do mancal. Se o centro  $O_r$  do rotor se desloca de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do centro  $O_m$  do mancal, a espessura do filme de óleo, é dada pela expressão:

$$h = \frac{\bar{h}}{C} = 1 - x\cos\vartheta - y\text{sen}\vartheta - \psi_0 \text{sen}(\vartheta - \psi_0) \quad (21)$$

sendo:

$$r_0 = \frac{\bar{r}_0}{C}$$

A condição de contorno, impõe pressão nula nas extremidades do mancal, onde  $-1/2 \leq z \leq 1/2$ . Assim, a expressão que fornece a pressão hidrodinâmica exercida pelo filme de óleo é dada por:

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \left[ \frac{[(x - \psi\gamma_0) - 2(y + \psi\alpha_0)] \operatorname{sen} \vartheta - [(y + \psi\alpha_0) + 2(x - \psi\gamma_0)] \operatorname{cos} \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} \right] (4z^2 - 1) \quad (22)$$

A força hidrodinâmica não-linear será obtida pela integração da Eq. (22) que sobre a área de contato, compreendida entre o ângulo inicial  $\vartheta_1$  e o ângulo final  $\vartheta_2$  de cada segmento. A força total sobre o eixo é obtida da soma vetorial das componentes nas direções  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  em todos os segmentos.

As componentes  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$  da força hidrodinâmica dependem da espessura  $h$  do filme de óleo e de sua variação ao longo da coordenada angular  $\vartheta$  do segmento:

$$f = \frac{F}{\sigma W} = -3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[ \frac{[(x - \psi\gamma_0) - 2(y + \psi\alpha_0)] \operatorname{sen} \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} + \frac{[(y + \psi\alpha_0) + 2(x - \psi\gamma_0)] \operatorname{cos} \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} \right] \begin{cases} \operatorname{cos} \vartheta \\ \operatorname{sen} \vartheta \end{cases} (4z^2 - 1) h d\vartheta dz \quad (23)$$

Integrando-se (23) em  $z$ , vem:

$$f = 2 \left[ \begin{aligned} & [(x - \psi\gamma_0) - 2(y + \psi\alpha_0)] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta}{h^3} d\vartheta - [(y + \psi\alpha_0) - 2(x - \psi\gamma_0)] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{cos}^2 \vartheta}{h^3} d\vartheta \\ & [(x - \psi\gamma_0) - 2(y + \psi\alpha_0)] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{h^3} d\vartheta - [(y + \psi\alpha_0) - 2(x - \psi\gamma_0)] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta}{h^3} d\vartheta \end{aligned} \right] \quad (24)$$

As expressões acima fornecem as componentes das forças não-lineares exercidas nas direções  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , do sistema de referência fixado ao centro do mancal, pelo filme de óleo de um segmento sobre o rotor. Para obtê-las é necessário resolver as integrais abaixo:

$$I_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{cos}^2 \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} d\vartheta; \quad (25)$$

$$I_2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} d\vartheta \quad (26)$$

$$I_3 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0) \operatorname{cos} \vartheta - (y + \psi\alpha_0) \operatorname{sen} \vartheta]^3} d\vartheta \quad (27)$$

As integrais  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são de difícil solução analítica. Porém, através de uma solução do tipo indireta, descrita por:

$$G(x, y, \psi, \vartheta) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0)\cos\vartheta - (y + \psi\alpha_0)\sen\vartheta]} \quad (28)$$

A função analítica  $G$  torna-se dependente de novos parâmetros, que consideram agora tanto a rotação  $\psi$  do segmento, quanto os ângulos  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , que são os ângulos inicial e final das coordenadas angulares que delimitam a extensão do segmento.

A função  $G(x, y, \psi, \vartheta)$  pode, então, ser escrita como:

$$G(x, y, \psi, \vartheta) = \left[ \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi\gamma_0)^2 - (y + \psi\alpha_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (x - \psi\gamma_0)^2 - (y + \psi\alpha_0)^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{(y + \psi\alpha_0)\cos\vartheta - (x - \psi\gamma_0)\sen\vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi\gamma_0)^2 - (y + \psi\alpha_0)^2}} \right) \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (29)$$

A equação (29) possibilita, através das regras de derivação para uma função integral, apresentar as relações que envolvem a solução das integrais (25), (26) e (27). A solução destas integrais permitem a obtenção das componentes da força hidrodinâmica não-linear nas direções  $x$  e  $y$ .

A força hidrodinâmica não-linear será:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{F}{\sigma W} = \begin{Bmatrix} [(x - \psi\gamma_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi}\alpha_0)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G - [(y + \psi\alpha_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi}\gamma_0)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} G \\ [(x - \psi\gamma_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi}\alpha_0)] \frac{\partial^2}{\partial y^2} G - [(y + \psi\alpha_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi}\gamma_0)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G \end{Bmatrix} \quad (30)$$

A força hidrodinâmica pode ser calculada pelo estabelecimento de uma função  $V(x, y, \psi, \vartheta)$ , que considera a nova geometria envolvida:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\sqrt{[(x - \psi\gamma_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi}\alpha_0)]^2 + [(y + \psi\alpha_0) - 2(\dot{x} - \dot{\psi}\gamma_0)]^2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

onde:

$$V(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{1 - [(x - \psi\gamma_0)\cos\vartheta - (y + \psi\alpha_0)\sen\vartheta]}{[1 - (x - \psi\gamma_0)^2 - (y + \psi\alpha_0)^2]} G(x, y, \psi, \vartheta) \quad (32)$$

e

$$F(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{(x - \psi\gamma_0)\cos\vartheta + (y + \psi\alpha_0)\sen\vartheta}{[1 - (x - \psi\gamma_0)\cos\vartheta - (y + \psi\alpha_0)\sen\vartheta]} \quad (33)$$

assim:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{-\sqrt{[(x-\psi\alpha_0)-2(\dot{y}+\psi\alpha_0)]^2 + [(y+\psi\alpha_0)-2(\dot{x}+\psi\alpha_0)]^2}}{[1-(x-\psi\alpha_0)^2 - (y+\psi\alpha_0)^2]} \cdot \begin{Bmatrix} 3(x-\psi\alpha_0)N(x, y, \psi, \vartheta) + \operatorname{sen} \vartheta \cdot G(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta \cdot F(x, y, \psi, \vartheta) \\ 3(y+\psi\alpha_0)N(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta \cdot G(x, y, \psi, \vartheta) - \operatorname{sen} \vartheta \cdot F(x, y, \psi, \vartheta) \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Essas funções definidas para o mancal segmentado, devem ser avaliadas desde o ângulo inicial  $\vartheta_1$  até o ângulo final  $\vartheta_2$  de cada segmento, vide Fig. 2. A força hidrodinâmica total será dada pela soma das componentes nas direções  $x$  e  $y$ , de todas os segmentos do mancal.

## Descrição do Sistema Analisado

Faz-se a descrição das principais características físicas dos modelos matemáticos envolvidos na simulação numérica desta representação de máquina rotativa de rotor flexível vertical.

## Esquema do Rotor

No caso em estudo, propõe-se um modelo matemático que represente um rotor flexível vertical, acionado por um conjunto Motor-Acionista acoplado à sua parte superior, um disco rígido acoplado à sua parte inferior. O eixo é interligado à estrutura de montagem, considerada rígida, por meio de um mancal hidrodinâmico.

A Figura 3 mostra o rotor, em repouso, discretizado em elementos de viga, discos rígidos, molas e amortecedores, e situado num sistema cartesiano de referência  $Oxyz$ . Neste sistema de referência fixa, o eixo  $z$  coincide com o eixo de rotação do rotor e tem a direção coincidente com a do vetor velocidade de rotação  $\Omega$ .

O conjunto Motor-Acionista, conectado à estrutura de montagem por meio de molas, será considerado como um disco rígido, com efeito giroscópico, acoplado ao rotor como coeficiente de rigidez e amortecimento no nó 1.

O mancal hidrodinâmico está localizado no nó 4. Este nó está rigidamente interligado à estrutura de montagem para evitar influências da rigidez da estrutura sobre os efeitos de rigidez e amortecimento produzidos pelo filme de óleo lubrificante do mancal. O nó 7, na extremidade inferior do modelo de rotor, tem conectado um disco rígido. A inércia do disco produz efeitos giroscópicos no rotor. Entre os nós 1 e 7 existem seis elementos de viga, idênticos em dimensões, que interligados formam o eixo. Cada nó do modelo pode deslocar-se nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , e girar respectivamente ao redor deles com ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , conferindo a cada nó da estrutura 4 graus de liberdade.

## Elemento Mancal

As forças hidrodinâmicas não-lineares  $\{f_s\}$  do filme de óleo, calculadas pelos modelos matemáticos dos mancais, são incluídas nas equações de movimento do modelo de rotor através das componentes nas direções  $x$  e  $y$ , aplicadas no nó 4. As forças atuam sobre o rotor, no nó do mancal, e são consideradas como fonte de excitação para seu movimento flexural. As componentes  $\{f_x\}$  e  $\{f_y\}$  contribuem, na equação de movimento, com a excitação na forma:

$$q^T = \{x_1 \theta_1 \ y_1 \phi_1 \ x_2 \theta_2 \ y_2 \phi_2 \ x_3 \theta_3 \ y_3 \phi_3 \ x_4 \theta_4 \ y_4 \phi_4 \ x_5 \theta_5 \ y_5 \phi_5 \ x_6 \theta_6 \ y_6 \phi_6 \ x_7 \theta_7 \ y_7 \phi_7\}^T \quad (35)$$

$$\{f_0\} = \{0 \ 0\}^T \quad (36)$$

As forças devidas ao desbalanceamento no modelo proposto para o rotor flexível são representadas como componentes nas direções  $x$  e  $y$ , e incluídas no lado direito da equação matricial global de movimento do sistema completo (1). As forças agem no nó 7 do modelo e são dadas por:





## Simulação Numérica e Resultados Obtidos

Nas simulações numéricas realizadas, o objetivo é verificar-se a amplitude dos deslocamentos no nó 4 do modelo, já que neste nó está localizado o modelo não-linear para o mancal hidrodinâmico. Nesta simulação são obtidas as trajetórias descritas pelo centro do eixo **Or** com relação ao centro do mancal **Om**, fixo no sistema de referência **Oxyz**.

### Velocidade Crítica do Rotor

O modelo de elementos finitos do rotor possui 28 graus de liberdade. Na integração, visto não haver o efeito da gravidade em rotores verticais, admite-se que o movimento do centro do rotor **Or** parta do centro do mancal **Om**. As velocidades críticas dos modelos de rotores são avaliadas a partir de uma condição Quase-Estática, onde foram plotadas as amplitudes das órbitas para diferentes rotações do eixo. Assim foram obtidos os "mapas das amplitudes de vibração de "whirl" no mancal, causadas por desbalanceamentos.

### Modelo de Rotor com Mancal Cilíndrico

#### Comportamento a Diversas Velocidades Partindo do Repouso

A seguir são mostrados os resultados obtidos para as simulações das respostas do rotor com mancal cilíndrico, em diferentes velocidades de rotação  $\omega$ , partindo sempre da posição centrada e do repouso ( $\omega=0$ ). As Figuras 7(a) e 7(b) mostram os deslocamentos e órbitas do rotor, com velocidade de rotação de 60 [rd/s]. Percebe-se um pequeno aumento na amplitude da órbita a 60 [rd/s] com relação a de 30 [rd/s](Figs. 6(a) e 6(b)), indicando o início da instabilidade do filme de fluido, que ocorre a 80 [rd/s] (Figs. 8(a) e 8(b)).

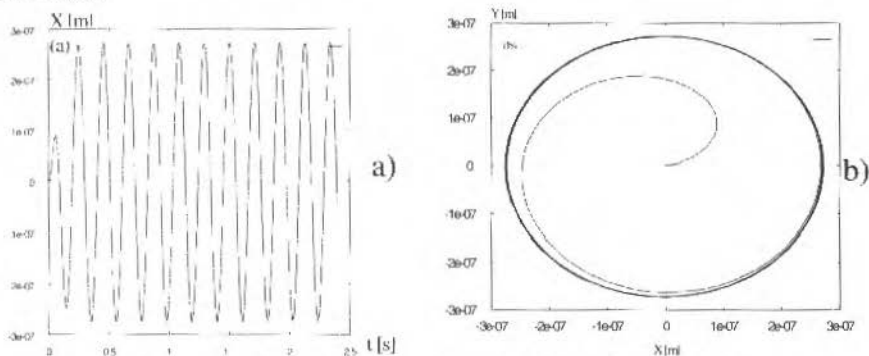


Fig. 6 (a) Deslocamento em x;  $\omega = 30$ [rd/s], (b)Orbita (nó=4;  $\omega = 30$ rd/s)

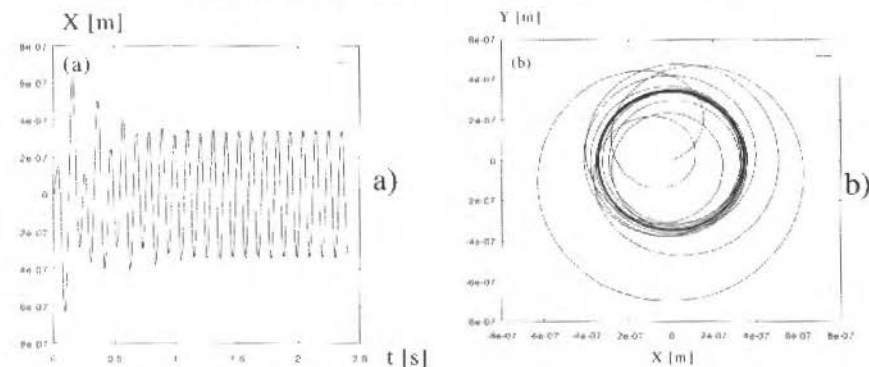


Fig. 7 (a) Deslocamento em x;  $\omega = 60$ [rd/s], (b)Orbita (nó=4;  $\omega = 60$ rd/s)

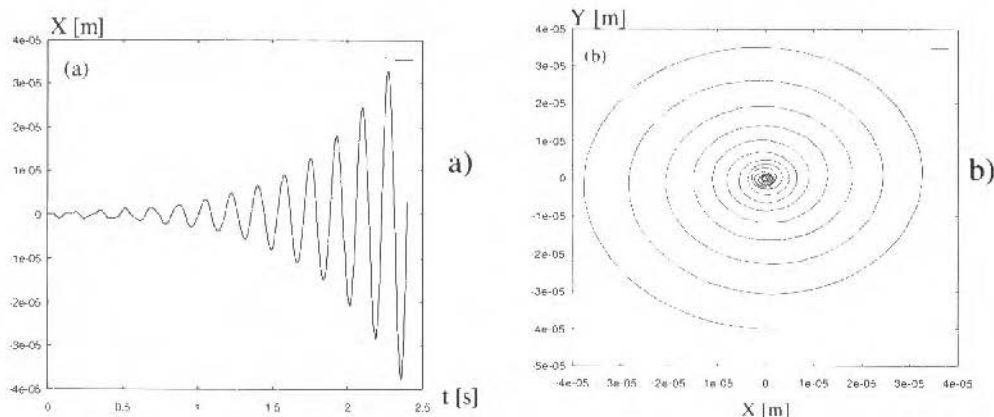


Fig. 8 (a) Deslocamento em  $x$ ;  $\omega = 80$  [rd/s], (b)Orbita (nó=4;  $\omega = 80$ rd/s)

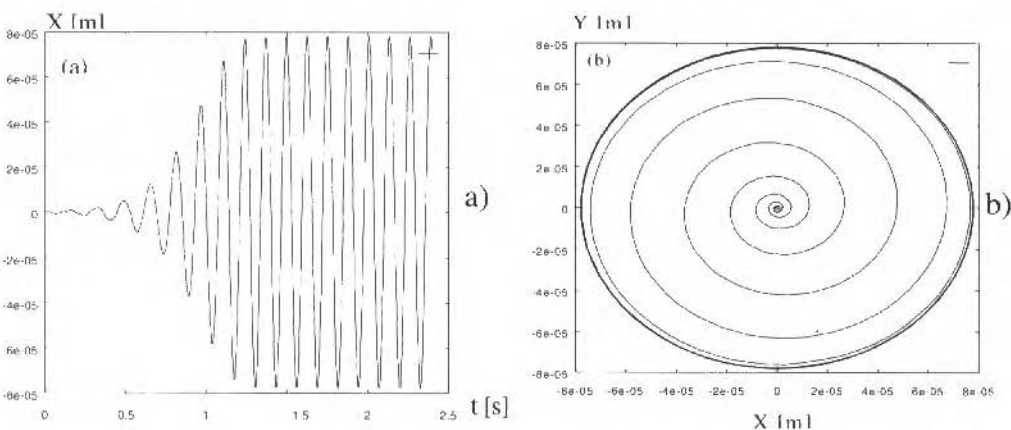


Fig. 9 (a) Deslocamento em  $x$ ;  $\omega = 100$  [rd/s], (b)Orbita (nó=4;  $\omega = 100$ rd/s)

### Efeitos "Whip/Whirl" do Filme de Óleo

Mancais hidrodinâmicos estão sujeitos à uma outra forma de vibração chamada auto-excitada (Ehrich F.F.,1992). O movimento de vibração, neste caso, é criado e/ou controlado pelo próprio sistema. A amplitude da vibração deste movimento vai aumentando, até que algum efeito não-linear limite este crescimento. A energia que supre as vibrações é obtida de uma fonte de potência uniforme associada ao sistema, a qual dá início ao movimento, devido a algum mecanismo inerente ao sistema. Na vibração auto-excitada, as forças desestabilizadoras são criadas pelo próprio movimento e farão que, em certas condições, o sistema assim excitado vibre na sua própria frequência natural, independente de qualquer outro estímulo externo.

A vibração auto-excitada tem uma característica própria que é, em certos sistemas, o surgimento de uma força tangencial normal à deflexão radial do eixo em rotação. A amplitude desta força é proporcional à deflexão e em dado momento, esta força irá superar as forças estabilizadoras devidas ao amortecimento externo e induzirá um movimento de "whirling" de amplitude sempre crescente, limitadas somente pelas não-linearidades na rigidez, que por sua vez, limitam as deflexões.

Geralmente, os fenômenos de instabilidade nos rotores ocorrem acima da primeira velocidade crítica, muitas vezes num valor próximo ao dobro da mesma, quando a componente hidrodinâmica tangencial supera o amortecimento do filme de óleo. Para o caso do mancal cilíndrico em estudo, este fenômeno ocorre a 80 [rd/s] (Fig. 8).

Simulou-se a resposta dinâmica do sistema com mancal cilíndrico plano até 160 [rd/s]; a Fig. 10 mostra que o salto de amplitude próximo a 80 [rd/s] permanece com o valor elevado de amplitude até o final da simulação, não caracterizando uma segunda frequência natural.

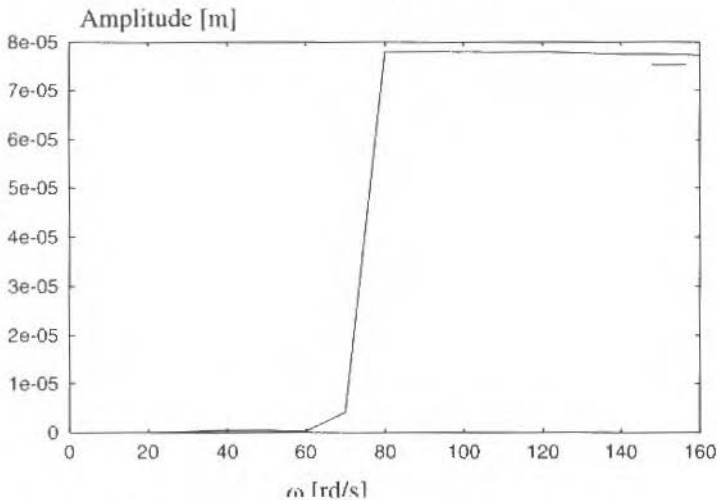


Fig. 10: (a) Amplitude do Deslocamento X Rotação ( $n=4$ ).

Para complementar a análise deste efeito, as Figs. 11(a) e 11(b) complementam a análise iniciada no item Comportamento a Diversas Velocidades Partindo do Repouso

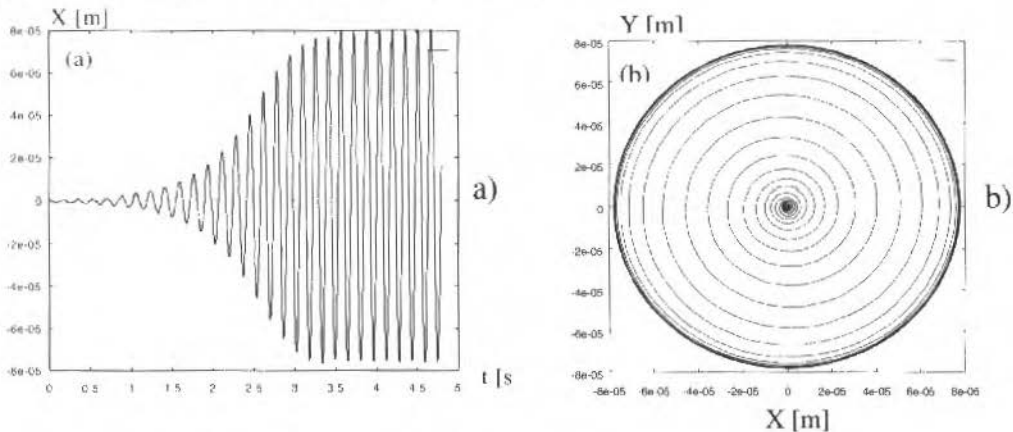


Fig. 11 (a) Deslocamento em x;  $\omega = 80$  [rd/s], (b) Órbita ( $n=4$ ;  $\omega = 80$  [rd/s]).

### Efeito de um Impulso Atuando Sobre o Mancal

Finalizando a análise do mancal cilíndrico, foram estudados os efeitos de eventuais impulsos externos atuando no rotor no nó do mancal. O objetivo desta análise é verificar se o impulso pode desestabilizar o ciclo limite do centro do rotor no interior do mancal, ocasionando contato direto entre os mesmos.

Inicialmente, um impulso de 50 [N] foi suficiente para deslocar a órbita do eixo no interior do mancal à uma rotação de 30 [rd/s]. As Figuras 12(a) e 12(b) exemplificam o impulso atuando na direção x em sentido negativo. As Figuras 13(a) e 13(b) exemplificam o impulso atuando na direção x em sentido positivo.

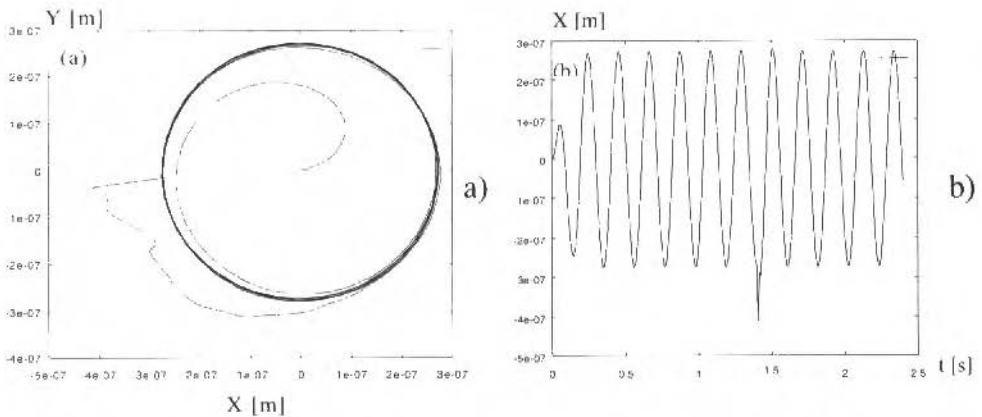


Fig. 12 (a)Orbita do centro do eixo, (b) Amplitude do Deslocamento na direção x

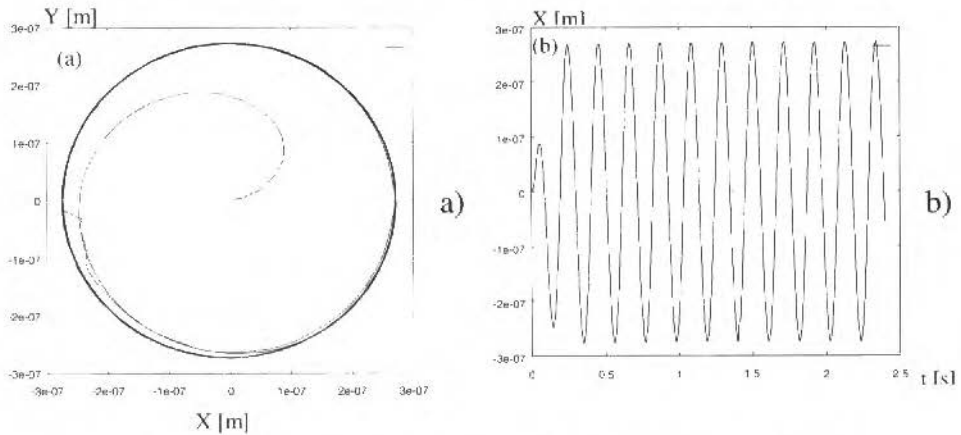


Fig. 13 (a)Orbita do centro do eixo, (b) Amplitude do Deslocamento na direção x

A seguir, a mesma análise foi realizada para a rotação de 100 [rd/s], sendo que, neste caso, foi necessário um impulso de 5000 [N] para deslocar o rotor de seu ciclo limite. As Figuras 14(a) e 14(b) exemplificam o impulso atuando na direção x, sentido positivo. Nota-se, nos casos simulados, que o ciclo-limite parece atrair para si o movimento oscilatório, após a atuação do impulso.

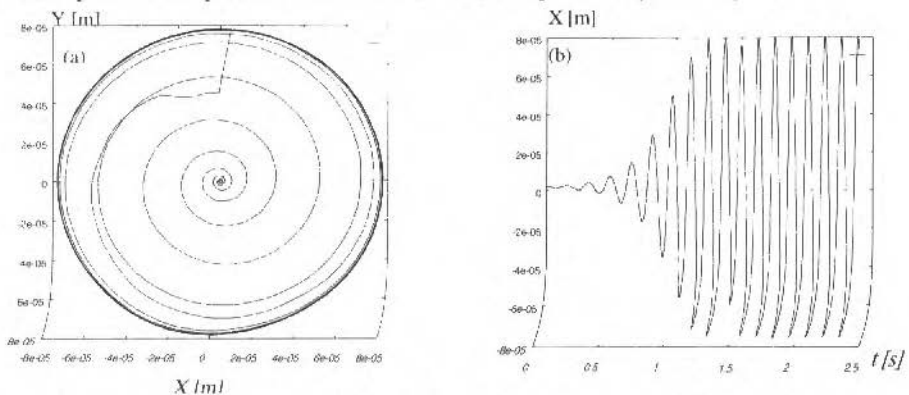


Fig. 14 (a)Orbita do centro do eixo, (b) Amplitude do Deslocamento na direção x.

## Modelo do Rotor com Mancal Segmentado

### Comportamento a Diversas Velocidades de Rotação

A seguir são mostrados os resultados obtidos para as simulações das respostas do rotor com mancal segmentado, em diferentes velocidades de rotação  $\omega$ , partindo sempre da posição centrada e do repouso ( $\omega=0$ ).

São mostradas as órbitas e deslocamentos do centro do rotor, no nó 4 onde se localiza o mancal, a diferentes velocidades de rotação, partindo centrado e em repouso. As Figuras 15(a) e 15(b), 16(a) e 16(b), 17(a) e 17(b), e 18(a) e 18(b) descrevem os deslocamentos e órbitas do rotor, agora com velocidades de rotação de 30 [rd/s], 60 [rd/s], 80 [rd/s] e 100 [rd/s], respectivamente.

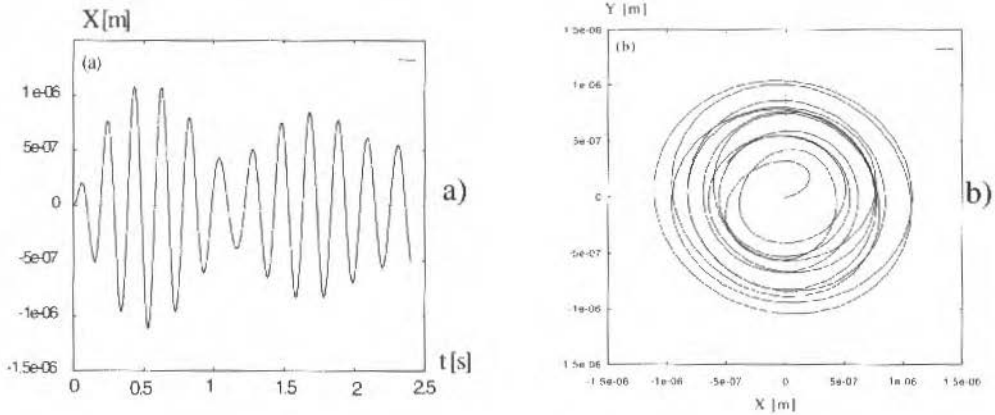


Fig. 15 (a) Deslocamento em x Versus Tempo, (b) Órbita do centro do eixo, nó=4,  $\omega=30$ [rd/s]

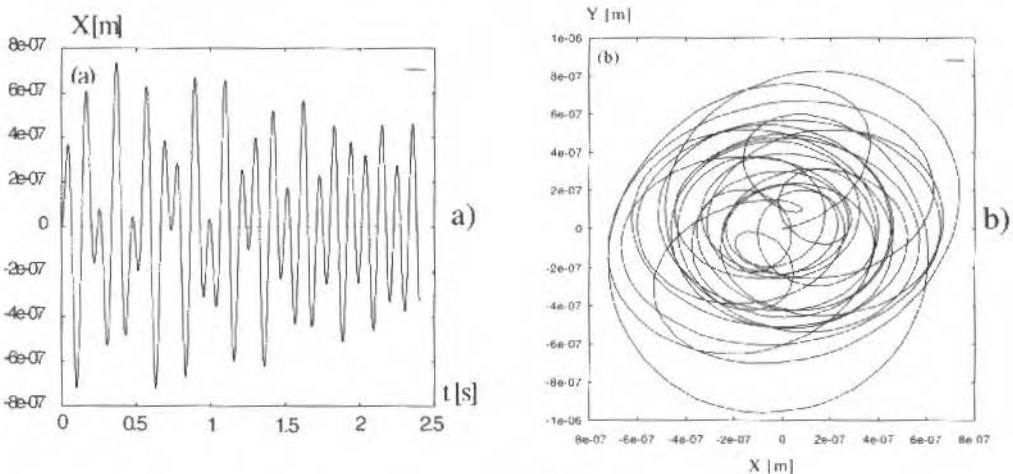


Fig. 16 (a) Deslocamento em x Versus Tempo, (b) Órbita do centro do eixo, nó=4,  $\omega=60$ [rd/s]

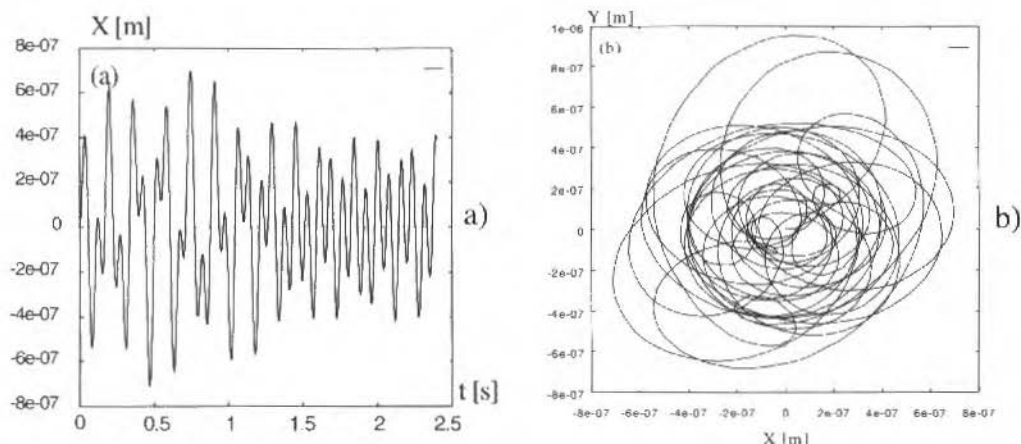


Fig. 17 (a) Deslocamento em x Versus Tempo, (b) Órbita do centro do eixo,  $n=4$ ,  $\omega=80$  [rd/s]

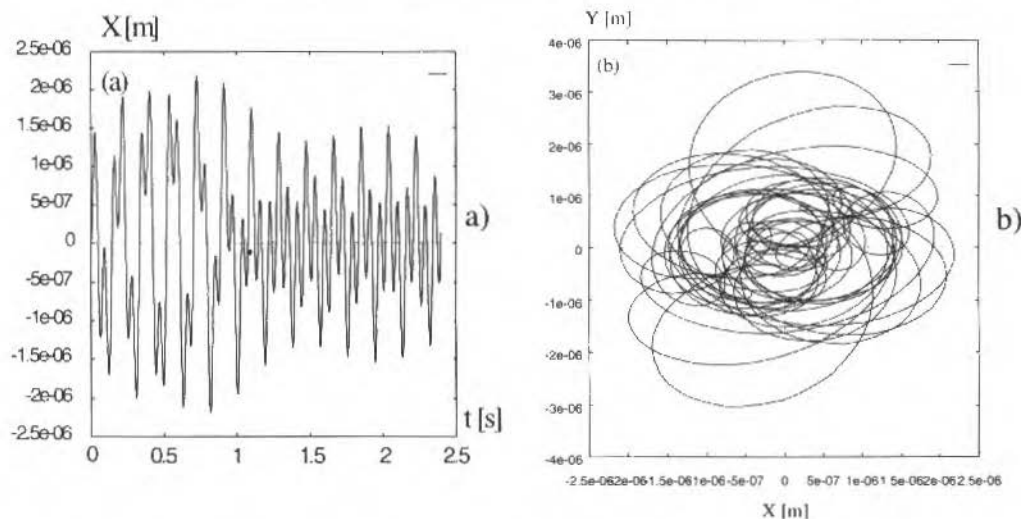


Fig. 18 (a) Deslocamento em x Versus Tempo, (b) Órbita do centro do eixo,  $n=4$ ,  $\omega=100$  [rd/s]

## Resposta em Frequência

A vibração auto-excitada a que estão submetidos os rotores que operam sobre mancais cilíndricos e que provoca a instabilidade do filme de óleo não ocorre no mancal segmentado. Este tipo de mancal representou uma "revolução" para a estabilidade de rotores flexíveis, já que seu projeto minimiza as forças, ou ainda, os coeficientes cruzados e acoplados de rigidez equivalente. Os mancais segmentados possuem menor amortecimento a baixas velocidades se comparado aos mancais cilíndricos, entretanto são inerentemente estáveis e não entram em instabilidade de filme de óleo.

A fim de verificar com maior precisão o comportamento do rotor numa faixa mais ampla de rotação, simulou-se a resposta dinâmica do sistema com mancal segmentado. A Fig. 19 mostra que, para o mancal segmentado, a resposta em frequência até 250 [rd/s] não apresenta o fenômeno de instabilidade, podendo-se perceber o pico característico da segunda velocidade crítica do sistema com este tipo de mancal a 200 [rd/s].

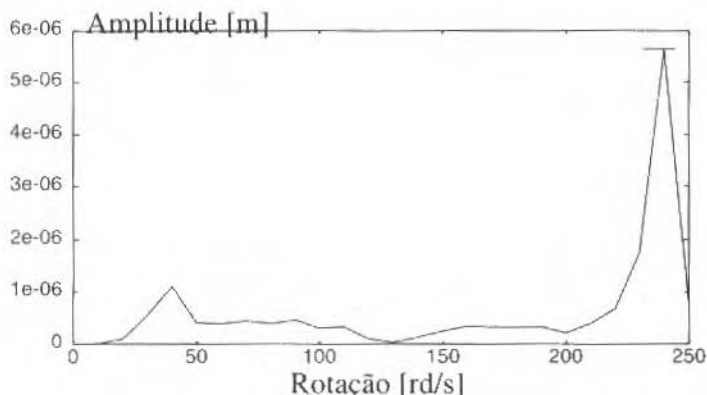


Fig. 19 Resposta em frequência, mancal segmentado, nó=4.

## Conclusões

O trabalho realizado é uma contribuição ao estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas verticais de rotores flexíveis interligadas por meio de mancais hidrodinâmicos às estruturas de montagem. Foi introduzido e aplicado o modelo não-linear para mancais hidrodinâmicos cilíndricos planos e simuladas algumas condições de operação. Após as simulações realizadas pode-se afirmar que o modelo confirma a previsão da teoria para modelos não-lineares para o mancal tipo cilíndrico, onde ocorreu a instabilidade do filme de óleo no dobro da primeira velocidade crítica, como visto na teoria. No caso de projetos, o mancal cilíndrico, certamente de custo mais baixo, permite que a faixa de operação desta máquina esteja restrita entre a primeira velocidade crítica e a velocidade na qual ocorrem os efeitos de instabilidade do filme de óleo, onde devido a elevada amplitude do movimento, as forças de reação na estrutura tornam-se excessivas e indesejáveis. Do ponto de vista da manutenção, se novos critérios de produção exigem que a velocidade de operação seja aumentada, a máquina com mancais cilíndricos apresentará níveis altíssimos de vibração devido a fenômenos que podem ser desconhecidos aos engenheiros de manutenção. A simulação numérica poderá, neste caso, fornecer rapidamente fundamentos para decisão sobre qual o tipo de mancal utilizar.

O trabalho também propõe uma técnica de modelagem não-linear para mancais hidrodinâmicos segmentados e sua aplicação em um rotor vertical flexível. Após as simulações realizadas, verificou-se que o modelo confirma a previsão da teoria para efeitos não-lineares de mancais segmentados curtos, onde os níveis de vibração são muito menores que os apresentados para o mancal cilíndrico a elevadas rotações, bem como, pela minimização dos termos cruzados e acoplados de rigidez, este componente apresenta elevada estabilidade em relação aos mancais de geometria fixa. O comportamento do mancal segmentado, fortemente não-linear e altamente estável, posiciona a faixa de operação desta "máquina" entre aproximadamente 50 e 200 [rd/s]. O emprego da modelagem matemática de sistemas dinâmicos, para o conhecimento prévio dos níveis de vibração alcançados pelas máquinas e suas possíveis faixas de operação, é de fundamental importância como parâmetro de decisão tanto na fase de projeto, como em eventuais planejamentos de manutenção. Eventuais complementações poderão ser realizadas com a construção e teste de bancada ou máquina com os dados equivalentes dos modelos para a comprovação experimental. Um passo importante na continuidade destes estudos é a calibração experimental do modelo desenvolvido, bem como as comparações entre os comportamentos dinâmicos do rotor sujeito à ação de forças hidrodinâmicas de sustentação provenientes de mancais de geometria fixa e de geometria móvel.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP, ao CNPq e a FAEP (UNICAMP) pelo suporte financeiro deste trabalho.



## Referências

- Capone G., 1986, "Orbital motions of rigid symmetric rotor supported on journal bearings", *La Meccanica Italiana*, 199, pp.37-46.
- Capone G., 1991, "Descrizione analitica del campo di forze fluidodinamico nei cuscinetti cilindrici lubrificati", *L'Energia Elettrica*, vol.3, pp.105-110.
- Cavalca K.L., Dedini F.G., Piccoli H.C., Weber H.I., 1994, "The relevance of the fluid dynamic force field influence on the behaviour of a vertical rotor with a tilting-pad journal bearing", *Machine Vibration*, Springer-Verlag London Limited, vol.3, pp.55-61.
- Cavalca K.L., Lima E.N., 1995, "A non-linear model for short tilting-pad journal bearings", *COBEM-CIDIM/95*, Belo Horizonte - MG, em CD.
- Cavalca K.L., Lima E.N., 1997, "The Dynamical Analysis of a Rotating System Supported by Non-linear Hydrodynamic Bearings", 2nd International Conference on Hydrodynamic Bearing-Rotor System Dynamics, China.
- Dedini F.G., Cavalca K.L., Piccoli H.C., Weber H.I., 1994, "The relevance of the fluid dynamic force field influence on the behaviour of a vertical rotor with a cylindrical journal bearing", *III CEM-NNE/94*, Belém - PA, pp.376-379.
- Ehrich F.F., 1992, "Handbook of Rotordynamics", McGraw Hill, New York.
- Lima E.N., Cavalca K.L., 1996, "Non-linearities in Hidrodynamic Bearings", *ICONE'96*, São Pedro - SP.
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1989, "Numerical Recipes in Pascal-The art of scientific computing", Cambridge University Press, New York.

## Errata

**Paper:** "Steady, Spatially-Periodic Fully-Developed Turbulent Flow in Interrupted-Plate Channels"  
**Author:** Simone Sebben  
**e-mail:** Simone@enq.ufrgs.br  
**Journal:** Vol. XIX, No. 4, December 1997

- Page 449 – The correct form of Eq. 12 is:

$$Re = \frac{\rho \bar{U} (2H)}{\mu} \quad \text{and} \quad ff = \frac{\beta (2H)}{0.5 \rho U^2}$$

- Page 451 – The correct form of Eq. 13 is:

$$\alpha = MIN \left( \left[ \frac{|\sum a_{nb} - S_p \Delta V|}{1.3 \sum |a_{nb}|} \right]_{ij} \right)$$

# Propagação por Fadiga de Trincas Superficiais Semi e Quarto-Elípticas em Soldas Molhadas

## *Fatigue Propagation of Superficial Semi and Quart-Elliptical Cracks in Wet Welds*

**Jaime Tupiassú Pinho de Castro**

Pontifícia Universidade do Rio de Janeiro  
Departamento de Engenharia Mecânica  
jtcastro@mec.puc-rio.br

**Adrian Giassone**

ITUC PUC-Rio  
22453-900 Rio de Janeiro, RJ Brasil

**Paulo Pedro Kenedi**

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto de Geociências  
21945-970 Rio de Janeiro, RJ Brasil

### Abstract

*The mechanical properties of the base and of the wet weld metals used in offshore platforms were measured and used to model the fatigue propagation of the superficial semi-elliptical and of the corner quart-elliptical cracks. Both the tri-dimensional geometry of the cracks and the influence of the fatigue crack propagation threshold are explicitly considered, and the results are interpreted from the design and from the non-destructive inspection points of view.*

**Keywords:** *Fatigue, Superficial Cracks, Wet Welds.*

### Resumo

*As propriedades mecânicas de um aço estrutural e do metal depositado por soldagem molhada foram medidas e usadas para modelar o problema da propagação por fadiga de trincas superficiais semi-elípticas e de canto quarto-elípticas. Tanto a complexidade do problema geométrico, quanto a influência do limiar de propagação das trincas por fadiga são explicitamente consideradas, e os resultados são interpretados dos pontos de vista da inspeção não-destrutiva e do projeto estrutural.*

**Palavras-chave:** *Fadiga, Trincas Superficiais, Soldas Molhadas*

### Introdução

A soldagem submarina enfrenta tantos problemas tecnológicos que a solução usual na prática da engenharia é construir câmaras vedadas em volta do membro a ser soldado para mante-lo seco, quando qualidade e alta resistência estrutural devam ser obtidas. Este é um processo extremamente caro, o que torna atrativa a solução muito mais econômica da soldagem molhada (feita dentro d'água), a qual entretanto possui piores propriedades mecânicas e metalúrgicas.

Este trabalho estuda a propagação de trincas superficiais e de canto em estruturas soldadas, usando as propriedades à fadiga medidas no metal de base (SAR-60 usado em plataformas de perfuração) e em soldas molhadas feitas com eletrodo oxidante de baixa difusividade de  $H_2$ , para evitar trincas na zona termicamente afetada (ZTA), seguindo um processo desenvolvido pela Petrobrás.

Vale lembrar que soldas molhadas caracterizam-se por: (i) arco instável, filetes irregulares, e altas porosidade e concentração de inclusões, quando comparada com a soldagem tradicional a seco; (ii) alta concentração de  $H_2$  e  $O_2$  na poça de soldagem, devido à dissociação da água; e (iii) alta taxa de resfriamento e baixa tenacidade na ZTA. Detalhes metalúrgicos adicionais (Giassone, 1995) são considerados fora do escopo deste trabalho.

Trincas superficiais são freqüentemente encontradas em estruturas soldadas, particularmente nas soldas molhadas. Para entender seu comportamento à fadiga é interessante estudar como elas se propagam numa barra sujeita à tração ou à flexão pulsante. Para modelar este problema seguindo uma metodologia de projeto à fadiga bem posta, são necessárias informações em seis áreas complementares, ver Fig. 1 (Castro et al., 1995 e 1996):



Fig. 1 Corrente de análise da integridade estrutural

- (i) **Geometria:** As três características mais importantes das falhas por fadiga são: (i) iniciam-se em pontos, (ii) são progressivas, e (iii) requerem análise local. Logo, ao se quantificar as dimensões das peças é indispensável medir os entalhes e, se já presentes, as trincas. Neste trabalho analisam-se barras de seção retangular de largura  $W$  e espessura  $t$ , com uma trinca superficial semi-elíptica de comprimento  $2c$  e profundidade  $a$ , ou de canto (quarto de elipse) de traços  $a$  e  $c$  (Fig. 2).
- (ii) **Cargas:** Todas as solicitações capazes de causar dano precisam ser contabilizadas. Na prática este é freqüentemente o passo menos confiável, já que cargas reais são complexas e devem ser medidas, não estimadas. Entretanto, como as trincas deste trabalho são complexas, para identificar seu comportamento especifica-se um carregamento pulsante simples de amplitude constante, com componentes trativa ou de membrana  $\Delta P$ , e fletora  $\Delta M$ .
- (iii) **Análise das Tensões:** Para quantificar as solicitações nominais no caso de peças trincadas, ou para estudar a iniciação das trincas nas peças não-trincadas (neste caso, como fadiga é um problema local, a análise deve ser feita nos pontos críticos da peça, cuja dimensão depende do tamanho característico da anisotropia da microestrutura do material). A análise da peça deste trabalho é trivial: no caso da solicitação trativa ou de membrana,  $\Delta\sigma_n = \Delta P/Wt$ , e no de flexão,  $\Delta\sigma_n = 6\Delta M/Wt^2$ .
- (iv) **Análise da Trinca:** Trincas devem ser analisadas pela quantificação do seu fator de intensidade de tensões  $K_t$ . Entretanto, deve-se notar que nos casos aqui estudados  $K_t$  em geral não é constante na ponta das trincas. Devido a isto, elas não se propagam por fadiga de forma homóloga, tendendo a mudar de forma a cada ciclo. Por isto o problema da propagação de trincas superficiais não pode ser modelado como uni-dimensional.
- (v) **Propriedades Mecânicas:** Para minimizar as incertezas deste passo as propriedades de fadiga devem ser medidas, não estimadas. (Note-se que analisar a partir de propriedades nominais é prática usual, mas que pode gerar grandes erros nas previsões de vida). As propriedades usadas nas modelagens deste trabalho foram experimentalmente obtidas.
- (vi) **Acúmulo de Dano:** Para quantificar o efeito da seqüência dos carregamentos, foram integradas as equações (medidas) das taxas de propagação das trincas, considerando-se o efeito do limiar de propagação  $\Delta K_{th}$  e a variação da forma das trincas a cada ciclo.

Na seqüência primeiro descrevem-se os procedimentos experimentais usados para obter as propriedades de fadiga, a seguir apresenta-se a mecânica das trincas elípticas, e conclui-se com o estudo de uma série de casos de interesse para a compreensão do comportamento das trincas superficiais.

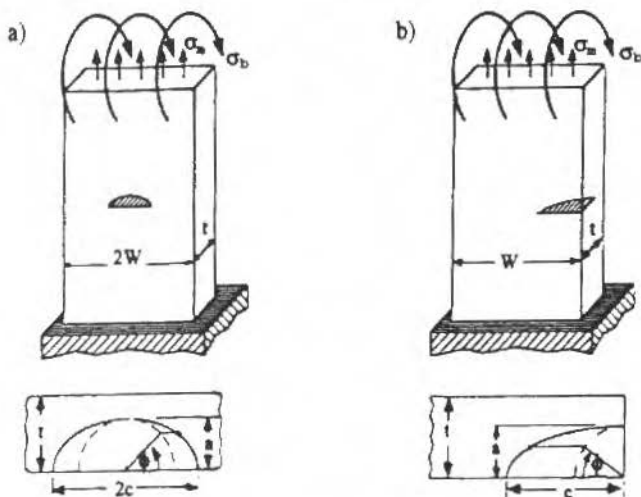


Fig. 2 Parâmetros geométricos das barras e trincas: a) semi-elíptica, b) de canto

## Procedimentos Experimentais

O metal de base (MB) testado foi o aço estrutural SAR-60, fornecido na forma de placa de 25mm de espessura, com  $S_u = 620\text{MPa}$ ,  $S_y = 540\text{MPa}$ ,  $e_t = 48\%$  (ruptura, escoamento e alongamento, respectivamente) e composição dada na tabela 1.

Tabela 1 Composição química do aço SAR-60, em peso %.

C	S	P	Si	Mn	Ni	Cr	Mo	V	Cu	Ti	Al
.12	.007	.014	.024	1.09	.02	18	.14	.09	<.01	.02	.04

As placas foram soldadas a 1m de profundidade em água doce. As propriedades trativas do metal depositado (MD) foram medidas de uma forma bem mais cuidadosa que a usual, usando-se corpos de prova (CPs) prismáticos de seção quadrada com 10mm de lado e com o MD na sua parte central. Nesta foram colados 2 *strain gages* em lados adjacentes, para: (i) medir o módulo de Young  $E$  e o comportamento elasto-plástico até cerca de 1% de deformação; e (ii) eliminar os efeitos de qualquer flexão residual (é particularmente difícil evitar a flexão dos CPs nas cargas pequenas, logo é importante eliminar seus efeitos numericamente). Um *clip-gage* foi usado em paralelo para medir o resto da curva  $\sigma-\epsilon$ . Os testes foram feitos numa Instron eletromecânica. Os três transdutores foram conectados a um micro via uma placa A/D. Os dados foram analisados em tempo real via um programa que lê seqüencialmente transdutores de faixas diferentes, para estudar com precisão tanto o comportamento elástico quanto o plástico do material testado (Pacheco e Castro, 1989).

34 CPs do MD foram testados (Tabela 2), e em cada um o módulo  $E$  foi medido pela média dos 2 *strain-gages*. Note-se a grande dispersão dos resultados, causada pela heterogeneidade do MD, o qual tem uma taxa volumétrica média de defeitos da ordem de 1%.

Tabela 2 Propriedades do metal depositado (eletrodo oxidante)

$E$	$\delta(E)$	$S_y$	$\delta(S_y)$	$S_u$	$\delta(S_u)$	$e_t$	$\delta(e_t)$
174 GPa	6.84 %	390 MPa	8.31 %	463 MPa	5.77 %	15.5 %	31.6 %

$\delta(\ )$  = desvio padrão / média

Em testes de propagação de trincas por fadiga, a medida do comprimento da trinca  $a$  é a maior fonte de erros experimentais. Dentre os métodos analógicos de medição, o da flexibilidade é dos mais precisos e versáteis (Castro, 1985). Ele baseia-se na correlação de  $K_I$  com a carga  $P$  aplicada sobre o CP, sua espessura  $B$ , o módulo  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$ , e a variação da flexibilidade  $C$  do CP com o incremento da trinca,  $dC/da$ :

$$K_I = \sqrt{\frac{P^2 E}{2B(1-\nu^2)}} \left( \frac{\partial C}{\partial a} \right) \quad (1)$$

Esta equação requer que a flexibilidade do CP seja medida pelo deslocamento dos pontos de aplicação da carga, uma tarefa não-trivial na prática. Outras medidas de flexibilidade, como a abertura da boca da trinca (COD), não são diretamente correlacionadas com  $K_I$ . Além disto, em testes de fadiga é indispensável garantir que  $C$  seja medida com a trinca totalmente aberta, ver Fig. 3.

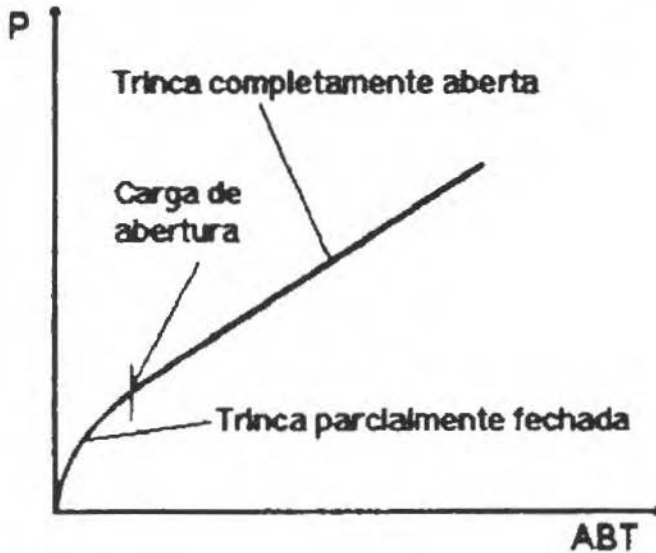


Fig. 3 Não linearidade inicial causada pelo fechamento de trinca

Para se minimizar os erros experimentais, nos testes deste trabalho usou-se a técnica da deformação da face traseira (DFT), colando-se um *strain-gage* no centro da face oposta à boca da trinca num CP compacto de tensão (CTS). Para uma dada carga, a DFT é função do comprimento  $a$  da trinca. Esta técnica requer uma curva de calibração como a do COD, mas tem vantagens interessantes como baixo custo, sinais livres de histerese e mínimos efeitos do fechamento da trinca, já que a DFT só precisa ser medida na carga máxima (Camarão e Castro, 1989).

Foram usados CTS de 30mm, com  $B = 12$ mm. As trincas foram propagadas na direção T-L no MD e na L-T no MB (ASTM E-612), para reproduzir o que ocorre na prática. Os testes foram feitos com  $R = K_{min}/K_{max} = 5\%$ , numa servo-hidráulica sob controle de carga (senoidal, 20Hz), primeiro decrescendo o  $\Delta K_I$  inicial em passos de 10% e ajustando a carga para manter  $\Delta K_I$  constante dentro de 3% em cada passo, até atingir  $\Delta K_{in}$ . O crescimento da trinca era reiniciado por um pequeno incremento da carga, que era então mantida constante para deixar  $\Delta K_I$  crescer com a trinca.

As taxas  $da/dN$  de crescimento das trincas são bem descritas em ambos os materiais testados por uma equação tipo Elber, assumindo  $\Delta K_{in}$  como a carga de abertura das trincas, ver Figs. 4 e 5 (unidades mm/ciclo e  $MPa\sqrt{m}$ ):

$$\text{Metal de Base (aço SAR-60): } \frac{da}{dN} = 1,7 \cdot 10^{-7} \cdot (\Delta K - 6)^2 \quad (2)$$

$$\text{Metal Depositado (solda molhada): } \frac{da}{dN} = 5 \cdot 10^{-8} \cdot (\Delta K - 8)^3 \quad (3)$$

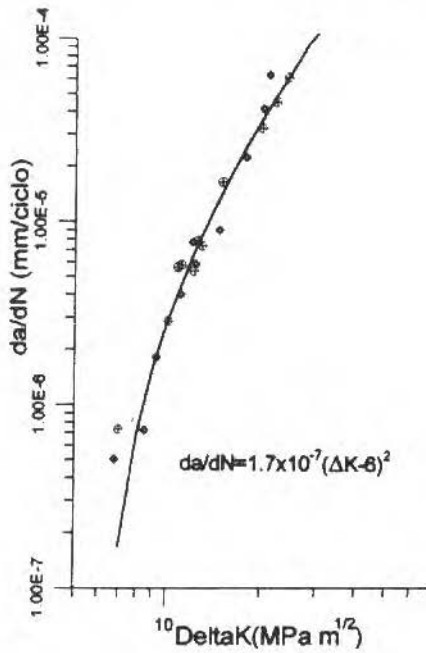


Fig. 4 Curva da/dN vs.  $\Delta K$  medida para o metal base

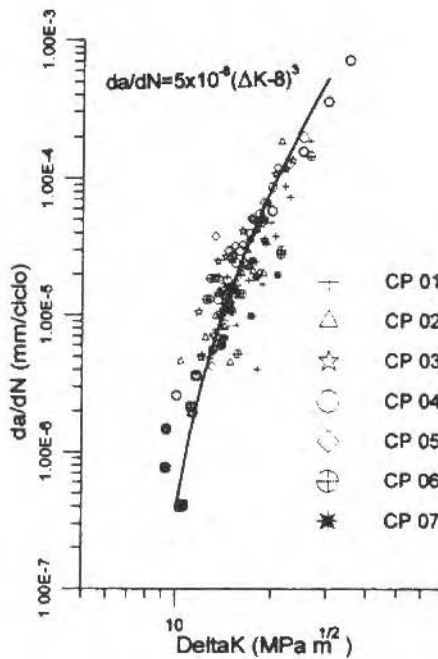


Fig. 5 Curva da/dN vs.  $\Delta K$  medida para o metal de solda

Estes materiais possuem um comportamento à fadiga interessante, pois suas curvas de propagação se cruzam. O MD é mais sensível à  $\Delta K_{th}$ , mas ele possui um maior limiar  $\Delta K_{th}$  que o MB. Os dados do material soldado também são sensivelmente mais dispersos do que os do aço. Isto é devido à microestrutura heterogênea do filete de solda molhada, onde as porosidades e inclusões podem cegar e/ou ramificar a ponta da trinca, e também aumentar o nível do fechamento induzido por rugosidade (Suresh, 1991), funcionando desta forma como obstáculos à propagação em baixos  $\Delta K$ , particularmente na região do limiar. A medida que o valor de  $\Delta K$  cresce, o efeito da redução de área causado pelos defeitos ultrapassa os dos mecanismos de retardo, acelerando as taxas de propagação. Além disto, o MD tem uma resistência muito baixa às deformações plásticas cíclicas, daí o maior expoente da sua curva de propagação.

A Figura 6 suporta esta explicação fenomenológica: na fractografia por varredura podem ser vistas as estrias de fadiga entre um número de inclusões e/ou porosidades, bem como a presença de trincas secundárias, caracterizando as ramificações mencionadas acima.

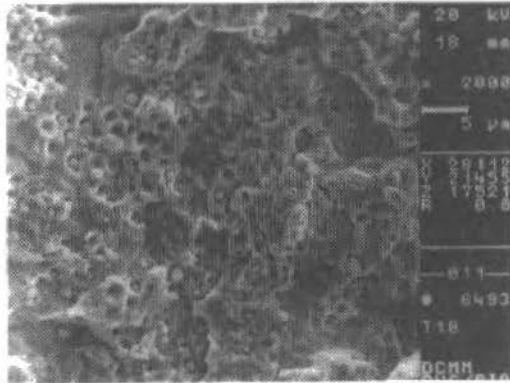


Fig. 6 Fractografia de uma trinca da fadiga no metal de solda, incluindo as trincas secundárias e inclusões mencionadas no texto

Para se quantificar o comportamento oligocíclico do MD, foram feitos testes padronizados (ASTM E-606) numa servo-hidráulica computadorizada sob controle de deformação, onda triangular a 0,5Hz. Nas Tabelas 3 e 4 são apresentados os resultados medidos, usando-se a notação tradicional,  $\Delta \epsilon / 2 = (\sigma'_f / E)(2N)^D + \epsilon'_f (2N)^c$ . Note-se o baixo valor do expoente  $c$  do material depositado por soldagem molhada, consequência da sua péssima resistência às deformações plásticas cíclicas.

Tabela 3 Vida em número de ciclos  $N$

	Gama de deformação $\Delta \epsilon$ (%)					
Material	0,25	0,35	0,5	0,75	1,0	1,5
Solda	385/300	-----	64/54	-----	19/17	3
SAR-60	-----	7995	1416	1068	444	-----

Tabela 4 Parâmetros de Coffin-Manson

	$c$	$\epsilon'_f$	$\sigma'_f$	$n'$	$S'_y$
Solda	-1,21	0,34	543	0,034	400
SAR-60	-0,66	0,51	616	0,13	500

As tensões estão em MPa, e  $S'_y$  é a resistência ao escoamento cíclico. Finalmente, também se analisou o efeito das tensões residuais de soldagem: CPs foram testados à fadiga após aquecidos a 650°C durante 3 horas para alivia-las, mas não houve melhoria significativa na dispersão dos resultados experimentais, ver Fig. 7. As tensões residuais foram medidas pelo método do furo cego (ASTM E-837), que reflete o estado de tensões atuante num volume de  $\text{mm}^3$  e não apenas nas primeiras camadas atômicas, e cuja precisão é da ordem de  $S_y/20$ , ver Tabela 5. No estado como soldado as tensões

residuais são tratativas e longitudinais ao filete, conforme o usual (Freire et al., 1994, Castro et al., 1996), e são paralelas ao crescimento da trinca, tendo portanto pouca influência no seu comportamento.

Tabela 5 Tensões Residuais no MD

Estado	Tensões Principais (MPa)
Como soldado	$\sigma_1 = 191$ $\sigma_2 = 15$
Aliviado	$\sigma_1 = 37$ $\sigma_2 = -45$

Logo, pode-se concluir que a dispersão dos resultados do MD é de fato primariamente causada pela heterogeneidade do material, conforme afirmado acima.

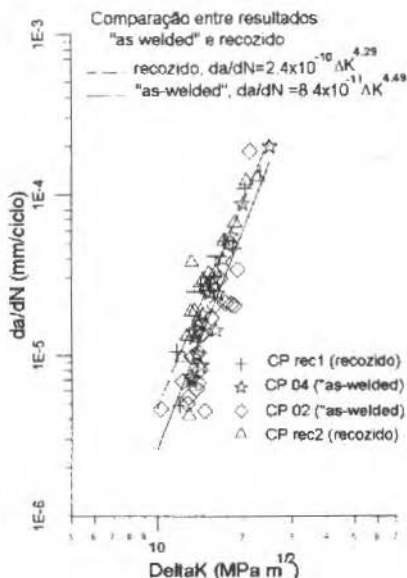


Fig. 7 Curvas de propagação do metal depositado como soldado e após tratamento de alívio de tensões (650°C, 3h)

## Mecânica das Trincas

A Mecânica das Trincas é usada nas previsões da vida à fadiga de peças trincadas. A prática usual é assumir trincas planas e Regra de Paris (Dowling, 1993; Broek; 1989, Barson e Rolfe; 1987, e.g.), mas na maioria dos casos reais as trincas iniciais são menores que a espessura da peça. Nestes casos, freqüentemente a vida à fadiga é dominada pelo número de ciclos necessários para propaga-las através da espessura da peça, transformando as (pequenas) trincas superficiais ou de canto (de baixo  $\Delta K_I$  e grande influência de  $\Delta K_{II}$ ) em trincas planas, o que torna a prática usual excessivamente conservativa, mesmo que as trincas críticas sejam grandes.

A mecânica das trincas superficiais e de canto não é trivial. Em geral  $\Delta K_{II}$ , e conseqüentemente  $da/dN$ , variam de ponto para ponto da ponta ou frente da trinca, a qual portanto *não* se propaga de forma homogênea, tendendo a mudar de forma ciclo a ciclo.

Entretanto, observações fratógráficas indicam que as sucessivas frentes das trincas superficiais e de canto permanecem aproximadamente elípticas, durante sua propagação por fadiga (ver, e.g., a referência ao Metals Handbook). Devido a isto, pode-se assumir que a propagação muda apenas a forma das trincas, (dada pela razão  $a/c$  entre os semi-eixos elípticos, que quantifica quão alongadas são as trincas), mantendo a sua geometria básica. Como uma frente elíptica é completamente definida por seus semi-eixos, para se considerar o crescimento bi-dimensional das trincas, incluindo suas mudanças de forma, basta calcular a cada ciclo os comprimentos  $a$  e  $c$ , resolvendo (iterativamente) os problemas de propagação  $da/dN$  e  $dc/dN$ . É claro que estas taxas são função de  $\Delta K_I(a)$  e  $\Delta K_I(c)$  e, como a trinca está embutida num material cuja lei de propagação é do tipo Elber, elas se relacionam por:



$$\left. \frac{da}{dc} \right| = \frac{(\Delta K_I(a) - \Delta K_{Ih})^n}{(\Delta K_I(c) - \Delta K_{Ih})^n} \tag{4}$$

A mecânica das trinças semi e quarto-elípticas foi trabalhada por diversos autores, e dentre as soluções analíticas disponíveis destacam-se as de Newman (1979) e de Newman e Raju (1984). Estas últimas estão resumidas na Fig. 8 para  $a \leq c$ . Esta figura foi adaptada de Anderson (95), onde pode-se encontrar também as soluções para o caso de  $a > c$ . Note-se que  $K_I$  é função de  $a$ ,  $a/c$ ,  $a/t$ ,  $c/W$  e  $\Phi$ , variando portanto ao longo da frente da trinça, conforme já comentado acima. Note-se que em particular  $K_I(c) = K_I(\Phi=0)$ , e  $K_I(a) = K_I(\Phi=\pi/2)$ .

Semi-elíptica $a < c$	Canto $a < c$
$K_I = (\sigma_m + H\sigma_b) \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F\left(\frac{a}{t}, \frac{a}{c}, \frac{c}{W}\right)$	$K_I = (\sigma_m + H\sigma_b) \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F\left(\frac{a}{t}, \frac{a}{c}, \frac{c}{W}\right)$
<i>onde:</i>	<i>onde:</i>
$Q = 1 + 1464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65}$	$Q = 1 + 1464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65}$
$F = \left[ M_1 + M_2\left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3\left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] f_\phi f_w g$	$F = \left[ M_1 + M_2\left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3\left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] f_\phi f_w g_1 g_2$
$M_1 = 113 - 0.09\left(\frac{a}{c}\right)$	$M_1 = 108 - 0.03\left(\frac{a}{c}\right)$
$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}}$	$M_2 = -0.44 + \frac{1.06}{0.3 + \frac{a}{c}}$
$M_3 = 0.5 - \frac{1.0}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14\left(1.0 - \frac{a}{c}\right)^{24}$	$M_3 = 0.5 - 0.25\left(\frac{a}{c}\right) + 14.8\left(1.0 - \frac{a}{c}\right)^{15}$
$f_\phi = \left[ \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right]^{1/4}$	$f_\phi = \left[ \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right]^{1/4}$
$f_w = \left[ \sec\left(\frac{\pi c}{2W} \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \right]^2$	$f_w = \left[ \sec\left(\frac{\pi c}{2W} \sqrt{\frac{a}{t}}\right) \right]^2$
$g = 1 + \left[ 0.1 + 0.35\left(\frac{a}{t}\right)^2 \right] (1 - \sin \phi)^2$	$g_1 = 1 + \left[ 0.08 + 0.4\left(\frac{a}{t}\right)^2 \right] (1 - \sin \phi)^3$
$H = H_1 + (H_2 - H_1)(\sin \phi)^p$	$g_2 = 1 + \left[ 0.08 + 0.15\left(\frac{a}{t}\right)^2 \right] (1 - \cos \phi)^3$
$p = 0.2 + \frac{a}{c} + 0.6\left(\frac{a}{t}\right)$	$H = H_1 + (H_2 - H_1)(\sin \phi)^p$
$H_1 = 1 - 0.34\frac{a}{t} - 0.11\frac{a}{c}\left(\frac{a}{t}\right)$	$p = 0.2 + \frac{a}{c} + 0.6\left(\frac{a}{t}\right)$
$H_2 = 1 + G_1\left(\frac{a}{t}\right) + G_2\left(\frac{a}{t}\right)^2$	$H_1 = 1 - 0.34\frac{a}{t} - 0.11\frac{a}{c}\left(\frac{a}{t}\right)$
$G_1 = -1.22 - 0.12\left(\frac{a}{c}\right)$	$H_2 = 1 + G_1\left(\frac{a}{t}\right) + G_2\left(\frac{a}{t}\right)^2$
$G_2 = 0.55 - 1.05\left(\frac{a}{c}\right)^{0.75} + 0.47\left(\frac{a}{c}\right)^{1.5}$	$G_1 = -1.22 - 0.12\left(\frac{a}{c}\right)$
	$G_2 = 0.55 - 1.05\left(\frac{a}{c}\right)^{0.75} + 0.47\left(\frac{a}{c}\right)^{1.5}$

Fig. 8 Fatores de intensidade de tensões  $K_I$  para trinças semi-elípticas e de canto

No caso da trinca semi-elíptica sob tração pura ( $\sigma_n = 0$ ) e  $a < c$ , tem-se que:

$$\Delta K_{Im}(c) = \Delta K'_{Im}(a) \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot [1.1 + 0.35(a/t)^2] \quad (5)$$

Deve-se comparar este resultado com o mais simples previsto por Newman em (1979):

$$\Delta K'_{Im}(c) = \Delta K'_{Im}(a) \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (6)$$

do qual pode-se facilmente identificar três casos:

- (i)  $\Delta K'_{Im}(a) \leq \Delta K_n$ : a trinca não se propaga por fadiga.
- (ii)  $\Delta K'_{Im}(c) > \Delta K_n$ : as trincas se propagam nas duas direções: as trincas superficiais semicirculares sob tração devem fazê-lo homologicamente ( $a = c \Rightarrow \Delta K'_{Im}(c) = \Delta K_n(a) \Rightarrow da = dc$ ), e as trincas semi-elípticas de  $a < c$  tendem sempre à forma semi-circular.
- (iii)  $\Delta K'_{Im}(a) > \Delta K_n$  e  $\Delta K'_{Im}(c) < \Delta K_n$ : só a parte central da trinca cresce para dentro da barra, enquanto o traço superficial da trinca permanece constante e igual a  $2c$  até que o valor de  $\Delta K'_{Im}(c)$  (que cresce com  $a$ ) ultrapasse  $\Delta K_n$ , quando então a trinca passa a crescer também para os lados.

Este caso (iii) é particularmente crítico do ponto de vista da inspeção, porque a trinca pode estar ativa enquanto sua medida superficial permanece constante - e este é o único valor medido pelos métodos de inspeção visuais como líquido penetrante e partículas magnéticas!

Tanto no caso da flexão pura, como no caso geral da superposição das tensões de membrana às de flexão, a relação entre  $\Delta K_{Im}(a)$  e  $\Delta K_{Im}(c)$  prevista a partir da solução de Newman e Raju é bastante complexa e não vale a pena explicitá-la, pois ela depende não só de quão alongada é a trinca ( $a/c$ ), como também de sua profundidade relativa ( $a/t$ ). É claro que quando  $\Delta K_i(a)$  e  $\Delta K_i(c)$  forem ambos menores que  $\Delta K_n$ , as trincas não se propagam, mas os casos de propagação baseados naquela solução não podem ser analisados por inspeção, como foi possível fazer acima partindo da solução mais simples expressa por (6). Portanto, para melhor compreender o comportamento das trincas semi e quarto-elípticas, serão analisados numericamente a seguir alguns casos representativos do problema.

## Estudo de Casos Representativos

Um programa de lógica relativamente simples foi desenvolvido para este estudo. São dados os carregamentos de membrana e de flexão  $\Delta\sigma_m$  e  $\Delta\sigma_f$ , o tipo e o tamanho inicial da trinca  $a_0$  e  $c_0$ , as propriedades do material, e um pequeno incremento  $\delta a$  (50 $\mu$ m, cerca do limiar de resolução dos métodos de medição das trincas em testes de fadiga, pode ser uma boa escolha tanto do ponto de vista físico quanto numérico). Primeiro calcula-se  $\Delta K_i(a_0)$ ,  $\Delta K_i(c_0)$ ,  $\Delta N_0 = \delta a / A(\Delta K_i(a_0) - \Delta K_n)^n$ , o número de ciclos para a trinca crescer de  $a_0$  para  $a_0 + \delta a$ , e  $\Delta c_0 = \Delta N_0 A(\Delta K_i(c_0) - \Delta K_n)^n$ , o correspondente incremento do semi-eixo  $c$ . O processo itera-se fazendo-se  $\Delta K_i(a_1) = \Delta K_i(a_0 + \delta a)$ , etc.

Usando-se a espessura da chapa testada,  $t = 25$ mm, arbitra-se  $W = 250$ mm para a seção da barra. Como a seção é constante (figura 2), no caso do MD as soldas devem ser de topo e esmerilhadas. A carga é escolhida como  $\Delta\sigma = 92$ MPa, o limite à fadiga deste tipo de detalhe de solda, que é da classe 125 segundo o IIW (Moura Branco et al., 1986).

Este código é representativo das filosofias modernas de projeto à fadiga de estruturas soldadas, que são baseadas em curvas SN (Wöhler) que dependem apenas da classe do detalhe da solda e da faixa  $\Delta\sigma$  do carregamento (e não da carga média ou do tipo de aço estrutural ao C ou C-Mn). É claro que estas curvas foram obtidas de testes com soldas secas, e que curvas SN não se aplicam a estruturas trincadas, mas é válido supor que se a barra fosse projetada segundo o IIW não seria provável uma falha por fadiga nesta carga, se não houvessem trincas na barra. Mas como trincas podem ocorrer, é interessante quantificar seus efeitos na vida residual da peça.

Em primeiro lugar, deve-se enfatizar que nem todas as trincas causam dano estrutural, pois peças mesmo trincadas ainda podem ter vida infinita: se  $\Delta K_i(a)$  e  $\Delta K_i(c) < \Delta K_n$ , a peça tolera as trincas superficiais ou de canto sem problemas. Logo, uma primeira informação interessante para o projetista ou o inspetor estrutural é como varia a maior trinca não-propagante  $2c_m$  que a estrutura pode suportar na carga de serviço, em função de  $a/c$ , ver Figs. 9 e 10).

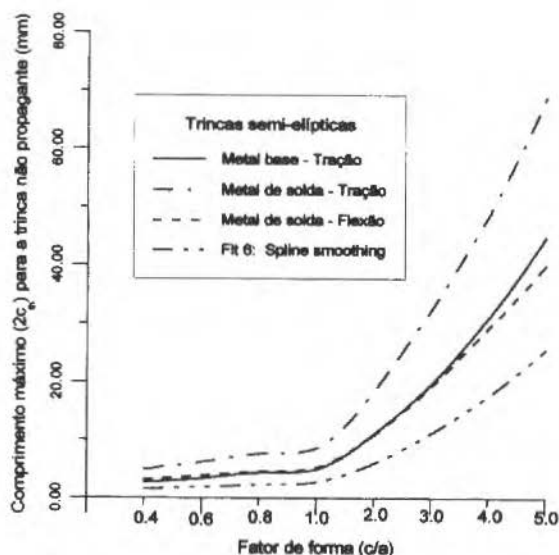


Fig. 9 Maior trinca semi-elíptica não propagante, em função de  $c/a$ . Note-se que para trincas profundas  $2c_{II}$ , varia pouco

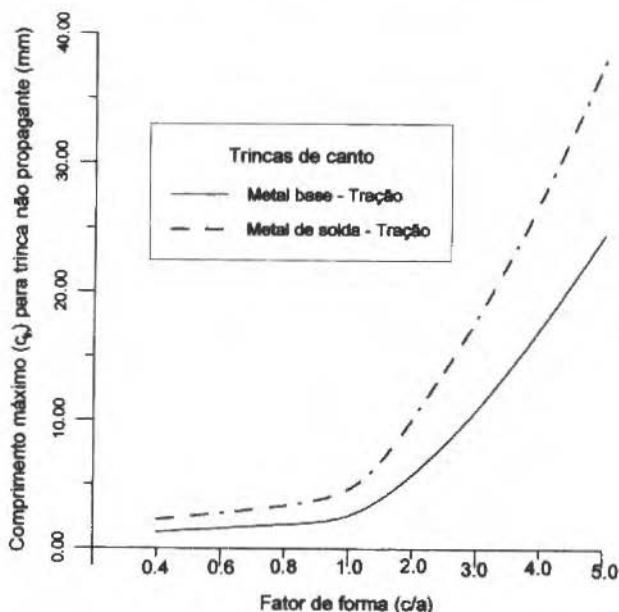


Fig. 10 Maior de canto não propagante, em função de  $c/a$

Contrariamente ao senso comum, o metal depositado é bem mais tolerante às pequenas trincas que o metal de base, pois seu  $\Delta K_{th}$  é maior do que o do SAR-60. Esta é uma consequência óbvia deste fato, mas seus potenciais benefícios não são normalmente apreciados na prática do projeto ou de avaliação de integridade estrutural. Também deve-se enfatizar que, como em ambos os metais estudados as trincas se propagam seguindo Elber, um número muito maior de ciclos é necessário para o crescimento inicial das

trincas pouco maiores que a não-propagante do que o que seria previsto pelo (neste caso simplfístico) modelo de Paris. Logo, pode-se afirmar que:

- (i) Como só as trincas menores que as críticas são intrinsecamente seguras, e o MD é mais tolerante que o MB, este deve ser inspecionado com maior resolução caso esteja sujeito a trincamento. E como a trinca crítica depende de  $a/c$ , as inspeções não podem ser apenas superficiais para se garantir a inatividade de uma trinca.
- (ii) A precisão das previsões de vida residual dependem primariamente da medição acurada do tamanho e da forma da trinca inicial, e das propriedades de propagação do material, principalmente  $\Delta K_{th}$ . Isto porque a tenacidade à fratura  $K_{Ic}$  controla a máxima trinca tolerável no que tange à falha súbita, mas é o limiar de propagação a propriedade que controla a real tolerância às trincas, ao definir quais as que não causam dano estrutural. Além disto, nas peças submetidas a um controle de qualidade decente, que garanta um pequeno tamanho para a maior trinca não detectada,  $\Delta K_{th}$  também controla a vida à fadiga. Este fato tem sido menos apreciado do que o devido na seleção de materiais para aplicações estruturais, e os autores deste trabalho desconhecem qualquer norma de projeto que apresente limites mínimos para  $\Delta K_{th}$ .

A Figura 11 ilustra um aspecto comportamental das trincas semi-elípticas que é particularmente importante do ponto de vista de inspeção. O traço superficial da trinca  $2c$  pode ficar constante durante milhões de ciclos, enquanto a trinca está ativa crescendo apenas para dentro da peça. Para isto basta que  $\Delta K_I(a) > \Delta K_{th}$  e  $\Delta K_I(c) < \Delta K_{th}$ . Este comportamento ocorre tanto para o caso de tração como para o de flexão.

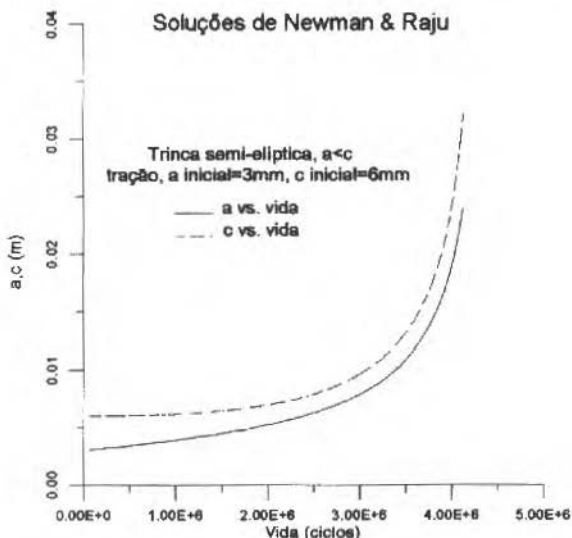


Fig. 11 Comportamento da trinca durante a propagação. Note-se o traço de trinca na superfície permanece constante durante a maior parte da vida

Mas como  $\Delta K_I(c)$  também cresce com a profundidade, eventualmente quando a trinca volta a crescer para os lados a sua velocidade de propagação já é bastante grande, e a peça pode fraturar com um relativamente pequeno incremento no número de ciclos. Em outras palavras, trincas que pareçam paradas durante várias inspeções superficiais sucessivas podem "repentinamente" levar a peça à ruína antes que uma próxima inspeção tenha a chance de detectar seu crescimento. Logo, inspeções superficiais não podem ser usadas para garantir a inatividade das trincas.

Um comportamento ainda mais excitante pode ocorrer no caso de flexão. Como  $\Delta K_I(a)$  primeiro cresce, passa por um máximo e depois decresce a medida que a trinca se aprofunda (a tensão solicitante diminui conforme a trinca se aproxima do eixo neutro), é possível que uma trinca comece se propagando e depois pare, bastando para isto que ocorram as condições ilustradas na Fig. 12. Este certamente é um comportamento não-trivial, e ainda não devidamente explorado em toda a sua potencialidade.

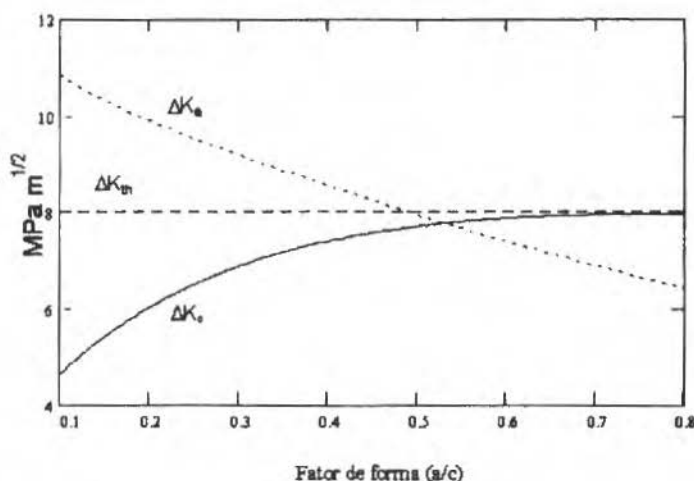


Fig. 12 Caso em que uma trinca inicial propagante pode tornar-se não-propagante:  $\Delta K_a$ , que é inicialmente maior que,  $\Delta K_{th}$ , decresce à medida que a trinca se propaga e cruza  $\Delta K_{th}$  antes que  $\Delta K_c$  atinja o limiar (trinca semi-elíptica,  $a < c$ , flexão)

Por exemplo, a sensibilidade ao entalhe  $q$  usada para diminuir o valor do fator de concentração de tensões  $K$ , no projeto SN tradicional pode estar relacionada com este fenómeno (em projeto usa-se um "fator de concentração à fadiga",  $K_f = 1 + q(K - 1)$ , sendo que o valor de  $q$  tende para zero junto com o raio  $r$  do entalhe: Peterson (1974) estima  $q = 1/(1 + g/r)$  e Neuber  $q = 1/[1 + \sqrt{(g/r)}]$ , onde  $g$  e  $g'$  são "constantes do material", um conceito excessivamente abstrato do ponto de vista mecânico). Entretanto, como entalhes com raios pequenos e grandes  $K$ , também possuem altos gradientes de tensão, é válido especular que as pequenas trincas eventualmente iniciadas na raiz dos entalhes mais severos poderiam não se propagar por um mecanismo similar ao caso de flexão discutido acima.

A Figura 13 compara as vidas em flexão e tração, para uma mesma carga e geometria inicial da trinca. Vidas mais longas são sistematicamente previstas no caso de flexão, o que é fisicamente razoável, já que em tração a tensão nominal é constante em toda a seção da peça.

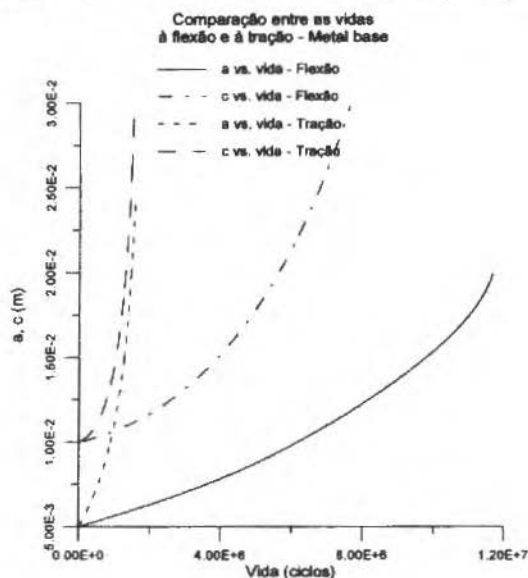


Fig. 13 Comparação entre as vidas à tração e à flexão para mesmas condições iniciais, trincas semi-elíptica

As Figuras 14 e 15 mostram as grandes diferenças entre os fatores de forma  $a/c$  em função da profundidade de trinca  $a$ , para os casos de tração e flexão, tanto na trinca semi-elíptica como na de canto. No caso de tração da semi-elíptica a solução de Newman prevê uma tendência à forma semi-circular, com uma propagação homóloga subsequente, enquanto a de Newman-Raju depende de  $a/t$ , como já discutido acima (testes estão sendo executados para definir qual delas é a mais adequada).

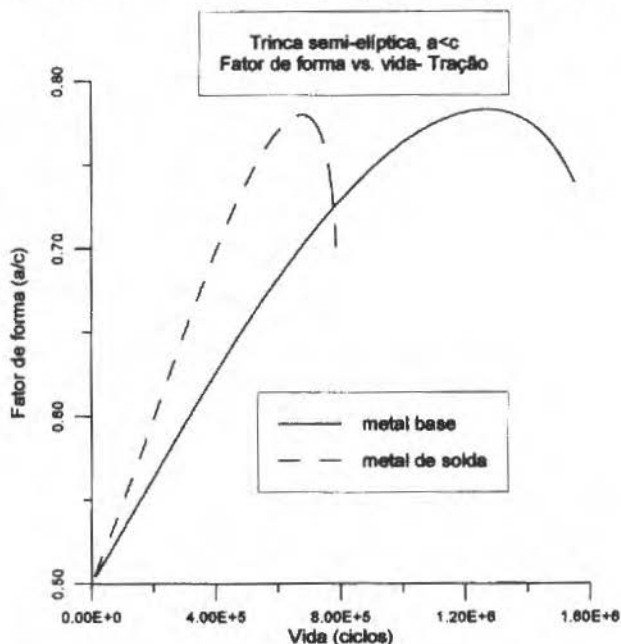


Fig. 14 Mudança na forma da trinca durante sua propagação, trinca semi-elíptica,  $a < c$ , tração

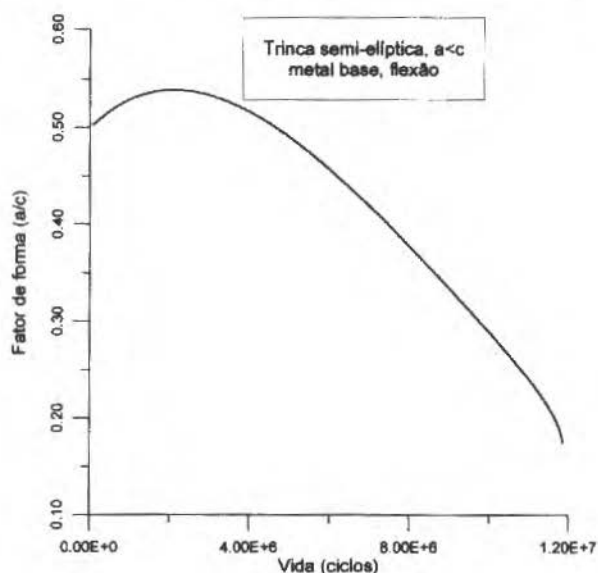


Fig. 15 Fator de forma ( $a/c$ ) ao longo da propagação, trinca semi-elíptica,  $a < c$ , flexão

O caso de flexão começa com um comportamento similar ao de tração (como não poderia deixar de ser), com a trinca crescendo mais rápido para dentro que para os lados, mas após uma certa profundidade este comportamento se reverte, e a trinca propaga-se cada vez mais facilmente para os lados. Este comportamento é uma chave muito importante em estudos fratógráficos para se identificar o tipo do carregamento imposto sobre a trinca.

Também permite que se afirme que é absolutamente impróprio usar testes de propagação sob flexão para simular o comportamento trativo. Novamente, esta não é uma limitação usualmente reconhecida pelos laboratórios de testes de controle de qualidade na indústria, que tendem a favorecer testes sob flexão devido à maior simplicidade do equipamento necessário, quando comparado com o problema trativo.

Finalmente, as Figs. 16 a 18 ilustram sucessivas frentes de trincas previstas para os casos de tração e flexão nas trincas de canto e semi-elípticas.

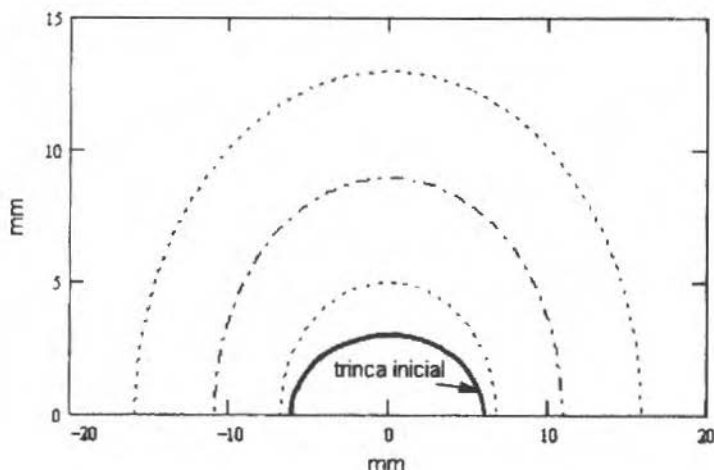


Fig. 16 Sucessivas frentes de trinca mostrando a mudança de forma durante a propagação. Trinca inicial semi-elíptica com  $a = 3$  mm e  $c = 6$  mm, tração

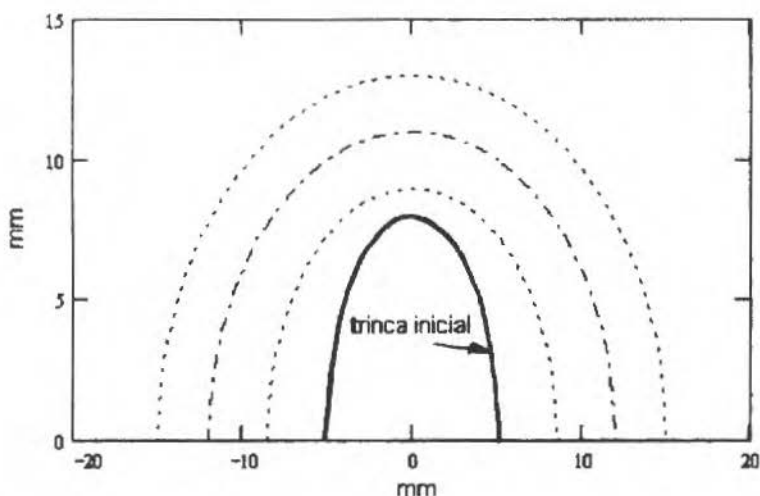


Fig. 17 Sucessivas frentes de trinca mostrando a mudança de forma durante a propagação. Trinca inicial semi-elíptica com  $a = 8$  mm e  $c = 5$  mm, tração

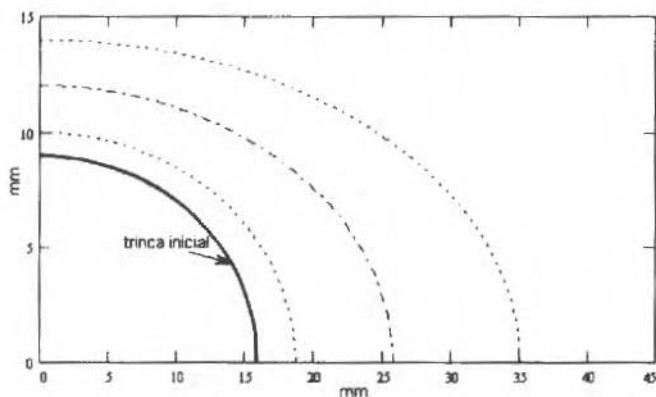


Fig. 18 Sucessivas frentes de trinca mostrando a mudança de forma durante a propagação. Trinca inicial semi-elíptica com  $a = 9\text{mm}$  e  $c = 16\text{mm}$ , tração

## Conclusões

O comportamento à fadiga do SAR-60 e do MD medido indica que o aço é menos sensível que a solda nas cargas altas, mas possui menor limiar de propagação de trincas. Na modelagem do problema da propagação das trincas superficiais e de canto usando-se as soluções de Newman e de Newman-Raju ilustraram-se alguns dos comportamentos não-triviais que elas podem apresentar na prática, através da discussão de diversos casos representativos.

## Referências

- Anderson, T.L., 1995, "Fracture Mechanics", 2nd. ed., CRC.
- Barson, J.M. e Rolfe, S.T., 1987, "Fracture and Fatigue Control in Structures", Prentice Hall.
- Broek, D., 1989, "The Practical Use of Fracture Mechanics", Kluwer.
- Camarão, A.F. e Castro, J.T.P., 1989, "Um Método Simples e Confiável para Medir Trincas de Fadiga", Anais do X COBEM, v.2, pp.93-96.
- Castro, J.T.P.; Freire, J.L.F. e Vieira, R.D., 1996, "On the Use of the Blind Hole Method to Control Stress-Relief Treatments", 2nd Int.Conf. on Quenching and the Control of Distortion, pp.215-220, ASM.
- Castro, J.T.P.; Giassone, A. e Kenedi, P.P., 1996, "Propagação por Fadiga de Trincas Superficiais e de Canto em Soldas Molhadas", Anais do II Seminário de Mecânica da Fratura", pp.325-342, ABM.
- Castro, J.T.P.; Giassone, A. e Kenedi, P.P., 1995, "Fatigue Propagation of Superficial Cracks in Wet Welds", Fracture, Fatigue and Life Prediction (13 SMIRT Pre-Seminar), pp.21-38.
- Castro, J.T.P., 1985, "Some Critical Remarks on the Use of Potential Drop and Compliance Systems to Measure Crack Growth in Fatigue Experiments", Rev.Bras.Ciênc.Mec. VII(4), pp. 291-314.
- Dowling, N.E., 1993, "Mechanical Behavior of Materials", Prentice-Hall.
- Freire, J.L.F.; Castro, J.T.P. e Vieira, R.D., 1994, "Application of Blind-Hole Technique to Engineering Problems", 4th Int. Conference on Residual Stresses, pp.90-96.
- Giassone, A., 1995, "Análise e Modelagem de Propriedades Mecânicas à Fadiga de Soldas Molhadas", Tese de Mestrado Dept.Eng.Mecânica PUC/Rio.
- Metals Handbook 8th.ed., v.9 pp.31, 39 e 419; v.10 pp. 97 e 523.
- Moura Branco, C. et al., 1986, "Fadiga de Estruturas Soldadas", Gulbenkian.
- Newman, J.C., 1979, "A Review and Assessment of the Stress Intensity Factors for Surface Cracks", ASTM STP 687.
- Newman, J.C. e Raju, I.S., 1984, "Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads", NASA TM-85793.
- Pacheco, P.M.C.L. e Castro, J.T.P. "Um Sistema para Obtenção Automática de Curvas Tensão-Deformação Real", Anais do X COBEM, v.2, pp.411-414, 89.
- Peterson, R.F., "Stress Concentration Factors", Wiley 74.
- Suresh, S., "Fatigue of Materials", Cambridge 91.



# Um Modelo para Análise de Cabos de Aço de Seção Complexa

## *A Model for Analysis of Wire Rope with Complex Cross Section*

**Aura Conci**

Universidade Federal Fluminense  
Departamento de Engenharia Mecânica  
24210-210 Niterói, RJ Brazil  
aconci@caa.uff.br

**Wilson Ferreira da Silva**

Petrobrás - Petróleo Brasileiro S. A.  
RPSE  
Rio de Janeiro, RJ Brazil

### **Abstract**

*The theoretical analysis of wire rope is rather complex. The analysis of a rope begins with a study of the deformation of a helical wire in a strand. By the deformation of all wires in a given strand, one determines the response of that strand. Again by the deformation of all strands in the rope, one determines the response of a rope. This model produces equations highly nonlinear. This work shows the steps of this development for a computer program implementation to analyze complex wire rope geometries. Using this, deformation and stress in ropes can be evaluated. The model can treat cables, having or not internal-wire-ropes cores, loaded in all combinations of load. Results and comparison are given for Warrington, Seale and Filler-Wire constructions but they could be generated for other constructions.*

**Keywords:** *Wire Rope, Internal-Wire-Rope Core, Cables, Complex Loading*

### **Resumo**

*A análise teórica de cabos de aço é bastante complexa; inicia-se pelo estudo dos arames helicoidais formadores das pernas. A resposta a deformação de uma perna é determinada pela deformação dos arames que a constituem. O comportamento do cabo, por sua vez, está relacionado ao comportamento de cada perna. Esta modelagem resulta em uma formulação não linear. As etapas do desenvolvimento deste modelo e de sua implementação em um programa de análise numérica são apresentadas neste trabalho. Esta implementação pode ser utilizada na análise de cabos de geometrias complexas, possuindo ou não alma interna, sob qualquer tipo de combinação de carregamentos. Exemplos de análise e comparações com outros autores são apresentadas para as formas Warrington, Seale e Filler-Wire, mas a implementação pode ser aplicada à qualquer seção.*

**Palavras-chave:** *Cabos de Aço, Alma Interna de Cabo de Aço, Cabos, Carregamentos Complexos*

### **Introdução**

Até meados dos anos 30, todos os trabalhos significativos sobre cabos de aço eram experimentais, resultados de numerosos dados de ensaios de fadiga e carga estática. Por causa do pouco conhecimento teórico que se tinha, era necessário utilizar grandes fatores de segurança para assegurar o uso satisfatório de cabos de aço. Em 1936 Suslov mostrou ser impossível criar um modelo matemático para o cálculo dos esforços em arames e pernas de um cabo de aço, devido à grande complexidade do problema. Durante anos poucas tentativas foram feitas na busca por um modelo teórico para cabos de aço ( talvez devido a essa demonstração de Suslov ). Uma década depois Drucker e Tachau (1945) descrevem um método para projeto à fadiga de cabos de aço, baseado em dados experimentais de outros autores. Hall (1951) publicou o primeiro modelo para previsão de tensões em arames de cabos de aço. O modelo de Hall era muito simples, pois fazia a hipótese de que o único esforço atuante nos arames seria a tração. Seguindo Hall, Hruska (1952,1953) publicou trabalhos onde as forças radiais e tangenciais (entre arames e pernas), e as tensões nos arames são examinadas, iniciando os estudos sobre as tensões de contato entre arames. Leissa (1959) conseguiu expressar as forças radiais entre pernas e arames em função da carga aplicada e da geometria do cabo. Starkey e Cress (1959) publicaram um trabalho considerando as tensões críticas e os modos de falha de cabos de aço. Durante as décadas de 60 e 70, alguns pesquisadores como, Bert e Stein (1962) e Durelli et al.(1972) deram contribuições bastante significativas para a teoria de cabos de aço. O equacionamento e a solução do problema de

cabos de aço de maneira completa foi apresentado por Phillips e Costello (1973), a partir do equilíbrio de uma haste delgada. A solução do problema de um arame em forma de hélice, como os arames de uma perna em um cabo de aço, foi apresentada em uma série de publicações destes autores, sobre propriedades de cabos de aço de construção simples (Phillips e Costello, 1973 e 1977, Costello e Phillips, 1976, Costello e Sinha, 1977-a e b), Velinsky et al. (1984), apresentam uma contribuição fundamental à teoria de cabos, linearizando as equações desenvolvidas por Costello e Phillips (1976), em construções do tipo Seale com alma interna de cabo de aço, viabilizando desta forma aplicações para geometrias mais complexas. Costello e Phillips (1985) generalizaram o método de Velinsky para qualquer tipo de construção que contivesse uma alma interna de cabo de aço. Esta teoria foi complementada por Le Clair e Costello (1988), Costello (1990) e Huang e Vinogradov (1992,1994) com a introdução da consideração do atrito entre os arames. Neste trabalho apresentamos um esquema de solução baseado no modelo de Costello que permite a generalização do método simplificado de Velinsky para seções transversais de qualquer tipo, com ou sem alma interna. Este esquema é simples o suficiente para ser implementado, em qualquer linguagem de computação, em microcomputadores sem nenhuma sofisticação. A eficiência do método é ilustrada através de comparações com outros trabalhos e exemplos de solução de cabos com geometrias e carregamentos complexos.

## Conceitos Básicos

Um cabo de aço consiste de 3 elementos: os arames, as pernas e a alma (Fig. 1). Os arames metálicos ("wires") constituem o elemento básico de um cabo de aço ("wire rope"). Enrolando helicoidalmente um determinado número de arames em torno de um arame central, forma-se uma perna ("strand"). São as pernas, que enroladas helicoidalmente em torno de um núcleo, a alma ("core"), vão formar o cabo de aço. As pernas suportam a maior parte da carga. A alma tem como função principal suportar as pernas em condições de flexão combinadas à tração. A alma pode ser confeccionada de fibras naturais, como o sisal, polipropileno ou de arames de aço. Neste último caso, a alma será na realidade um cabo de aço. A alma de cabo de aço recebe a denominação de IWRC ("Internal Wire Rope Core"). Uma perna pode ser enrolada em torno de uma alma no sentido horário, "torção direita" ("right lay"), ou no sentido anti-horário, "torção esquerda" ("left lay"). Os arames de um cabo de aço podem ser fabricados de vários materiais como aço carbono, aço inoxidável, monel ou bronze. O material mais utilizado é o aço com teor de carbono em diferentes graus, para atender a diferentes usos. As pernas são fabricadas em configurações variadas de acordo com a aplicação. O arranjo dos arames nas pernas é um dos fatores que determina as características funcionais do cabo. A Figura 1 mostra as construções básicas: perna de arames homogêneos; Warrington; Seale e Filler-Wire. A especificação do cabo é feita pelo número de pernas da última camada e o número de arames formadores das pernas da última camada. Por exemplo: 6 x 25 Filler-Wire, tem 6 pernas e a última camada de perna é formada por 25 arames. Além do tipo de arranjo, os cabos de aço podem ter diferentes tipos de torções em torno da alma. Se o enrolamento dos arames da última camada de pernas for para o mesmo lado que o enrolamento desta perna em torno da alma, diz-se que a torção é do tipo "lang"; caso contrário diz-se que a torção é do tipo "regular". O tipo de torção afeta de forma significativa a resposta do cabo a solicitações. Experiências mostram que torções do tipo "lang" dão ao cabo maior resistência à fadiga e à abrasão. Por outro lado este tipo de torção confere ao cabo uma maior tendência ao desenrolamento, e ao esmagamento em roldanas e tambores. Os cabos podem ainda ter arames pré-formados ou não pré-formados. Pré-formação é um processo de conformação de arames para cabos, no qual os arames recebem a forma de helicóide antes de serem enrolados para formar a perna do cabo. Este processo evita tensões internas nos arames.



Fig. 1. Elementos de um cabos de aço e construções mais freqüentes

## Curvaturas e Tortuosidade de uma Haste

Considera-se uma haste com seção reta circular (mostrada na Fig. 2), Seja  $S$  a linha central desta haste. Aplicando à haste uma torção simples, os elementos lineares formarão entre si um ângulo  $\Delta f$ . Sendo  $\Delta S$  a distância entre duas seções, a medida da torção a que foi submetida a haste será dada por:

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta f / \Delta S \quad (1)$$

Se a haste acima sofre uma flexão a determinação do ângulo de torção,  $\tau$ , será mais complexa. Deveremos supor que a linha central se tornará uma curva "tortuosa", com curvatura  $1/\rho$  e tortuosidade  $1/\Sigma$ . Tomemos um sistema de eixos fixos  $X_1, X_2, X_3$ , no qual o eixo  $X_3$  seja paralelo à linha central no estado não deformado, e os eixos  $X_1$  e  $X_2$  sejam paralelos aos eixos principais das seções retas nos seus centróides. Seja um ponto  $P$  qualquer na linha central no estado não deformado, tracemos três linhas nas direções dos três eixos coordenados. Quando a barra é deformada, essas linhas em geral não continuarão formando ângulos retos entre si, mas por intermédio de uma transformação ortogonal, podemos construir um sistema de eixos ortogonais  $(x, y, z)$  (Fig. 2). A origem deste último sistema é o ponto  $P_1$  (posição deformada de  $P$ ), onde o eixo  $z$  é a tangente à linha central deformada em  $P_1$  e contém a linha traçada de  $P$  na direção do eixo  $X_3$ . As coordenadas de qualquer ponto da linha central entre  $P_1$  e  $P_1'$  serão designadas por  $x', y'$  e  $z'$ . O plano  $(x', y')$  é o plano principal da barra. Os eixos do sistema construído acima, para qualquer ponto da linha central deformada, serão chamados de "eixos principais de torção-flexão" da barra no ponto. O comprimento  $\Delta S_1$ , do arco  $P_1 P_1'$ , da linha central deformada difere ligeiramente do comprimento  $\Delta S$  de  $PP'$ . Sendo  $\epsilon$  a extensão da linha central em  $P_1$ , teremos:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta S_1 / \Delta S = 1 + \epsilon \quad (2)$$

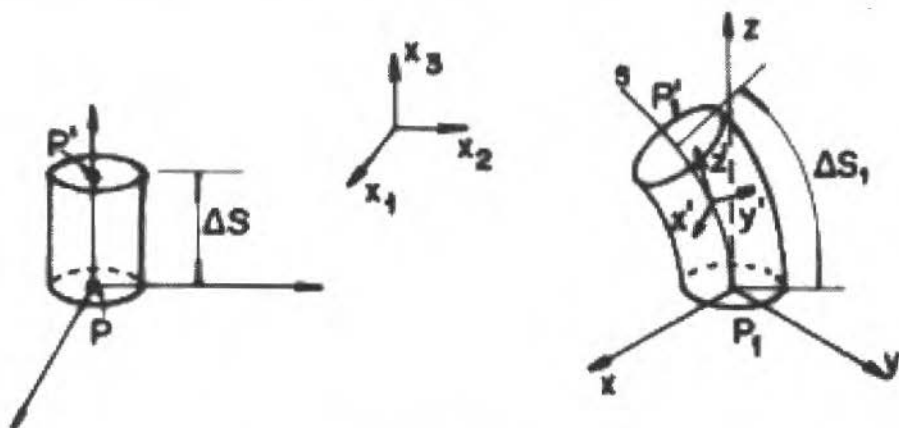


Fig. 2 Sistemas de coordenadas usado

Sejam  $\ell, m$  e  $n$  os co-senos diretores da binormal (linha perpendicular a normal à curva no ponto) desta curva em  $P_1$ . Chamando de  $\ell', m'$  e  $n'$  aos co-senos diretores da binormal em  $P_1'$ , pode-se mostrar que :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \Delta \ell / \Delta S_1 &= d \ell / d S_1 - m \tau + n k' \\ \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \Delta m / \Delta S_1 &= d m / d S_1 - n k + \ell \tau \\ \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \Delta n / \Delta S_1 &= d n / d S_1 - \ell k' + m k \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $k$  e  $k'$  são as curvaturas das projeções da linha central deformada nos planos  $(y, z)$  e  $(x, z)$ , como pode ser visto na Fig. 3.

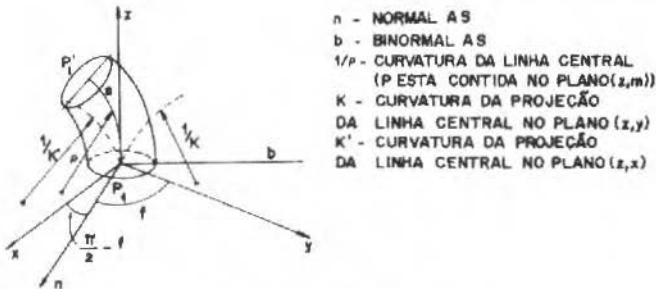


Fig. 3 - Curvaturas da haste.

A medida da tortuosidade  $1/\Sigma$  da linha central deformada é dada por:

$$(1/\Sigma)^2 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} [(\Delta l)^2 + (\Delta m)^2 + (\Delta n)^2] / (\Delta S_1)^2 \quad (4)$$

Pela definição de  $k$  e  $k'$ , e pelas Eqs. (3) e (4) tem-se que:

$$(1/\Sigma)^2 = (\tau - df/dS_1)^2 \quad (5)$$

onde  $\tan f = -k'/k$ . Considerando os co-senos diretores entre os eixos  $x$  y  $z$  e  $x'y'z'$ , as expressões para  $k$ ,  $k'$  e  $\tau$  são:

$$k = \ell_1 dl_1/dS + m_1 dm_1/dS + n_1 dn_1/dS \quad (6)$$

$$k' = \ell_2 dl_2/dS + m_2 dm_2/dS + n_2 dn_2/dS \quad (7)$$

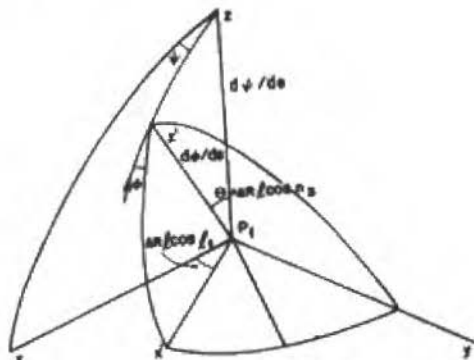
$$\tau = \ell_3 dl_3/dS + m_3 dm_3/dS + n_3 dn_3/dS \quad (8)$$

Considerando os ângulos de Euler:  $\theta$  (ângulo entre os eixos  $z$  e  $z'$ ),  $\psi$  (ângulo formado pelos planos  $(z, z')$  e  $(z, x)$ ), e  $\phi$  (ângulo formado pelos planos  $(x', z')$  e  $(z', z')$ ), definidos como mostrado na Fig. 4, e observando que as curvaturas  $k$ ,  $k'$  e  $\tau$  são projeções de vetores equivalentes a  $d\theta/dS$ ,  $d\psi/dS$  e  $d\phi/dS$ , teremos:

$$k = \text{sen } \phi \, d\theta/dS - \text{sen } \theta \, \text{cos } \phi \, d\psi/dS \quad (9)$$

$$k' = \text{cos } \phi \, d\theta/dS + \text{sen } \theta \, \text{sen } \phi \, d\psi/dS \quad (10)$$

$$\tau = d\phi/dS + \text{cos } \theta \, d\psi/dS \quad (11)$$

Fig. 4 - Ângulos  $\theta$ ,  $\psi$  e  $\phi$

## Análise de um Arame Delgado

As equações básicas para hastes delgadas derivadas por Love (1944), aplicadas aos arames dos cabos permitem obter as equações de equilíbrio e as equações constitutivas. Como o elemento básico de um cabo de aço é um simples arame metálico, o primeiro passo para a análise de cabos é o equilíbrio de um arame individual. Considerando uma haste delgada submetida a um carregamento externo qualquer, a ação de um lado da seção sobre o outro pode ser expressa por uma força e um momento agindo no centróide da seção. Fazendo com que o eixo Z de um sistema de coordenadas coincida com a tangente à linha central da barra no centróide da seção, e decompondo a força e o momento acima nas direções dos eixos coordenados deste sistema, temos as forças T, N e N' e os momentos H, G e G', agindo nas direções z, x e y respectivamente. Esses esforços são resultantes das tensões  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  atuantes na seção. As resultantes de tensões e momentos podem ser expressas como:

$$N = \iint \tau_{xz} \, d_x \, d_y \, , \quad (12)$$

$$N' = \iint \tau_{yz} \, d_x \, d_y \, , \quad (13)$$

$$T = \iint \sigma_{zz} \, d_x \, d_y \, , \quad (14)$$

$$G = \iint y \, \sigma_{zz} \, d_x \, d_y \, , \quad (15)$$

$$G' = \iint x \, \sigma_{zz} \, d_x \, d_y \, , \quad (16)$$

$$H = \iint ( x \, \tau_{yz} - y \, \tau_{xz} ) \, d_x \, d_y \, , \quad (17)$$

onde N e N' são componentes da força cisalhante; T a componente de tração na direção axial do arame; G e G' as componentes do momento fletor e H o momento de torção agindo no arame.

Seja um elemento infinitesimal como indicado na Fig. 2, da barra com comprimento  $\Delta S$ . Fazendo com que os esforços aplicados ao pedaço da barra entre  $P_1$  e  $P_1'$ , sejam reduzidos a uma força e um momento aplicados em  $P_1$ . As componentes destes esforços em relação aos eixos x, y e z serão designados por [X], [Y] e [Z] (componentes de força) e [K], [K'] e [θ] (componentes de momento). Se fizermos  $P_1$  tender a  $P_1'$ , ou seja  $\Delta S$  tender a zero, encontraremos os limites abaixo:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [Y] / \Delta S = X \, , \quad (18)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [Y] / \Delta S = Y \, , \quad (19)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [Z] / \Delta S = Z \, , \quad (20)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [K] / \Delta S = K \, , \quad (21)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [K'] / \Delta S = K' \, , \quad (22)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} [\theta] / \Delta S = \theta \quad (23)$$

Desta forma  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $K$ ,  $K'$  e  $\theta$  expressam os esforços externos por unidades de comprimento de linha central, agindo no ponto  $P_i$ . Fazendo o balanço entre os esforços externos aplicados à porção do arame entre  $P_i$  e  $P_{i+1}$ , as resultantes e os conjugados de tensão internos, tem-se as equações de equilíbrio para a porção da barra em questão:

$$dN/dS - N' \tau + T k' + X = 0 \quad (24)$$

$$dG/dS - G' \tau + H k' - N' + K = 0 \quad (25)$$

$$dN'/dS - T k + N \tau + Y = 0 \quad (26)$$

$$dG'/dS - H k + G \tau + N + K' = 0 \quad (27)$$

$$dT/dS - N k' + N' k + Z = 0 \quad (28)$$

$$dH/dS - G k' + G' k + \theta = 0 \quad (29)$$

Em adição a estas equações em geral existirão condições que poderão ser usadas para determinação das constantes introduzidas nas integrações das equações de equilíbrio. A "teoria ordinária aproximada" de Love(1944) consiste em assumir que os momentos flexores  $G$  e  $G'$  e o momento torçor  $H$  são diretamente proporcionais às curvaturas  $k$  e  $k'$  e ao ângulo de torção  $\tau$ . Tem-se equações constitutivas do tipo:  $G = A k$ ,  $G' = B k'$ ,  $H = C \tau$  onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes que dependem das características elásticas do material e da geometria da seção reta da haste. Para materiais isotrópicos, teremos  $A = E a \delta'$ ,  $B = E a \delta''$ , onde  $E$  é o módulo de Young;  $a$  é a área da seção reta;  $\delta$  e  $\delta'$  são os raio de giração da seção em relação aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente (eixos principais); e

$$C = \mu \iint (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx dy$$

onde  $\mu = E/4(1 + \nu \lambda)$ ,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Para o caso de uma haste circular  $\partial \phi / \partial y = \partial \phi / \partial x = 0$ , e se fizermos  $x^2 + y^2 = \lambda^2$ , ficaremos com:  $C = \mu \iint \lambda^2 d\Delta = \mu I$ , onde  $I$ , é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z$ , da haste.

Até o momento as hastes consideradas poderiam possuir qualquer formato. Considerando uma haste com seção reta simétrica ( $A = B$ ), curvada em torno de um cilindro imaginário de raio  $r$ . Se  $\alpha_0$  for o ângulo entre a tangente a um ponto da haste e um plano perpendicular ao eixo longitudinal do cilindro. A forma assumida pela haste será de uma hélice, quando a linha central apresentar curvatura e tortuosidade constantes. Fazendo  $\theta = \pi/2 - \alpha$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos eixos  $z$  e  $X_3$  (Fig. 5) ; as curvaturas e ângulos de torção podem ser re-escritos como:

$$k = - \cos \phi (\cos^2 \alpha) / r; \quad (30)$$

$$k' = \sin \phi (\cos^2 \alpha) / r; e \quad (31)$$

$$\tau = d\phi/dS + \sin \alpha (\cos \alpha) / r \quad (32)$$

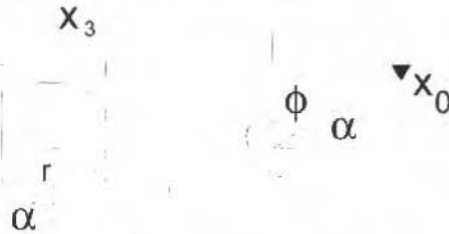


Fig. 5 Ângulos de uma haste helicoidal

A curvatura da linha central deformada ( $1/\rho$ ) será dada por (observando a Fig. 6) :

$$(1/\rho)^2 = k^2 + k'^2 = (\cos^2 \alpha / r)^2 \quad (33)$$

Ficamos então com as expressões de  $k$ ,  $k'$ ,  $\tau$  em função dos parâmetros do helicóide  $\alpha$  e  $r$ . Observando a expressão de  $\tau$ , tem-se que a segunda parcela ( $\text{sen} \alpha (\cos \alpha) / r$ ) se relaciona à torção da haste causada pela forma helicoidal assumida por ela. A primeira parcela ( $d\phi/dS$ ) representa qualquer torção direta imposta à haste. No estado inicial a torção é devida apenas à forma helicoidal da haste. Teremos então  $d\phi/dS = 0$ , logo  $\tau = \text{sen} \alpha (\cos \alpha) / r$ . Observando agora as expressões de  $k$  e  $k'$ , vemos que estas variáveis estão escritas em função de  $\phi$ . Como a seção da haste é circular, qualquer direção pode ser tomada como principal. Podemos então fixar  $x$  e  $y$  em uma posição tal que  $\phi$  seja nulo, já que esta variável não vai influenciar em nada os resultados (Fig. 7). Ficamos então com as expressões das curvaturas e ângulo de torção, para uma haste naturalmente curvada em formato helicoidal em função dos parâmetros do helicóide:  $k = 0$ ;  $k' = \cos^2 \alpha$ ;  $\tau = \text{sen} \alpha (\cos \alpha) / r$ .

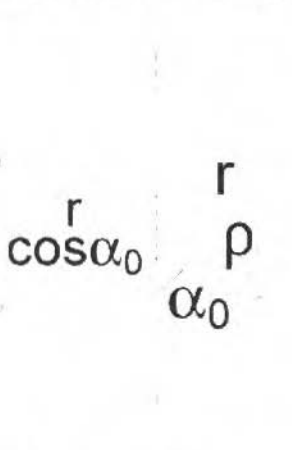
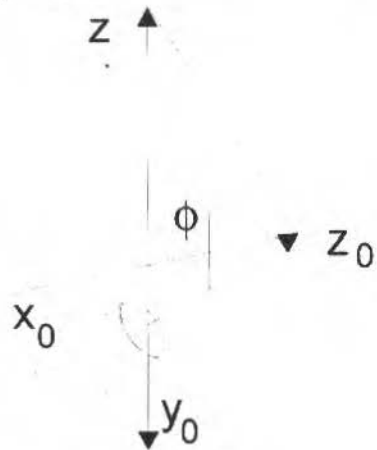


Fig. 6 Relações geométricas

Fig. 7 Ângulos com  $\phi = 0$ 

## Análise de um Cabo Reto

Um cabo de aço é uma coleção de pernas helicoidalmente enroladas em torno de um núcleo. As pernas por sua vez são uma coleção de vários arames enrolados em torno de um arame central. Quando um cabo de aço sofre ação de um carregamento  $F$ , e um momento  $M$ , ele sofrerá como consequência uma deformação  $\epsilon$  e sua extremidade sofrerá uma rotação  $\tau$ . Pode haver casos em que o cabo apresente rotação e momento nulo, por exemplo quando sua extremidade estiver livre. Com extremidade fixa a situação se inverte, ou seja, a rotação será nula. Quando um cabo reto é carregado, ocorrem as seguintes modificações: (1) variação dos ângulos de hélices das pernas e arames (efeito mola); (2) variação dos raios de hélices das pernas e arames (consequência do item (1) e do efeito Poisson); (3) alongamento total do cabo (soma dos efeitos de elongação dos arames e do efeito mola); (4) alongamento dos

arames; (5) variação nas curvaturas e ângulos de torção das pernas e arames (consequência dos itens (1) e (2)); e (6) rotação da extremidade (dependendo do grau de fixação).

As equações de equilíbrio para um arame ou perna em forma helicoidal para um cabo reto derivam das equações gerais para o equilíbrio de uma haste delgada com formato qualquer (Eqs. (24) a (29)), submetida a pequenas deformações. Assumindo que para um cabo reto sujeito a uma força axial  $F$  e um momento  $M$ : (1) os momentos flexores externamente distribuídos são nulos, ou seja:  $K = K' = 0$  e (2) qualquer esforço interno à haste independe de  $S$  e assim:  $dN/dS = dN'/dS = dT/dS = dG/dS = dG'/dS = dH/dS = 0$  (Fig. 8). Quando o cabo carrega-se, o ângulo de hélices  $\alpha$  e o raio de hélice  $r$  sofrem grandes variações em geral, e cada arame assume uma nova configuração. As curvaturas e ângulos de torção ficam:

$$\underline{k} = 0, \quad \underline{k}' = \cos^2 \alpha / r, \quad \underline{\tau} = \text{sen} \alpha \cos \alpha / r \quad (34)$$

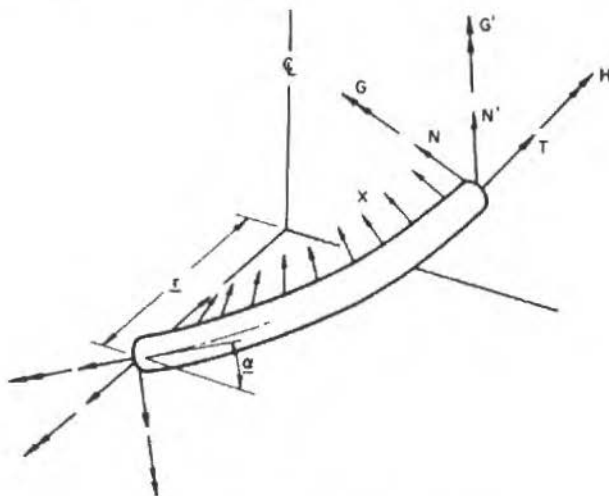


Fig. 8 Esforços em um arame helicoidal

No estado tensionado, os momentos flexores  $G$  e  $G'$ , e o momento de torção  $H$  se correlacionam às curvaturas e o ângulo de torção, através de:

$$G = A(\underline{k}' - k); \quad G' = B(\underline{k}' - k'); \quad \text{e} \quad H = C(\underline{\tau} - \tau) \quad (35)$$

Supondo que o arame possui seção reta circular, teremos, por simetria, que  $A = B$ . Os valores das constantes podem ser considerados:

$$A = \pi E R^4 / 4; \quad C = \pi E R^4 / 4(1 + \nu)$$

onde  $R$  é o raio da seção circular. Para o estado tensionado, as equações de equilíbrio resultam:

$$dN/dS - N' \underline{\tau} + T \underline{k}' + X = 0 \quad (36)$$

$$dG/dS - G' \underline{\tau} + H \underline{k}' - N' + K = 0 \quad (37)$$

$$dN'/dS - T \underline{k} + N \underline{\tau}' + Y = 0 \quad (38)$$

$$dG'/dS - H \underline{k} + G \underline{\tau} + N + K' = 0 \quad (39)$$



$$dT/dS - N \underline{k}' + N' \underline{k}' + Z = 0 \quad (40)$$

$$dH/dS - G \underline{k}' + G' \underline{k}' + \theta = 0 \quad (41)$$

É importante notar que as equações acima só são válidas enquanto as deformações da linha central ( $\epsilon$ ) forem muito pequenas. Pelas hipóteses assumidas, verifica-se que vários termos destas equações se anulam. Teremos então;

$$X = N' \underline{\tau} - T \underline{k}', \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad N' = G' \underline{\tau} + H \underline{k}', \quad N = 0, \quad \theta = 0 \quad (42)$$

Observa-se que estas equações se referem à configuração deformada, sendo portanto não-lineares. Como as variações de  $\tau$ ,  $k'$  são muito pequenas, podemos utilizar os seus valores iniciais sem comprometer demais a precisão. Outra importante observação é a de que pequenas deformações lineares ( $\epsilon$ ) não implicam necessariamente em pequenas variações de ângulos de hélice. Para grandes variações de ângulos de hélice, a deformação linear do cabo,  $\epsilon$ , e o ângulo de rotação,  $\tau$ , são funções não-lineares da carga aplicada. A deformação axial do arame ou perna será dada pela relação entre os comprimentos inicial e final do elemento formado (arames formam pernas, pernas formam cabos):  $\epsilon = (\underline{h} - h) / h$ . A deformação rotacional,  $\beta$ , do arame ou perna será dada pela variação nos ângulos de rotação inicial e final do elemento formado (perna ou cabo):  $\beta = r (\underline{\theta} - \theta) / h$  onde  $\theta$  representa o ângulo total de rotação inicial, e  $\underline{\theta}$  representa o ângulo total de rotação final. A compatibilidade geométrica entre a deformação do elemento formado (perna ou cabo) com as deformações dos seus elementos formadores (arames ou pernas, respectivamente) permite escrever:

$$\epsilon = (1 + \xi) (\text{sen } \alpha / \text{sen } \underline{\alpha}) - 1 \quad (43)$$

onde  $\xi$  é a deformação de um dos elementos formadores (arames ou pernas). A deformação rotacional,  $\beta$ , será dada por:

$$\beta = r / h (\underline{h} / (r \tan \underline{\alpha}) - (h / (r \tan \alpha))) = r / \underline{r} (1 + \epsilon) (1 / \tan \underline{\alpha}) - (1 / \tan \alpha) \quad (44)$$

Tendo sido apresentadas as equações básicas para os elementos formadores (arames ou pernas), ou seja, para os elementos que efetivamente são enrolados helicoidalmente em torno de um núcleo qualquer, torna-se mais simples utilizar uma notação indicial, como a proposta por Phillips e Costello (1985), para facilitar a identificação do tipo do elemento a que determinado parâmetro se refere. Cada parâmetro pode ter um índice  $s$  ou dois índices  $si$ . O índice  $s$  designa o número de identificação da camada de pernas (cujo número de pernas pode variar de 1 até o  $n^\circ$  de pernas da camada de pernas  $s$ ). O índice  $i$  designa o número de identificação da camada de arames (cujo  $n^\circ$  de arames pode variar de 1 até o  $n^\circ$  de arames da camada de arames  $i$ ). As quantidades sem índice fazem referência ao cabo, propriamente dito (Figs. 9 e 10).

## Análise de uma perna reta

Supondo uma perna reta, composta de 1 arame central e 6 arames externos, conforme mostra a Fig. 9. Considerando a perna 1, desta Figura, carregada com força  $F$  e momento de torção  $M$ . Se  $p_{12}$  for o passo dos arames externos, o ângulo de hélice correspondente será dado pela expressão:  $\alpha_{12} = \text{arc tan } p_{12} / (2\pi r_{12})$  onde  $r_{12}$  é o raio de hélice dos arames externos. As curvaturas e ângulos de torção para esse arame serão dados por:

$$k_{12} = 0, \quad k_{12}' = \cos^3 \alpha_{12} / r_{12} \quad \text{e} \quad \tau_{12} = \text{sen } \alpha_{12} \cos \alpha_{12} / r_{12} \quad (45)$$

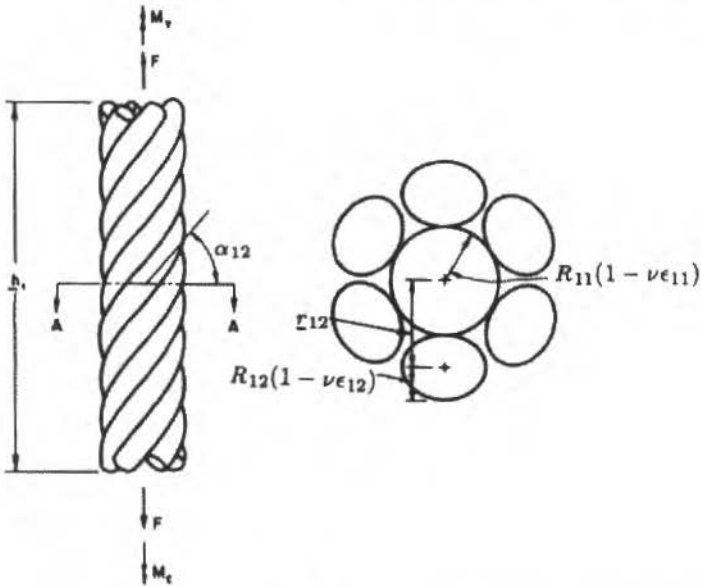


Fig. 9 Perna simples

Como o arame central apresenta-se reto, não existe curvatura; mas somente ângulo de torção  $\tau_{11}$ , que se confunde com o ângulo de torção da perna  $\tau_1$ . Se  $h_1$  e  $\underline{h}_1$  são os comprimentos inicial e final da perna 1, respectivamente, a deformação rotacional do arame 12,  $\beta_{12}$ , é definida por

$$\beta_{12} = r_{12} (\underline{\theta}_{12} - \theta_{12}) / h_1 \quad (46)$$

onde  $\theta_{12}$  e  $\underline{\theta}_{12}$  são os ângulos de rotação dos arames externos inicial e final. O ângulo de torção por unidade de comprimento da perna 1 e a deformação axial são definidas por:

$$\tau_1 = (\underline{\theta}_{12} - \theta_{12}) / \underline{h}_1 \quad (47)$$

$$\epsilon_1 = (\underline{h}_1 - h_1) / h_1 = \epsilon_{11} = (1 + \epsilon_{12}) (\text{sen } \underline{\alpha}_{12} / \text{sen } \alpha_{12}) - 1 \quad (48)$$

onde  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$  são as deformações axiais da perna 1, arame 11 e arame 12, respectivamente. Pode-se observar que, a deformação axial do arame central 11 se confunde com a deformação axial da perna 1. A deformação rotacional pode representada por:

$$\beta_{12} = r_{12} \tau_1 = r_{12} / r_{12} (1 + \epsilon_{11}) / \tan \underline{\alpha}_{12} - (1 / \tan \alpha_{12}) \quad (49)$$

As expressões (48) e (49) são as equações de compatibilidade geométrica de deformações entre perna e arames e permitem determinar a deformação axial da perna. Expressões similares são usadas para relacionar deformações entre pernas e cabo. Uma diferença básica entre a teoria de cabos de aço e a teoria de molas helicoidais é o fato de que as molas, em geral, apresentam pequenos ângulos de hélices e grandes variações de ângulos de hélice. No caso de cabos de aço os ângulos de hélice são grandes em geral, enquanto suas variações são muito pequenas. Chamando de  $\Delta\alpha$  as variações nos ângulos de hélice de um arame ou perna, poderemos afirmar que:  $|\Delta\alpha| = |\underline{\alpha} - \alpha| \approx 0$ . Logo  $\text{sen } \underline{\alpha} = \text{sen}(\alpha + \Delta\alpha) = \text{sen } \alpha + \Delta\alpha \cos \alpha$ . Esta foi uma das hipóteses simplificadoras introduzidas por Velinsky et al. (1984), que permitiu a aplicação desta teoria em cabos de aço de seção complexa. Aplicando este processo para as Eqs. (48) e (49) obteremos:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1 + \Delta\alpha_{12} / \tan \alpha_{12} = \epsilon_1 \quad (50)$$

$$\beta_{12} = r_{11} / r_{12} [ (1 + \varepsilon_{12}) / \tan \alpha_{12} - \Delta \alpha_{12} ] - (1 / \tan \alpha_{12}) \quad (51)$$

onde termos do tipo  $(\varepsilon + \Delta \alpha)$  foram desprezados em comparação com os termos lineares. O raio de hélice final do arame 12, devido ao efeito de Poisson pode ser expresso por:

$$r_{12} = R_{11} (1 - \nu \varepsilon_{11}) + R_{12} (1 - \nu \varepsilon_{12}) \quad (52)$$

onde  $R_{11}$  e  $R_{12}$  são os raios dos arames 11 e 12, de modo que:

$$r_{12} / r_{11} = 1 + \nu (R_{11} \varepsilon_{11} + R_{12} \varepsilon_{12}) / r_{11} \quad (53)$$

onde  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{12}$  são muito pequenos quando comparados à unidade. Com estas simplificações todos os termos não-lineares foram desprezados. Velinsky et al.(1984) chamam a este processo de "linearização". Linearizando as variações de curvatura  $\Delta k'_{12}$  e o ângulo de torção  $\Delta \tau_{12}$  teremos:

$$\Delta k'_{12} = - \Delta \alpha_{12} (2 \operatorname{sen} \alpha_{12} \alpha_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12}) / r_{12} + \nu (R_{11} \varepsilon_{11} + R_{12} \varepsilon_{12}) \operatorname{cos}^2 \alpha_{12} / r_{12}^2 \quad (54)$$

$$\Delta \tau_{12} = \Delta \alpha_{12} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{12}) / r_{12} + \nu (R_{11} \varepsilon_{11} + R_{12} \varepsilon_{12}) \operatorname{sen} \alpha_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12} / r_{12}^2 \quad (55)$$

$$G'_{12} / ER'_{12} = \pi R_{12} \Delta k'_{12} / 4 \quad (56)$$

$$H_{12} / ER'_{12} = \pi R_{12} \Delta \tau_{12} / 4 (1 + \nu) \quad (57)$$

$$N'_{12} / ER'_{12} = H_{12} \operatorname{cos}^2 \alpha_{12} / (ER'_{12} r_{12}) - G'_{12} \operatorname{sen} \alpha_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12} / (ER_{12} R_{12}) \quad (58)$$

$$X_{12} / ER_{12} = N'_{12} \operatorname{sen} \alpha_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12} / (E r_{12} R_{12}) - T_{12} \operatorname{cos}^2 \alpha_{12} / (E r_{12} R_{12}) \quad (59)$$

$$T_{12} / ER_{12}^2 = \pi \varepsilon_{12} \quad (60)$$

Projetando na direção axial da perna 1 as forças e momentos agindo nos arames 12, e fazendo um somatório das contribuições de todos os  $m_{12}$  arames (neste caso  $m_{12} = 6$ ), ficaremos com as seguintes expressões:

$$F_{12} / ER_{12}^2 = m_{12} [ T_{12} \operatorname{sen} \alpha_{12} + N'_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12} ] / ( ER_{12}^2 ) \quad (61)$$

$$M_{12} / ER_{12}^3 = m_{12} [ H_{12} \operatorname{sen} \alpha_{12} + G'_{12} \operatorname{cos} \alpha_{12} + (T_{12} r_{12} + N'_{12} r_{12}) / (R_{12} \operatorname{sen} \alpha_{12}) ] / ER_{12}^3$$

onde  $F_{12}$  e  $M_{12}$  são a força e o momento que atuam nos arames 12, na direção axial da perna 1. Para o arame 11 (arame central) teremos somente as expressões:

$$F_{11} / ER_{11}^2 = \pi \varepsilon_{11} \quad \text{e} \quad M_{11} / ER_{11}^3 = \pi / [4 (1 + \nu) R_{11} \tau_{11}] \quad (62)$$

a força e o momento total na perna 1 serão dados por:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \quad M_1 = M_{11} + M_{12} \quad (63)$$

Este procedimento pode ser utilizado para qualquer tipo de perna. Caso a perna possua  $n$  camadas, teremos que determinar a força e o momento atuantes em cada camada de arames, e em seguida fazer o somatório. A força e momento totais na perna serão dados por:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1n} \quad M_1 = M_{11} + M_{12} + M_{13} + \dots + M_{1n}$$

a força e momento totais numa perna podem ser expressos da seguinte forma:

$$F_x / (A_x E_x) = C_1 \varepsilon_x + C_2 \beta_x \quad M_x / (E_x I_x) = C_3 \varepsilon_x + C_4 \beta_x \quad (64)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes determinadas analiticamente para uma dada perna (também podendo serem calculadas para a alma ou o cabo). Podemos então definir o módulo efetivo  $E_e$  como sendo  $E_e = C_1 E$ , que é exatamente o módulo de elasticidade do elemento (perna, alma ou cabo) para  $\beta = 0$ . Essas constantes independem de  $E$ , mas são função da geometria do elemento e coeficiente de Poisson do material. Apesar do termo "constante do módulo efetivo" designar na realidade somente a constante  $C_1$ , utilizaremos este termo quando nos referirmos a todas as constantes. Para o cálculo de  $C_1$ ,  $C_2$ , considera-se primeiramente  $\beta_1 = 0$  (nenhuma rotação) e estima-se um valor para  $\varepsilon_1$ . Então,  $C_1$  e  $C_2$  serão dadas por:

$$C_1 = F_1 / (A_1 E \varepsilon_1) \quad C_2 = M_1 / (E I_1 \varepsilon_1) \quad (65)$$

Para o cálculo de  $C_3$ ,  $C_4$  considera-se  $\varepsilon_1 = 0$  (nenhuma tração) e estima-se  $\beta_1$ . Encontra-se novos  $F_1$  e  $M_1$ , onde

$$C_3 = F_1 / (\Delta E \beta_1) \quad C_4 = M_1 / (E I_1 \beta_1) \quad (66)$$

## Análise da Alma do Cabo de Aço (IWRC)

Tomemos a perna 1 e enrolemos em torno dela uma perna 2, com passo  $p_2$ . Formaremos desta forma um cabo de aço simples, que normalmente é usado como núcleo de cabos mais complexos, este núcleo é chamado de alma interna de cabo de aço (IWRC), Fig. 10. A análise deste núcleo será similar à da perna 1, sendo que a perna 2 vai ser enrolada helicoidalmente, da mesma forma que o arame 12, no caso anterior. As equações básicas de compatibilidade são:

$$\varepsilon_{Alma} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \Delta\alpha_2 / \tan \alpha_2 \quad (67)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} + \Delta\alpha_{21} / \tan \alpha_{21} \quad (68)$$

$$r_1 \tau_{Alma} = \varepsilon_{21} / \tan \alpha_{21} - \Delta\alpha_2 + v(R_{11} \varepsilon_{11} + 2R_{12} \varepsilon_{12} + 2R_{22} \varepsilon_{22} + R_{21} \varepsilon_{21}) / (r_2 \tan \alpha_{12}) \quad (69)$$

$$r_1 \Delta\tau_{12} = \varepsilon_{22} / \tan \alpha_{22} - \Delta\alpha_{21} + v(R_{21} \varepsilon_{21} + R_{22} \varepsilon_{22}) / (r_2 \tan \alpha_{22}) \quad (70)$$

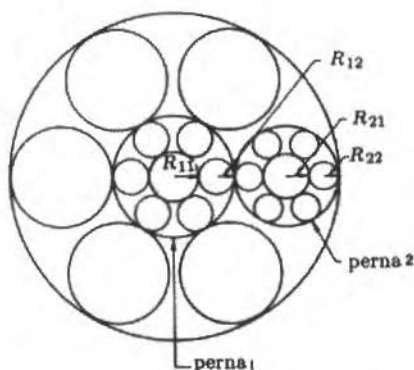


Fig. 10 Configurações de uma alma de aço (IWRC)

É importante notar que temos agora 4 equações de compatibilidade e não apenas 2, como no caso da perna 1. Além da compatibilidade a nível de alma, também foi necessário impor uma compatibilidade a nível da perna 2, dada pelas equações acima. Para o caso de  $n$  camadas de arames na perna 2, seriam necessários  $n$  conjuntos de equações de compatibilidade de deformação axiais e rotacionais, entre perna 2 e cada uma das  $n$  camadas de arames. A variação da curvatura fica desta forma:

$$\Delta k_2 = \nu c \cos^2 \alpha_2 (R_{11} \epsilon_{11} + 2R_{12} \epsilon_{12} + 2R_{22} \epsilon_{22} + R_{31} \epsilon_{31}) / (r_2)^2 - (2 \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_2 \Delta \alpha_2) / r_2 \quad (71)$$

Usando a equação anterior e a rigidez flexural da perna 2, teremos o momento fletor  $G_2'$ :

$$G_2' = A_2^* \Delta k_2, \quad \text{onde} \quad A_2^* = (G \pi R_{22}^4 / 4) (2 \text{sen} \alpha_2 / (2 + \nu \cos^2 \alpha_2) + \pi E R_{21}^4 / 4) \quad (72)$$

Utilizando as constantes do módulo efetivo da perna 2, calcularemos  $T_2$  e  $H_2$  tração e momento de torção na perna 2.

$$T_2 / A_2 E = {}_2C_1 \epsilon_2 + {}_2C_2 \beta_2 \quad (73)$$

$$H_2 / E R_2^3 = {}_2C_3 \epsilon_2 + {}_2C_4 \beta_2 \quad (74)$$

Lembrar que  $A_2 = \sum \pi R_{2s}^2$ , onde  $R_{2s}$  é o raio dos arames individuais e  $s = 2$ . Estamos supondo que as seções dos arames são circulares e não elípticas. O cortante  $N_2$ , a força  $F_2$ , e o momento torçor  $M_2$ , na perna 2 são dados por:

$$N_2' = (H_2 \cos^2 \alpha_2) / r_2^2 - (G_2' \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_2) / r_2$$

$$F_2 = m_2 (T_2 \text{sen} \alpha_2 + N_2 \cos \alpha_2) \quad (75)$$

$$M_2 = m_2 (H_2 \text{sen} \alpha_2 + G_2' \cos \alpha_2 + T_2 r_2 \cos \alpha_2 - N_2' \text{sen} \alpha_2)$$

Logo:

$$F_{\text{Alma}} = F_1 + F_2 \quad M_{\text{Alma}} = M_1 + M_2 \quad (76)$$

onde  $F_1$  e  $M_1$  são calculados como descrito anteriormente. O cálculo das constantes do módulo efetivo para a alma é idêntico ao da perna 1 e perna 2. Os esforços na alma são expressos por:

$$F_{\text{Alma}} / (A_{\text{Alma}} E) = {}_{\text{Alma}}C_1 \epsilon_{\text{Alma}} + {}_{\text{Alma}}C_2 \beta_{\text{Alma}}$$

$$M_{\text{Alma}} / (E R_{\text{Alma}}^3) = {}_{\text{Alma}}C_3 \epsilon_{\text{Alma}} + {}_{\text{Alma}}C_4 \beta_{\text{Alma}} \quad (77)$$

Para o cálculo de  ${}_{\text{Alma}}C_1$ ,  ${}_{\text{Alma}}C_2$ ,  ${}_{\text{Alma}}C_3$ ,  ${}_{\text{Alma}}C_4$  executa-se procedimento análogo ao utilizado para o cálculo das constantes da perna 1, tem-se então:

$${}_{\text{Alma}}C_1 = F_{\text{Alma}} / (A_{\text{Alma}} E \epsilon_{\text{Alma}}) \quad {}_{\text{Alma}}C_2 = F_{\text{Alma}} / (A_{\text{Alma}} E \beta_{\text{Alma}})$$

$${}_{\text{Alma}}C_3 = M_{\text{Alma}} / (E R_{\text{Alma}}^3 \epsilon_{\text{Alma}}) \quad {}_{\text{Alma}}C_4 = M_{\text{Alma}} / (E R_{\text{Alma}}^3 \beta_{\text{Alma}}) \quad (78)$$

## Análise de um Cabo com Alma

O cabo nada mais é do que um núcleo (a alma) envolvida por uma outra perna (perna 3). Fazendo-se uma analogia com os casos anteriores (perna e alma), encontra-se os esforços  $F_{\text{cabo}}$  e  $M_{\text{cabo}}$  e finalmente as constantes do módulo efetivo para o cabo:

$$F_{\text{Cabo}} = F_{\text{Alma}} + F_3$$

$$M_{\text{Cabo}} = M_{\text{Alma}} + M_1$$

$${}_{\text{cabo}}C1 = F_{\text{Cabo}} / (A_{\text{Cabo}} E \epsilon_{\text{Cabo}}) \quad (79)$$

$${}_{\text{cabo}}C3 = M_{\text{Cabo}} / (ER^3_{\text{Cabo}} \epsilon_{\text{Cabo}})$$

$${}_{\text{cabo}}C2 = F_{\text{Cabo}} / (A_{\text{Cabo}} E \beta_{\text{Cabo}})$$

$${}_{\text{cabo}}C4 = M_{\text{Cabo}} / (ER^3_{\text{Cabo}} \beta_{\text{Cabo}})$$

Este desenvolvimento permite resolver um cabo de aço e foi implementado em um programa em Turbo Pascal 5.0, que possibilita a análise de um cabo a partir do seu carregamento e das condições de contorno (restrições a deslocamentos das extremidades, dobramentos, torções ao longo do cabo, etc). Todos os passos deste programa, bem como exemplos ilustrando as técnicas numéricas empregadas para lidar com cada aspecto mais complexo da implementação, é detalhadamente comentados em Silva (1992). As principais etapas desta implementação são apresentado no apêndice.

## Exemplos

Visando mostrar a aplicabilidade do programa implementado na solução de problemas envolvendo cabos de aço de geometrias complexas sob carregamentos complexos alguns exemplos usando cabos 6x25 Filler-Wire, 6x19 Warrington e Seale sob diversos carregamentos usuais são apresentados. A partir do carregamento e das características do cabo (veja apêndice) e de suas características elásticas obtém-se pelo programa os esforços, deformações, deslocamentos e forças em cada arame, perna ou em todo o cabo.

Como primeiro exemplo, a Tabela 1 compara as constantes de módulo efetivo (Eqs. 73,74,78 e 79) obtidas pelo programa e as reportadas em Costello (1990) para cabos 6x19 Seale - IWRC. As constantes  $iC_i$  são independentes do módulo de elasticidade, mas funções do ângulo de hélice, das razões "raio do arame externo/raio do arame interno das pernas" e do coeficiente de Poisson. Como pode ser verificado o maior erro encontrado foi de 5,8%.

Tabela 1 Comparação das constantes do módulo efetivo para o cabo Seale 6 x 19.

Constantes		Costello (1990)	Programa desenvolvido	Erro
Perna 1	$C_1$	0.8864	0,8864	0.0
	$C_2$	0.1436	0,1436	0.0
	$C_3$	0.3189	0,3189	0.0
	$C_4$	0.1182	0,1182	0.0
Perna 2	$C_1$	0.9642	0,9642	0.0
	$C_2$	0.0853	0,0853	0.0
	$C_3$	0.1928	0,1928	0.0
	$C_4$	0.0721	0,0721	0.0
Perna 3	$C_1$	0.8295	0,8430	1,6%
	$C_2$	0.1765	0,1799	1,9%
	$C_3$	-0.4240	-0,4148	2,8%
	$C_4$	0.1480	0,1394	5,8%
Alma	$C_1$	0.7984	0,7984	0.0
	$C_2$	0.1799	0,1799	0.0
	$C_3$	0.3092	0,3092	0.0
	$C_4$	0.0840	0,0840	0.0
Cabo	$C_1$	0.7020	0,6929	1,3%
	$C_2$	0.1232	0,1212	1,6%
	$C_3$	0.2060	0,2029	1,5%
	$C_4$	0.0403	0,0403	0.0

O segundo exemplo, Figs. 11 a 13, trata de mostrar como é a distribuição do carregamento nos elementos dos três tipos de cabos sob tensão de tração.

Como terceiro teste analisa-se (Figs. 14 a 16) a variação do momento dos cabos com a deformação axial para diferentes ângulos de torção, em função da maneira como a última camada é enrolada. Observando os gráficos de momentos normalizados no cabo contra deformação axial, nota-se principalmente que a rigidez do cabo não varia significativamente com a torção. Em Silva(1992) é feita análise semelhante considerando a força, observa-se que o módulo efetivo do cabo não se altera com a mudança na torção. A mudança do lado para o qual a perna é enrolada não altera significativamente a rigidez do cabo. O cabo Seale apresenta menor variação que os demais.

#### FILLER 6X25

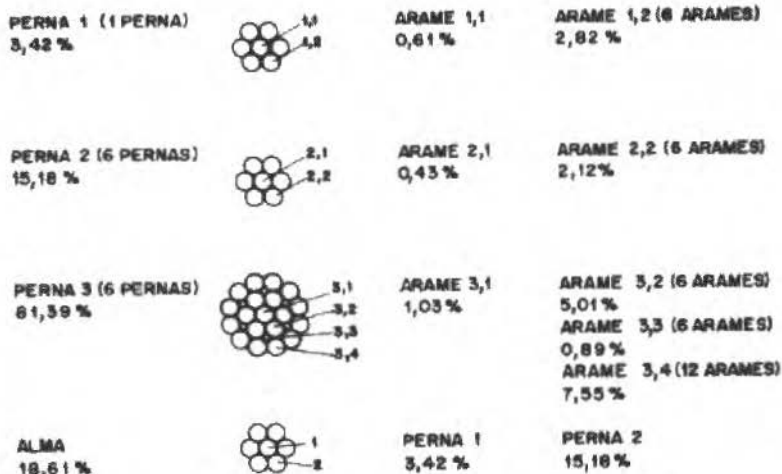


Fig. 11 Distribuição de carregamento em cabos Filler-Wire

#### WARRINGTON 6X19

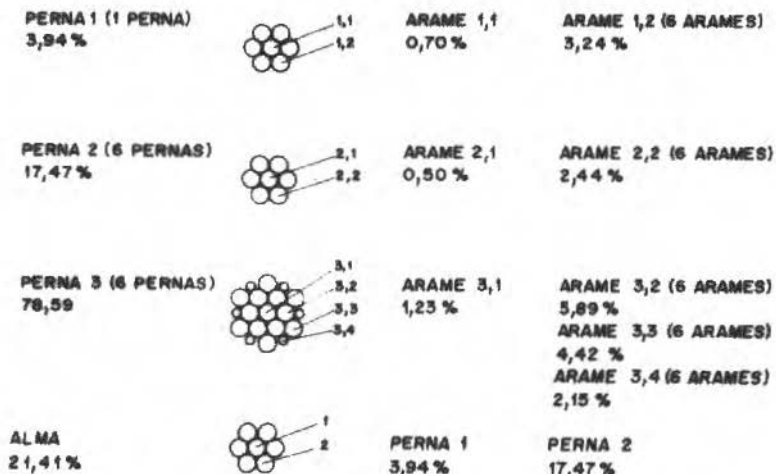


Fig. 12 Distribuição de carregamento em cabos Warrington

## SEALE 6X19

PERNA 1 (1 PERNA)  
3,31 %



ARAME 1,1  
0,62 %

ARAME 1,2 (6 ARAMES)  
2,69 %

PERNA 2 (6 PERNAS)  
13,83 %



ARAME 2,1  
0,41 %

ARAME 2,2 (6 ARAMES)  
2,02 %

PERNA 3 (6 PERNAS)  
82,87 %



ARAME 3,1  
1,76 %

ARAME 3,2 (9 ARAMES)  
3,48 %  
ARAME 3,3 (9 ARAMES)  
9,86 %

ALMA  
17,13 %

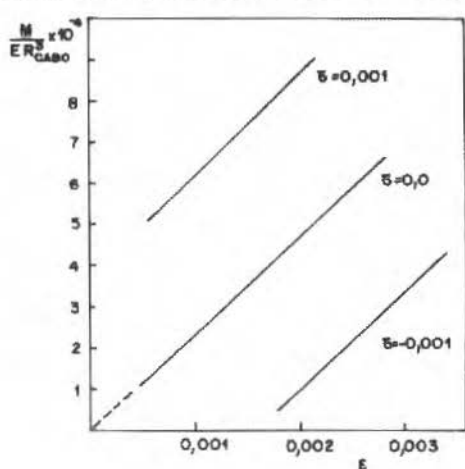


PERNA 1  
3,31 %

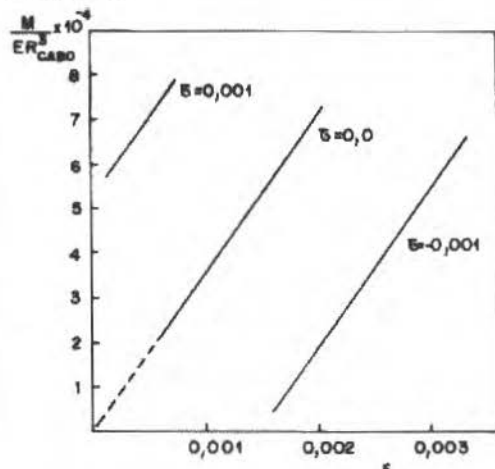
PERNA 2  
13,83 %

Fig. 13 Distribuição de carregamento em cabos Seale

Como quarto tipo de exemplo, verifica-se a variação da tensão nos arames de cabos quando submetidos a flexão. Simula-se o comportamento do cabo na passagem por uma roldanas ou tambor de diâmetro  $D$ . Ao passar por estes elementos tensões de tração, torção e flexão são induzidas nos arames. Foram plotados os gráficos mostrados nas Figs. 16 e 17 que representam os valores de  $\sigma_{MAX}/\sigma_{NOM} \times (D/d)$  /  $\sigma_{NOM} / E_{CORDE}$ , onde  $d$  é o diâmetro do cabo, em cabos Filler (Fig. 16) e Warrington (Fig. 17). Na Figura 16 são também representados os resultados reportados por Costello(1990) para a mesma seção. Em Silva e Conci(1993) é apresentada comparações semelhantes para seções Seale. Não encontrou-se na literatura análise semelhante para seções Warrington (Fig. 18). Outras análises e comparações com Phillips e Costello(1985) podem ser encontradas em Conci e Silva(1997).



Torção Esquerda



Torção Direita

Fig. 14 Força normalizada x Deformação axial- Filler



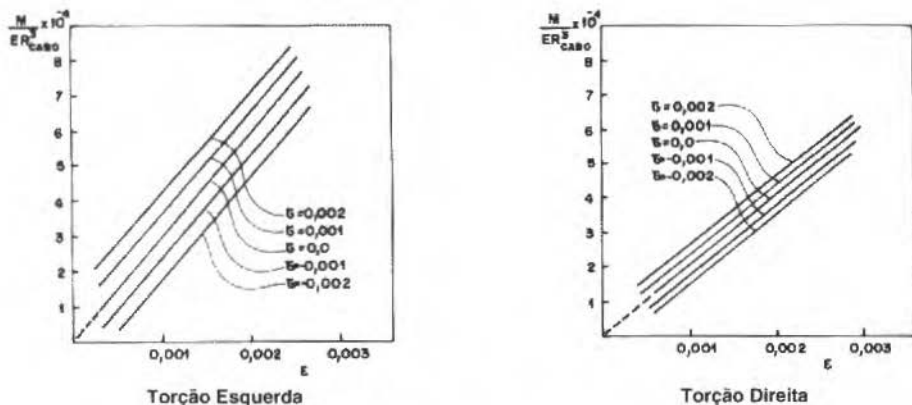


Fig. 15 Força normalizada x Deformação axial- Seale

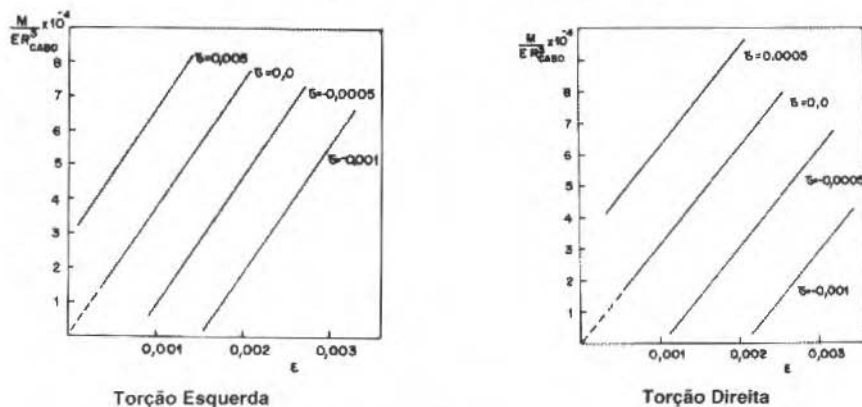


Fig. 16 Força normalizada x Deformação axial- Warrington

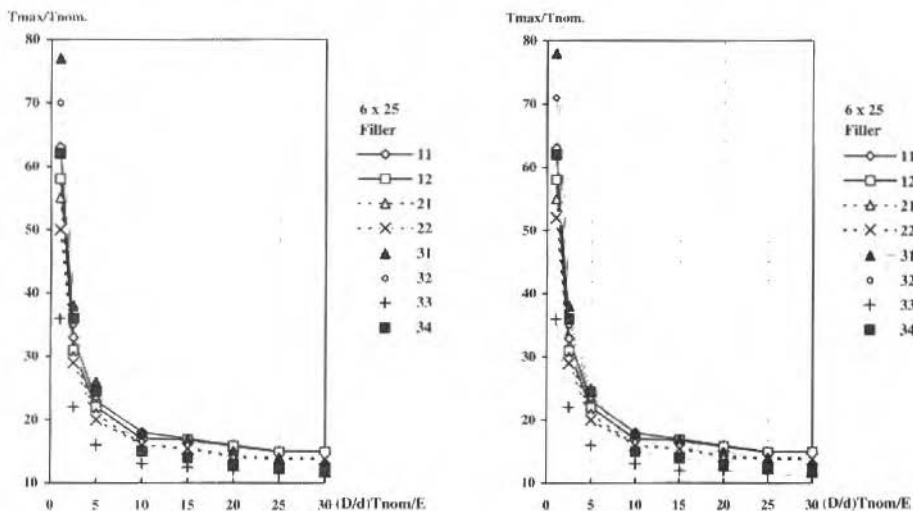


Fig. 17 Tensão nos arames de seções Filler como função da carga e curvatura

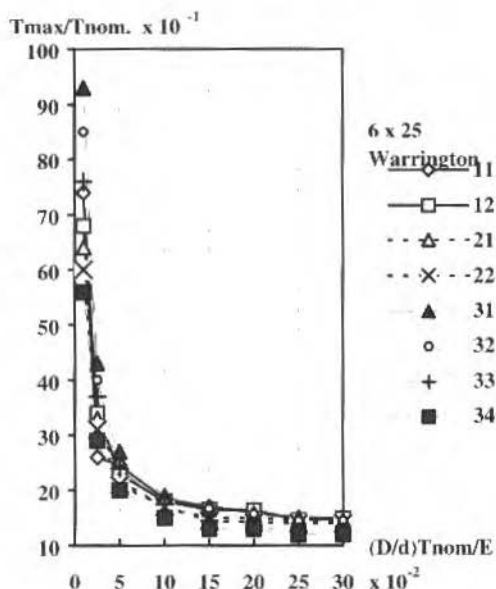


Fig. 18 Tensão nos arames de cabos Warrington em função da carga e curvatura

## Conclusão

Foi apresentado um modelo para a análise de cabo que permite uma implementação bastante mais simples que as usuais e muito eficiente. As diversas comparações e exemplos apresentados mostram que a implementação proposta apresenta bons resultados. Os arames com maiores coeficientes de tração são os centrais. Observando as distribuições da carga nos elementos dos cabos, verificou-se que em todos os casos é a perna externa que recebe a maior parte da carga (aproximadamente 80%). Percebe-se então, porque a função da alma de aço é principalmente servir de suporte para a camada externa de pernas e não para aumentar a resistência à flexão ou tração do cabo. Outra observação relevante diz respeito ao aumento na força de tração do cabo com a aplicação de rotações no sentido de sua torção: quanto mais torcido o cabo no sentido da torção (direita ou esquerda) maior a força total do cabo. Uma sugestão para o prosseguimento do trabalho seria uma análise experimental que comprovasse o processo de cálculo. Tomando uma amostra real de cabo após fazer um levantamento dimensional (diâmetro dos arames, passo dos arames e pernas), ensaiar o cabo (vários corpos de prova) sob variadas condições de contorno e executar o programa com esse dados para comparar o resultado do programa com o obtido experimentalmente.

## Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio do projeto FINEP/RECOPE SAGE #0626/96 e CNPq ref.:302649/87-5.

## Referências

- Bert, C.W. e Stein, R.A., 1962, "Stress Analysis of Wire Rope in Tension and Torsion", Wire e Wire Products, 37, (5), 621-624, (6), 769-770, 772-816.
- Conci, A., Silva, W.F., 1997, "Nonlinear Tension Analysis of Wire Rope", Anais do V Pan American Congress of Applied Mechanics - PACAM - Puerto Rico USA, 2-4, Jan., Edited by L.A. Godoy, M. Rysz, L. E. Soares, vol. 4: Mechanics and Dynamics of Solids, pp. 119-122.
- Costello, G.A., 1990, Theory of Wire Rope, New York, Springer Verlag.

- Costello, G. A. e Phillips, J. W., 1976. "Effective Modulus of Twisted Wire Cables, Proceedings ASCE, Journal Engineering Mechanical Division, 102 (no. EM1), 171-181.
- Costello, G.A. e Sinha, S. K., 1977a. "Torsional Stiffness of Twisted Wire Cables", Proceedings ASCE, Journal Engineering Mechanical Division., 103 (no. EM4), 766-770.
- Costello, G.A. e Sinha, S.K., 1977b. "Static Behaviour of Wire Ropes", Proceedings ASCE, Journal Engineering Mechanical Division., 103 (no. EM6), 1011-1022.
- Drucker, D.C. e Tachau, H.A., 1945. "New Design Criterion for Wire Rope", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 67, A-887, A-88.
- Durelli, A.J. Machida, S. e Parks, V.J., 1972. "Strains and Displacements on a Steel Wire Strand", Naval Engineers Journal, 84, (6), 85-93.
- Hall, H.M., 1961. "On the Stresses in Small Wire Ropes", Wire e Wire Products, 26, 766-767, 799-801.
- Hruska, F.H., 1952. "Radial Forces in Wire Ropes", Wire e Wire Products, 27, 459-463.
- Hruska, F.H., 1953. "Tangential Forces in Wire Ropes", Wire e Wire Products, 28, 455-460.
- Le Clair, R.A e Costello, G.A., 1988. "Axial Bending e Torsional Loading of a Strand With Friction", Journal of Off Shore Mechanics and Artic Engineering, Trans. ASME, 110, 38-42
- Leissa, A.W., 1959. "Contact Stresses in Wire Ropes", Wire and Wire Products, 34, 307-314, 872-873.
- Love, A.E.H., 1944. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, New York: Dover Publications
- Phillips, J.W. e Costello, G.A., 1973. "Contact Stresses in Twisted Wire Cables", Proceedings ASCE, Journal Eng. Mech. Div., 99 (no. EM2), 81-841.
- Phillips, J.W. e Costello, G.A., 1977. "Axial Impact of Twisted Wire Cables", Journal of Applied Mechanics, Trans. American Society of Mechanical Engineers, 44, 127-131.
- Phillips, J.W. e Costello, G.A., 1985. "Analysis of Wire Internal Wire Rope Cores", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 107, 510-576
- Silva, W.F. e Conci, A., 1993. "Análise de Tensões em Cabos de Aço de Geometria Complexa". Anais do XII COBEM: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 1359-1362.
- Silva, W.F., 1982. "Análise Teórica de Cabos de Aço de Seção Complexa", Dissertação de Mestrado, DEM, PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- Starkey, W.L. e Cress, H.A., 1959. "An Analysis of Critical Stresses and Mode of Failure of a Wire Rope", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME 81, 807-816.
- Suslov, B.M., 1986. "On the Modulus of Elasticity of Wire Ropes", Wire and Wire Products, 11, 76-182.
- Velinsky, S. A., Anderson, G.I., e Costello, G.A., 1984. "Wire Rope With Complex Cross Section", Journal of Engineering Mechanics, Trans. ASME, 110 (8), 880-891.

## Apêndice

Os itens 1 a 5 abaixo descrevem as etapas principais da implementação do programa de análise de cabos desenvolvido.

### Dados de entrada

O programa deve considerar os seguintes dados:

#### a) Dados geométricos

- Tipo de construção (ver fig. 1)
- Número de camadas de pernas
- Número de camadas de arames em cada perna
- Raio dos arames
- Passo de hélice de cada perna
- Passo de hélice de cada arame

#### b) Dados do material dos arames

- Módulo de elasticidade
- Coeficiente de Poisson

## Cálculo dos parâmetros geométricos secundários

Parâmetros Geométricos Secundários são calculados a partir dos dados de entrada.

- a) Raios de hélice
- b) Ângulo de hélice
- c) Raios das pernas, alma e cabo
- d) áreas sólidas
- f) Rigidez flexural das pernas

## Cálculo das constantes de módulo efetivo das pernas, alma e cabo: $\rho_j$

Utilizou-se uma rotina de geração genérica de matrizes e os sistema resolvidos por eliminação Gaussiana, foram utilizadas as equações constitutivas e as equações de compatibilidade de deformação axial e rotacional (Silva,1992).

## Cálculo de esforços nos arames e nas pernas

Após calcular as constantes do módulo efetivo para todos os elementos do cabo, utilizando estimativa como dados iniciais, calculamos todos os esforços agindo em cada arame e em cada perna. Novamente são utilizadas as equações de compatibilidade, e os diversos sistemas de equações de tamanhos variados são resolvidos utilizando eliminação Gaussiana.

## Cálculo dos fatores de tensão ( Silva,1992)

É interessante observar que o número de equações de compatibilidade geométrica varia com o número de camadas de arames da última camada de perna, pois cada camada de arames "s" gera duas equações de compatibilidade de deformações axiais e rotacionais. É necessário, então, a criação de uma rotina que gere o sistema de equações para qualquer tipo de seção, tornando o programa completamente genérico. A montagem de uma matriz genérica eficiente de ordem  $2n \times 2n$  ( $n$  é o número de camadas de arame) é descrita em Silva(1992) bem como pequenas rotinas para cada tipo de característico de elemento dessas matrizes e da matriz de termos fixos.

## Abstract

**Munhoz, A. L. J., Wagner, P. R. S., Ierardi, M. C. F., Kiel, A. E. and Scarparo, M. A. F., 1998, "Optical and Thermal Parameters Characterization in CO<sub>2</sub> Laser Application in Thermosensitive Resins Using Stereolithography Processes", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20 No. 2, pp. 146-155.**

*We present a theoretical and experimental study of thermosensitive resins used in thermal stereolithography. In usual practice, stereolithography makes use of photosensitive resins where HeCd (0.352 $\mu$ m) laser ultraviolet light initiates the curing process. In this work we study the process of local curing through the application of infrared radiation, which has proved to be useful in a new technique for the making of prototypes by means of selective heating with CO<sub>2</sub> laser (10.6 $\mu$ m). The presented sample consists of a thermosensitive resins (epoxy) with the curing agent (diethylene triamine) and a filler (silica). The ideal composition of the thermosensitive resin has proved to be 10 parts epoxy, 1.4 part diethylene triamine (the curing agent) and 0.7 part of silica powder. A physical theoretical model is applied for control of the parameters which influence the confinement of the curing in the irradiated bulk. A mathematical model is applied too, and it was developed through the resolution of the heat conduction equation dependent on time, in cylindrical co-ordinates, which enables to determine the behaviour of curing in terms of irradiation conditions. An experimental analysis has determined the temperature band at which the curing process starts and the optimum silica concentration for efficient curing. The application of Differential Scanning Calorimeter (DSC) is discussed, since the experiments aimed to obtain the same results as those obtained through the thermal analysis method.*

**Keywords:** Thermosensitive Resins, Thermal Stereolithography, Prototype Production

**Saboya, F. E. M., and Costa, C. E. S. M., 1998, "Second Law Analysis For Balanced Heat Exchangers With Negligible Pressure Drop Irreversibility", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 156-163.**

*From the second law of Thermodynamics, the concepts of entropy generation and irreversibility are applied to counterflow, parallel flow and crossflow heat exchangers. In the analysis, the heat exchangers are assumed to be balanced, with negligible pressure drop irreversibility. In a balanced heat exchanger, the heat capacity rates are the same on the two sides of the heat transfer surface. The counterflow heat exchanger is compared with the other two types of heat exchangers and the comparison indicates which one has the minimum irreversibility. In this comparison, only the exit temperatures and the heat transfer rates of the heat exchangers are different. The other conditions (entrance temperatures, mass flow rates, number of transfer units) and the working fluids are the same in the heat exchangers.*

**Keywords:** Balanced Heat Exchanger, Irreversibility, Entropy Generation, Heat Capacity Rate

**Pires, A. C., Heitor, M. V. and Moreira, A. L. N., 1998, "On the Turbulent Transport Characteristics of Non Premixed Diffusion Flames in Mutual Interaction", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 164-178.**

*Turbulent transport in single and multiple jet flames in mutual interaction is studied through the analysis of 1 and 3 propane flames with a Reynolds number of 20400. The experiments included the combination of a laser velocimeter, operated in the backscatter mode, with digitally-compensated thermocouples and extend previously acquired knowledge on the analysis of flames in mutual interaction. Although the oxygen insufficiency is the controlling mechanism in the propagation of interacting flames, the present results quantify the extent to which turbulent transfer is altered in the interacting flame zone. The results show that turbulent mixing is affected as a consequence of changes in the mean flow characteristics, but the turbulent heat fluxes remain qualitatively unaltered at the level of flame interaction studied here, with single and multiple flames exhibiting zones of non-gradient turbulent heat transfer.*

**Keywords:** Combustion, Turbulence, Scalar Transport, Non Premixed Flame, Multiple Flames

**Cotta, R. M. and Leal, M. A., 1998, "The Generalized Integral Transform Technique in Transient Convection-Diffusion: Theory, Applications and Research Needs", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 179-200.**

*This paper reviews the solution of linear and nonlinear transient convection-diffusion problems with applications in heat and mass transfer. The Generalized Integral Transform Technique (GITT) is the basic tool behind such developments offering analytical or hybrid numerical-analytical solutions within user prescribed accuracy. A*

number of examples are selected from the available literature to illustrate the relative merits of this novel approach. Research needs are then identified and briefly discussed.

**Keywords:** Generalized Integral Transform Technique. Nonlinear Transient Convection-Diffusion Problems

**Maciel, E. S. G., Lima, F. R. A. and Lira, C. A. B. O., 1998, "Sensitivity Studies in a Simplified PWR-Hot-Channel Model Using Perturbation Theory by Matricial Formalism", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 201-218 (In Portuguese).**

The matricial formalism of the perturbation theory is applied in a simplified PWR-hot channel model to study the sensitivity of some punctual and average functionals. The model is described by mass, linear momentum and energy conservation equations and adequate heat transfer and fluid mechanics correlations. Every one is discretized along the channel height. Thermohydraulic calculations are carried out and stored to use in the matricial formalism. Sensitivity coefficients are determined for specific cases and comparisons between direct results and perturbative method have shown good agreement. The main advantages of the perturbative method are discussed and its importance to sensitivity analysis is emphasized.

**Keywords:** PWR-Hot Channel Model, Perturbation Theory, Matricial Formalism

**Ortiz, J. P., and Alonso, G. V., 1998, "Study of the Polyacrylamide Iqapol PA Influence on Drag Reduction in Turbulent Flow", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 219-232 (In Portuguese).**

The behavior of aqueous polyacrylamide solutions (Iqapol PA) in the reduction of viscous friction in turbulent pipe flow is experimentally analysed. Due to the polymer addition, a reduction of 30% can be verified in the Darcy friction factor  $f$  for values of the Reynolds number around  $Re \approx 5 \cdot 10^5$  and concentrations ( $C_\infty$ ) higher than 70 ppm (up to 110 ppm). An equation is presented for  $f$  as a function of the Reynolds number and the concentration, differing from experimental results 7-9% in average.

Two expressions of the literature are evaluated: the Vortinskaya's equation and the Tam's general correlation. A good agreement with the Vortinskaya's equation was obtained, with differences of about 10% in the range of the experiments carried out. However the Tam's general correlation does not apply for the conditions of the present study.

**Keywords:** Drag Reduction, Turbulence, Velocity Profiles, Polymer Solutions.

**Bismarck-Nasr, M. N., 1998, "On Comparing Theory and Experiment of Aerodynamic Forces and Moments on T-Tail Configurations", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 233-243.**

The present paper deals with the theoretical calculation of steady aerodynamic loads and moments on nonplanar lifting surfaces. The steady counterpart of the doublet lattice method is used in the analysis. Several numerical results are presented and these are compared with experimental findings. It is shown that the steady counterpart of the doublet lattice method, while being extremely cost efficient in terms of computation requirements, can predict with a high degree of precision the airloads and the aerodynamic coefficients for nonplanar lifting configurations.

**Keywords:** Nonplanar, Lifting Surfaces, Air Loads, Aerodynamic Coefficients.

**Cavalca, K. L., and Lima, E. N., 1998, "Non-Linear Analysis of Hidrodynamical Bearings in a Vertical Shaft", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 244-262 (In Portuguese).**

In a running rotor, bearings are of fundamental importance in defining its dynamic behaviour. Physically, the oil film viscous flow caused by the relative motion between the shaft and the bearing internal part builds up a pressure distribution on the rotor surface, yielding to non-linear hydrodynamic forces which are position and fluid condition dependent. In journal bearings. The knowledge of these forces is of fundamental importance in the analysis of the vibratory motion in mechanical equipments. This work consists in the presentation and the application of non-linear mathematical models that can represent hydrodynamic forces exerted by the oil film in bearings, which support a vertical flexible shaft in rotating machines. These non-linear forces are analytically evaluated based on the rotor shaft orbital position in the hydrodynamical bearings. These hydrodynamic forces, as well as those resulted from any eccentric unbalance, are the external excitation sources included in the system equation of motion. A particular characteristic of this method is the easy determination of the non-linear forces through an indirect solution for the pressure distribution integration. The dynamical behaviour of the system, due to external unbalancing forces, is analysed by means of the orbits, graphically plotted for some interesting running conditions. From the numerical analysis presented, the oil film whip phenomena as well as a limit cycle in cylindrical bearings for the orbits at

*different rotational speeds can be observed. Strong non-linearities can be observed in the tilting-pad bearings due to its variable geometry, analysing the tilt angle of the pads. The tilting pad bearing high stability can be noticed by the rotor frequency response and its orbit amplitudes in this type of bearings.*

**Keywords:** Hydrodynamical Bearings, Pressure Distribution, Vertical Flexible Shaft, Non-Linear Model

**Castro, J. T. P., Giassone, A. and Kenedi, P. P., 1998, "Fatigue Propagation of Superficial Semi and Quart-Elliptical Cracks in Wet Welds", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 263-277 (In Portuguese).**

*The mechanical properties of the base and of the wet weld metals used in offshore platforms were measured and used to model the fatigue propagation of the superficial semi-elliptical and of the corner quart-elliptical cracks. Both the tri-dimensional geometry of the cracks and the influence of the fatigue crack propagation threshold are explicitly considered, and the results are interpreted from the design and from the non-destructive inspection points of view.*

**Keywords:** Fatigue, Superficial Cracks, Wet Welds.

**Conci, A. and Silva W. F., 1998, "A Model for Analysis of Wire Rope with Complex Cross Section", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 20, No. 2, pp. 278-297 (In Portuguese).**

*The theoretical analysis of wire rope is rather complex. The analysis of a rope begins with a study of the deformation of a helical wire in a strand. By the deformation of all wires in a given strand, one determines the response of that strand. Again by the deformation of all strands in the rope, one determines the response of a rope. This model produces equations highly nonlinear. This work shows the steps of this development for a computer program implementation to analyze complex wire rope geometries. Using this, deformation and stress in ropes can be evaluated. The model can treat cables, having or not internal-wire-ropes cores, loaded in all combinations of load. Results and comparison are given for Warrington, Seale and Filler-Wire constructions but they could be generated for other constructions.*

**Keywords:** Wire Rope, Internal Wire-Rope Core, Cables, Complex Loading

**• Information for Authors****Prototyping Production**

- Optical and Thermal Parameters Characterization in CO<sub>2</sub> Laser Application on Thermosensitive Resins Using Stereolithography Processes André L. J. Munhoz, Paulo R. S. Wagner, Mana Clara Ierardi, Alvin E. Kiel and Marco A. F. Scarparo 145

**Thermodynamics**

- Second Law Analysis for Balanced Heat Exchangers with Negligible Pressure Drop Irreversibility Francisco Eduardo Mourão Saboya and Carlos Eduardo S. M. da Costa 156

**Combustion**

- On the Turbulent Transport Characteristics of Non-Premixed Jet Flames in Mutual Interaction A. Caldeira Pires and A. L. N. Moreira 164

**Computational Heat and Mass Transfer**

- The Generalized Integral Transform Technique in Transient Convection-Diffusion: Theory, Applications and Research Needs Renato M. Cotta and Marco A. Leal 179

**PWR-Hot Channel Model**

- Sensitivity Studies in a Simplified PWR-Hot Channel Model Using Perturbation Theory by Matricial Formalism (In Portuguese) Edisson Sávio de Goes Maciel, Fernando Roberto de Andrade Lima and Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lima 201

**Polymer Solution Turbulent Flow**

- Study of the Polyacrylamide (paapl) PA Influence on Drag Reduction in Turbulent Flow (In Portuguese) Jayme Pinto Ortiz and Guillermo Vilalta Alonso 219

**Aerodynamics Flow-Structure Interactions**

- On Comparing Theory and Experiment of Aerodynamic Forces and Moments on T-Tails Configurations Maher N. Bismarck-Nasr 233

**Hydrodynamical Bearings**

- Non-Linear Analysis of Hydrodynamical Bearings in a Vertical Shaft (In Portuguese) Katia Luochesi Cavalca and Everton Nogueira Lima 244

**Fatigue**

- Fatigue Propagation of Superficial Semi and Quart-Elliptical Cracks in Wet Welds (In Portuguese) Jaime Tupiassú Pinho de Castro, Adrian Giassone and Paulo Pedro Kenedi 263

**Wire Rope**

- A Model for Analysis of Wire Rope with Complex Cross Section (In Portuguese) Aura Conci and Wilson Ferreira da Silva 278

**Errata on a Paper by S. Sebben** 262

**Abstracts - Vol. 20 - No. 2 - June 1998** 298